# برآوردگر پیش‌آزمون در مدل نمایی دو پارامتری تحت سانسور فزاینده‌ی نوع II

اکبر اصغر زاده[۱]، محمد شریفی

گروه آمار، دانشگاه مازندران

تاریخ دریافت:۹۴/۷/۷ تاریخ پذیرش:۹۵/۱/۲۹

**چکیده:** در این مقاله، برآوردگرهای پیش‌آزمون برای پارامترهای مکان و مقیاس مدل نمایی دو پارامتری براساس نمونه‌های سانسور شده‌ی فزاینده نوع II ارائه می‌شوند. مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطای برآوردگرهای پیشنهادی محاسبه می‌شوند. نشان داده می‌شود که برآوردگرهای پیشنهادی در همسایگی فرض صفر بهتر از برآوردگرهای کلاسیک متناظر عمل می‌کنند. همچنین دامنه‌ی مقادیری از پارامترها که به ازای آن‌ها، برآوردگرهای پیشنهادی بهتر از برآوردگرهای کلاسیک عمل می‌کنند برحسب اندازه‌های نمونه‌ای و سطوح معناداری مختلف مشخص می‌شوند. در پایان، یک مثال عددی برای تشریح برآوردگرهای پیشنهادی موردبحث قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** مدل نمایی دو پارامتری، برآوردگر پیش‌آزمون، کارایی نسبی، سانسور فزاینده نوعII .

**رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰):** ۶۲F۱۰، ۶۲F۳۰

## ۱- مقدمه

در استنباط آماری و روش‌های کلاسیک رایج برای برآورد پارامتر مجهول جامعه، از اطلاعاتی که از نمونه‌ی تصادفی به دست می‌آید استفاده می‌شود. با این وجود در بسیاری از موارد، علاوه بر اطلاعاتی که نمونه‌ی تصادفی درباره‌ی پارامتر مجهول جامعه در اختیار ما قرار می‌دهد، اطلاعات مفید دیگری (اطلاعات غیر نمونه‌ای) نیز وجود دارد که می‌تواند در بهبود برآورد پارامتر مجهول به ما کمک کند .این اطلاعات غیر نمونه‌ای معمولاً از طریق دانش قبلی یا نتایج

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: a.asgharzadeh@umz.ac.ir

آزمایش‌های قبلی، قابل حصول است. به‌عنوان مثال یک مهندس کنترل کیفیت با توجه به تجربه‌ی شخصی یا نتایج آزمایش‌های قبلی می‌تواند یک حدس اولیه درباره میانگین طول عمر قطعه‌ی مورد آزمایش داشته باشد. براساس نظر فیشر (صالح [۱]، صفحه ۵۸)، این اطلاعات غیر نمونه‌ای را می‌توان در قالب یک آزمون فرض مقدماتی بیان کرد و از آن برای برآورد پارامتر مجهول استفاده کرد. برآوردگری که با توجه به این آزمون مقدماتی به دست می‌آید، برآوردگر پیش‌آزمون گفته می‌شود. به عبارتی اگر برآوردگر کلاسیک پارامتر مجهول $\theta$ را با $\hat{\theta}$ نمایش دهیم و یک حدس اولیه $\theta=\theta_{\circ}$ درباره پارامتر مجهول $\theta$ وجود داشته باشد، در این صورت ابتدا آزمون آماری فرض $H_{\circ}:\theta=\theta_{\circ}$ در مقابل $H_{1}:\theta\neq\theta_{\circ}$ انجام می‌شود. سپس براساس رد یا پذیرش فرض $H_{\circ}$ برآوردگر پیش‌آزمون (PTE) برای $\theta$ به‌صورت زیر معرفی می‌شود که $\hat{\theta}^{PT}=\theta_{\circ}$ اگر $H_{\circ}$ پذیرش شود و $\hat{\theta}^{PT}=\hat{\theta}$ اگر $H_{\circ}$ رد شود.

برآوردگر پیش‌آزمون توسط بانکرافت [۲] و هان و بانکرافت [۳] معرفی شد. از سال ۱۹۴۴ تاکنون محققان زیادی این برآوردگر را موردمطالعه قرار دادند که از میان آن‌ها می‌توان به جاج و بوک [۴] کبریا و صالح [۵]، صالح و کبریا [۶]، بندا [۷]، چیاو و هان [۸]، هان [۹]، شانبوگ و جیهل [۱۰]، آرشی و همکاران [۱۱] و سینگ [۱۲] اشاره کرد. بکلیزی [۱۳] برآوردگر پیش‌آزمون را در توزیع نمایی دو پارامتری براساس داده‌های سانسور شده نوع I بررسی کرد. کبریا و صالح [۱۴] برآوردگر پیش‌آزمون را برای پارامترهای توزیع‌های نمایی و پاراتو براساس نمونه‌های سانسور شده مضاعف بررسی کردند. همچنین بکلیزی [۱۵] و ذاکر زاده و کریمی [۱۶] برآوردگر پیش‌آزمون را در توزیع نمایی دو پارامتری براساس داده‌های رکوردی موردمطالعه قرار دادند. اخیراً میر فرح و احمدی [۱۷] برآوردگرهای پیش‌آزمون و کلاسیک پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری را بر اساس معیار نزدیکی پیتمن با داده‌های رکوردی مورد مقایسه قرار دادند.

