

## روشی جدید در تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری مجموعه‌های راف فازی

آیدا باتمیز<sup>۱</sup>، فرانک حسین زاده سلجوقی و علی‌اکبر ثانوی

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۶/۱۴

**چکیده:** در شرایط متغیر اقتصادی و نوسانات شدید مالی در محیط‌های تجاری، وجود الگوهایی برای پیش‌بینی عملکرد مالی شرکت‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است. یکی از این موارد پیش‌بینی وقوع بحران مالی و به عبارت دیگر ورشکستگی است. تحلیل پوششی داده‌ها (*DEA*) یک ابزار قدرتمند در اختیار مدیران است که عملکرد شرکت خود را در فعالیت‌های تجاری محک بزنند. مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (*DMU*) را در بهترین حالت انجام می‌دهند و در واقع در حالت خوش‌بینانه ارزیابی صورت می‌گیرد، ولی مدل‌های دیگری در *DEA* معرفی شده‌اند که قابلیت اندازه‌گیری کارایی با دیدگاه بدبینانه را نیز دارند که دارای کاربردهای ویژه خود مانند ارزیابی ورشکستگی می‌باشند. این مقاله با استفاده از نظریه بازی‌های *DEA* و تخصیص، یک مدل جدید *DEA* در زمینه ورشکستگی را معرفی می‌کند و با تشکیل یک سیستم اطلاعاتی و استفاده از شاخص‌ها، ورشکستگی و کارایی را با استفاده از مفاهیم *DEA* راف و راف فازی محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از مدل در تعیین ورشکستگی بین چند شرکت بررسی و محاسبه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** ورشکستگی، نظریه بازی‌ها، تئوری مجموعه راف، مدل فاصله جهت‌دار، راف فازی، *DEA* راف.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۸۶C۶۲.

### ۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین مفاهیم در اقتصاد، پیش‌بینی و ارزیابی ورشکستگی است که باعث وقوع بحران‌های شدید مالی می‌شود. در واقع یکی از فنون و ابزارهای پیش‌بینی وضعیت آینده

سازمان‌ها، مدل‌های پیش‌بینی و ارزیابی ورشکستگی است. مدل‌های اولیه *DEA* برای ارزیابی کارایی نسبی در واحدهای تصمیم‌گیرنده در حالت خوش‌بینانه به کار برده می‌شود، اما مدل‌هایی هم هستند که تحت عنوان ارزیابی کارایی در حالت بدبینانه در *DEA* مورد بحث قرار می‌گیرند. از جمله مدل‌های *DEA* جمعی که در ارزیابی ورشکستگی برای یک مجموعه از نسبت‌های مالی به‌عنوان متغیرهای ورودی و مجموعه‌ی دیگر به‌عنوان متغیرهای خروجی در نظر گرفته می‌شوند. [۱] ایده ارزیابی ورشکستگی با استفاده از نظریه‌ی اقتصادی ورشکستگی و در راستای این نظریه است. نظریه اقتصادی پیشنهاد می‌کند که ورشکستگی باید به‌عنوان یک روند آزمایش طراحی شده برای حذف شرکت‌هایی صورت بگیرد که به‌طور اقتصادی ناکارا هستند و به عبارتی دیگر ورشکستگی بدترین موقعیت یک *DMU* است که آن را تحت عنوان *DMU* نامطلوب بررسی می‌کنیم. در مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی شرکت‌ها، احتمال وقوع ورشکستگی به‌وسیله گروهی از نسبت‌های مالی که از سوی صاحب‌نظران باهم ترکیب شده‌اند تخمین زده می‌شود. آلتمن [۲] نخستین فردی است که مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی را عرضه کرد در تحقیقات بعدی پریما کاندرا از مدل جمعی چارنر برای پیشگویی ورشکستگی استفاده کرد و بر اساس مثبت بودن و یا نبودن تابع هدف آن‌ها را به‌عنوان ورشکسته و غیر ورشکسته معرفی کرد [۱]. تئوری مجموعه‌های راف توسط پروفیسور پاولاک برای تحلیل داده‌ها پایه‌گذاری شد [۳]. این تئوری با تحلیل جدول‌های داده در ارتباط است و یک ابزار قدرتمند ریاضی برای استدلال در موارد اطلاعات مبهم و نادقیق است. تئوری مجموعه‌های راف نقاط اشتراک زیادی با تئوری مجموعه‌های فازی دارد. در بیشتر موارد اطلاعات به‌صورت جدول‌های داده‌ها تحت عنوان سیستم‌های اطلاعاتی، جدول‌های ویژگی-مقدار و یا جدول‌های اطلاعات، در اختیار است. ستون‌های جدول‌های اطلاعاتی با ویژگی‌ها و سطرهای آن با شیء نام‌گذاری شده و اعداد درون جدول با مقادیر ویژگی‌ها مربوط به هر شیء تکمیل می‌شوند. در هر سیستم اطلاعاتی ویژگی‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: ۱- ویژگی‌های تصمیم ۲- ویژگی‌های موقعیت که در هر سطر از یک جدول تصمیم می‌توان قواعد تصمیم را به‌صورت اگر- آنگاه به دست آورد.

