

برآورد پارامتری تعداد و پیش‌بینی رخداد زلزله در جنوب ایران بر اساس مدل نیمه‌مارکف

میثم پاشاپور*، کاووس خورشیدیان^۱* و مرضیه خلیلی**

* بخش آمار، دانشگاه شیراز

** بخش علوم زمین، دانشگاه شیراز

تاریخ پذیرش: ۹۳/۳/۲۰

تاریخ دریافت: ۹۲/۵/۲۸

چکیده: در این مقاله الگوی رویداد زلزله در منطقه‌ای محدود به عرض جغرافیایی 27° تا 30° و طول جغرافیایی 55° تا 58° که شامل استان‌های هرمزگان و کرمان است، توسط یک فرایند نیمه‌مارکف مدل‌بندی می‌شود. حالت‌های فرایند نیمه‌مارکف بر اساس بزرگی زمین‌لرزه‌های رخ داده تعریف می‌گردد. ابتدا برآورد پارامتری هسته‌ی نیمه‌مارکف محاسبه‌شده، سپس برای برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله، زمان اصابت قوی‌ترین زمین‌لرزه‌ها و توابع انتقال، از روشی جدید که بر پایه تقریب لاپلاس معکوس است، استفاده می‌گردد. این روش در نرم‌افزارهای ریاضی دارای سرعت محاسباتی بسیار بالایی نسبت به روش‌های ارائه‌شده در مطالعات گذشته است. به‌منظور ارائه نتایجی جهت پیش‌بینی، احتمالات وقوع زلزله بعدی با شدت‌های متفاوت در بازه‌های زمانی آینده با دانستن اطلاعات آخرین زمین‌لرزه نیز محاسبه گردیده است. نتایج حاصله با زلزله‌ی اخیر که در منطقه رخ داده است تطابق دارد که حاکی از اعتبار مدل است.

واژه‌های کلیدی: فرایند نیمه‌مارکف، زلزله، توزیع وایبول، ماتریس تجدید مارکف، زمان اصابت.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۸۶A۳۲، ۶۰K۱۵

۱-مقدمه

به‌منظور ارائه‌ی یک مدل برای رخداد زلزله، مدل‌های تحلیلی متعددی به‌کار گرفته شده است. تعدادی از آن‌ها بر پایه مشاهدات روی رخداد‌های قبلی، برخی دیگر بر پایه مدل‌بندی فیزیکی فرایند زلزله و دسته سوم به‌صورت تحلیل آماری زمین‌لرزه می‌باشند. متداول‌ترین تحلیل و روش آماری، استفاده از الگوی فرایند پواسون است که در آن فرض می‌شود زمان‌های رخداد

مستقل می‌باشند. ساده‌ترین مدلی که در آن فرایند وابسته به زمان است مدل پواسون غیر همگن است، که برای تخمین مخاطره‌ی زمین‌لرزه در فواصل زمانی بلندمدت مناسب نیست؛ زیرا مخاطره می‌بایست با هر زلزله‌ی جدید دوباره بازنگری شود. مدل نیمه‌مارکف ابتدا در سال ۱۹۸۰ استفاده شد که در آن شدت و زمان زلزله به صورت غیر تصادفی بوده و از یک روش پارامتری به منظور برآورد دوره‌ی بازگشت استفاده شده است [۱]. در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۵ توزیع وایبول در هسته‌ی نیمه‌مارکف برای داده‌های زلزله در آناتولی شمالی (ترکیه) به کار برده شد [۲ و ۳]. در سال ۲۰۱۰ این مدل بهبود یافت و برخی نتایج پیش‌بینی ارائه گردید [۴]. برآوردهای ناپارامتری نیمه‌مارکف برای داده‌های زلزله در قسمتی از یونان در سال ۲۰۱۲ به کار گرفته شد [۵]. در این مقاله حالت‌های نیمه‌مارکف برای رویداد زلزله در استان‌های هرمزگان و کرمان بر اساس طبقه‌بندی بزرگی زلزله‌ها تعیین می‌گردد. با توجه به مطالعات گذشته و رفتارهای تصادفی و زمین‌شناختی زلزله، فرض می‌شود که زمان‌های گذار بین حالت‌ها دارای توزیع وایبول می‌باشند [۴]. از آنجا که در تحلیل مدل‌های نیمه‌مارکف، توابعی مانند میانگین تعداد ملاقات‌ها، توزیع‌های اولین زمان‌های گذار و توابع انتقال مورد استفاده مکرر می‌باشند، این توابع نیز محاسبه می‌شوند. محاسبه چنین توابعی در برخی فرایندهای نیمه‌مارکف بسیار پیچیده است. در این مقاله روشی جدید برای محاسبه این توابع با استفاده از تقریب لاپلاس معکوس ارائه می‌گردد.

این مقاله به صورت زیر مرتب شده است: در بخش دوم به تعاریف و مفاهیم اولیه مرتبط با فرایندهای نیمه‌مارکف پرداخته می‌شود. روش اویلر برای تقریب لاپلاس معکوس در بخش سوم ارائه می‌گردد. در بخش چهارم با استفاده از تقریب لاپلاس معکوس روشی عددی جهت محاسبه‌ی میانگین تعداد ملاقات‌ها و تابع توزیع زمان اصابت، ارائه می‌شود. در بخش پنجم، ابتدا با استفاده از داده‌های زلزله، هسته‌ی نیمه‌مارکف برآورد شده و سپس با استفاده از آن میانگین زمان‌های بازگشت، میانگین تعداد ملاقات‌های مختلف، تابع توزیع زمان اصابت قوی‌ترین زمین‌لرزه و توابع انتقال محاسبه می‌شوند. در بخش ششم به منظور ارائه نتایجی جهت پیش‌بینی، احتمالات وقوع زمین‌لرزه در بازه‌های زمانی آینده و نرخ وقوع قوی‌ترین زمین‌لرزه‌ها محاسبه می‌گردد. در بخش آخر جهت سنجش اعتبار مدل ارائه‌شده، رویداد زلزله‌ی اخیر با نتایج مدل نیمه‌مارکف مقایسه می‌گردد.

۲- تعاریف و نکات اولیه فرایند نیمه‌مارکف

مطالب زیر در خصوص فرایندهای تجدیدمارکف را می‌توان در مراجع [۶ و ۷] ملاحظه نمود. فرض کنیم J_n و S_n به ترتیب مکان و زمان n امین انتقال در یک فرایند تصادفی بوده و برای هر $n \in N$ مقادیر متغیر تصادفی J_n در مجموعه شمارای E تحت یک زنجیر مارکف و مقادیر

متغیر تصادفی S_n در $R^+ = [0, +\infty)$ تعریف شده باشند. با در نظر گرفتن زمان‌های ملاقات $0 = S_0 \leq S_1 \leq \dots$ ، فرآیند تصادفی $(J, S) = \{(J_n, S_n)_{n \geq 0} : n \in N\}$ را یک فرآیند تجدیدمارکف گویند هرگاه:

$$P\{J_{n+1} = j; S_{n+1} - S_n \leq t | J_0, \dots, J_n; S_0, \dots, S_n\} = P\{J_{n+1} = j; S_{n+1} - S_n \leq t | J_n\}.$$

در این مقاله فرض می‌کنیم که فرآیند، نسبت به زمان همگن است، یعنی برای هر $i, j \in E$ و $t \in R^+$ $P\{J_{n+1} = j; S_{n+1} - S_n \leq t | J_n = i\} = Q_{ij}(t)$ مستقل از n است. خانواده احتمالات $\mathbf{Q} = \{Q_{ij}(t); i, j \in E, t \in R^+\}$ یک هسته نیمه‌مارکف روی E گفته می‌شود و تمام خواص تابع توزیع را دارد به جز این که $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t)$ لزوماً یک نمی‌شود.

اگر F_{ij} تابع توزیع زمان انتقال از حالت i به j باشد داریم: $Q_{ij}(t) = P_{ij}F_{ij}(t)$ ، که در آن P_{ij} درایه‌های ماتریس احتمال انتقال زنجیر مارکف J می‌باشند.

