ممیزی سری‌های زمانی با استفاده از برآورد تابع درستنمایی ضرایب موجک‌های گسسته

بهزاد منصوری[1] و رحیم چینی‌پرداز

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۹۲/۴/۱۲ تاریخ پذیرش: ۹۳/۲/۱۰

چکیده: در این مقاله نسبت درستنمایی توابع چگالی دو جامعه نرمال با استفاده از تبدیل موجکی گسسته تقریب زده‌شده و یک معیار ناپارامتری برای ممیزی مدل‌های سری‌های زمانی ایستا در حوزه موجک‌ها پیشنهاد شده است. سپس با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی کارایی معیار به‌دست آمده در ممیزی نمونه‌های مختلف ARMA نشان داده شده است. عدم نیاز به مدل بندی پارامتری، سرعت محاسبات برای سری‌های زمانی بزرگ و نرخ خطای ممیزی پایین از ویژگی‌های معیار ممیزی موجکی است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل موجک گسسته، نسبت درستنمایی، ممیزی سری‌های زمانی، مدل‌های ARMA.

رده‌بندی ریاضی: ۳۷M۱۰، ۶۲M۳۰.

۱- مقدمه

در چند دهه گذشته، آنالیز ممیزی سری‌های زمانی از جمله مباحث آماری جالب برای محققین بوده است و کاربردهای وسیعی در علومی مانند مهندسی، زمین‌شناسی، پزشکی، اقتصاد، علوم رفتاری و غیره یافته است. بعضی از این کاربردها در [۱] لیست شده‌اند. روش‌های متعددی برای ممیزی سری‌های زمانی در دو بخش حوزه زمان و حوزه فرکانس، در مقالات مختلف مطرح شده‌اند. در بیشتر این مقالات تابع ممیزی با استفاده از روش نسبت درستنمایی و یا ماکسیمم کردن فاصله‌هایی مانند کولبک-لیبلر، باتاچاریا و چرنوف به‌دست آمده است. در حوزه زمان نسبت لگاریتم درستنمایی توابع چگالی دو جامعه منجر به تابع درجه دومی می‌شود که دارای توزیع پیچیده‌ای است. محاسبات مربوط به ممیزی سری‌های زمانی در این حوزه نیاز به

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: بهزاد منصوری b.mansouri@scu.ac.ir

اعمالی مانند حاصل‌ضرب ماتریس‌ها و عکس ماتریس‌ها دارد. در این حالت تابع ممیزی به‌صورت تحلیلی به‌دست نمی‌آید و باید با روش عددی و تقریبی محاسبه گردد. چون ماتریس‌های کواریانس سری‌های زمانی دارای ابعاد بزرگ هستند روش‌های عددی نیز جوابگوی خوبی برای مسئله نیستند. تابع ممیزی تحلیلی تقریبی برای حالت خاص ممیزی بین دو سری زمانی اتورگرسیو (AR) توسط چان [۲] و برای ممیزی بین دو سری زمانی اتورگرسیو میانگین متحرک (ARMA) توسط چان و همکاران [۳] به‌دست آمده است. توسعه این کار توسط چینی‌پرداز [۴] در اتورگرسیو مرتبه اول همراه با یک اغتشاش و به وسیله منصوری و همکاران [۵] در اتورگرسیو مرتبه p همراه با یک اغتشاش نشان داده شده است. چینی‌پرداز و کاکس [۶] ممیزی سری‌های زمانی را به روش ناپارمتری در حوزه زمان انجام دادند.

در حوزه طیفی سری‌های زمانی، آنالیز ممیزی با استفاده از تقریب‌های طیفی دنبال می‌شود. لیگت در [۷] برای به‌دست آوردن تابع ممیزی از روش طیفی استفاده نمود. وی حالتی را در نظر گرفت که میانگین‌های دو جامعه برابر باشند و با استفاده از تقریب‌های طیفی به ممیزی بین سری‌های زمانی پرداخت. شاموی و آنگر در [۸] با استفاده از معیار اطلاع ممیزی کولبک – لیبلر، بهترین توابع ممیزی خطی را برای ممیزی بین دو فرایند ایستای نرمال زمانی که میانگین‌های دو فرآیند برابر هستند، فراهم نمودند. از دیگر افرادی که در زمینه آنالیز ممیزی در حوزه طیفی سری‌های زمانی مطالعه کردند می‌توان به آلاگارسون [۹]، درگاهی-نوبری [۱۰] درگاهی- نوبری و لی‌کاک [۱۱]، کاکیزاوا و دیگران [۱۲] و شاموی [۱۳] اشاره کرد.

برخلاف تبدیلات فوریه گسسته که داده‌های اولیه را از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال می‌دهند؛ موجک‌ها تبدیل‌هایی هستند که داده‌ها را از حوزه زمان به حوزه زمان– فرکانس انتقال می‌دهند و امکان تحلیل داده‌های سری‌های زمانی را به‌طور همزمان در حوزه زمان و فرکانس فراهم می‌آورند. خواص جالب موجک‌ها را می‌توان در کتاب‌های مرجعی مانند [۱۴ و ۱۵] یافت. بسیاری از محققین نشان داده‌اند که موجک‌ها ابزار مناسبی برای تجزیه و تحلیل حوزه‌های مختلف علم آمار به‌خصوص سری‌های زمانی هستند و بر این اساس برخی محققین مانند مهاراجه و آلونسو [۱۶]، یا فریزلویز و اومباو [۱۷]، به ممیزی سری‌های زمانی با استفاده از موجک‌ها پرداختند.