در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اعتماد، موارد زیادی وجود دارد که واحدهای آزمایشی قبل از مشاهده زمان خرابی یا شکست آن‌ها از آزمون حذف یا کنار گذاشته می‌شوند. این حذف ممکن است به‌صورت غیرعمدی رخ دهد (توقف آزمایش طول عمر به دلیل شرایط پیش‌بینی‌نشده). معمولاً حذف واحدهای آزمایشی، از قبل طراحی‌شده و عمدی است و به دلایلی همچون صرفه‌جویی در زمان و هزینه توسط آزمونگر صورت می‌گیرد. در این حالت گفته می‌شود که سانسور رخ داده است، یعنی تنها بخشی از داده‌های طول عمر مشاهده می‌شود. در این حالت نمونه‌ی مشاهده‌شده را نمونه سانسور شده نامند. سانسورهای معمولی نوع I و II رایج‌ترین نوع سانسورها هستند. از ایرادات وارد بر سانسورهای معمولی نوع I و II، این است که در این سانسورها اجازه حذف واحدهای آزمایش در زمان‌های غیر از زمان خاتمه آزمایش داده نمی‌شود. اما سانسور فزاینده نوعII، دارای این ایراد نمی‌باشد. این سانسور به

صورت زیر توصیف می‌شود. $n$ واحد آزمایشی را در زمان صفر، در معرض یک آزمایش طول عمر قرار می‌دهیم. با مشاهده اولین شکست، $R_1$ واحد از واحدهای سالم باقیمانده از روند آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. با مشاهده‌ی دومین شکست، $R_2$ واحد از واحدهای سالم باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته شوند و این کار ادامه پیدا می‌کند تا اینکه در زمان $m$ امین شکست همه‌ی واحدهای سالم باقیمانده یعنی

$$R_m = n - R_1 - R_2 - \ldots - R_{m-1} - m$$

از آزمایش طول عمر خارج می‌شوند .در این نوع سانسور، مقادیر $m$ و $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ از پیش تعیین می‌شوند. توجه کنید که اگر

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_{m-1} = 0 \quad , \quad R_m = n - m,$$

آنگاه طرح سانسور معمولی نوع II به دست می‌آید. همچنین اگر داشته باشیم

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_m = 0,$$

آنگاه یک طرح بدون سانسور (نمونه کامل) خواهیم داشت. برای مطالعه بیشتر درباره‌ی سانسور فزاینده می‌توان به کتاب بالاکریشنان و آگاروالا [۱۸] مراجعه کرد.

در این مقاله برآوردگرهای پیش‌آزمون برای پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری بر اساس نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم به دست می‌آیند. اگرچه برآورد پیش‌آزمون پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری با نمونه‌های سانسور شده و رکوردی موردمطالعه قرار گرفته‌اند، با این وجود این برآوردها براساس نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم موردمطالعه قرار نگرفته‌اند. در بخش دوم این مقاله برآوردگرهای پیش‌آزمون برای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی محاسبه و سپس بر اساس معیار میانگین مجذور خطا (MSE)، این برآوردگرها با برآوردگرهای کلاسیک متناظرشان مقایسه می‌شوند. همچنین دامنه‌ای از مقادیر پارامترها که به ازای آن‌ها، برآوردگرهای پیشنهادی بهتر از برآوردگرهای کلاسیک می‌باشند ارائه می‌شوند. در بخش سوم، یک مثال عددی برای تشریح روش پیشنهادی برآورد پارامترها ارائه می‌شود.

## ۲-۱- برآوردگرهای پیش‌آزمون

فرض کنید $\underline{X} = (X_{1:m:n}, \ldots, X_{m:m:n})$ یک نمونه سانسور فزاینده نوع II با طرح سانسور $\underline{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ از توزیع نمایی دو پارامتر با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}} \quad x > \theta, \quad \sigma > 0, \tag{1}$$

و تابع توزیع

$$F(x)=1-e^{-\frac{x-\theta}{\sigma}} \quad x>\theta, \quad \sigma>0, \tag{۲}$$

باشد که در آن $\theta$ و $\sigma$ به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس می‌باشند. تابع درستنمایی براساس نمونه‌ی سانسور فزاینده نوع II فوق، به صورت زیر می‌باشد [۱۸]

$$\begin{aligned} L(\sigma,\theta,x) &= C\prod_{i=1}^{m} f(x_{i:m:n})[1-F(x_{i:m:n})]^{R_i} \\ &= C\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_{i:m:n}-\theta}{\sigma}}\left[1-\left(1-e^{-\frac{x_{i:m:n}-\theta}{\sigma}}\right)\right]^{R_i} I(\theta)_{(-\infty,\, x_{1:m:n})} \\ &= C\sigma^{-m}e^{\sum_{i=1}^{m}-\frac{x_{i:m:n}-\theta}{\sigma}}\, e^{-\sum_{i=1}^{m}R_i\frac{x_{i:m:n}-\theta}{\sigma}} \\ &= C\sigma^{-m}e^{-\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)\frac{x_{i:m:n}-\theta}{\sigma}} \qquad \theta<x_{1:m:n} \end{aligned}$$

که در آن

$$C=n(n-1-R_1)(n-2-R_1-R_2)\dots(n-m+1-R_1-\dots-R_{m-1}),$$

و $I(.)$ تابع نشانگر می‌باشد. از بالاکریشنان و آگاروالا [۱۸]، بهترین برآوردگر خطی ناریب (BLUE) پارامترهای $\theta$ و $\sigma$ به ترتیب عبارتند از

$$\tilde{\theta}=X_{1:m:n}-\frac{\tilde{\sigma}}{n} \quad , \quad \tilde{\sigma}=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(R_i+1)(X_{i:m:n}-X_{1:m:n}). \tag{۳}$$

واریانس این برآوردگرها به ترتیب به صورت زیر می‌باشند

$$Var(\tilde{\theta})=\frac{\sigma^2}{n^2(m-1)}, \tag{۴}$$

$$Var(\tilde{\sigma})=\frac{\sigma^2}{(m-1)} \tag{۵}$$

علاوه بر این می‌توان نشان داد که

$$T=\frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma}\sim\chi^2_{2(m-1)}$$

در این بخش، برآوردگرهای پیش‌آزمون را برای پارامترهای $\theta$ و $\sigma$ وقتی‌که یک حدس اولیه در مورد مقدار پارامتر $\sigma$ مانند $\sigma=\sigma_{۰}$ وجود داشته باشد در نظر می‌گیریم.