یک فرآیند تجدیدمارکف (J, S) را در نظر بگیرید. هرگاه به ازای هر $t \in [0, \infty)$ متغیر تصادفی $Z(t)$ نشان‌دهنده وضعیت فرآیند در زمان t باشد، فرآیند تصادفی $\{Z(t), t \geq 0\}$ را فرآیند نیمه‌مارکف یا فرآیند شبه‌مارکف متناظر با (J, S) گویند. به عبارت دیگر

$$Z(t) = J_{N(t)} = \begin{cases} J_n & , S_n \leq t < S_{n+1} \\ \Delta & , o.w. \end{cases}$$

که در آن Δ یک مقدار فرضی یا دلخواه خارج از فضای وضعیت است. فرض کنیم $N_k(t)$ تعداد دفعاتی باشد که فرآیند در فاصله زمانی $[0, t]$ در وضعیت k قرار می‌گیرد و $R_{jk}(t)$ امید شرطی $N_k(t)$ به شرط $\{J_0 = j\}$ و یا به عبارت دیگر تعداد متوسط ملاقات‌های وضعیت k در فاصله $[0, t]$ با شروع از حالت j باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$R_{jk}(t) = E[N_k(t) | J_0 = j] = \sum_n P(J_n = k, S_n \leq t | J_0 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{jk}^{(n)}(t) \quad (1)$$

که در آن $Q_{jk}^{(n)}(t) = \sum_{l \in E} \int_0^t Q_{jl}(dx) Q_{lk}^{(n-1)}(t-x)$ و به صورت ماتریسی داریم:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^{(n)}(t). \quad (2)$$

فرض کنیم که F یک اندازه با مقادیر حقیقی و نامنفی باشد، تبدیل لاپلاس استیلیتیس F روی R_+ برابر است با $\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(dt)$. اگر U پیچش دو تابع توزیع F و G باشد.

یعنی $U(x) = \int_0^x G(x-t)F(dt)$ ، آنگاه \tilde{U} برابر با حاصل ضرب \tilde{F} و \tilde{G} است و .
 $\tilde{U} = \tilde{G}.\tilde{F}$ در حالتی که E متناهی باشد، می توان نشان داد [۶ و ۷]

$$\tilde{R}(s) = (\mathbf{I} - \tilde{Q}(s))^{-1}. \quad (۳)$$

تابع توزیع زمان چرخش یا زمان ماندگاری در وضعیت i ام به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_i(t) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) \quad \forall t \in R. \quad (۴)$$

فرض کنیم $(J_n)_{n \geq 0}$ زنجیر مارکف نشانیده فرایند نیمه مارکف با توزیع مانای π ،
 $\eta_i = \int_0^\infty dH_i(t)$ میانگین زمان توقف در حالت i و θ_j میانگین زمان های بازگشت برای
 حالت های فرایند نیمه مارکف باشد. داریم:

$$\theta_j = \frac{1}{\pi_j} \sum_k \pi_k \eta_k, \quad j \in E.$$

توزیع زمان اولین ورود از حالت i به حالت j به صورت $G_{ij}(t) = P(N_j(t) > 0 | J_0 = i)$
 تعریف می شود. برای تبدیل لاپلاس تابع توزیع اولین زمان ورود رابطه ی زیر برقرار است [۷]:

$$\bar{G}_{ij}(s) = \begin{cases} \bar{R}_{ij}(s)(\bar{R}_{ij}(s))^{-1}, & i \neq j, \\ 1 - (\bar{R}_{ij}(s))^{-1}, & i = j. \end{cases}$$

تابع توزیع زمان اصابت به حالت j وقتی سیستم در یکی از حالت های مجموعه H و
 $H \subseteq E$ قرار دارد، به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_{Hj}(t) = \inf\{u > 0 : Z(t+u) = j, N(t+u) > N(t), Z(t) \in H\}.$$

$G_{Hj}(t)$ را می توان از رابطه زیر به دست آورد [۵]:

$$G_{Hj}(t) = \sum_{k \in H} \gamma_k G_{kj}(t),$$

که در آن وزن γ_k برابر احتمال بودن در حالت $k \in H$ در لحظه ی شروع است. توابع انتقال
 بین حالت های فرایند نیمه مارکف به صورت $\varphi_{ij}(t) = P(Z(t) = j | Z(0) = i)$ تعریف می شود.
 روابط زیر برای تبدیلات لاپلاس توابع انتقال و توزیع اولین زمان ورود برقرار است [۷]:

$$\bar{\varphi}_{ij}(s) = \frac{1 - \bar{H}_i(s)}{s(1 - \bar{G}_{ii}(s))} \quad \text{if } i = j, \quad \bar{\varphi}_{ij}(s) = \bar{G}_{ij}(s).\bar{\varphi}_{jj}(s) \quad \text{if } i \neq j \quad (۵)$$

که در آن $\bar{H}_i(s)$ به صورت $\bar{H}_i(s) = \sum_j \bar{Q}_{ij}(s)$ محاسبه می‌شود.

۳- روش اویلر برای به‌دست آوردن لاپلاس معکوس

در این بخش خلاصه‌ای از روش اویلر برای تقریب لاپلاس معکوس ارائه می‌شود [۹ و ۱۰]. فرض کنیم f تابعی مختلط روی مقادیر حقیقی و غیر منفی و با تبدیل لاپلاس \bar{f} باشد، در این صورت با استفاده از نظریه سری‌های فوریه، دنباله‌ای از توابع $\{f_n: n \geq 1\}$ که تابع f را تقریب می‌نماید، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) \approx f_n(t) \equiv \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n \omega_k \bar{f}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right), \quad 0 < t < \infty \quad (۶)$$

که در آن ω_k وزن‌ها و α_k اعداد مختلطی هستند که به n بستگی داشته ولی به \bar{f} بستگی ندارند. برای تعیین ω_k و α_k ‌ها چند روش وجود دارد که در این مطالعه از سری‌های فوریه و مجموع اویلر استفاده می‌کنیم. در این مطالعه از قسمت حقیقی تابع استفاده می‌شود. به همین خاطر برای تقریب قسمت حقیقی f رابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(t)\} &\approx \operatorname{Re}\{f_n(t)\} \equiv \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}\{\omega_k \bar{f}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right)\} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}\{\omega_k\} \operatorname{Re}\left\{\bar{f}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right)\right\} + \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}\{\omega_k\} \operatorname{Im}\left\{\bar{f}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right)\right\}, \quad 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول معکوس لاپلاس اویلر برای محاسبه‌ی عددی تابع حقیقی مقدار $f(t)$ داریم:

$$f_e(t, M) = \frac{1 \cdot M^{1/\nu}}{t} \sum_{k=0}^{M-1} \eta_k \operatorname{Re}\left(\bar{f}\left(\frac{\beta_k}{t}\right)\right)$$

که در آن پارامترهای α_k ، β_k ، η_k ، ω_k و M به صورت پی‌شفت توسط روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\beta_k = M \ln(1.0) / \nu + \pi i k, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \eta_k = (-1)^k \xi_k$$

$$\xi_0 = \frac{1}{\nu}, \quad \xi_k = 1, \quad 1 \leq k \leq M, \quad \xi_{M-1} = \frac{1}{\nu^M},$$

$$\xi_{M-k} = \xi_{M-k+1} + \nu^{-M} \binom{M}{k}, \quad 0 < k < M.$$

بدین ترتیب برای رابطه اولیه (۶) داریم: $\alpha_k = \beta_k$ ، $\omega_k = 1 \cdot M/\tau \eta_k$ و $n = 2M$. هرگاه j تعداد ارقام معنی‌دار دلخواه برای تقریب باشد، در آن صورت M برابر با $[1/\tau j]$ در نظر گرفته می‌شود. برای جزئیات بیشتر به [۹ و ۱۰] مراجعه شود.

۴- تقریب لاپلاس معکوس برای محاسبه میانگین تعداد ملاقات‌ها و تابع توزیع اولین زمان ورود

امیدریاضی یکی از شاخص‌های موثر در تحلیل رفتارهای تصادفی است. در فرایندهای نیمه-مارکف به دست آوردن میانگین تعداد ملاقات حالت‌ها در زمان t در بسیاری موارد نیازمند به انجام محاسبات طولانی و پیچیده می‌باشد. محققان با توجه به ساختار فرایند مورد نظر، بعضی حالت‌های خاص را در نظر گرفته، به محاسبه‌ی آن‌ها پرداخته‌اند. در برآورد میانگین تعداد رویدادها، استفاده مستقیم از تعاریف و عبارات‌های (۱) و (۲)، منجر به انجام محاسبات بسیار پیچیده و طولانی می‌گردد و حتی توسط نرم‌افزارهای پر قدرت نیز به راحتی و با دقت قابل اجرا نمی‌باشند. به همین دلیل در این بخش سعی می‌شود که از تبدیلات لاپلاس و خواص آن جهت محاسبه‌ی توابع مورد نیاز استفاده گردد.