تاکنون محققینی مانند مهارجه و آلونسو [۱۶] و فریزلویز و اومباو [۱۷] از کمیت‌هایی مانند واریانس موجک‌ها در سطوح بلوک‌بندی شده یا تابع طیف موجکی تکاملی[1] در ممیزی سری‌های زمانی استفاده کرده‌اند. در مقاله حاضر آنالیز ممیزی سری‌های زمانی بر اساس نسبت درستنمایی بین دو جامعه در حوزه موجک‌ها مطرح می‌شود. بدین صورت که ابتدا با پیش‌فرض

1- Evolutionary wavelet spectrum

این‌که جوامع مورد بررسی ایستای نرمال هستند تابع درستنمایی بردار سری زمانی بر پایه ضرایب موجک گسسته (DWT) به‌دست آمده و با استفاده از آن و به روش نسبت درستنمایی؛ معیارهای ممیزی خطی و درجه دوم در حوزه موجک‌ها تقریب زده شده و توانایی آن برای ممیزی مدل‌های سری‌های زمانی نشان داده شده است. نتایج به‌دست آمده با روش‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته اند. مقاله در شش بخش تنظیم شده است. در بخش دوم مفاهیم مربوط به سری‌های زمانی در حوزه موجک‌ها و برخی نتایج اساسی مطرح می‌شود. این بخش اگرچه حاوی نتایج جدیدی نیست اما زیربنای بخش‌های بعدی مقاله است. در بخش سوم تابع درستنمایی بردار سری زمانی با استفاده از ضرایب موجک گسسته به‌دست آمده است. در بخش چهارم آنالیز ممیزی سری‌های زمانی بر مبنای ضرایب موجک گسسته مورد بررسی قرارگرفته و معیاری ناپارامتری برای ممیزی مدل‌های مختلف سری‌های زمانی به‌دست آمده است. در بخش پنجم با روش شبیه‌سازی، توانای معیار ممیزی به‌دست آمده در ممیزی مدل‌های مختلف ARMA نشان داده شده است و سرانجام در بخش ششم، بخش نهایی، بحث و نتیجه گیری مطرح شده است.

۲- موجک‌ها در سری‌های زمانی

فرض کنیم $\mathbf{L}_{۲}(\mathbf{R})$ فضای تمام توابعی مانند f باشد به‌طوری که $f \in \mathbf{L}_{۲}(\mathbf{R})$، یعنی $\int |f|^{۲} < \infty$. در این صورت تبدیل موجکی پیوسته، منجر به نمایش انتگرالی توابع در فضای $\mathbf{L}_{۲}(\mathbf{R})$ می‌شود. تابع موجکی (موجک مادر)، خانواده‌ای از توابع مانند $\psi(x) \in \mathbf{L}_{۲}(\mathbf{R})$ هستند که در شرط روایی زیر صدق می‌کنند:

$$C_{\psi} = \int_{R} \frac{|\Psi(\omega)|^{۲}}{|\omega|} d\omega < \infty \qquad (۱)$$

که درآن $\Psi(\omega)$ تبدیل فوریه $\psi(x)$ است. با تبدیل مکان ($b \in R$) و مقیاس ($a \in R - \{۰\}$) تابع موجک به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\psi_{a,b}(x) \in \frac{۱}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-a}{b}\right). \qquad (۲)$$

تبدیل پیوسته موجکی تابع $f \in \mathbf{L}_{۲}(\mathbf{R})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CWT_f(a,b) = < f, \psi_{a,b} > = \int_{R} f(x) \bar{\psi}_{a,b}(x)\, dx \qquad (۳)$$

که در آن $\overline{\psi}_{a,b}(t)$ مزدوج مختلط $\psi_{a,b}(t)$ است. با استفاده از تبدیل معکوس زیر که بازیابی کالدرون نامیده می‌شود، می‌توان تابع تبدیل یافته را بازیابی نمود:

$$f(x)=\frac{1}{C_{\psi}}\int_{R} CWT_{f}(a,b)\psi_{a,b}(x)\frac{1}{a^{2}}dadb\,. \qquad (4)$$

در تبدیل موجکی پیوسته با جایگزینی پارامترهای مکان و مقیاس با مقادیر گسسته

$$a=2^{-j},\quad b=k2^{-j},\quad j,k\in Z \qquad (5)$$

تبدیل متناظر تابع موجکی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^{j}x-k),\quad j,k\in Z \qquad (6)$$

و تبدیل موجکی گسسته تابع $f\in \mathbf{L}_{2}(\mathbf{R})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DWT_{f}(j,k)=<f,\psi_{j,k}>=\int_{R} f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)\,dx \qquad (7)$$