برای محاسبه برآوردگر پیش‌آزمون ابتدا آزمون فرض

$$\begin{cases} H_{۰}:\sigma=\sigma_{۰} \\ H_{۱}:\sigma\neq\sigma_{۰} \end{cases}$$

را در سطح $\alpha$ انجام می‌دهیم. ناحیه پذیرش فرض $H_{۰}$ براساس آزمون درستنمایی (LRT) عبارت است از

$$A=\{T:c_{۱}<T<c_{۲}\} \ ,$$

که در آن $c_{۱}=\chi^{۲}_{\alpha/۲,۲(m-۱)}$، $c_{۲}=\chi^{۲}_{۱-\alpha/۲,۲(m-۱)}$ و $T=\frac{۲(m-۱)\tilde{\sigma}}{\sigma_{۰}}\sim\chi^{۲}_{۲(m-۱)}$. آماره آزمون می‌باشد؛ بنابراین برآوردگرهای پیش‌آزمون برای پارامترهای $\sigma$ و $\theta$ به ترتیب به صورت زیر خواهند بود

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{PT} &= \sigma_{۰} I(A)+\tilde{\sigma} I(\bar{A}) \\ &= \tilde{\sigma}-(\tilde{\sigma}-\sigma_{۰}) I(A) , \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{PT} &= \hat{\theta}_{۰} I(A)+\tilde{\theta} I(\bar{A}) = \left(X_{۱:m:n}-\frac{\sigma_{۰}}{n}\right) I(A)+\left(X_{۱:m:n}-\frac{\tilde{\sigma}}{n}\right) I(\bar{A}) \\ &= \left(X_{۱:m:n}-\frac{\sigma_{۰}}{n}\right) I(A)+\left(X_{۱:m:n}-\frac{\tilde{\sigma}}{n}\right)(۱-I(A)) \\ &= X_{۱:m:n}-\frac{\hat{\sigma}^{PT}}{n}, \end{aligned} \tag{۷}$$

که $\hat{\theta}_{۰}$ برآورد $\theta$ تحت فرض صفر است.

## ۲-۲- اریبی و MSE برآوردگر پیش‌آزمون $\hat{\sigma}^{PT}$

مقدار اریبی برآوردگر پیش‌آزمون $\hat{\sigma}^{PT}$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} Bias_{\sigma}(\hat{\sigma}^{PT}) &= E_{\sigma}(\hat{\sigma}^{PT}-\sigma)=E_{\sigma}\{\tilde{\sigma}-(\tilde{\sigma}-\sigma_{۰})I(A)-\sigma\} \\ &= E_{\sigma}(\tilde{\sigma})-\sigma-E_{\sigma}(\tilde{\sigma}I(A))+\sigma_{۰}E_{\sigma}(I(A)). \end{aligned} \tag{۸}$$

توجه کنید که

$$
\begin{aligned}
E_\sigma\left(I(A)\right) &= P_\sigma\left(c_1 \le T \le c_2\right)\\
&= P_\sigma\left(c_1 \le \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \le c_2\right) = P_\sigma\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}c_1 \le \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma} \le \frac{\sigma_0}{\sigma}c_2\right)\\
&= P_\sigma\left(\lambda c_1 \le T \le \lambda c_2\right), \qquad \left(T = \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma} \sim \chi^2 2(m-1)\right)\\
&= F_\nu\left(\lambda c_2\right) - F_\nu\left(\lambda c_1\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

که در آن $\lambda = \frac{\sigma_0}{\sigma}$ و $1-\alpha = F_\nu\left(c_2\right) - F_\nu\left(c_1\right)$ که $F_\nu(.)$ تابع توزیع $\chi^2$ با $\nu = 2(m-1)$ درجه آزادی می‌باشد به‌طوری‌که $1-\alpha/2 = F_\nu\left(c_2\right)$ و $\alpha/2 = F_\nu\left(c_1\right)$. همچنین $c_1$ و $c_2$ مقادیر بحرانی توزیع کای‌دوی با $\nu$ درجه‌ی آزادی می‌باشند. داریم

$$
\begin{aligned}
E_\sigma\left(\tilde{\sigma} I(A)\right) &= E_\sigma\left[\tilde{\sigma} I\left(c_1 \le \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma_0} \le c_2\right)\right]\\
&= E_\sigma\left[\tilde{\sigma} I\left(\lambda c_1 \le \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma} \le \lambda c_2\right)\right]\\
&= \frac{\sigma}{2(m-1)} E\left[\frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma} I\left(\lambda c_1 \le \frac{2(m-1)\tilde{\sigma}}{\sigma} \le \lambda c_2\right)\right]\\
&= \frac{\sigma}{2(m-1)} E\left[T\, I\left(\lambda c_1 \le T \le \lambda c_2\right)\right]\\
&= \frac{\sigma}{2(m-1)} \int_{\lambda c_1}^{\lambda c_2} t \frac{1}{2^{m-1}\Gamma(m-1)} t^{m-1+1} e^{-\frac{t}{2}} dt\\
&= \frac{\sigma}{2(m-1)} \frac{2^m \Gamma(m)}{2^{m-1}\Gamma(m-1)} \int_{\lambda c_1}^{\lambda c_2} \frac{1}{2^m \Gamma(m)} t^m e^{-\frac{t}{2}} dt\\
&= \sigma\left[F_{\nu+2}\left(\lambda c_2\right) - F_{\nu+2}\left(\lambda c_1\right)\right].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

بنابراین با جایگذاری (۹) و (۱۰) در (۸) مقدار اریبی برآوردگر پیش‌آزمون به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$Bias_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)=\sigma_\circ\left[\left(F_\nu\left(\lambda c_۲\right)-F_\nu\left(\lambda c_۱\right)\right)-\frac{۱}{\lambda}\left\{F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۱\right)\right\}\right].$$