در بسیاری از کاربردهای عملی و به‌ویژه مطالعه حاضر، توابع $\bar{\varphi}_{ij}(s)$ و $\tilde{G}_{Hj}(t)$ ، $\bar{R}_{ij}(s)$ معمولاً دارای نمایش‌های پیچیده‌ای می‌شوند و امکان استفاده از روش‌های معمولی جهت محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس معکوس این توابع وجود ندارد، از این رو در این بخش روشی عددی را جهت محاسبه‌ی این توابع معرفی می‌کنیم. با توجه به این که در تبدیل لاپلاس استیلیتیس از مشتق تابع F استفاده می‌شود، تبدیل لاپلاس معکوس آن، مشتق F را نتیجه می‌دهد.

به‌منظور محاسبه‌ی عددی تبدیل لاپلاس معکوس، ابتدا دنباله‌ی $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh$ را در نظر می‌گیریم. هرگاه $R'_{ij}(t_k)$ مقدار مشتق تابع امید و $IL_{R'_{ij}}(t_k)$ مقدار تقریب لاپلاس معکوس به روش اویلر در نقطه‌ی t_k باشد، آنگاه:

$$R'_{ij}(t_k) \approx IL_{R'_{ij}}(t_k). \quad (7)$$

از طرفی چون $\int_0^x R'_{ij}(t) dt = R_{ij}(x)$ با استفاده از تعریف انتگرال ریمان و دنباله‌ی t_n می‌توان دنباله‌ی زیر را برای تقریب $R_{ij}(x)$ به دست آورد:

$$R_{ij,n}(x) = \sum_{i=0}^n h \cdot R'_{ij}(t_i) \quad x \in (t_{n-1}, t_n]. \quad (8)$$

واضح است که وقتی $h \rightarrow 0$ ، آنگاه $R_{ij,n}(t) \rightarrow R_{ij}(t)$.

اگر $g_{Hj}(t_k)$ مقدار تابع چگالی زمان اصابت قوی‌ترین به حالت z ام در نقطه t_k و $IL_{g_{Hj}}(t_k)$ تابع تقریب لاپلاس معکوس در نقطه‌ی t_k باشد، داریم:

$$g_{Hj}(t_k) \approx IL_{g_{Hj}}(t_k).$$

از طرفی چون $\int_0^x g(t)dt = G(x)$ ، در نتیجه با انتخاب h مناسب برای تقریب تابع توزیع داریم:

$$G_{Hj,n}(x) = \sum_{i=0}^n h g'_{Hj,n}(t_i) \quad x \in (t_{n-1}, t_n]. \quad (9)$$

۵- برآورد هسته و توابع نیمه‌مارکف برای داده‌های زلزله

۵-۱- انتخاب و ویرایش داده‌ها و برآورد هسته‌ی ماتریس تجدیدمارکف

پدیده‌های فیزیکی بسیاری وجود دارند که هنوز بشر درک کاملی از رفتار آن‌ها ندارد، و از این‌رو با استفاده از علوم ریاضیات و احتمال، الگوهایی برای رفتار آن‌ها تعیین می‌شود. در این مقاله یک مدل نیمه‌مارکف برای رویداد زلزله در منطقه محدود به عرض جغرافیایی 27° تا 30° و طول جغرافیایی 55° تا 58° شامل استان‌های هرمزگان و کرمان به کار برده شده است. به دلیل آن که این منطقه در یک محدوده لرزه زمین ساخت پرخطر واقع شده است و سالانه تعداد زیادی زمین‌لرزه در آن به ثبت می‌رسد، بررسی رفتار زلزله در این ناحیه می‌تواند زمینه‌ای برای پیش‌بینی و به طبع کاهش صدمات مالی و جانی فراهم آورد [۱۱]. به منظور مستقل بودن زلزله‌های بعدی از زلزله‌های قبلی پس‌لرزه‌ها می‌بایست از داده‌های زلزله حذف گردند، به همین دلیل با استفاده از روش ریزنبرگ پس‌لرزه‌ها به دقت شناسایی و حذف گردیده‌اند [۱۲]. داده‌های اصلی شامل زلزله‌های بزرگ‌تر از ۵ ریشتر در فاصله زمانی بین ساله‌ای ۱۹۲۳ تا ۲۰۱۲ میلادی می‌باشد. علت انتخاب زلزله‌های ۵ ریشتر و یا بالاتر بدان خاطر بوده است که در ایران به دلیل بافت قدیمی و نامقاوم بودن ساختمان‌ها زلزله‌های ۵ ریشتری نیز می‌توانند باعث بروز خسارت شوند.

طبقه‌بندی حالت‌ها بدین صورت انجام می‌گیرد: زلزله‌های ضعیف که دارای خسارت کم می‌باشند، زلزله‌های با قدرت متوسط و زلزله‌های قوی که خسارات جانی و مالی فراوانی در پی دارند. به عبارت دقیق‌تر حالت‌های نیمه‌مارکف را بر روی بزرگی زمین‌لرزه به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

حالت اول: زلزله‌های با بزرگی انرژی آزادشده‌ی $4/5 < M \leq 5$ ،

حالت دوم: زلزله‌های با بزرگی انرژی آزادشده‌ی $۵/۸ < M \leq ۵/۴$.

حالت سوم: زلزله‌های با بزرگی انرژی آزادشده‌ی $۵/۸ \leq M$.

نکته ۱: انتخاب توزیع مناسب برای داده‌ها بسیار مهم است، این انتخاب بایستی با خواص فیزیکی و طبیعی داده متناسب باشد. فیزیک رخداد زمین‌لرزه به‌گونه‌ای است که در یک منطقه هر چهار زمان وقوع آخرین زلزله بگذرد، به علت تجمع بیشتر انرژی احتمال وقوع زمین‌لرزه‌ی بزرگ‌تر بالا می‌رود. این رفتار زمین‌لرزه می‌تواند با استفاده از توزیع وایبول با پارامتر شکل بزرگ‌تر از یک سازگار باشد [۴]. بنابراین هرگاه مقدار برآورد β_{ij} در توزیع وایبول کم‌تر از یک باشد قرار می‌دهیم $\beta_{ij} = ۱$ [۴ و ۱۳].

برازش توزیع زمان بین رویدادهای زلزله‌های با بزرگی بیشتر از ۵، با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف مورد بررسی قرار گرفته و فرض صفر این‌که پیروی داده‌ها از توزیع وایبول، رد نشد. مقدار آماره این آزمون برابر با $۰/۰۹۴۲$ و p -مقدار آن برابر با $۰/۵۵۲۲$ به دست آمد. لازم به ذکر است که هر قدر مقدار آماره آزمون به صفر نزدیک‌تر باشد، نشان‌دهنده برازش بهتر توزیع بر داده‌ها است.

برای برآورد ماکزیمم درست‌نمایی هسته‌ی ماتریس تجدید نیمه‌مارکف، از تابع لگاریتم درست‌نمایی به شرط $J_0 = j$ استفاده می‌کنیم. اگر چگالی زمان‌های گذار از حالت i به j به صورت

$$f_{ij}(x) = \frac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}} \left(\frac{x}{\alpha_{ij}}\right)^{\beta_{ij}-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha_{ij}}\right)^{\beta_{ij}}\right]$$

در نظر گرفته شود، داریم:

$$\begin{aligned} \ell(j) = & \sum_{i=0}^{m-1} \ln(P_{J_i, J_{i+1}}) + \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \ln \left[\frac{\beta_{J_i, J_{i+1}}}{\alpha_{J_i, J_{i+1}}} \left(\frac{x_i}{\alpha_{J_i, J_{i+1}}}\right)^{\beta_{J_i, J_{i+1}}-1} \right] \right\} \\ & + \left(\frac{x_i}{\alpha_{J_i, J_{i+1}}}\right)^{\beta_{J_i, J_{i+1}}} + \ln \left\{ \sum_{k=1}^M p_{J_m, k} \exp \left[-\frac{x_i}{\alpha_{J_i, J_{i+1}}} \right]^{\beta_{J_m, k}} \right\}, \quad \beta_{ij} \geq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن m تعداد انتقال‌های نمونه‌ای و M بعد فضای حالت فرایند نیمه‌مارکف می‌باشد. طبق این تابع درست‌نمایی و نکته‌ی ۱، برآوردهای β_{ij} و α_{ij} با نمایش ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۳]:

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} ۸/۳۰۴ & ۶/۲۰۶ & ۳/۶۹۲ \\ ۶/۵۲۴ & ۶/۴۸۸ & ۳/۶۴۸ \\ ۴/۵۳۳ & ۶/۲۴۰ & ۶/۸۲۶ \end{bmatrix} \text{ و } \hat{\beta} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱/۱۸۸۸ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱/۶۹۲۷ \end{bmatrix}$$

جدول ۱: داده‌های محدود به عرض جغرافیایی ۲۷° تا ۳۰° و طول جغرافیایی ۵۵° تا ۵۸° در استان‌های هرمزگان و کرمان، شامل زلزله‌های بزرگ‌تر از ۵ ریشتر ($M \geq ۵$) در فاصله زمانی بین سالهای ۱۹۲۳ تا ۲۰۱۲