که آن را با نماد $d_{j,k}$ نشان می‌دهند و به آن ضرایب موجکی می‌گویند. مجموعه $\{\psi_{j,k}(.),j,k\in Z\}$ یک پایه یکه متعامد برای فضای $\mathbf{L}_{2}(\mathbf{R})$ است؛ یعنی

$$<\psi_{j,k},\psi_{j',k'}>=\int \psi_{j,k}(x)\,\psi_{j',k'}(x)\,dx=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'} \qquad (8)$$

که در آن $\delta_{m,n}=1$ به ازای $m=n$ و $\delta_{m,n}=0$ به ازای $m\neq n$. بر این اساس نمایش موجکی تابع $f\in \mathbf{L}_{2}(\mathbf{R})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{j,k}\psi_{j,k}(x) \qquad (9)$$

که در آن خاصیت متعامد بودن موجک‌ها، یک محدودیت اضافی جهت انتخاب ψ ایجاد می‌کند و موجب می‌شود ضرایب $d_{j,k}$ برای هر $\psi_{j,k}$ی منحصربه‌فرد باشند.

حال فرض کنیم $\{X_{1},X_{2},\ldots,X_{T},\,T=2^{J},\,J\in Z\}$ یک سری زمانی ایستای مرتبه دو با تابع اتوکوواریانس $\gamma(t-s)=\gamma_{X}(X_{t},X_{s})=E\{(X_{t}-EX_{t})\,(X_{s}-EX_{s})\}$ باشد. همچنین فرض کنیم که $\sum_{h\in Z}(1+|h|)\,|\gamma(h)|<\infty$.

اورکامپ و هودری در [۱۸] نشان دادند که برای یک فرایند ایستای مرتبه دو X_t با تابع اتوکواریانس کران‌دار و پیوسته در R^2، مجموعه ضرایب موجک گسسته $\left\{d_{j,k}, j,k \in Z\right\}$ ایستای ضعیف است اگر و فقط اگر X_t فرایند ایستای ضعیف باشد. این مطلب ثابت می‌کند که اگر یک فرایند ایستای ضعیف باشد آنگاه ضرایب موجکی گسسته آن نیز ایستای ضعیف می‌باشند. اگر موجک دارای دامنه فشرده باشد، که غالب موجک‌ها چنین هستند، شرط کران دار بودن تابع اتوکواریانس را می‌توان کنار گذاشت.

حال فرض کنیم توابع γ و ψ چنان باشند که تبدیل فوریه آن‌ها متعلق به فضای هولدر C^p، $p > ۱$ ، باشد. والتر در [۱۹] نشان داد که ضرایب موجک گسسته $d_{j,k}$ و $d_{j',k'}$:

الف) ناهمبسته هستند هرگاه $|j - j'| > ۱$ باشد؛

ب) به‌طور دلخواه همبستگی ضعیف دارند هرگاه $|j - j'| = ۱$؛

ج) دارای همبستگی از مرتبه $O(|k-k'|^{-p})$ هستند هرگاه ضرایب در یک سطح باشند؛ یعنی $j = j'$.

نتایج فوق نشان می‌دهد که همبستگی بین سطحوح مختلف صفر و یا ناچیز است. همچنین در هر سطح خود همبستگی میان $d_{j,k}$ها به سرعت کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که ضرایب موجک گسسته در هر سطح غیر همبسته هستند. نتایجی که در این بخش به‌دست آمد زیربنای بخش بعدی این مقاله است. در بخش بعد تابع ممیزی ناپارامتری برای سری‌های زمانی ایستا بر پایه ضرایب موجکی گسسته به‌دست می‌آید.

۳- برآورد تابع درستنمایی بردار سری زمانی بر مبنای ضرایب موجک گسسته DWT

ضرایب موجک را معمولاً با استفاده از یک الگوریتم هرمی[1] به‌دست می‌آورند زیرا این الگوریتم از نظر تعداد عملیات و درنتیجه سرعت تولید ضرایب حتی از تبدیلات سریع فوریه[2] نیز بیشتر است[۱۵]. با وجود این می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{d} = \mathbf{W}\,\mathbf{X} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\mathbf{X}$ بردار مشاهدات اولیه و $\mathbf{d}$ بردار ضرایب موجک گسسته است. اگر طول بردار مشاهدات را $J \in Z$ ، $T = ۲^J$ در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbf{W}$ یک ماتریس متعامد $T \times T$ است[۱۵]. ماتریس $\mathbf{W}$ را می‌توان به‌صورت زیر افراز کرد:

1- Pyramidal Algorithm

2- Fast Fourier Transform

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_1\\ \mathbf{W}_2\\ \vdots\\ \mathbf{W}_J\end{bmatrix} \tag{11}$$

به‌طوری‌که $\mathbf{W}_j$ یک ماتریس با بعد $n_j\times T$ برای $j=1,2,\ldots,J$ است که ضرب آن در بردار $\mathbf{X}$ ضرایب موجک سطح j ام را تولید می‌کند و در آن $n_j=\frac{T}{2^j}$ برابر تعداد ضرایب موجک در سطح j است.