اینک میانگین مجذور خطای برآوردگر $\hat{\sigma}^{PT}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}MSE_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)&=E_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}-\sigma\right)^۲\\&=E_\sigma\left\{\left(\tilde{\sigma}-\sigma\right)-\left(\tilde{\sigma}-\sigma_\circ\right)I\left(A\right)\right\}^۲\\&=E_\sigma\left(\tilde{\sigma}-\sigma\right)^۲+E_\sigma\left\{\left(\tilde{\sigma}-\sigma_\circ\right)I\left(A\right)\right\}^۲-۲E_\sigma\left\{(\tilde{\sigma}-\sigma)(\tilde{\sigma}-\sigma_\circ)I(A)\right\}\\&=Var_\sigma\left(\tilde{\sigma}\right)+E_\sigma\left\{\left(\tilde{\sigma}^۲+\sigma_\circ^۲-۲\sigma_\circ\tilde{\sigma}\right)I\left(A\right)\right\}\\&-۲E_\sigma\left\{\left(\tilde{\sigma}^۲-\sigma_\circ\tilde{\sigma}-\sigma\tilde{\sigma}+\sigma\sigma_\circ\right)I\left(A\right)\right\}\\&=\frac{\sigma^۲}{m-۱}+E_\sigma\left(\tilde{\sigma}^۲I\left(A\right)\right)-۲\sigma_\circ E_\sigma\left(\tilde{\sigma}I\left(A\right)\right)+\sigma_\circ^۲E_\sigma\left(I\left(A\right)\right)\\&-۲E_\sigma\left(\tilde{\sigma}^۲I\left(A\right)\right)+۲\sigma_\circ E_\sigma\left(\tilde{\sigma}I\left(A\right)\right)+۲\sigma E_\sigma\left(\tilde{\sigma}I\left(A\right)\right)-۲\sigma\sigma_\circ E_\sigma\left(I\left(A\right)\right)\\&=\frac{\sigma^۲}{m-۱}+E_\sigma\left(\tilde{\sigma}^۲I\left(A\right)\right)+۲\sigma^۲\left\{F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۱\right)\right\}\\&+\left(\sigma_\circ^۲-۲\sigma\sigma_\circ\right)\left(F_\nu\left(\lambda c_۲\right)-F_\nu\left(\lambda c_۱\right)\right)\end{aligned}$$

از طرفی با اندکی محاسبات می‌توان نشان داد که

$$E_\sigma\left(\tilde{\sigma}^۲I\left(A\right)\right)=\frac{m\sigma^۲}{m-۱}\left\{F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۱\right)\right\}.$$

بنابراین با جایگذاری، مقدار میانگین مجذور خطای برآوردگر پیش‌آزمون به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}MSE_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)&=\frac{\sigma^۲}{m-۱}-\frac{m\sigma^۲}{m-۱}\left\{F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۱\right)\right\}\\&+۲\sigma^۲\left\{F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۱\right)\right\}+\left(\sigma_\circ^۲-۲\sigma\sigma_\circ\right)\left(F_\nu\left(\lambda c_۲\right)-F_\nu\left(\lambda c_۱\right)\right)\\&=\sigma^۲\left\{\frac{۱}{m-۱}-\frac{m}{m-۱}\left(F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۴}\left(\lambda c_۱\right)\right)\right.\\&\left.+۲\left\{F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۲\right)-F_{\nu+۲}\left(\lambda c_۱\right)\right\}+\left(\lambda^۲-۲\lambda\right)\left\{F_\nu\left(\lambda c_۲\right)-F_\nu\left(\lambda c_۱\right)\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{۱۱}$$

اگر برای سادگی فرض کنیم که

$$A_0=\left\{F_\nu\left(\lambda c_2\right)-F_\nu\left(\lambda c_1\right)\right\},$$
$$A_1=\left\{F_{\nu+2}\left(\lambda c_2\right)-F_{\nu+2}\left(\lambda c_1\right)\right\},$$
$$A_2=\left\{F_{\nu+4}\left(\lambda c_2\right)-F_{\nu+4}\left(\lambda c_1\right)\right\},$$

آنگاه مقدار اریبی و میانگین مجذور خطای برآوردگر $\hat{\sigma}^{PT}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Bias_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)=\sigma_0\left(A_0-\frac{1}{\lambda}A_1\right), \tag{۱۲}$$

و

$$MSE_\sigma\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)=\sigma^2\left\{\frac{1}{m-1}-\frac{m}{m-1}A_2+2A_1+\left(\lambda^2-2\lambda\right)A_0\right\}. \tag{۱۳}$$

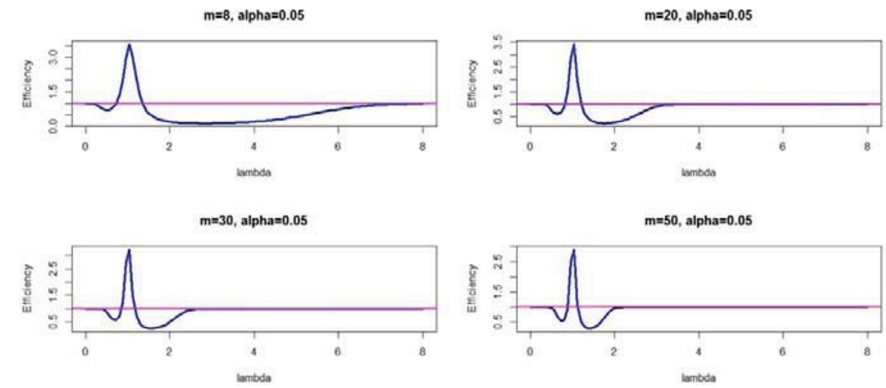
بنابراین کارایی نسبی $\hat{\sigma}^{PT}$ در مقایسه با $\tilde{\sigma}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$RE\left(\hat{\sigma}^{PT},\tilde{\sigma}\right)=\frac{MSE\left(\tilde{\sigma}\right)}{MSE\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)} \tag{۱۴}$$