M	تاریخ	M	تاریخ	M	تاریخ	M	تاریخ	M	تاریخ
۵/۳	۱۷/۰۴/۲۰۰۲	۵/۸	۱۲/۰۷/۱۹۸۳	۵	۲۷/۰۸/۱۹۷۵	۵/۵	۲۹/۰۹/۱۹۶۲	۶/۷	۲۲/۰۹/۱۹۲۳
۵/۳	۱۴/۰۲/۲۰۰۳	۵/۱	۱۱/۱۰/۱۹۸۴	۵/۱	۰۸/۱۰/۱۹۷۵	۵/۶	۰۶/۱۱/۱۹۶۲	۵/۵	۲۳/۰۹/۱۹۲۳
۵/۲	۰۵/۱۱/۲۰۰۳	۵/۲	۲۵/۰۷/۱۹۸۶	۵/۵	۲۴/۱۲/۱۹۷۵	۵/۲	۲۹/۰۷/۱۹۶۳	۵/۵	۱۸/۰۱/۱۹۲۴
۵	۱۰/۰۸/۲۰۰۴	۵	۰۸/۰۸/۱۹۸۶	۵	۲۴/۱۰/۱۹۷۶	۵/۳	۳۱/۱۰/۱۹۶۳	۵/۵	۲۴/۰۹/۱۹۲۵
۵/۱	۰۶/۱۰/۲۰۰۴	۵/۸	۲۹/۰۴/۱۹۸۷	۵	۱۳/۱۱/۱۹۷۶	۵/۳	۱۱/۰۵/۱۹۶۴	۵/۲	۲۳/۰۴/۱۹۲۶
۵/۳	۰۷/۱۰/۲۰۰۴	۵/۲	۱۲/۰۵/۱۹۸۷	۵/۵	۰۵/۰۱/۱۹۷۷	۵/۵	۲۷/۰۸/۱۹۶۴	۶/۲	۰۹/۰۵/۱۹۲۷
۵/۱	۰۸/۱۲/۲۰۰۴	۵/۷	۱۸/۱۲/۱۹۸۷	۶/۵	۲۱/۰۳/۱۹۷۷	۵/۱	۱۴/۰۹/۱۹۶۴	۵/۸	۱۱/۰۵/۱۹۳۰
۵/۸	۲۸/۰۲/۲۰۰۶	۵	۰۹/۰۶/۱۹۸۸	۵/۱	۲۹/۰۳/۱۹۷۷	۵/۳	۲۹/۱۰/۱۹۶۴	۵/۷	۱۲/۰۵/۱۹۳۰
۶	۲۵/۰۳/۲۰۰۶	۵/۲	۰۲/۰۴/۱۹۸۹	۵/۹	۰۱/۰۴/۱۹۷۷	۵/۳	۱۹/۱۲/۱۹۶۴	۵/۵	۱۷/۰۸/۱۹۳۰
۵	۲۰/۰۲/۲۰۰۷	۵/۵	۲۰/۱۱/۱۹۸۹	۵/۱	۳۰/۰۴/۱۹۷۷	۵/۷	۲۲/۱۲/۱۹۶۴	۶/۲	۲۳/۰۸/۱۹۳۰
۵/۱	۲۵/۰۴/۲۰۰۷	۶/۱	۰۶/۱۱/۱۹۹۰	۵/۵	۱۹/۰۵/۱۹۷۷	۵	۲۳/۱۲/۱۹۶۴	۵/۲	۰۵/۰۹/۱۹۳۰
۵	۲۵/۰۸/۲۰۰۷	۵	۱۰/۱۲/۱۹۹۰	۵/۱	۰۱/۱۲/۱۹۷۷	۵/۸	۲۱/۰۶/۱۹۶۵	۵/۲	۲۱/۰۲/۱۹۳۳
۵/۲	۱۷/۰۹/۲۰۰۸	۵/۷	۲۲/۰۵/۱۹۹۱	۵/۱	۱۰/۱۲/۱۹۷۷	۵/۱	۰۸/۱۱/۱۹۶۵	۵	۱۷/۰۴/۱۹۳۶
۵/۱	۲۶/۰۹/۲۰۰۸	۵/۳	۱۹/۱۲/۱۹۹۱	۵/۲	۱۱/۰۲/۱۹۷۸	۵/۱	۰۱/۰۳/۱۹۶۷	۵	۲۹/۰۷/۱۹۴۲
۵/۱	۲۳/۰۲/۲۰۰۹	۵/۶	۱۹/۰۵/۱۹۹۲	۵	۲۲/۰۲/۱۹۷۸	۵/۲	۲۳/۰۴/۱۹۶۸	۵/۲	۰۱/۰۲/۱۹۴۸
۵	۰۳/۱۱/۲۰۰۹	۵/۲	۱۲/۰۴/۱۹۹۳	۵/۱	۲۳/۰۲/۱۹۷۸	۵/۲	۲۱/۰۶/۱۹۶۹	۵/۹	۰۵/۰۷/۱۹۴۸
۵/۴	۳۱/۰۷/۲۰۱۰	۵/۲	۰۹/۰۷/۱۹۹۳	۵	۰۴/۰۳/۱۹۷۹	۵/۵	۲۸/۰۲/۱۹۷۰	۶/۱	۲۴/۰۴/۱۹۴۹
۵	۱۰/۱۱/۲۰۱۰	۵/۲	۱۴/۰۴/۱۹۹۴	۵/۱	۱۷/۱۱/۱۹۸۰	۵/۴	۰۹/۱۱/۱۹۷۰	۵/۹	۰۴/۰۷/۱۹۴۹
۵/۲	۰۵/۰۳/۲۰۱۱	۵	۰۱/۱۰/۱۹۹۴	۵/۵	۲۸/۱۱/۱۹۸۰	۶	۱۲/۰۴/۱۹۷۱	۵	۰۵/۰۸/۱۹۴۹
۵/۴	۱۵/۰۶/۲۰۱۱	۵	۰۶/۱۱/۱۹۹۵	۵	۰۶/۰۱/۱۹۸۱	۵/۱	۰۵/۱۰/۱۹۷۱	۵/۵	۲۲/۱۱/۱۹۴۹
۵/۲	۰۹/۰۱/۲۰۱۲	۵/۶	۲۶/۰۲/۱۹۹۶	۵/۳	۱۶/۰۴/۱۹۸۱	۵/۳	۰۹/۱۲/۱۹۷۱	۵/۷	۱۶/۰۸/۱۹۵۱
۵/۱	۱۸/۰۴/۲۰۱۲	۵/۲	۱۸/۱۰/۱۹۹۶	۶	۱۱/۰۶/۱۹۸۱	۵	۲۰/۱۲/۱۹۷۱	۵/۹	۳۰/۱۲/۱۹۵۱
۵/۱	۱۴/۰۵/۲۰۱۲	۵/۳	۱۹/۰۴/۱۹۹۷	۵/۳	۰۳/۰۷/۱۹۸۱	۵	۰۳/۰۴/۱۹۷۲	۵/۱	۲۸/۰۲/۱۹۵۴
		۵/۵	۲۰/۱۰/۱۹۹۷	۵/۹	۲۸/۰۷/۱۹۸۱	۵	۰۲/۰۸/۱۹۷۲	۵	۱۳/۰۳/۱۹۵۵
		۵	۰۱/۰۸/۱۹۹۸	۵/۲	۱۴/۱۰/۱۹۸۱	۵/۲	۰۹/۱۰/۱۹۷۲	۵/۲	۲۹/۰۶/۱۹۵۶
		۵	۱۴/۰۱/۱۹۹۹	۵/۳	۱۱/۰۷/۱۹۸۲	۵	۰۴/۱۱/۱۹۷۲	۵	۰۲/۰۵/۱۹۵۸
		۶/۱	۰۴/۰۳/۱۹۹۹	۵	۱۵/۱۰/۱۹۸۲	۵/۳	۲۵/۰۸/۱۹۷۳	۵/۷	۰۶/۰۴/۱۹۶۱
		۵/۴	۰۵/۰۳/۲۰۰۰	۵	۱۷/۰۱/۱۹۸۳	۵/۴	۰۲/۱۲/۱۹۷۴	۵/۱	۱۱/۰۶/۱۹۶۱
		۵	۲۵/۱۱/۲۰۱۱	۵	۳۱/۰۱/۱۹۳۸	۵/۸	۰۷/۰۳/۱۹۷۵	۵	۱۴/۰۸/۱۹۶۲