فرض کنیم برای سری زمانی $\mathbf{X}=\left(X_1,X_2,\ldots,X_T\right)'$، که متعلق به یکی از دو جامعه $H_1:\mathbf{X}\in\Pi_1$ یا $H_2:\mathbf{X}\in\Pi_2$ است، شرط ایستایی (ضعیف) برقرار باشد و برای $i=1,2$ داشته باشیم:

$$\mathbf{X}\,\big|\,H_i\sim N(\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i) \tag{12}$$

همچنین فرض کنیم π_i احتمال پیشین تعلق سری $\mathbf{X}$ به جامعه Π_i برای $i=1,2$ باشد. با استفاده از تبدیل $\mathbf{d}=\mathbf{W}\mathbf{X}$ و خاصیت متعامد بودن ماتریس $\mathbf{W}$ داریم:

$$\mathbf{d}\,\big|\,H_i\sim N(\boldsymbol{\mu}_i^d,\boldsymbol{\Lambda}_i) \tag{13}$$

که در آن

$$\boldsymbol{\mu}_i^d=\mathbf{W}\boldsymbol{\mu}_i,\qquad\qquad \boldsymbol{\Lambda}_i=\mathbf{W}\boldsymbol{\Sigma}_i\mathbf{W}' \tag{14}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_i$ ماتریس کواریانس ضرایب موجک گسسته است که عناصر روی قطر آن واریانس $\left\{d_{i;j,k}\right\}$ها می‌باشد، که در آن $j=1,\cdots,J$ و $k=0,\cdots,2^j-1$ هستند. بنا بر نتایج بخش قبل، فرض ایستا بودن بردار $\mathbf{X}$ باعث می‌شود که توزیع ضرایب موجک در هر سطح ایستا باشد. بنابراین واریانس $d_{i;j,k}$، تنها به سطح j بستگی دارد. برای هر j فرض می‌کنیم $(\sigma_{ij}^2=\mathrm{var}(d_{i;j,k})$. همچنین با توجه نتایجی که در بخش ۲ مقاله به آن‌ها اشاره شد در هر سطح خودهمبستگی میان $d_{i;j,k}$ها به‌سرعت کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که ضرایب موجک گسسته در هر سطح غیر همبسته هستند. این به‌همراه پیش‌فرض نرمال بودن مشاهدات، مستقل بودن ضرایب هر سطح را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر همبستگی بین سطح‌های مختلف صفر و یا ناچیز است. بنابراین ماتریس کواریانس $\boldsymbol{\Lambda}_i$ تقریباً قطری بوده و دارای ساختاری به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\Lambda}_i \approx \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{i1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \boldsymbol{\Lambda}_{iJ-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \boldsymbol{\Lambda}_{iJ} \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

که در آن $\boldsymbol{\Lambda}_{ij}$ یک ماتریس تقریباً قطری با ابعاد $n_j \times n_j$ است؛ یعنی

$$\boldsymbol{\Lambda}_{ij} \approx diag(\sigma_{ij}^2)\,. \tag{۱۶}$$

مانند قبل σ_{ij}^2 واریانس ضرایب موجک در سطح j ام از جامعه iام است. با استفاده از رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\boldsymbol{\mu}_i^d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_i^{d_1} \\ \boldsymbol{\mu}_i^{d_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_i^{d_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{W}_2 \boldsymbol{\mu}_i \\ \vdots \\ \mathbf{W}_J \boldsymbol{\mu}_i \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

که در آن $\boldsymbol{\mu}_i^{d_j}$ میانگین ضرایب موجک جامعه iام در سطح j ام است. حال می‌توان تابع چگالی $\mathbf{d}$ را تحت مدل H_i می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$p(\mathbf{d}|\,H_i) = (2\boldsymbol{\pi})^{-\frac{T}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Lambda}_i|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_i^d)'\boldsymbol{\Lambda}_i^{-1}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_i^d)\right\} \quad i=1,2\,. \tag{۱۸}$$

در بخش بعدی از برآورد تابع درستنمایی با استفاده از ضرایب موجک گسسته، برای ممیزی مدل‌های سری‌های زمانی استفاده می‌شود.

۴- آنالیز ممیزی سری‌های زمانی بر مبنای ضرایب موجک گسسته DWT

در بخش قبل تابع درستنمایی ضرایب موجک گسسته به‌دست آمد. حال فرض کنیم $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}$. در این حالت داریم $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_2 = \boldsymbol{\Lambda}$ و بر اساس روش نسبت درستنمایی، بردار مشاهده شده $\mathbf{d} = \mathbf{WX}$ به جامعه اول تعلق می‌گیرد هرگاه

$$\ln \frac{p(\mathbf{d}|\,H_1)}{p(\mathbf{d}|\,H_2)} \geq k \tag{۱۹}$$

که در آن k مقدار ثابتی است. اگر π_i، $i=1,2$ احتمال پیشین تعلق نمونه به جامعه iام باشد، آنگاه سری $\mathbf{X}$ به جامعه اول داده می‌شود هرگاه

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_1^d)'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_1^d)+\frac{1}{2}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_2^d)'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}_2^d)\right]\geq\frac{\pi_1}{\pi_2}$$