پس از معرفی مجموعه فازی توسط زاده، کاربردهای آن با سرعت زیادی گسترش یافت [۴]. کافمن متغیرهای فازی را معرفی نمود [۵] و سپس زاده و نهمیاس به توسعه و تکمیل مجموعه‌ی فازی پرداختند [۶ و ۷]. این نظریه به علت استفاده از مفاهیم نادقیق و مبهم مورد توجه بسیاری از محققان از جمله دوبویس و پراد قرار گرفت [۸].

متغیرهای راف فازی از آنجا که در عمل با مقادیر و مفاهیم ابهام و راف روبرو می‌شویم به‌عنوان یک متغیر کارامل مورد استفاده قرار گرفته و در حل بسیاری از مسائل نادقیق به کار برده می‌شود. مجموعه راف فازی اولین بار توسط دوبویس و پراد معرفی شد [۹]. بعدها با تعریف تخمین‌های بالای و پایینی مجموعه‌ی فازی توسط مورسی و یاکوت مورد بررسی و مطالعه‌ی بیشتر قرار گرفت

[۱۰]. اخیراً دانشمندان زیادی با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ی راف فازی در زمینه‌های اقتصادی، تحقیقات بسیاری را انجام دادند از جمله ونگ که در سال ۲۰۰۳ بر روی مینیمم ارزش سهام با استفاده از مجموعه‌ی راف فازی مطالعاتی را انجام داد [۱۱].

در این مقاله به ارائه مدلی جدید برای ارزیابی و پیش‌بینی ورشکستگی با استفاده از داده‌های راف فازی می‌پردازیم. در این مدل از تلفیق  $DEA$  و قواعد تصمیم‌گیری تئوری مجموعه‌های راف استفاده و کاربرد مجموعه‌های راف فازی را در زمینه‌های اقتصادی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس نحوه محاسبه و عملکرد مدل پیشنهادی را در یک مثال عددی تشریح می‌کنیم. کارایی و ورشکستگی سازمان‌ها با استفاده از مدل‌های گفته‌شده در مبحث راف فازی و  $DEA$  راف مورد محاسبه قرار می‌گیرد. برای حل مدل‌های  $DEA$  فازی چهار روش ارائه می‌شود: ۱- روش رتبه‌بندی فازی ۲- روش امکان ۳- روش دامنه تغییرات ۴- روش بر اساس  $\alpha$  سطح [۱۲]. در واقع مثال عددی مورد بحث در این مقاله با استفاده از روش‌های راف فازی و  $DEA$  راف که بر اساس مقدار  $\alpha$  سطح (که آن را راف بازه‌ای می‌نامیم) و مقدار امید ریاضی در مدل ورشکستگی جدید مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد و کارایی سازمان‌ها هم‌زمان با بررسی ورشکستگی محاسبه می‌شوند و ارزیابی نهایی سازمان‌ها نسبت به مقدار ورشکستگی و غیر ورشکستگی بیان می‌شود. در حالت راف بازه‌ای، ارزیابی از دو نقطه نظر خوش‌بینانه و بدبینانه بررسی می‌شود. استفاده از این مدل‌ها، در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در محیط‌های تجاری که به‌نوعی در آن‌ها از مفاهیم و مقادیر نادقیق استفاده می‌شود، دیدگاه بهتری را در اختیار دولت، سرمایه‌گذاران و اقتصاددانان قرار خواهد داد. در مثال به‌کاررفته در این مقاله، سازمان‌ها (که در اینجا شرکت‌های دارویی در نظر گرفته شده‌اند) تحت عنوان اشیاء در سیستم اطلاعاتی و ویژگی تصمیم به‌عنوان عامل کیفی و مورد بررسی در مبحث راف فازی استفاده می‌شود. لذا در این مقاله به بررسی مدل ورشکستگی با مفاهیم نظریه بازی‌ها و تخصیص در بخش دوم می‌پردازیم، بخش سوم به مروری بر مدل فاصله جهت‌دار در تحلیل پوششی داده‌ها و مدل ارزیابی ورشکستگی با استفاده از مدل فاصله جهت‌دار اصلاح‌شده و همچنین مدل جدید ارزیابی ورشکستگی اختصاص یافته است. در بخش چهارم مروری بر مفاهیم تئوری مجموعه‌های راف و راف فازی انجام شده است، در بخش پنجم تحلیل پوششی داده‌های راف به همراه یک مثال عددی با استفاده از مدل جدید ورشکستگی در حالت بازه‌ای بیان می‌شود و تحلیل نتایج عددی با استفاده از این مدل بررسی می‌شود. در بخش ۶ نتایج حاصل از این مدل جدید و تئوری راف فازی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