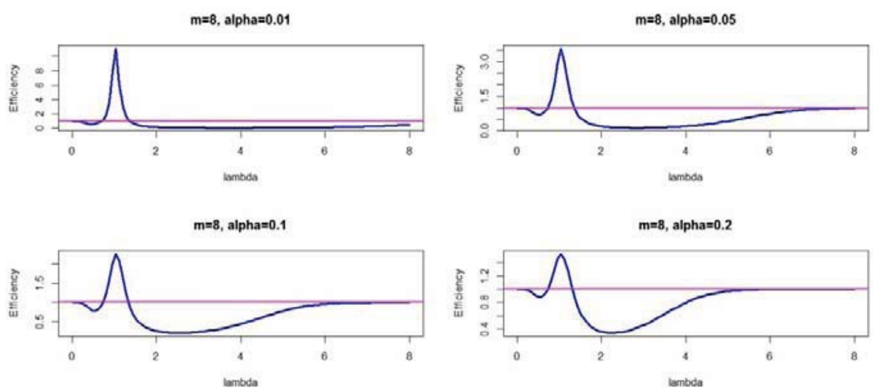
$$=\frac{\dfrac{\sigma^2}{m-1}}{\sigma^2\left[\dfrac{1}{m-1}-\dfrac{m}{m-1}A_2+2A_1+\left(\lambda^2-2\lambda\right)A_0\right]} \tag{۱۵}$$
$$=\left[1+\left(m-1\right)A_0\left(\lambda^2-2\lambda\right)+2\left(m-1\right)A_1-mA_2\right]^{-1}.$$

توجه کنید که کارایی نسبی فوق تنها به‌اندازه‌ی نمونه‌ی سانسور $(m)$، اندازه‌ی آزمون $(\alpha)$ و $\lambda=\frac{\sigma_0}{\sigma}$ بستگی دارد. علاوه بر این کارایی نسبی فوق به طرح سانسور $(R_1,\ldots,R_m)$ بستگی ندارد.

نمودارهای ۱ و ۲، مقادیر کارایی نسبی را به ترتیب برحسب مقادیر مختلف $m$ و $\alpha$ نشان می‌دهند. در جدول ۱، به ازای مقادیر مختلف $m$ و $\alpha$، حدودی از $\lambda$ را که به ازای آن‌ها برآوردگر $\hat{\sigma}^{PT}$ بر برآوردگر $\tilde{\sigma}$ برتری دارد ارائه کرده‌ایم.




**شکل (۱):** کارایی نسبی $\hat{\sigma}^{PT}$ نسبت به $\tilde{\sigma}$ برای مقادیر مختلف $m$.




**شکل (۲):** کارایی نسبی $\hat{\sigma}^{PT}$ نسبت به $\tilde{\sigma}$ برای مقادیر مختلف $\alpha$.

**جدول ۱:** حدودی از $\lambda$ که $\hat{\sigma}^{PT}$ بر $\tilde{\sigma}$ برتری دارد

| $m$ | $\alpha=$۰/۰۱ | $\alpha=$۰/۰۵ | $\alpha=$۰/۱ |
|---|---|---|---|
| ۵ | [۰/۶۱۸۸۶۷,۱/۴۹۱۲۶۹] | [۰/۶۴۷۵۵۷,۱/۴۷۰۲۹۷] | [۰/۶۵۳۸۳۴,۱/۴۵۰۲۲۴] |
| ۸ | [۰/۶۹۷۴۳۲,۱/۳۶۷۲۹۵] | [۰/۷۲۱۵۶۶,۱/۳۴۷۹۰۷] | [۰/۷۲۸۷۷۴,۱/۳۳۲۳۶۸] |
| ۱۰ | [۰/۷۲۸۵۶۱,۱/۳۲۲۲۳۲] | [۰/۷۵۰۴۹۷,۱/۳۰۴۰۳۲] | [۰/۷۵۷۶۳۱,۱/۲۹۰۳۱۵] |
| ۲۰ | [۰/۸۰۶۰۰۲,۱/۲۱۸۴۸۲] | [۰/۸۲۱۹۵۷,۱/۲۰۴۳۵۱] | [۰/۸۲۸۰۱۷,۱/۹۵۰۴۴۴] |
| ۳۰ | [۰/۸۴۰۶۱۷,۱/۱۷۵۵۱۱] | [۰/۸۵۳۷۰۲,۱/۱۶۳۶۰۷] | [۰/۸۵۹۰۰۰,۱/۱۵۶۱۷۷] |
| ۴۰ | [۰/۸۶۱۴۰۴,۱/۱۵۰۶۱۷] | [۰/۸۷۲۸۰۰,۱/۱۴۰۱۵۸] | [۰/۸۷۷۵۰۲,۱/۱۳۳۸۰۳] |
| ۵۰ | [۰/۸۷۵۶۹۱,۱/۱۳۳۹۱۶] | [۰/۸۸۵۸۵۸,۱/۱۲۴۴۷۰] | [۰/۸۹۰۱۷۸,۱/۱۱۸۸۴۴] |

### ۲-۳- اریبی و MSE برآوردگر پیش‌آزمون $\hat{\theta}^{PT}$

مقدار اریبی برآوردگر پیش‌آزمون $\hat{\theta}^{PT}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$Bias_\theta\left(\hat{\theta}^{PT}\right)=E_\theta\left\{\hat{\theta}^{PT}-\theta\right\}=E_\theta\left(X_{1:m:n}\right)-\frac{1}{n}E_\theta\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)-\theta$$

$$=\theta+\frac{\sigma}{n}-\frac{1}{n}\left\{\sigma+\sigma_0\left[A_0-\frac{1}{\lambda}A_1\right]\right\}-\theta=-\frac{\sigma_0}{n}\left[A_0-\frac{1}{\lambda}A_1\right].$$

همچنین میانگین مجذور خطای $\hat{\theta}^{PT}$ عبارت است از

$$MSE_\theta\left(\hat{\theta}^{PT}\right)=E_\theta\left\{\hat{\theta}^{PT}-\theta\right\}^2=E_\theta\left\{\left(X_{1:m:n}-\theta\right)-\frac{1}{n}\hat{\sigma}^{PT}\right\}^2$$

$$=E_\theta\left(X_{1:m:n}-\theta\right)^2-\frac{2}{n}E_\theta\left[\left(X_{1:m:n}-\theta\right)\hat{\sigma}^{PT}\right]+\frac{1}{n^2}E_\theta\left(\left(\hat{\sigma}^{PT}\right)^2\right)$$

$$=E_\theta\left(X^2{}_{1:m:n}-2\theta X_{1:m:n}+\theta^2\right)-\frac{2}{n}E_\theta\left[\left(X_{1:m:n}-\theta\right)\left(\tilde{\sigma}-\left(\tilde{\sigma}-\sigma_0\right)I(A)\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n^2}E_\theta\left\{\left(\tilde{\sigma}-\left(\tilde{\sigma}-\sigma_0\right)I(A)\right)\right\}^2$$