با فرض برابری احتمالات پیشین دو جامعه و استفاده از قطری بودن ماتریس $\boldsymbol{\Lambda}$ و رابطه (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}\left(\frac{d_{j,k}-\mu_1^{d_j}}{\sigma_j}\right)^2 &\leq \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}\left(\frac{d_{j,k}-\mu_2^{d_j}}{\sigma_j}\right)^2 \Rightarrow \mathbf{X}\in\Pi_1\\ \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}\left(\frac{d_{j,k}-\mu_1^{d_j}}{\sigma_j}\right)^2 &\geq \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}\left(\frac{d_{j,k}-\mu_2^{d_j}}{\sigma_j}\right)^2 \Rightarrow \mathbf{X}\in\Pi_2\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن Π_1 و Π_2 به ترتیب مشخص‌کننده جوامع اول و دوم هستند.

اگر تفاوت دو جامعه در ماتریس کواریانس آن‌ها باشد، آنگاه بدون آن‌که چیزی از کلیت مسئله کم شود می‌توان فرض کرد که $\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2=0$. با توجه به آنچه که در قسمت قبل گفته شد، می‌توان تابع درستنمایی ضرایب موجک گسسته در سطح j ام از جامعه iام را به‌صورت زیر نوشت:

$$L_{i,j}=(2\pi\sigma_{ij}^2)^{-\frac{n_j}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{ij}^2}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^2\right\}. \qquad (۲۱)$$

با توجه به غیر همبسته بودن ضرایب موجک در سطح‌های مختلف و همچنین پیش‌فرض نرمال بودن بردار سری زمانی $\mathbf{X}$، می‌توان فرض کرد که ضرایب موجک در سطوح مختلف مستقل هستند. لذا تابع درستنمایی در تمام سطوح برای جامعه iام به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L_i=\prod_{j=1}^{J}(2\pi\sigma_{ij}^2)^{-\frac{n_j}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{\sigma_{ij}^2}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^2\right\},\quad i=1,2. \qquad (۲۲)$$

بر اساس قاعده نسبت درستنمایی، سری زمانی $\mathbf{X}$ به جامعه اول داده می‌شود هرگاه

$$\frac{L_1}{L_2}\geq\frac{\pi_1}{\pi_2}$$

و با فرض برابری احتمالات پیشین دو جامعه داریم

$$\frac{\prod_{j=1}^{J}(2\pi\sigma_{1j}^{2})^{-\frac{n_j}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{\sigma_{1j}^{2}}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^{2}\right\}}{\prod_{j=1}^{J}(2\pi\sigma_{2j}^{2})^{-\frac{n_j}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\frac{1}{\sigma_{2j}^{2}}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^{2}\right\}}\geq 1$$

یعنی:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^{2}\left[\frac{1}{\sigma_{2j}^{2}}-\frac{1}{\sigma_{1j}^{2}}\right]&\geq\sum_{j=1}^{J}n_j\ln\frac{\sigma_{1j}^{2}}{\sigma_{2j}^{2}}\quad\Rightarrow\mathbf{X}\in\Pi_1\\ \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_j}d_{j,k}^{2}\left[\frac{1}{\sigma_{2j}^{2}}-\frac{1}{\sigma_{1j}^{2}}\right]&<\sum_{j=1}^{J}n_j\ln\frac{\sigma_{1j}^{2}}{\sigma_{2j}^{2}}\quad\Rightarrow\mathbf{X}\in\Pi_2.\end{aligned}\tag{۲۳}$$

در عمل، برای افزایش کارآیی معیارهای (۲۱) و (۲۴)، تعدادی از سطح‌های آخر را کنار می‌گذاریم. یعنی به جای J از J_0 استفاده می‌کنیم به نحوی که $J_0\leq J$. مقدار J_0 با توجه به داده‌ها انتخاب می‌شود. پرسیوال و والدن در [۲۰] در مطالعه کاربرد موجک‌ها در زمینه‌های مختلف آماری به این نتیجه رسیده‌اند که ضرورتی برای استفاده از تمام سطوح موجک وجود ندارد. در اینجا می‌توان برای افزایش کارآیی معیارهای (۲۰) و (۲۳) تعدادی از سطوح آخر را کنار گذاشت و بنابراین تنها از J_0 ($J_0\leq J$) سطح برای ممیزی استفاده کرد. حالتی را در نظر بگیریم که تفاوت دو جامعه تنها در ماتریس‌های کواریانس آن‌ها باشد و فرض کنیم n_i تعداد نمونه از جامعه iام ($i=1,2$) باشد. در این صورت $\sigma_{i,j}^{2}$ را می‌توان به‌صورت زیر برآورد نمود:

$$\hat{\sigma}_{ij}^{2}=\frac{1}{n_l}\sum_{l=1}^{n_l}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{1}{n_j}d_{i,j,k;(l)}^{2}\tag{۲۴}$$