به‌علاوه، برآورد ناپارامتری توزیع زمان‌های بین ورود توسط فرمول

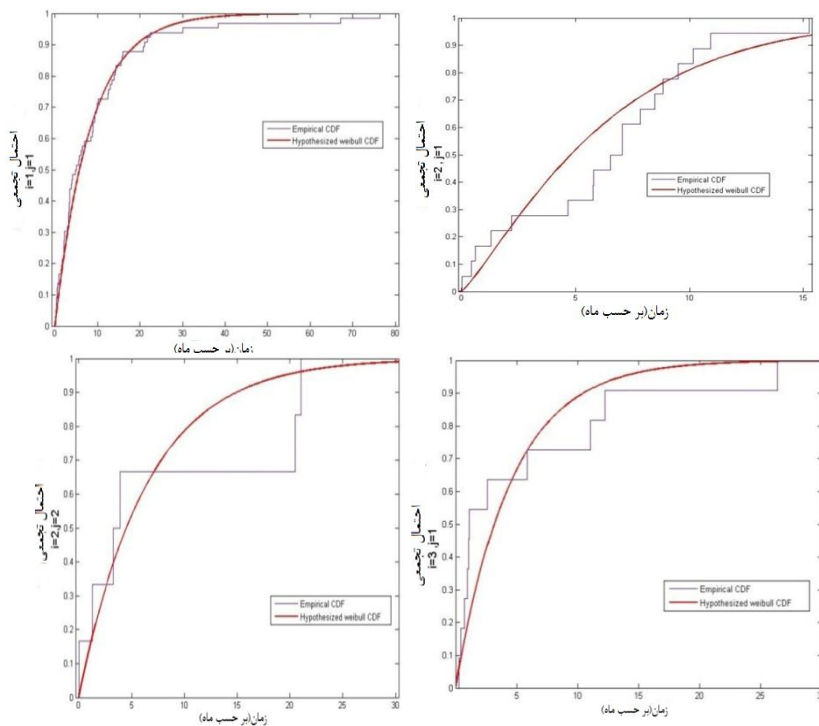
$$\tilde{F}_{ij}(N) = \frac{1}{N_{ij}(T)} \sum_{n=1}^{N(T)} I_{\{J_{n-1}=i, J_n=j, X_n \leq x\}}$$

محاسبه می‌شود [۵]. در شکل ۱ مقایسه‌ی بین توزیع‌های ناپارامتری و وایبول برآورد شده، ارائه شده است. هرگاه $n_{ij}(N)$ و $n_i(N)$ به ترتیب نشان‌دهنده تعداد تغییر وضعیت‌های مستقیم از i به j و تعداد تغییر وضعیت‌هایی که از مکان i شروع می‌شوند، باشند، در این صورت

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی احتمالات انتقال برابر است با $\hat{P}_{ij}(N) = \frac{n_{ij}(N)}{n_i(N)}$. به صورت

ماتریسی داریم:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0/702 & 0/223 & 0/075 \\ 0/630 & 0/207 & 0/172 \\ 0/733 & 0/134 & 0/133 \end{bmatrix}$$



شکل ۱: مقایسه بین توزیع ناپارامتری و توزیع وایبول برآورد شده

همچنین ماتریس‌های \bar{m} و $\hat{\mu}$ در زیر میانگین‌های حسابی زمان‌های بین ورود می‌باشند که به ترتیب و جداگانه یک بار با استفاده از داده‌های زلزله و یک بار با استفاده از برآورد پارامترهای توزیع وایبول محاسبه شده‌اند:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 8/304 & 6/206 & 3/692 \\ 6/151 & 6/488 & 3/648 \\ 4/553 & 6/240 & 6/092 \end{bmatrix} \text{ و } \bar{m} = \begin{bmatrix} 9/487 & 6/284 & 3/919 \\ 6/242 & 8/333 & 3/953 \\ 5/703 & 18/316 & 6/066 \end{bmatrix}.$$

توزیع مانای زنجیر مارکف نشانده شده برابر است با سطرهای $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}^n$ که در بردار $\hat{\pi}$ نمایش داده شده است:

$$\hat{\pi} = [0/688 \quad 0/211 \quad 0/101].$$

همچنین برآورد میانگین‌های زمان‌های توقف η_i و میانگین‌های زمان بازگشت θ_i برای حالت‌های زلزله برابر است با:

$$\hat{\eta} = [7/490 \quad 5/790 \quad 4/983] \text{ و } \hat{\theta} = [9/996 \quad 32/659 \quad 67/898]$$

۵-۲- برآورد میانگین تعداد زلزله، توزیع زمان اصابت زلزله‌های قوی و توابع انتقال

در این مطالعه پس از قبول فرض برازش توزیع وایبول بر داده‌ها، پارامترهای شکل توزیع $\beta_{ij} = 1$ یا $\beta_{ij} > 1$ در حالت $\beta_{ij} = 1$ ، توزیع وایبول به صورت توزیع نمایی با پارامتر α_{ij} درمی‌آید که تبدیل لاپلاس استیلیتیس این توزیع برابر است با $\tilde{f}_{ij}(s) = (\alpha_{ij}s + 1)^{-1}$. در این صورت تبدیل لاپلاس استیلیتیس درایه‌های هسته‌ی تجدیدمارکف $\tilde{Q}_{ij}(s) = \hat{P}_{ij}(\hat{\alpha}_{ij}s + 1)^{-1}$ است.

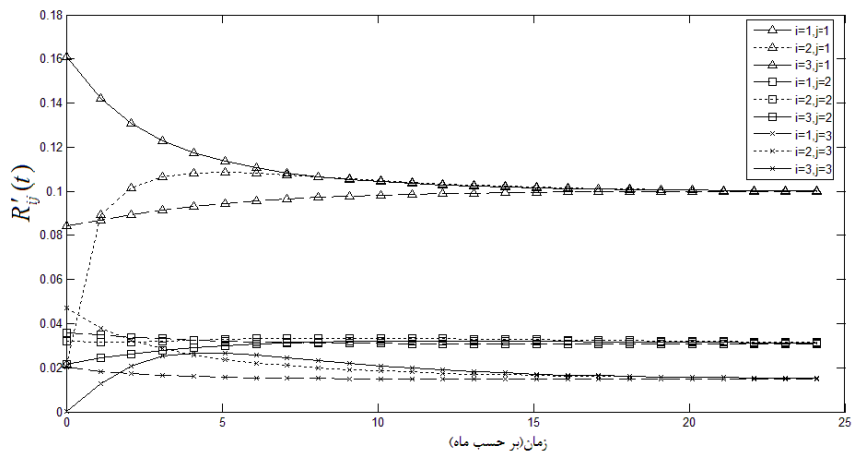
در حالت $\beta_{ij} > 1$ ، انتگرال تبدیل لاپلاس یک انتگرال غیرصریح می‌باشد. بنابراین با استفاده از بسط مک لورن به تقریب تبدیل لاپلاس می‌پردازیم. قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ ، در این صورت می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\lambda t^\beta})' dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\lambda t^\beta}) dt - (1 - e^{-\lambda 0^\beta}) \\ &= s \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - e^{-\lambda t^\beta}) dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} dt - s \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t^\beta} dt = 1 - s \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t^\beta} dt \end{aligned}$$

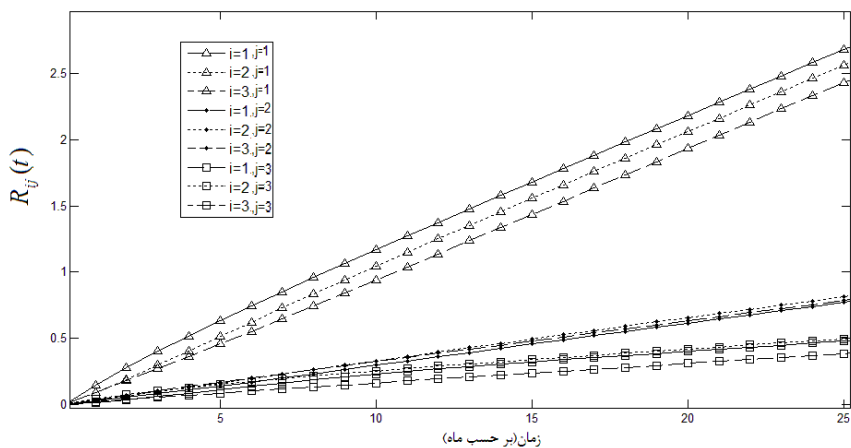
و به وسیله‌ی بسط مک لورن $e^{-\lambda t^\beta}$ و انتگرال گیری از آن نتیجه می‌شود:

$$\tilde{f}(s) = \lambda \frac{\beta \cdot \Gamma(\beta)}{s^\beta} - \frac{\lambda^\nu \nu \beta \cdot \Gamma(\nu \beta)}{\nu! s^{\nu \beta}} + \frac{\lambda^\nu \nu \beta \cdot \Gamma(\nu \beta)}{\nu! s^{\nu \beta}} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \lambda^n n \beta \cdot \Gamma(n \beta)}{n! s^{n \beta}}$$

در نهایت داریم $\tilde{Q}_{ij}(s) = \hat{P}_{ij} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \hat{\lambda}_{ij}^n n \hat{\beta}_{ij} \cdot \Gamma(n \hat{\beta}_{ij})}{n! s^{n \hat{\beta}_{ij}}}$ که در آن $\hat{\lambda}_{ij} = \frac{\hat{\beta}_{ij}}{\hat{\alpha}_{ij}}$ [۱۴].