## ۲- مدل ورشکستگی با مفاهیم نظریه بازی‌ها و تخصیص

موقعیت یک مسئله ورشکستگی را به‌صورت زیر تعبیر می‌کنیم. مقدار دارایی را با  $E \in R$  نشان داده شده است. اگر  $d_i$  بیان‌کننده مقدار تقاضا طلبکار  $i$ ام باشد، می‌توان تمامی تقاضاها با

بردار تقاضا  $d \in R^n$  نمایش داد به طوری که  $d_i \geq 0$  برای هر  $0 \leq i \leq n$ . تعداد کل طلبکارها بوده و  $0 \leq E \leq \sum_{j \in N} d_j$  فرض می‌شود. در این حالت مسئله ورشکستگی‌ها را می‌توان با اختصار به صورت  $(E, d)$  بیان نمود. اگر  $x_j$  مقدار تخصیص یافته برای طلبکار  $j$  باشد، یک جواب مسئله ورشکستگی  $(E, d)$ ، یک تخصیص  $n$  تایی است، به طوری که  $E = \sum_{j \in N} x_j$ ؛ که قابل محاسبه با روش‌های مقدار شپلی<sup>۱</sup> و... می‌باشد. برای انتخاب حالتی که به بیشترین بازده ختم شود از تخصیص استفاده می‌کنیم که در تمام جهات قابل محاسبه و در بهینه‌ساز یاز پرکاربردترین مباحث می‌باشد. استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی این امکان را می‌دهد که همه حالت‌های مختلف تخصیص، با توجه به تابع هدف بررسی شود. در این حالت، قانون تخصیص، تابعی است که یک تخصیص منحصر به فرد را به هر مسئله ورشکستگی اختصاص می‌دهد [۴]. در یک بازی تعاونی  $n$  نفره در تشکیل تابع تخصیص، دو تایی  $(N, c)$  را معرفی می‌کنیم به طوری  $N = \{1, \dots, n\}$  مجموعه‌ای متناهی از بازیکنان است.  $c: 2^N \rightarrow R$  تابع تخصیص و  $2^N$  تعداد زیرمجموعه‌های  $N$  را نشان می‌دهد،  $c(\emptyset) = 0$  فرض می‌شود. در واقع در این مسائل زیر مجموعه‌های  $S$  از  $N$  را به عنوان تخصیص ارجاع می‌دهیم و مقدار  $c(S)$  را به عنوان ارزش (دارایی)  $S$  معرفی می‌کنیم [۱۳].

در تخصیص، دارایی هر بازیکن، به عنوان ماکزیمم سود یا هزینه بازیکن تفسیر می‌شود. حال یک مجموعه ثابت از بازیکنان را به وسیله یک بازی  $(N, c)$  که  $c$  یک تابع تخصیص است را در نظر می‌گیریم [۱۴]. بنابراین بازی ورشکستگی را مطابق با مسئله ورشکستگی  $(E, D)$  به وسیله

$$c_{E,d}(S) = \max \left\{ E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j, 0 \right\}$$

مقدار بهینه صفر نشان دهنده ورشکستگی خواهد بود. اگر مقدار دارایی بازیکن، کمتر یا مساوی میزان مطالبات طلبکاران از وی باشد مقدار به دست آمده در عبارت  $E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j$  منفی بوده و تمام دارایی‌ها به عنوان مطالبات به طلبکاران پرداخت شده است؛ که این نشان می‌دهد که بازیکن ورشکسته شده است و مقدار غیر صفر نشان دهنده غیر ورشکستگی خواهد بود؛ یعنی اگر مقدار به دست آمده در عبارت  $E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j$  مثبت باشد، مقدار دارایی خالص باقیمانده‌ای بعد از پرداخت مطالبات می‌تواند به عنوان ابزار تولید استفاده گردد که به عنوان عدم ورشکستگی بازیکن مورد نظر تفسیر شود.