که در آن $d_{i,j,k;(l)}^{2}$ مجذور ضرایب موجک گسسته در سطح j ام و مکان kام از نمونه lام از جامعه iام است. تحت این شرایط فرض کنیم که $d_{z,j,k}^{2}$ مجذور ضرایب موجک گسسته در سطح j ام و مکان kام از بردار مشاهده شده $\mathbf{Z}$ باشد. در این صورت $\mathbf{Z}$ به جامعه اول تخصیص داده می‌شود هرگاه

$$\sum_{j=1}^{J_0}\sum_{k=1}^{n_j}d_{z,j,k}^{2}\left[\frac{1}{\hat{\sigma}_{2j}^{2}}-\frac{1}{\hat{\sigma}_{1j}^{2}}\right]\geq\sum_{j=1}^{J_0}n_j\ln\frac{\hat{\sigma}_{1j}^{2}}{\hat{\sigma}_{2j}^{2}}\tag{۲۵}$$

و در غیر این صورت به جامعه دوم داده می‌شود. در رابطه بالا $i=1,2$ $\hat{\sigma}_{i,j}^{2}$ برآورد واریانس موجک‌های دو جامعه اول و دوم در سطح j ام است که با استفاده از رابطه (۲۴) به‌دست می-

آیند. معیار ممیزی (۲۵) یک معیار ناپارامتری است. بنابراین استفاده از آن تنها نیازمند محاسبه ضرایب موجک بدون زیرنمونه‌گیری است و در استفاده از آن به مدل‌بندی پارامتری نیازی نیست.

۵- شبیه‌سازی به منظور بررسی توان معیار ممیزی موجکی در ممیزی مدل‌های ایستا

در این بخش از مقاله به منظور بررسی دقت نتایج به‌دست آمده در بخش قبل خصوصاً قاعده ممیزی (۲۵) یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است. برنامه‌های شبیه‌سازی با استفاده از بسته نرم‌افزاری "WaveThresh" در نرم‌افزار SPLUS/2000 نوشته شده‌اند.

جدول ۱: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند AR(1) برای پارامترهای مختلف $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ با معیار ممیزی (۲۵)

$H_۰ : x_t = \alpha_۱ x_{t-۱} + a_t$ در مقابل $H_۱ : x_t = \alpha_۲ x_{t-۱} + a_t$

$\leftarrow \alpha_۱$ / $\downarrow \alpha_۲$	−۰/۷	−۰/۶	−۰/۵	−۰/۴	−۰/۳	−۰/۲	−۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
−۰/۷	*	۷	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۶	۸	*	۱۲	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۵	۰	۱۰	*	۱۴	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۴	۰	۲	۱۵	*	۱۵	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۳	۰	۰	۲	۱۶	*	۱۷	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۲	۰	۰	۰	۲	۱۶	*	۱۸	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۱	۰	۰	۰	۰	۳	۱۷	*	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۰/۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	*	۱۸	۱	۱	۰	۰	۰
۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۴	*	۱۷	۱	۱	۰	۰
۰/۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱۳	*	۱۶	۱	۰	۰
۰/۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱۱	*	۱۶	۱	۰
۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۹	*	۱۴	۱
۰/۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۸	*	۱۱
۰/۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۷	*

ضرایب موجک گسسته از خانواده "DaubExPhase" تولید شده‌اند. همچنین $J_۰ = ۵$ انتخاب شده است. از هر جامعه یک نمونه آزمایشی ۲۰۰ تایی با طول $۲^{۱۰}$ انتخاب و واریانس سطوح مختلف برای دو جامعه با استفاده از رابطه (۲۴) محاسبه شده است. سپس یک نمونه ۱۰۰تایی از جامعه اول تولیدشده و نمونه‌ها با استفاده از معیار ممیزی (۲۵) به یکی از دو جامعه تخصیص داده شده‌اند.

جدول ۲: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند AR(2) ($x_t = \alpha_i x_{t-1} + a_t \quad i = 1,2.$) برای پارامترهای مختلف α_1، α_2، β_1 و β_2 با معیار ممیزی (۲۵).

$H_0 : x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + a_t$ در مقابل $H_1 : x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + a_t$

$\leftarrow (\alpha_1,\alpha_2)$ $\downarrow (\beta_1,\beta_2)$	(۰/۲، ۰/۱)	(۰/۱، ۰/۲)	(۰/۱، ۰/۱)	(۰/۲، -۰/۱)	(-۰/۲، -۰/۱)	(۰/۵، ۰/۴)	(۰/۵، ۰/۲)
(۲/۲،۰/۰)	۱۶	۲۲	۷	۰	۰	۰	۰
(-۰/۲، -۰/۲)	۰	۰	۰	۰	۱۴	۰	۰
(۰/۲، ۰/۵)	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۰
(۰/۴، ۰/۱)	۸	۲	۰	۰	۰	۰	۴
(۰/۱، ۰/۴)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
(۰/۳، ۰/۴)	۰	۰	۰	۰	۰	۵	۱
(۰/۷، ۰/۲)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴

جدول ۳: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند MA(1) برای پارامترهای مختلف α_1 و α_2 با معیار ممیزی (۲۵)

$H_0 : x_t = a_t - \alpha_2 a_{t-1}$ در مقابل $H_1 : x_t = a_t - \alpha_1 a_{t-1}$