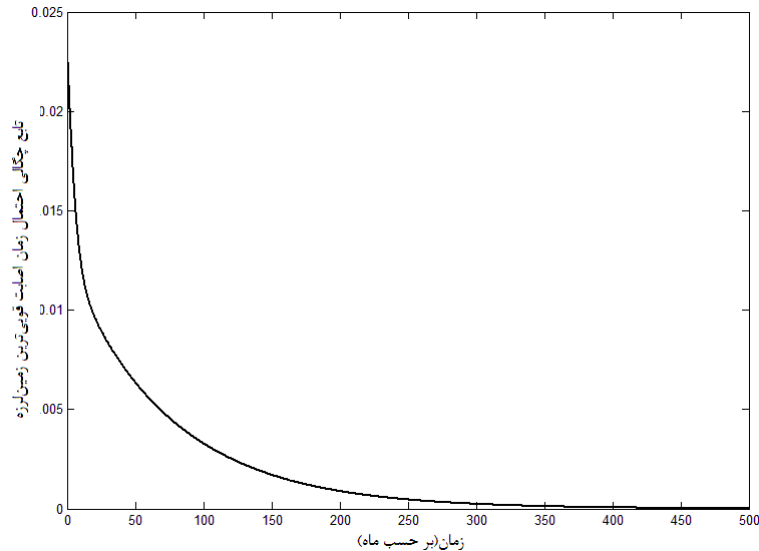


شکل ۲: تابع مشتق امید تعداد ملاقات زلزله‌ی حالت i ام با شروع از حالت j ام، $\hat{R}'_{ij}(t)$



شکل ۳: برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله حالت i ام با شروع از حالت j ام تا زمان t ، $\hat{R}_{ij}(t)$

با توجه به این‌که $\bar{\mathbf{R}}(s)$ در این مطالعه دارای شکل بسیار پیچیده‌ای می‌باشد و استفاده از روش‌های معمول جهت محاسبه‌ی لاپلاس معکوس عملاً غیرممکن و یا دارای سرعت محاسباتی بسیار کم است، از این‌رو با استفاده از روابط (۶) و (۷) این محاسبات را انجام می‌دهیم. در شکل ۲ نمودار توابع $\hat{R}'_{ij}(t)$ مشاهده می‌گردد. در شکل ۳ برآورد میانگین تعداد رویداد زلزله حالت \bar{t} ام با شروع از حالت \bar{t} ام تا زمان t یعنی $\hat{R}_{ij}(t)$ ارائه گردیده است. فرض کنیم فرایند در حالت ۱ یا ۲ باشد، در این صورت تابع توزیع اولین زمان اصابت زلزله قوی می‌تواند یک معیار مناسب برای پیش‌بینی و تحلیل وقوع زلزله‌های قوی آتی باشد. بدین منظور تابع توزیع زمان اولین زمان اصابت حالت قوی زمین‌لرزه را برآورد می‌نماییم.



شکل ۴: تابع چگالی احتمال زمان اصابت قوی‌ترین زمین‌لرزه، $g_{H3}(t_k)$

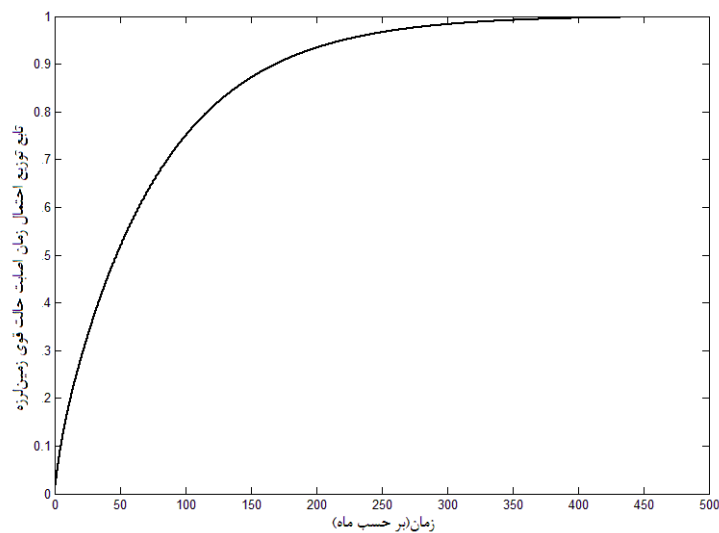
فرض کنیم $\bar{G}_{H\tau}(s)$ تبدیل لاپلاس تابع توزیع زمان اصابت قوی‌ترین زمین‌لرزه و $H = \{1, 2\}$ باشد، $\bar{G}_{H\tau}(s)$ را می‌توان از رابطه‌ی $\bar{G}_{H\tau}(s) = \sum_{k \in H} \gamma_k \bar{G}_{k\tau}(s)$ به‌دست آورد که در آن وزن γ_k برابر احتمال بودن در حالت $k \in H$ در لحظه‌ی شروع است. چون فرایند زلزله از زمان بسیار دور آغاز شده است، در این صورت γ با استفاده از نسبت احتمال در توزیع مانای زنجیر مارکف نشانده شده برآورد می‌گردد؛ بدین معنی که اگر π بردار احتمال زنجیر مارکف نشانده شده باشد، در این صورت درآبه‌های γ را از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\gamma_k = \begin{cases} \pi_k / \sum_{i \in H} \pi_i & k \in H \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

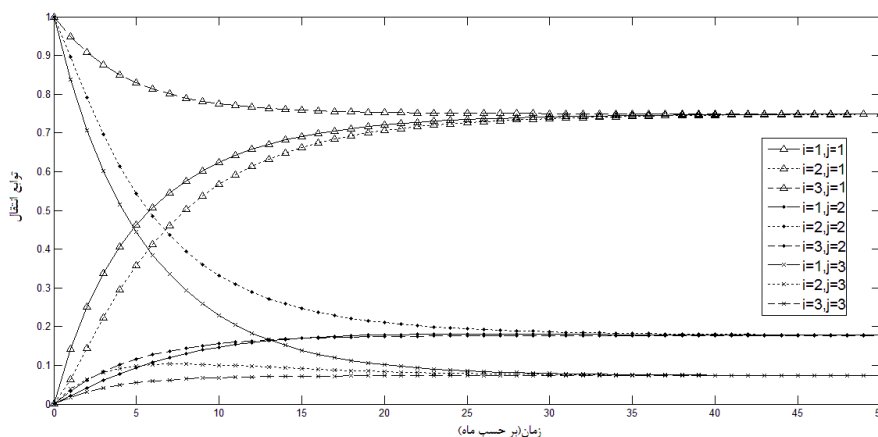
مجدداً، چون تبدیل لاپلاس توزیع زمان اصابت قوی ترین زمین لرزه دارای شکل پیچیده و قسمت موهومی است، ناگزیر به استفاده از روش اویلر برای تقریب لاپلاس معکوس هستیم. به همین جهت با استفاده از (۸) و (۹) توابع $g_{H_3}(t_k)$ و $G_{H_T}(t)$ محاسبه می‌شوند. شکل-های ۴ و ۵ به ترتیب این توابع را نمایش می‌دهند. همچنین با استفاده از (۵) و روش اویلر توابع انتقال $\varphi_{ij}(t)$ محاسبه شده‌اند که در شکل ۶ این توابع مشاهده می‌گردند.