### ۳- مدل فاصله‌ی جهت‌دار در تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی مبتنی بر مدل برنامه‌ریزی خطی است که کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) را اندازه‌گیری می‌کند. فرض کنید  $n$  واحد تصمیم‌گیری که هر یک با  $m$  ورودی،  $s$  خروجی تولید می‌کنند را در نظر بگیرید. بطوریکه  $y_{rj}$  مقدار خروجی  $r$  ام و  $x_{ij}$  مقدار ورودی  $i$  ام از  $DMU_j$  می‌باشد. تمام داده‌ها نامنفی فرض می‌شوند اما حداقل یک جزء از هر بردار ورودی و خروجی مثبت است بدین صورت که:  $x_{ij} \geq 0, x_j \neq 0$  و  $y_{rj} \geq 0, y_r \neq 0$  برای هر  $j = 1, \dots, n$ . [۱۵].

$$\begin{aligned} \theta^* &= \min \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

در مدل فوق  $x_{io}$  و  $y_{ro}$  نشان‌دهنده ورودی و خروجی  $DMU$  تحت بررسی است. این مدل دارای یک جواب شدنی ( $\lambda_j = 0 (j \neq o), \lambda_o = 1, \theta = 1$ ) است؛ بنابراین  $\theta$  بهینه، بزرگ‌تر از یک نیست. حال مدل  $DEA$  می‌تواند به‌عنوان یک تابع فاصله جهت‌دار برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته شود. مدل  $DEA$  می‌تواند به‌عنوان یک تابع فاصله جهت‌دار برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته شود. از این تابع فاصله جهت‌دار برای محاسبه ورشکستگی استفاده می‌شود. چمبرز [۱۶] مدل  $DEA$  در حالت بازده به مقیاس ثابت را برای تابع فاصله جهت‌دار به‌صورت زیر ارائه نمود. در این روش، تابع فاصله جهت‌دار هر دسته از ورودی و خروجی‌های وابسته به بردارهای جهت و مجموعه امکان تولید محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \beta g_{y_{ro}} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \beta g_{x_{io}} \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & g_{y_{ro}}, g_{x_{io}} \geq 0 \\ & g_x = \max_j \{x_{ij}\} - x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\ & g_y = y_{ro} - \min \{y_{rj}\} \quad r = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (2)$$

در مدل فوق  $\beta$  نامقیداست و درواقع  $\beta$  ناکارایی تکنیکی در واحدها را اندازه می‌گیرد همچنین  $1-\beta$  نشان‌دهنده کارایی بوده و افزایش خروجی‌ها و کاهش ورودی‌ها به‌طوری‌که به‌وسیله متغیر  $\beta$  انجام می‌شود. در مدل (۲)،  $g_x$  و  $g_y$  بردارهای جهت می‌باشند.

### ۳-۱- ارزیابی ورشکستگی با استفاده از مدل فاصله جهت‌دار اصلاح‌شده

برای غلبه بر نامحدود بودن  $\beta$  در ارزیابی ورشکستگی، یک مدل اصلاح‌شده در  $DEA$  با دیدگاه بدترین کارایی نسبی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است [۱۷]. این مدل را در ماهیت خروجی بررسی می‌کنیم. ابتدا بدترین موقعیت یک  $DMU$ ، تحت عنوان  $DMU$  نامطلوب را معرفی نموده که ورودی و خروجی‌های این  $DMU$  به‌صورت زیر است:

$$x_i^{\max} = \max_j (x_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_r^{\min} = \min_j (y_{rj}) \quad r = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n$$

واحد تحت ارزیابی را  $DMU_o = (x_o, y_o)$  می‌نامیم. برای ارزیابی ورشکستگی خروجی  $DMU_o$  را در جهت بردار خروجی  $g_y$  تغییر می‌دهیم. با توجه به موارد فوق، مدل ورشکستگی در ماهیت خروجی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta^{BR} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{BR} y_{rj} \leq y_{ro} - \beta^{BR} g_y; \quad r = 1, 2, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j^{BR} x_{ij} \geq x_{io}; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & g_y, \beta^{BR} \geq 0 \\ & g_y = y_{ro} - \min_j \{y_{rj}\} \quad r = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (3)$$

بدترین کارایی نسبی می‌تواند به‌وسیله مدل فوق در جهت  $DMU$  نامطلوب محاسبه شود و مقدار ورشکستگی  $1-\beta$  برای شرکت‌ها نشان‌دهنده اندازه‌ی فاصله بین نقطه مشاهده‌شده با ارجاع به نقطه نامطلوب یعنی بدترین نقطه ممکن است.