$\leftarrow \alpha_1$ $\downarrow \alpha_2$	-۰/۷	-۰/۶	-۰/۵	-۰/۴	-۰/۳	-۰/۲	-۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
-۰/۷	❊	۲۲	۸	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۶	۲۷	❊	۲۳	۶	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۵	۷	۲۴	❊	۲۳	۶	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۴	۴	۷	۲۳	❊	۲۱	۵	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۳	۰	۰	۶	۲۰	❊	۲۱	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۲	۰	۰	۰	۵	۲۰	❊	۱۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
-۰/۱	۰	۰	۰	۰	۴	۱۹	❊	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰/۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	❊	۱۷	۴	۰	۰	۰	۰
۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۳	❊	۱۵	۳	۰	۰	۰
۰/۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۱۳	❊	۱۵	۳	۰	۰
۰/۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱۳	❊	۱۵	۱	۰
۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱۴	❊	۱۵	۱
۰/۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱۵	❊	۱۵
۰/۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۱۵	❊

در جدول‌های ۱ تا ۵، درصد مشاهداتی که به‌اشتباه تخصیص داده شده‌اند، یعنی مشاهداتی که در واقع متعلق به جامعه اول هستند اما به‌اشتباه به جامعه دوم تخصیص یافته‌اند، به‌ترتیب برای مدل‌های AR(1)، AR(2)، MA(1)، MA(2) و ARMA(1,1) نشان داده شده‌اند. همان‌گونه

که در جدول‌ها مشاهده می‌شود عملکرد معیار (۲۵) حتی در ممیزی جوامع نزدیک بسیار خوب بوده و با دور شدن جوامع درصد خطای ممیزی کاهش یافته و به صفر می‌رسد.

جدول ۴: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند MA(2) برای پارامترهای مختلف $\alpha_{۱}$، $\alpha_{۲}$، $\beta_{۱}$ و $\beta_{۲}$ با معیار ممیزی (۲۵)

$H_{۰}: x_t = a_t - \beta_{۱} a_{t-۱} - \beta_{۲} a_{t-۲}$ در مقابل $H_{۱}: x_t = a_t - \alpha_{۱} a_{t-۱} - \alpha_{۲} a_{t-۲}$

$\leftarrow(\alpha_1,\alpha_2)$ $\downarrow(\beta_1,\beta_2)$	(۰/۲، ۰/۱)	(۰/۱، ۰/۲)	(۰/۱، ۰/۱)	(۰/۲، −۰/۱)	(−۰/۲، −۰/۱)	(۰/۵، ۰/۴)	(۰/۵، ۰/۲)
(۲/۲، ۰/۰)	۱۶	۲۲	۷	۰	۰	۰	۰
(−۰/۲، −۰/۲)	۰	۰	۰	۰	۱۰	۰	۰
(۰/۲، ۰/۵)	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲
(۰/۴، ۰/۱)	۷	۵	۰	۰	۰	۰	۳
(۰/۱، ۰/۴)	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰
(۰/۳، ۰/۴)	۰	۰	۰	۰	۰	۵	۷
(۰/۷، ۰/۲)	۰	۰	۰	۰	۰	۶	۱۰

جدول ۵. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند ARMA(1,1) برای پارامترهای مختلف $\alpha_{۱}$، $\beta_{۱}$، $\alpha_{۲}$ و $\beta_{۲}$ با معیار ممیزی (۲۵)

$H_{۰}: x_t = \alpha_{۱} x_{t-۱} + a_t - \alpha_{۲} a_{t-۱}$ در مقابل $H_{۱}: x_t = \beta_{۱} x_{t-۱} + a_t - \beta_{۲} a_{t-۱}$

$\leftarrow(\alpha_1,\alpha_2)$ $\downarrow(\beta_1,\beta_2)$	(۰/۲ ، ۰/۳)	(۰/۳ ، ۰/۴)	(۰/۱ ، ۰/۲)	(−۰/۶، −۰/۸)	(−۰/۵ ، −۰/۷)
(۰/۱ ، ۰/۳)	۱۷	۱۸	۱۶	۰	۰
(۰/۲ ، ۰/۴)	۱۵	۱۷	۸	۰	۰
(۰/۴ ، ۰/۳)	۱	۱	۱	۷	۷
(۰/۲ ، ۰/۱)	۱	۱	۳	۵	۷
(۰/۵، −۰/۷)	۰	۰	۰	۰	۰
(−۰/۵ ، −۰/۶)	۱	۱	۱	۱۱	۱۷
(−۰/۶ ، −۰/۹)	۰	۰	۰	۰	۰
(۰/۳ ، ۰/۵)	۱۱	۱۵	۱	۰	۰
(−۰/۶، −۰/۷)	۱	۱	۰	۱۳	۱۷