۶- پیش‌بینی رویداد زلزله و برآورد نرخ خطر

یکی از مهم‌ترین اهداف این مطالعه پیش‌بینی حالت بعدی زلزله با دانستن اطلاعات از زمان و بزرگی آخرین زلزله است. بدین منظور فرض می‌کنیم فرایند در حالت i بوده و زمان t_0 از آن گذشته است،



شکل ۵: تابع توزیع احتمال زمان اصابت حالت قوی زمین لرزه، $G_{H_T}(t)$



شکل ۶: برآورد توابع انتقال از حالت i ام به حالت j ام، $\varphi_{ij}(t)$

احتمال این‌که حالت زلزله بعدی j باشد و در فاصله‌ی زمانی $[t_0, t_0 + \Delta t]$ رخ دهد، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$P_{ij}^{\Delta t|t_0} = P(J_{n+1} = j, T_{n+1} \leq t_0 + \Delta t | J_n = i, T_{n+1} \geq t_0), \quad i, j \in E$$

که در آن J_{n+1} حالت زلزله بعدی، J_n حالت زلزله قبلی، t_0 زمان سپری‌شده از زلزله قبلی و Δt بازه‌ی زمانی موردنظر برای پیش‌بینی زلزله‌ی بعدی در آینده است. اگر F_{ij} تابع توزیع زمان‌های گذار بین حالت‌های i و j باشد، در این صورت معادله‌ی قبلی را می‌توان بدین صورت نوشت [۴]:

$$P_{ij}^{\Delta t|t_0} = \frac{[F_{ij}(t_0 + \Delta t) - F_{ij}(t_0)] p_{ij}}{[1 - F_{i1}(t_0)] p_{i1} + [1 - F_{i2}(t_0)] p_{i2} + [1 - F_{i3}(t_0)] p_{i3}}. \quad (11)$$

اندازه‌ی این احتمال به ازای مقادیر ۲۴، ۱۲، ۶، ۴۸ و ۳۶ ماه برای Δt و مقادیر ۲۴، ۱۲، ۶ و ۳۶ ماه برای t_0 محاسبه و نتایج در جداول ۳ تا ۶ آورده شده‌اند.

با توجه به این‌که تجزیه و تحلیل زلزله‌ی حالت سوم به دلیل احتمال برجگذاشتن خسارات زیادتر از اهمیت بیشتری برخوردار است، تابع نرخ خطر رویداد حالت سوم می‌تواند به عنوان شاخصی مطلوب جهت تحلیل زمین‌لرزه‌های با شدت بالا مورد استفاده قرار گیرد. نرخ خطر رویداد زمین‌لرزه نوع سوم بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\lambda(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P(Z_{t+h} = 3 | Z_u \in \{1, 2\}; \forall u \leq t). \quad (12)$$

جدول ۳: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت اول، $P_{ij}^{\Delta t|t_0}$

$t_0 = 12 \text{ months}$			$t_0 = 6 \text{ months}$			$t_0 = 0 \text{ months}$			
$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	Δt
۰/۰۱۱۶	۰/۰۹۹۶	۰/۴۲۴۳	۰/۰۲۶۹	۰/۱۱۹۳	۰/۳۹۸۲	۰/۰۶۰۲	۰/۱۳۸۲	۰/۳۶۱۲	۶ months
۰/۰۱۳۹	۰/۱۳۷۵	۰/۶۳۰۳	۰/۰۳۲۲	۰/۱۶۴۷	۰/۵۹۱۵	۰/۷۲۱۰	۰/۱۹۰۷	۰/۵۳۶۵	۱۲ months
۰/۰۱۴۵	۰/۱۵۷۴	۰/۷۷۸۹	۰/۰۳۳۵	۰/۱۸۸۶	۰/۷۳۰۹	۰/۰۷۴۹	۰/۲۱۸۳	۰/۶۶۳۰	۲۴ months
۰/۰۱۴۵	۰/۱۶۰۳	۰/۸۱۳۹	۰/۰۳۳۵	۰/۱۹۲۰	۰/۷۶۳۸	۰/۰۷۵۰	۰/۲۲۲۳	۰/۶۹۲۸	۳۶ months
۰/۰۱۴۵	۰/۱۶۰۷	۰/۸۲۲۲	۰/۰۳۳۵	۰/۱۹۲۵	۰/۷۷۱۵	۰/۰۷۵۰	۰/۲۲۲۹	۰/۶۹۹۸	۴۸ months

جدول ۴: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت دوم، $P_{ij}^{\Delta t|t_0}$

$t_0 = 12 \text{ months}$			$t_0 = 6 \text{ months}$			$t_0 = 0 \text{ months}$			
$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	Δt
۰/۰۴۳۹	۰/۱۶۶۷	۰/۴۸۲۸	۰/۰۷۳۱	۰/۱۳۵۲	۰/۴۷۰۲	۰/۱۳۸۸	۰/۱۲۴۹	۰/۳۶۹۸	۶ months
۰/۰۵۲۴	۰/۲۳۲۹	۰/۶۲۱۵	۰/۰۸۷۲	۰/۱۸۸۸	۰/۶۲۵۴	۰/۱۶۵۸	۰/۱۷۴۴	۰/۵۴۲۱	۱۲ months
۰/۰۵۴۳	۰/۲۶۹۵	۰/۶۶۶۷	۰/۰۹۰۵	۰/۲۱۸۵	۰/۶۸۱۷	۰/۱۷۱۸	۰/۲۰۱۹	۰/۶۱۵۰	۲۴ months
۰/۰۵۴۴	۰/۲۷۵۳	۰/۶۶۹۱	۰/۰۹۰۶	۰/۲۲۳۲	۰/۶۸۵۲	۰/۱۷۲۰	۰/۲۰۶۲	۰/۶۲۰۷	۳۶ months
۰/۰۵۴۴	۰/۲۷۶۲	۰/۶۶۹۲	۰/۰۹۰۶	۰/۲۲۳۹	۰/۶۸۵۳	۰/۱۷۲۰	۰/۲۰۶۹	۰/۶۲۱۰	۴۸ months

جدول ۵: برآورد احتمال وقوع زلزله پس از زلزله‌ی حالت سوم، $P_{ij}^{\Delta t|t_0}$

$t_0 = 12 \text{ months}$			$t_0 = 6 \text{ months}$			$t_0 = 0 \text{ months}$			
$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	Δt
۰/۱۱۱۳	۰/۱۴۷۵	۰/۴۶۹۱	۰/۱۶۱۷	۰/۱۰۳۱	۰/۴۶۸۱	۰/۰۷۳۵	۰/۰۸۲۸	۰/۵۳۶۸	۶ months
۰/۱۲۰۳	۰/۲۰۳۹	۰/۵۹۴۷	۰/۱۹۱۴	۰/۱۴۲۵	۰/۵۹۳۴	۰/۱۲۳۱	۰/۱۱۴۴	۰/۶۸۰۵	۱۲ months
۰/۱۲۰۶	۰/۲۳۳۷	۰/۶۳۷۳	۰/۱۹۳۹	۰/۱۶۶۳	۰/۶۳۵۹	۰/۱۳۳۰	۰/۱۳۱۱	۰/۷۲۹۲	۲۴ months
۰/۱۲۰۶	۰/۲۳۸۱	۰/۶۴۰۳	۰/۱۹۳۹	۰/۱۶۶۳	۰/۶۳۹۰	۰/۱۳۳۰	۰/۱۳۳۶	۰/۷۳۲۷	۳۶ months
۰/۱۲۰۶	۰/۲۳۸۷	۰/۶۴۰۶	۰/۱۹۳۹	۰/۱۶۶۸	۰/۶۳۹۲	۰/۱۳۳۰	۰/۱۳۳۹	۰/۷۳۳۰	۴۸ months

که عبارت از این احتمال است که با اطلاع از این که در بازه $(0, t)$ فقط زلزله‌هایی از حالت ۱ یا ۲ رخ داده است، در یک بازه‌ی زمانی آتی کوچک یک زلزله با بزرگی بیشتر از ۵/۸ روی

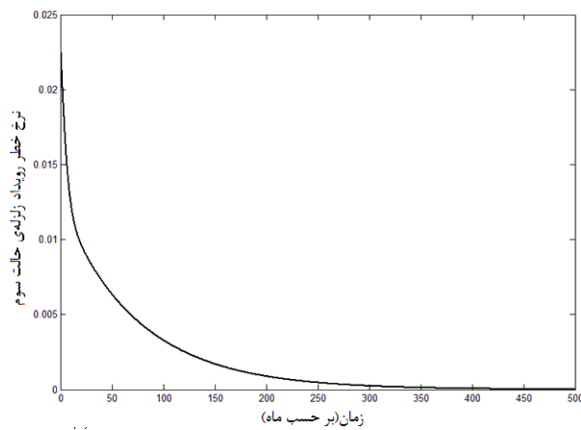
بدهد. فرض کنیم $G_{H\tau}(t)$ تابع توزیع زمان اصابت زلزله‌های قوی باشد، در این صورت طبق تعریف استاندارد تابع نرخ خطر، رابطه (۱۲) معادل رابطه زیر است:

$$\lambda(t) = \frac{g_{H\tau}(t)}{1 - G_{H\tau}(t)} \quad H = \{1, 2\}.$$

در شکل ۷ تابع نرخ خطر رویداد زمین‌لرزه حالت سوم نمایش داده شده است.