### ۳-۲- تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

اکنون با استفاده از مفاهیم ذکرشده در بخش‌های قبل، مدل جدید ورشکستگی (۴) را بیان کرده و ترکیب این مدل جدید را با تئوری راف بررسی می‌کنیم و آن را در یک مثال کاربردی در بخش‌های بعد با استفاده از راف فاز-ای و راف فازی بررسی می‌کنیم.

## ۳-۲-۱ مدل جدید در بررسی ورشکستگی

فرض کنید  $E_j$  مقدار دارایی کل اولیه برای سازمان  $j$  ام و  $N = \{1, \dots, n\}$  نشان دهنده تعداد کل سازمان‌ها،  $x_{ij}$  و  $y_{rj}$  نشان دهنده ورودی و خروجی سازمان  $j$  ام است و  $x_{io}$  و  $y_{ro}$  ورودی و خروجی‌های سازمان مورد نظر را نشان می‌دهد و  $d_j$  مقدار مطالبات برای سازمان  $j$  ام می‌باشد و  $g_y$  نشان دهنده جهت تولید است.

$$\begin{aligned} \max \quad & E_j - \sum_{j \in N} d_j \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} & \leq y_{ro} - (E_j - \sum_{j \in N} d_j) g_y \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} & \geq x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j & = 1 \\ E_j - \sum_{j \in N} d_j & \geq 0 \\ g_y = y_{ro} - \min \{ y_{rj} \} & \quad r = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (4)$$

مدل (۴) تعیین ورشکستگی را با استفاده از نظریه بازی‌ها بیان نموده و تعبیری متفاوت را ارائه می‌دهد که جنبه اقتصادی ورشکستگی را بیشتر مدنظر قرار می‌دهد. تابع هدف این مدل بیانگر دارایی خالص یا همان دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات است. مدل ارائه شده فوق، مدل یک بازی تحت کنترل خواهد بود. در این مدل سازمان‌ها را به‌عنوان مجموعه‌ای از بازیکنان در نظر می‌گیریم. مسلم است که هر بازیکن، یا سازمان مورد بررسی، دارای یک مقدار دارایی اولیه‌ای می‌باشد. از طرفی در بررسی عوامل مؤثر بر ورشکستگی یک سازمان، مقدار مطالبات آن سازمان بسیار چشمگیر می‌باشد. به‌طوری‌که یک سازمان با دارایی نسبتاً قابل قبول را ممکن است با مطالبات زیاد به سمت ورشکسته شدن سوق دهد. در این راستا مدل (۴)، تشخیص هر چه بهتر ورشکستگی با استفاده از دارایی کل و مطالبات را امکان‌پذیر می‌کند. مقدار به‌دست‌آمده از حل این مدل، به‌عنوان دارایی خالص و به عبارت دیگر مقدار دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات برای بازیکن  $j$  ام تفسیر می‌شود. به‌طوری‌که مقدار مثبت به‌دست‌آمده از این مدل را تحت عنوان غیر ورشکستگی بیان می‌کنیم. تفسیر این مدل به این صورت است که بازیکن مورد نظر پس از پرداخت بدهی‌ها و باقیمانده‌ای که تحت عنوان دارایی خالص تفسیر می‌شود اگر این مقدار برابر با مقداری غیر صفر باشد به این منظور است که مقدار دارایی خالصی برای بازیکن، باقیمانده است، پس فاصله خود را تا ورشکستگی تا حدودی حفظ می‌کند و به این طریق می‌تواند با دارایی باقیمانده‌ی خود که همان دارایی خالص است مقداری را در جهت تولید یا مصارف دیگر استفاده

کند. حال مقدار صفر را به عنوان ورشکستگی در نظر می‌گیریم. بدین صورت که این مقدار به این معناست که مقدار دارایی کل با مقدار مطالبات برابر بوده و تمام دارایی‌های بازیکن  $\bar{r}$  ام به عنوان مطالبات پرداخت شده است و مقداری باقی نمانده است پس فاصله‌ای با ورشکسته شدن ندارد؛ بنابراین این بازیکن یا سازمان را به عنوان ورشکسته اعلام می‌کنیم.