۶- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله با تقریب نسبت درستنمایی دو جامعه نرمال با استفاده از تبدیل موجکی گسسته یک معیار ناپارامتری برای ممیزی مدل‌های سری‌های زمانی ایستا در حوزه موجک‌ها به دست آمد. مقایسه نتایج به‌دست آمده با بهترین نتایجی که در حوزه زمان و فرکانس توسط چینی پرداز و همکاران در [۲۱] به‌دست آمده است، نشان می‌دهد که خطای ممیزی در اینجا به طور قابل ملاحظه‌ای از نتایج [۲۱] کمتر است. همچنین با توجه به طول سری‌های زمانی و تعداد تکرارهای در نظر گرفته شده، سرعت انجام محاسبات بسیار بالا است. این امر به دلیل خواص تبدیل‌های موجک گسسته در تنک کردن[۴] مشاهدات و قطری کردن ماتریس واریانس کواریانس سری است. قابل توجه است که محاسبات مشابه در حوزه زمان و حتی حوزه فرکانس بسیار وقت‌گیر و طاقت‌فرسا است. از دیگر مزایای معیار ممیزی موجکی به‌دست آمده، ناپارامتری بودن آن است بدین معنی که استفاده از آن مستلزم مدل بندی مشاهدات نبوده و تنها نیازمند برآورد واریانس ضرایب موجک گسسته در سطوح مختلف است.

مراجع

[1] Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2011). *Time Series Analysis and Applications*, Second Edition, Springer, New York.

[2] Chan, H.T. (1991). *Discriminant analysis of Time Series*. Ph.D. Thesis, Newcastle University.

[3] Chan, H.T., Chinipardaz, R. and Cox, T.F. (1996). Discrimination of AR, MA and ARMA time series models, *Comm. Stat. Theory and Method*, **25(6),** 1247-1260.

[4] Chinipardaz, R. (2000). Discrimination analysis in AR(1) plus noise processes, *Iranian Journal of Science & Technology, Trans. A*, **24(2),** 165-172.

[5] Mansouri, B., Chinipardaz, R. and Parham, G. A. (2011). Discrimination analysis in AR(p) plus different noises processes. *Iranian Journal of Since and Technology Transaction A: Since.* **35.**

[6] Chinipardaz, R. and Cox, T.F. (2004). Nonparametric discrimination of time series, *Metrika*, **59(1)**, 13-20.

[7] Liget, W.S. (1971). On the asymptotic optimality of spectral analysis for testing hypotheses about time series, *Annals of Math Stat,* **42**, 1348-1358.

[8] Shumway, R.H. and Unger, A.N. (1974). Linear discriminant function for stationary time series, *J. Amer. Stat. Assoc.,* **69**, 948-956.

[9] Alagon, J. (1986). *Discrimination Analysis for Time Series*. Ph.D. Thesis, Oxford University.

[10] Dargahi – Noubary, G.R. (1992). Discrimination between Gaussian time series based on their spectral differences, *Comm. Stat. Theory and Method,* **21(9)**, 2439-2458.

[11] Dargahi – Noubary, G.R. and Laycock, P.J. (1981). Spectral ratio discriminants and information theory, *Journal of Time Series Analysis,* **2**, 71-86.

[12] Kakizawa,Y., Shumway, R. and Taniguchi, M. (1998). Discrimination and clustering for multivariate time series, *J. Amer. Stat. Assoc.,* **93**, 328-340.

[13] Shumway, R.H. (2003). Time-frequency clustering and discriminant analysis, *Statistics and Probability Letters.*, **63**, 307-314.

[14] Vidakovic. B. (1999*). Statistical Modeling by Wavelets*. Wiley, New York.

[15] Nason, G.P. (2008). *Wavelet Methods in statistics with R*, Springer, New York.

[16] Maharaj, E.A. and Alonso, A.M. (2007). Discrimination of locally stationary time series using wavelets, *Comput. Staist. Data. Anal*. **52**, 879-895.

[17] Fryzlewicz, P. and Ombao, H. (2009). Consistent classification of non stationary time series using stochastic wavelet representations. *J. Amer. Stat. Assoc.,* **104,** 299-312.

[18] Averkamp, R. and Houdre, C. (2000). A note on the discrete wavelet transform of second-order processes. *IEEE INFO T,* **46(4)**, 1673-1679.

[19] Walter, G.G. (1994). *Wavelet and Other Orthogonal Systems with Applications*. CRC Press Inc. Boca Raton, FL.

[20] Percival, D.B. and Walden, A.T. (2000). *Wavelets for Statistical Applications and Data Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

[۲۱] چینی پرداز، ر.، منصوری، ب. و شفیعی بابائی، س. (۱۳۸۸). ممیزی سری‌های زمانی ARMA مبتنی بر معیارهای واگرایی: روش حوزه فرکانس. مجله پژوهش‌های آماری ایران. ۶ **(۱)**، ۳۷- ۵۵.

Time Series Discrimination Using Likelihood Function of Discrete Wavelet Coefficients

Behzad Mansouri and Rahim Chinipardaz

Department of Statistics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

In this paper, the likelihood ratio of two normal density functions is approximated using discrete wavelet transformation. Moreover, a nonparametric criteria for discrimination of a stationary time series models in the wavelet domain is obtained. The performance of discriminant rule is shown in ARMA model using simulation techniques. The main adavantage of this method is that it is not a parametric model and the speed of calculations for large time series and very low error rate misclassification are two characteristics of the wavelet discriminate criteria.

Keywords: Discrete wavelet transform, Likelihood ratio, Discrimination of time series, ARMA models.

Mathematics Subject Classification (2010): 37M10, 62H30.