$$=E_\theta\left(X^2{}_{1:m:n}\right)-2\theta E_\theta\left(X_{1:m:n}\right)+\theta^2$$

$$-\frac{2}{n}\left\{E_\theta\left(X_{1:m:n}-\tilde{\sigma}\right)-E_\theta\left(X_{1:m:n}-\tilde{\sigma}\right)I(A)+E_\theta\left(X_{1:m:n}-\sigma_0 I(A)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n^2}E_\theta\left(\tilde{\sigma}\right)+\theta E_\theta\left(\tilde{\sigma}I(A)\right)-\theta\sigma_0 E_\theta\left(I(A)\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{n^2}E_\theta\left\{\tilde{\sigma}^2-\tilde{\sigma}\left(\tilde{\sigma}-\sigma_0\right)I(A)+\left(\tilde{\sigma}-\sigma_0\right)^2 I(A)\right\}$$

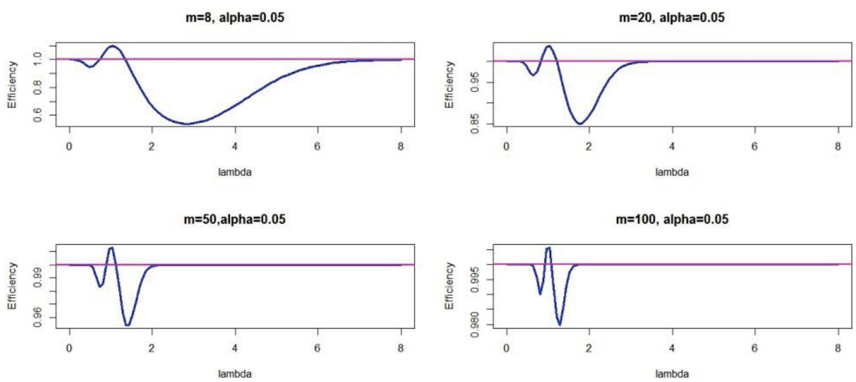
$$=\frac{m\sigma^2}{n^2(m-1)}+\frac{\sigma^2}{n^2(m-1)}\left[(m-1)\left(\lambda^2-2\lambda\right)A_0+2(m-1)A_1-mA_2\right]. \qquad (16)$$

لذا کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\theta}^{PT}$ نسبت به برآوردگر $\tilde{\theta}$ به صورت زیر می‌باشد.

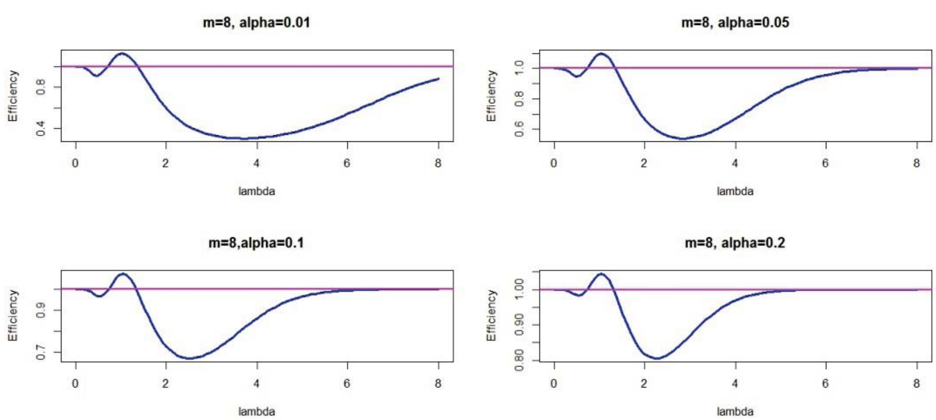
$$RE\left(\hat{\theta}^{PT},\tilde{\theta}\right)=\frac{MSE\left(\tilde{\theta}\right)}{MSE\left(\hat{\theta}^{PT}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{m\sigma^{2}}{n^{2}(m-1)}}{\dfrac{m\sigma^{2}}{n^{2}(m-1)}+\dfrac{\sigma^{2}}{n^{2}(m-1)}\left[(m-1)\left(\lambda^{2}-2\lambda\right)A_{0}+2(m-1)A_{1}-mA_{2}\right]} \qquad (17)$$

$$=\left[1+\frac{m-1}{m}\left(\lambda^{2}-2\lambda\right)A_{0}+\frac{2(m-1)}{m}A_{1}-A_{2}\right]^{-1}$$




**شکل (۳)**: کارایی نسبی $\hat{\theta}^{PT}$ نسبت به $\tilde{\theta}$ برای مقادیر مختلف $m$.




**شکل (۴)**: کارایی نسبی $\hat{\theta}^{PT}$ نسبت به $\tilde{\theta}$ برای مقادیر مختلف $\alpha$.

نمودار ۳، مقدار کارایی نسبی را به ازای مقادیر مختلف اندازه‌ی نمونه‌ی سانسور نشان می‌دهد. همچنین نمودار ۴، مقدار کارایی نسبی را به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ نشان می‌دهد. جدول ۲ حدودی از $\lambda$ را که به ازای آن $\hat{\theta}^{PT}$ بر برآوردگر کلاسیک $\tilde{\theta}$ برتری دارد ارائه می‌دهد. با توجه به نمودارهای ۳ و ۴ و جدول ۲، مشاهده می‌شود که برآوردگر پیش‌آزمون در نزدیکی فرض صفر بر برآوردگر کلاسیک برتری دارد.