#### ۴- تئوری مجموعه‌های راف

تئوری مجموعه‌های راف، برای بیان مسائلی است که در آن‌ها عدم قطعیت و ابهام وجود دارد و معمولاً برای پیدا کردن ناهمگونی‌ها و ارتباطات در اطلاعات به کار می‌رود. مهم‌ترین ویژگی این تئوری، امکان استفاده‌ی هم‌زمان از اطلاعات کیفی و کمی و همچنین امکان ارزیابی اهمیت داده‌ها و تولید قوانین تصمیم‌گیری از روی اطلاعات است. حال از دیدگاه مجموعه‌های راف، یافتن رابطه بین ویژگی‌های شرطی و ویژگی‌های تصمیم‌گیری (وضعیت سوددهی) اهمیت زیادی دارد و با استفاده از این وابستگی بین ویژگی‌ها می‌توان ویژگی‌هایی که اهمیت ندارند را حذف کرد و آن‌هایی که از اهمیت ضعیف و یا قوی برخوردار باشند را به راحتی تشخیص داد و در واقع به عنوان ابزاری برای تحلیل در جدول تصمیم‌گیری به کار گرفته می‌شود. فلسفه مجموعه‌های راف بر این فرض است که هر شیء از جهان را می‌توان به عنوان اطلاعات در نظر گرفت، بنا شده است [۱۸]. اشیاء توصیف شده به وسیله اطلاعات یکسان از نقطه نظر اطلاعات در دسترس درباره آن‌ها غیرقابل تشخیص هستند. رابطه غیرقابل تشخیص بودن (رابطه علی-معلولی) به دست آمده در این روش اساس ریاضیات تئوری مجموعه‌های راف می‌باشد لذا روشی مبتنی بر مفهوم دسته‌بندی (کلاسه سازی) است. لذا با استفاده از این مفهوم تئوری راف و تشکیل جدول داده‌ها و قوانین اگر-آنگاه به دسته‌بندی و تفکیک اطلاعات می‌پردازیم [۱۹].

#### ۴-۱- تئوری راف به زبان ریاضی

نظریه مجموعه‌های راف بر اساس مفاهیم نادقیق در یک فضای تخمین گسترش یافته است. تخمین‌های بالایی و پایینی یک مفهوم نادقیق می‌تواند به طور ساده به صورت دو بازه بسته روی دامنه شاخص ساده شود. فرض کنید  $(\Lambda, \Delta, A, \pi)$  یک فضای راف باشد آنگاه حد بالایی درستی پیشامد  $k$  به صورت زیر است [۱۲]:

$$T\bar{r}\{K\} = \frac{\pi\{K\}}{\pi\{\Lambda\}}$$

و به همین ترتیب حد پایینی پیشامد  $k$  به صورت زیر است:



$$Tr\{K\} = \frac{\pi\{K \cap \Delta\}}{\pi\{\Delta\}}.$$

در این صورت درستی پیشامد  $k$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$Tr\{K\} = \frac{1}{\varphi} (Tr\{K\} + Tr\{K\}).$$

حال روش را بر اساس مقدار امید ریاضی مورد بحث قرار می دهیم. فرض کنید  $\Lambda = \{\lambda : c \leq \lambda \leq d\}$  و  $\Delta = \{\lambda : a \leq \lambda \leq b\}$  جایی که  $c \leq a < b \leq d$  و  $A$  یک جبر برل روی  $\Lambda$  و  $\pi$  اندازه لبگ است.

لم ۱: متغیر راف  $([a, b], [c, d])$  با  $c \leq a < b \leq d$  تابع همانی  $\xi(\lambda) = \lambda$  از فضای راف  $(\Lambda, \Delta, A, \pi)$  به مجموعه اعداد واقعی، جایی که  $\Lambda = \{\lambda : c \leq \lambda \leq d\}$  و  $\Delta = \{\lambda : a \leq \lambda \leq b\}$  جایی که  $c \leq a < b \leq d$  و  $A$  یک جبر برل روی  $\Lambda$  و  $\pi$  اندازه لبگ است. آنگاه مقدار مورد انتظار  $\xi$  (مقدار امید ریاضی)، به صورت زیر است [۱۲]:

$$E[\xi] = \frac{1}{\varphi} (a + b + c + d).$$

لم ۲: فرض کنید  $\xi$  یک متغیر راف فازی  $LR$  با تابع عضویت متغیر فازی باشد آنگاه  $\xi$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{\xi}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\bar{m}_1 - x}{\alpha}\right), & \text{for } \bar{m}_1 - \alpha \leq x \leq \bar{m}_1; \\ 1, & \text{for } \bar{m}_1 \leq x \leq \bar{m}_2; \\ R\left(\frac{x - \bar{m}_2}{\beta}\right), & \text{for } \bar{m}_2 \leq x \leq \bar{m}_2 + \beta; \end{cases}$$