جدول ۶: برآورد احتمال وقوع زلزله با فرض این که ۲۴ ماه از آخرین زلزله گذشته است، $P_{ij}^{\Delta t|t_0=24}$

$t_0 = 24 \text{ months}$									
$P_{33}^{\Delta t t_0}$	$P_{32}^{\Delta t t_0}$	$P_{31}^{\Delta t t_0}$	$P_{23}^{\Delta t t_0}$	$P_{22}^{\Delta t t_0}$	$P_{21}^{\Delta t t_0}$	$P_{13}^{\Delta t t_0}$	$P_{12}^{\Delta t t_0}$	$P_{11}^{\Delta t t_0}$	Δt
۰/۰۰۴۴	۰/۲۶۵۶	۰/۴۱۴۲	۰/۰۱۷۶	۰/۲۸۱۴	۰/۳۸۹۳	۰/۰۰۲۱	۰/۰۶۶۰	۰/۴۵۸۳	۶ months
۰/۰۰۴۵	۰/۳۶۷۱	۰/۵۲۵۰	۰/۰۲۰۹	۰/۳۹۲۹	۰/۴۸۴۲	۰/۰۰۲۵	۰/۰۹۱۲	۰/۶۸۰۹	۱۲ months
۰/۰۰۴۵	۰/۴۲۰۸	۰/۵۶۲۷	۰/۰۲۱۷	۰/۴۵۴۸	۰/۵۱۰۷	۰/۰۰۲۶	۰/۱۰۴۳	۰/۸۴۱۴	۲۴ months
۰/۰۰۴۵	۰/۴۲۸۶	۰/۵۶۵۴	۰/۰۲۱۸	۰/۴۶۴۵	۰/۵۱۱۹	۰/۰۰۲۶	۰/۱۰۶۲	۰/۸۷۹۲	۳۶ months
۰/۰۰۴۵	۰/۴۲۹۷	۰/۵۶۵۶	۰/۰۲۱۸	۰/۴۶۶۰	۰/۵۱۱۹	۰/۰۰۲۶	۰/۱۰۶۵	۰/۸۸۸۱	۴۸ months



شکل ۷: نرخ خطر رویداد زلزله‌ی حالت سوم، $\lambda(t)$

۷- نتیجه‌گیری

در کاربرد مدل نیمه‌مارکف، محاسبه‌ی ماتریس تجدیدمارکف، توابع انتقال، توزیع زمان اصابت و تابع نرخ خطر وقوع حالتی خاص، از اهمیت زیادی برخوردار است. با توجه به پیچیدگی محاسبات، در عمل زمانی که فضای حالت نیمه‌مارکف کوچک و یا قسمت عمده‌ای از درآیه‌های

ماتریس هسته‌ی تجدیدمارکف صفر است، محاسبه‌ی توابع فوق امکان‌پذیر است. توسط روش ارائه‌شده در مقاله‌ی حاضر می‌توان توابع فوق‌الذکر را بسیار سریع و کارآمد تقریب زد. رویدادهای بعدی زلزله می‌تواند معیاری برای سنجش صحت و اعتبار مدل نیمه‌مارکف ارائه‌شده، جهت پیش‌بینی رویداد زمین‌لرزه باشد. با توجه به نتایج ارائه‌شده، انتظار آن می‌رود که یک زمین‌لرزه با بزرگی $5/4 < M \leq 5$ بین ۱۲ تا ۱۸ ماه پس از آخرین زلزله رخ دهد. دقیقاً مطابق این پیش‌بینی، زلزله‌ای در تاریخ ۲۰۱۳/۷/۱ بعد از ۴۳۹ روز از آخرین زلزله در جدول داده‌ها، با بزرگی ۵ ریشتر در مختصات $55/6^\circ$ شرقی و $27/7^\circ$ شمالی رخ داد. طبق رابطه‌ی (۱۱)، احتمال رویداد این زمین‌لرزه با $\Delta t = 14/63$ ماه و $t_0 = 0$ برابر است با $0/581$. همچنین میانگین تعداد زلزله‌های مورد انتظار حالت اول، دوم و سوم با شروع از حالت اول در ۱۴/۶۳ ماه آینده به ترتیب ۱/۳۲۸، ۰/۴۴۹ و ۰/۲۲ است. ملاحظه می‌شود زلزله حالت اول یک بار رخ داده ولی زلزله‌های حالت دوم و سوم که مقدار امید تعداد رویداد آن‌ها کمتر است، رخ نداده‌اند. همچنین احتمال ماندن در حالت اول از زمان صفر تا ۱۴/۶۳ ماه طبق نمودار $\varphi_{11}(t)$ در شکل ۶ در کمترین مقدار برابر است با ۰/۷۶۰۵ و به‌صورت تجربی و در عمل نیز مشاهده می‌شود که فرایند زلزله همچنان در حالت اول مانده است. این مقایسه‌ها نشان می‌دهند که نتایج حاصل از مدل ارائه‌شده با آخرین داده‌ی لرزه‌ی ثبت‌شده در ماه‌های اخیر مطابقت دارد که حاکی از اعتبار بالای مدل است.

مراجع

- [1] Cluff, L.S., Patwardhan, A.S. and Coppersmith, K.J. (1980). Estimating the probability of occurrences of surface faulting earthquakes on the Wasatch fault zone, Utah. *Bull. Seism. Soc. Am.* **70**, 1463–1478.
- [2] Altinok, Y. and Kolcak, D. (1999). An application of the semi-Markov model for earthquake occurrences in North Anatolia, Turkey. *Journal of Balkan Geophysical Society*, **2(4)**, 90-99.
- [3] Alvarez, E.E. (2005). Estimation in stationary Markov renewal processes with application to earthquake forecasting in Turkey. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **7**, 119–130.
- [4] Garavaglia, E. and Pavani, R. (2011). About earthquake forecasting by Markov renewal processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **13**, 155-169.
- [5] Vots, I., Limnios, N., Tsaklidis, G. and Papadimitriou, E. (2012). Estimation of the expected number of earthquake occurrences based on semi-markov models. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **14**, 685–703.

-
- [6] Cinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*, Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ.
- [7] Janssen, j. and Manca, R. (2006). *Applied Semi-Markov processes*, Springer, Berlin.
- [8] Harrison, P.G. and Knottenbelt, W.J. (2002). Passage time distribution in large Markov Chain. *In Proc. ACM SIGMETRICS. Marina Del Rey, California, USA, June 2002*, 77–85.
- [9] Joseph, A. and Whitt, W. (2006). A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. *INFORMS Journal of Computing*, **18(4)**, 408-421.
- [10] O'Kinneide, C.A. (1997). Euler summation for Fourier series and Laplace transform inversion. *Stochastic Models*, **13**, 315-337.
- [11] Zamani, A., Sami, A. and Khalili, M. (2012). Multivariate rule-based seismicity map of Iran: a data-driven model. *Bulletin of Earthquake Engineering*, **10**, 1667–1683.
- [12] Reasenber, P. (1985). Second-order moment of central California seismicity, 1969–1982. *J. Geophys. Res.*, **90**, 5479–5495.
- [13] Alvarez, E.E. (2003). Maximum likelihood estimation in alternating renewal processes under window censoring. *Stochastic Models*, **22(1)**, 55-76.

The Parametric Estimation and Prediction of Earthquake Occurrences in the South of Iran Based on a Semi-Markov Model

Meysam Pashapoor^{*}, Kavous Khorshidian^{*} and Mrazieh Khalili^{**}

^{*}Department of Statistics, Shiraz University, Shiraz, Iran

^{**}Department of Geology, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract

In this paper, a semi-Markov model is applied for description the seismicity patterns in the region within (27°, -30°) latitude and (55°, 58°) longitude, which includes some portion of the Kerman and Hormozgan provinces. The classification of states of the model is based on magnitudes of earthquakes. Because of the features of Weibull distribution and earthquake characteristics, it is assumed that the crossing times between states are Weibull. Some numerical estimates for the semi-Markov kernel and the mean recurrence times of earthquakes have been presented based on the past information. A new computational method which is on the basis of the inverse Laplace transform approximation have been introduced for estimating the expected number of earthquakes, distribution of hitting time of strongest earthquakes and transition functions. Estimation of above functions are rapid by using this method, with short processing times. The past history has been used for prediction while the probabilities of future earthquakes with different magnitudes and time intervals have been calculated. The obtained results are consistent with the latest recent earthquake in this zone, which shows the validity of the employed model.

Keywords: Semi-Markov processes, Earthquake, Weibull distribution, Markov renewal matrix, Hitting time.

Mathematics Subject Classification (2010): 60K15, 86A32.