**جدول ۲:** حدودی از $\lambda$ که $\hat{\theta}^{PT}$ بر $\tilde{\theta}$ برتری دارد

| $m$ | $\alpha=$۰/۰۱ | $\alpha=$۰/۰۵ | $\alpha=$۰/۱ |
|---|---|---|---|
| ۵ | [۰/۶۱۸۸۴۷,۱/۴۹۱۲۴۷] | [۰/۶۴۷۵۵۶,۱/۴۷۰۲۲۴] | [۰/۶۵۳۸۳۸,۱/۴۵۰۲۳۷] |
| ۸ | [۰/۶۹۷۴۱۷,۱/۳۶۷۲۸۷] | [۰/۷۲۱۵۴۲,۱/۳۴۷۹۰۰] | [۰/۷۲۸۷۷۴,۱/۳۳۲۳۶۸] |
| ۱۰ | [۰/۷۲۸۵۵۶,۱/۳۲۲۲۵۹] | [۰/۷۵۰۵۱۴,۱/۳۰۴۰۳۶] | [۰/۷۵۷۶۴۱,۱/۲۹۰۳۱۵] |
| ۲۰ | [۰/۸۰۵۹۹۹,۱/۲۱۸۴۹۵] | [۰/۸۲۱۹۵۸,۱/۲۰۴۳۴۳] | [۰/۸۲۸۰۱۸,۱/۹۵۰۴۴۰] |
| ۳۰ | [۰/۸۴۰۶۳۶,۱/۱۷۵۵۱۲] | [۰/۸۵۳۷۳۶,۱/۱۶۳۵۹۸] | [۰/۸۵۸۹۸۷,۱/۱۵۶۱۷۷] |
| ۴۰ | [۰/۸۶۱۳۹۶,۱/۱۵۰۶۱۹] | [۰/۸۷۲۷۵۷,۱/۱۴۰۱۳۲] | [۰/۸۷۷۴۸۵,۱/۱۳۳۸۰۴] |
| ۵۰ | [۰/۸۷۵۶۶۵,۱/۱۳۳۹۲۰] | [۰/۸۸۵۸۵۲,۱/۱۲۴۴۴۸] | [۰/۸۹۰۱۷۴,۱/۱۱۸۸۵۱] |

## ۳- مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی برای تشریح برآوردگرهای پیشنهادی ارائه می‌شود. مجموعه داده‌های زیر، مدت زمان بهبودی ۲۰ بیمار سرطان خون را که با مصرف یک دارو درمان شده‌اند نشان می‌دهد.

۱/۰۱۳, ۱/۰۳۴, ۱/۱۰۹, ۱/۱۶۹, ۱/۲۶۶, ۱/۵۰۹, ۱/۵۳۳,
۱/۵۶۳, ۱/۷۱۶, ۱/۹۲۹, ۱/۹۶۵, ۲/۰۶۱, ۲/۳۴۴, ۲/۵۴۶,
۲/۶۲۶, ۲/۷۷۸, ۲/۹۵۱, ۳/۴۱۳, ۴/۱۱۸, ۵/۱۳۶ .

این داده‌ها از لاولس [۱۹]، استخراج شده‌اند. با در نظر گرفتن $n=$۲۰، $m=$۱۳ و طرح سانسور $\underline{R}=($۱,۱,۰$^{*۱۰}$,۵$)$، وو [۲۰] یک نمونه سانسور فزاینده نوع II از این داده‌ها تولید کرده که نمونه سانسور تولیدشده و طرح سانسور متناظر آن در جدول ۳ گزارش‌شده است.

با توجه به نتایج بیان‌شده در بخش دوم، می‌توان برآوردگرهای پیشنهادی را برای چندین حدس اولیه $\sigma$ یعنی $\sigma_{\circ}$ محاسبه کرد. در جدول ۴، این برآوردگرها برای چهار مقدار اولیه $\sigma_{\circ}=$۰/۸,۱,۲,۳ محاسبه شده‌اند.

**جدول ۳:** داده‌های سانسور فزاینده گزارش شده در وو [۲۰]

| $i$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | ۱/۰۱۳ | ۱/۰۳۴ | ۱/۱۰۹ | ۱/۲۶۶ | ۱/۵۰۹ | ۱/۵۳۳ | ۱/۵۶۳ |
| $R_i$ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| $i$ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | |
| $X_i$ | ۱/۹۲۹ | ۱/۹۶۵ | ۲/۰۶۱ | ۲/۳۴۴ | ۲/۵۴۶ | ۱/۶۲۶ | |
| $R_i$ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۵ | |

**جدول ۴:** برآورد پارامترها برای داده‌های مثال

| $\sigma_\circ$ | $\tilde{\sigma}$ | $\hat{\sigma}^{PT}$ | $\hat{\theta}^{PT}$ |
|---|---|---|---|
| ۰/۸ | ۱/۴۵۱ | ۱/۴۵۱ | ۱/۰۸۵ |
| ۱ | ۱/۴۵۱ | ۱ | ۱/۰۶۳ |
| ۲ | ۱/۴۵۱ | ۲ | ۱/۱۱۳ |
| ۳ | ۱/۴۵۱ | ۱/۴۵۱ | ۱/۰۸۵ |

برای مثال در سطر اول از جدول ۴ برآوردگر $\sigma$ را وقتی‌که مقدار $\sigma_\circ = ۰/۸$ است در نظر گرفته‌ایم؛ بنابراین باید فرض زیر را آزمون کنیم

$$H_\circ : \sigma = ۰/۸, \quad v.s. \quad H_۱ : \sigma \neq ۰/۸$$

مقدار آماره آزمون می‌شود

$$T_\circ = \frac{۲(m-۱)\tilde{\sigma}}{\sigma_\circ} = \frac{۲(۱۳-۱)(۱/۴۵۱)}{۰/۸} = ۴۳/۵۳$$