به طوری که  $\bar{m}_1$  و  $\bar{m}_2$  متغیرهای راف به صورت زیر هستند:

$$\bar{m}_2 = [[p_1, p_2], [p_3, p_4]]; \quad 0 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4;$$

$$\bar{m}_1 = [[q_1, q_2], [q_3, q_4]]; \quad 0 < q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq q_4;$$

آنگاه مقدار امید ریاضی  $\xi$  به صورت زیر است:

$$E[\xi] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\varphi} (p_i + q_i) - \frac{\alpha}{\varphi} \int_0^1 L(t) + \frac{\beta}{\varphi} \int_0^1 R(t).$$

متغیر راف فازی ذوزنقه‌ای:

لم ۳: فرض کنید  $\xi$  یک متغیر راف فازی ذوزنقه‌ای  $(\bar{r}_1, \bar{r}_\tau, \bar{r}_\nu, \bar{r}_\phi)$  به طوری که  $\bar{r}_1, \bar{r}_\tau, \bar{r}_\nu, \bar{r}_\phi$  متغیرهای راف تعریف شده روی  $(\Lambda, \Theta, A, \pi)$  هستند و

$$\bar{r}_1 = [[p_\tau, p_\nu], [p_1, p_\phi]]; \quad 0 < p_1 \leq p_\tau \leq p_\nu \leq p_\phi;$$

$$\bar{r}_\tau = [[q_\tau, q_\nu], [q_1, q_\phi]]; \quad 0 < q_1 \leq q_\tau \leq q_\nu \leq q_\phi;$$

$$\bar{r}_\nu = [[s_\tau, s_\nu], [s_1, s_\phi]]; \quad 0 < s_1 \leq s_\tau \leq s_\nu \leq s_\phi;$$

$$\bar{r}_\phi = [[t_\tau, t_\nu], [t_1, t_\phi]]; \quad 0 < t_1 \leq t_\tau \leq t_\nu \leq t_\phi;$$

آنگاه مقدار امید ریاضی  $\xi$ :

$$E[\xi] = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^4 (p_i + q_i + s_i + t_i).$$

۴-۲- مدل کلی با استفاده از مقدار امید ریاضی راف (EVM)

یکی از روش‌های حل متداول مسائل نادقیق، تبدیل آن‌ها به مدل‌های قطعی است. استفاده از مقدار امید ریاضی متغیرهای نادقیق به عنوان یک ابزار برای قطعی سازی، کاربردهای متنوع و زیادی دارد. در این مدل نیز می‌توان از امید ریاضی تابع هدف و قیود استفاده نمود. مسئله یک هدفه با پارامترهای راف فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \max f(x, \xi), \\ & \text{s.t.} \begin{cases} g_j(x, \xi) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ x \in X, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

جایی که  $f(x, \xi), g_j(x, \xi), j = 1, \dots, n$  توابع پیوسته در  $x$  هستند و  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  یک بردار فازی روی فضای امکان  $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ . آنگاه با پیروی از عملگر مقدار امید ریاضی:

$$\begin{aligned} & \max E[f(x, \xi)], \\ & \text{s.t.} \begin{cases} E[g_j(x, \xi)] \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ x \in X, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

جایی که  $E$  عملگر مقدار امید ریاضی متغیر راف فازی را نشان می‌دهد. با استفاده از عملگر امید ریاضی مدل ۶ به یک مدل قطعی تبدیل می‌شود [۱۲].

#### ۴-۳- مدل راف فازی قطعی با عملگر مقدار امید ریاضی

در این بخش درباره مسئله محاسبه کارایی  $DMU$  های با ورودی راف فازی و خروجی راف فازی بحث می‌کنیم.  $n$  تا  $DMU$  را در نظر می‌گیریم که هر کدام  $m$  تا ورودی راف فازی مختلف را برای به دست آوردن  $s$  تا خروجی راف فازی مختلف مصرف می‌کنند. به علاوه فرض می‌کنیم که ورودی راف فازی  $\tilde{x}_{ij}$  و خروجی راف فازی  $\tilde{y}_{rj}$  که به ترتیب به وسیله دو تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\mu_{\tilde{x}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{x_{ij}^{m_1} - t}{x_{ij}^{\beta}}\right), & t \leq x_{ij}^{m_1}; \\ R\left(\frac{t - x_{ij}^{m_r}}{x_{ij}^{\beta}}\right), & t \geq x_{ij}^{m_r}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu_{\tilde{y}}(t) = \begin{cases} L\left(\frac{y_{rj}^{m_1} - t}{y_{rj}^{\beta}}\right), & t \leq y_{rj}^{m_1}; \\ R\left(\frac{t - y_{rj}^{m_r}}{y_{rj}^{\beta}}\right), & t \geq y_{rj}^{m_r}; \end{cases} \quad (8)$$