از آنجایی که $T_\circ \notin \left(\chi^۲_{۲(m-۱),\alpha/۲}, \chi^۲_{۲(m-۱),۱-\alpha/۲}\right) = (۱۲/۴۰, ۳۹/۴۴)$، برآوردگر پیش‌آزمون، فرض صفر $\sigma = ۰/۸$ را رد می‌کند، ازاین‌رو برآوردگر پیش‌آزمون برابر BLUE است. برای سطر دوم وقتی‌که $\sigma_\circ = ۱$ است، از آنجایی که

$$T_\circ = \frac{۲(۱۳-۱)(۱/۴۵۱)}{۱} = ۳۴/۸۲۴ \in (۱۲/۴۰, ۳۹/۴۴)$$

فرض صفر رد نمی‌شود و برآوردگر پیش‌آزمون برای $\sigma$ می‌شود $\hat{\sigma}^{PT} = ۱$. به‌طور مشابه برای سطر سوم، هنگامی‌که حدس اولیه به‌صورت $\sigma_\circ = ۲$ می‌باشد

$$T_{\circ}=\frac{۲(۱۳-۱)(۱/۴۵۱)}{۲}=۱۷/۴۱۲\in(۱۲/۴۰,۳۹/۴۴)$$

در این حالت فرض صفر $\sigma=۲$ رد نمی‌شود و ازاین‌رو برآوردگر پیش‌آزمون $\sigma$ عبارت است از $\hat{\sigma}^{PT}=۲$. همچنین برای سطر چهارم، هنگامی‌که $\sigma_{\circ}=۳$، داریم

$$T_{\circ}=\frac{۲(۱۳-۱)(۱/۴۵۱)}{۳}=۱۱/۶۰۸\notin(۱۲/۴۰,۳۹/۴۴)$$

در این حالت فرض صفر $\sigma=۳$ رد می‌شود و ازاین‌رو برآوردگر پیش‌آزمون برای $\sigma$، برابر $\tilde{\sigma}$ خواهد بود. توجه کنید که در هر کدام از سطرها با توجه به رابطه (۷) می‌توان برآوردگر پیش‌آزمون $\theta$ را محاسبه کرد.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآوردگرهای پیش‌آزمون پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری براساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم محاسبه و سپس این برآوردگرها با برآوردگرهای کلاسیک متناظرشان مقایسه شده‌اند. بر اساس مقایسه انجام‌شده، مشخص‌شده است که برآوردگرهای پیش‌آزمون در همسایگی فرض صفر بهتر از برآوردگرهای کلاسیک می‌باشند.

## سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از داوران محترم برای ارائه پیشنهادهای سازنده‌شان در بهبود این مقاله سپاسگزاری می‌نمایند.

## مراجع

[1] Saleh, A.K.Md.E. (2006). *Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimations with Applications*. Wiley, New York.

[2] Bancroft, T.A. (1944). On biases in estimation due to use of preliminary tests of significance. *Annals of Mathematical Statistics*, **15**, 190-204.

[3] Han, C.P. and Bancroft, T.A. (1968). On pooling means when variance is unknown. *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 1333-1342.

[4] Judge, G.G. and Bock, M.E. (1978). *The Statistical Implications of Pre-Test and Stein-Rule Estimators in Econometrics*. North-Holland, Amsterdam.

[5] Kibria, B.M.G. and Saleh, A.K.Md.E. (1993). Performance of shrinkage Preliminary test estimator in regression analysis. *Jahangirnagar Rev A*, **17**, 133-148.

[6] Saleh, A.K.Md.E. and Kibria, B.M.G. (1993). Performances of some new preliminary test ridge regression estimators and their properties. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **22**, 2747-2764.

[7] Benda, N. (1996). Pre-test estimation and design in the linear model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **52**, 225-240.

[8] Chiou, P.and Han, C.P. (1999). Conditional interval estimation of the ratio of variance components following rejection of a pre-test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **63**, 105-119.

[9] Han, C.P. (2002). Influential observations in a preliminary test estimation of the mean. *Pakistan Journal of Statistics*, **18**, 321-333.

[10] Shanubhogue, A. and Jiheel, A.K. (2013). Bayes pre-test estimation of scale parameter of Weibull distribution under different loss functions using progressive type-II censored sample. *Journal of Reliability and Statistical Studies*, **6**, 101-113.

[11] Arashi, M., Kibria, B.M.G, Norouzirad, M. and Nadarajah, S. (2014). Improved preliminary test and Stein-rule Liu estimators for the ill-conditioned elliptical linear regression model. *Journal of Multivariate Analysis*, **126**, 53-74.

[12] Singh, B.K. (2015). Preliminary test estimation and shrinkage preliminary test estimation in normal and negative exponential distribution Using LINEX loss function. *International Journal of Soft Computing*, *Mathematics and Control*, **4**, 49-66.

[13] Baklizi, A. (2005). Preliminary test estimation in the two parameter exponential distribution with time censored data. *Applied Mathematics and Computation*, **163**, 639-643.

[14] Kibria,B.M.G.and Saleh, A.K.Md.E. (2010). Preliminary test estimation of the parameters of exponential and Pareto distributions for censored samples. *Statistical Papers,* **51**, 757-773.

[15] Baklizi, A. (2008). Preliminay test estimation in the two parameter exponential distribution based on record values. *Journal of Applied Statistical Science*, **18**, 387-393.

[16] Zakerzadeh, H.and Karimi, M. (2014). Minimax regret estimation of exponential distribution based on record values under weighted square error loss function. *Journal of Mathematical Extension*, **8**, 1-8.

[17] Mirfarah, E.and Ahmadi, J. (2014). Pitman closeness of preliminary test and some classical estimators based on records from two-parameter exponential distribution. *Journal of Statistical Research of Iran*, **11**, 73-96.

[18] Balakrishnan, N.and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Berkhauser, Boston.

[19] Lawless, J.F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. Wiley, New York.

[20] Wu, S.F. (2010). Interval estimation for the two parameter exponential distribution under progressive censoring. *Quality and Quantity*, **34**, 181-189.

# Preliminary Test Estimation in Two-parameter Exponential Model Under Progressively Type-II Censoring

Akbar Asgharzadeh and Mohammad Sharifi

Department of Statistics, University of Mazandarn, Babolsar, Iran

**Abstract**

In this paper, the preliminary test estimators for the location and scale parameters of the two-parameter exponential model are presented based on progressively Type II censored samples. The biases and mean squared errors of the proposed estimators are given. It is shown that the proposed estimators dominate the corresponding classical estimators in the neighborhood of null hypothesis. We also provide the range of the parameters for which the proposed estimators dominate the corresponding classical estimators for different sample sizes and level significance. Finally, a numerical example is given to illustrate the results.

***Keywords:*** Two parameter-exponential model, Preliminary test estimator, Relative efficiency, Progressive Type-II censoring.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62F10, 62F30.