جایی که:

$$\begin{aligned} x_{ij}^{m_1} &= \left( [x_{ij}^{m_1-a}, x_{ij}^{m_1-b}], [x_{ij}^{m_1-c}, x_{ij}^{m_1-d}] \right); \quad 0 < x_{ij}^{m_1-c} \leq x_{ij}^{m_1-a} \leq x_{ij}^{m_1-b} \leq x_{ij}^{m_1-d}; \\ x_{ij}^{m_r} &= \left( [x_{ij}^{m_r-a}, x_{ij}^{m_r-b}], [x_{ij}^{m_r-c}, x_{ij}^{m_r-d}] \right); \quad 0 < x_{ij}^{m_r-c} \leq x_{ij}^{m_r-a} \leq x_{ij}^{m_r-b} \leq x_{ij}^{m_r-d}; \\ y_{rj}^{m_1} &= \left( [y_{rj}^{a-m_1}, y_{rj}^{b-m_1}], [y_{rj}^{c-m_1}, y_{rj}^{d-m_1}] \right); \quad 0 < y_{rj}^{c-m_1} \leq y_{rj}^{a-m_1} \leq y_{rj}^{b-m_1} \leq y_{rj}^{d-m_1}; \\ y_{rj}^{m_r} &= \left( [y_{rj}^{a-m_r}, y_{rj}^{b-m_r}], [y_{rj}^{c-m_r}, y_{rj}^{d-m_r}] \right); \quad 0 < y_{rj}^{c-m_r} \leq y_{rj}^{a-m_r} \leq y_{rj}^{b-m_r} \leq y_{rj}^{d-m_r}; \end{aligned}$$

حال مدل  $CCR$  با داده‌های راف فازی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rp}, \\
 & \text{s.t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n v_j \tilde{x}_{ij} = 1; \\ \sum_{j=1}^n u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{j=1}^n v_j \tilde{x}_{ij} \leq 0; \quad j = 1, \dots, n; \\ u_r, v_i \geq 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (9)
 \end{aligned}$$

مدل (۹) پارامترهای راف فازی را وارد می‌کند بنابراین نمی‌تواند به‌طور مستقیم بهینه‌سازی را انجام دهد. در این صورت مقدار امید ریاضی را برای تبدیل مدل راف فازی به EVM راف فازی

به کار می‌بریم.  $\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}$  و  $\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}$  به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^m u_r \tilde{y}_{rj} = \left( \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\alpha, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{m_1}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{m_2}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^\beta \right), \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} = \left( \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^\alpha, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_\beta} \right), \quad (11)$$

جایی که

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1} = \left( \left[ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1-a}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1-b} \right], \left[ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1-c}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_1-d} \right] \right); \\
 & \quad \circ < x_{ij}^{m_1-c} \leq x_{ij}^{m_1-a} \leq x_{ij}^{m_1-b} \leq x_{ij}^{m_1-d}; \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2} = \left( \left[ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2-a}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2-b} \right], \left[ \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2-c}, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{m_2-d} \right] \right); \\
 & \quad \circ < x_{ij}^{m_2-c} \leq x_{ij}^{m_2-a} \leq x_{ij}^{m_2-b} \leq x_{ij}^{m_2-d}; \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{m_1} = \left( \left[ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{a-m_1}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{b-m_1} \right], \left[ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{c-m_1}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{d-m_1} \right] \right); \\
 & \quad \circ < y_{rj}^{c-m_1} \leq y_{rj}^{a-m_1} \leq y_{rj}^{b-m_1} \leq y_{rj}^{d-m_1}; \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{m_2} = \left( \left[ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{a-m_2}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{b-m_2} \right], \left[ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{c-m_2}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{d-m_2} \right] \right); \\
 & \quad \circ < y_{rj}^{c-m_2} \leq y_{rj}^{a-m_2} \leq y_{rj}^{b-m_2} \leq y_{rj}^{d-m_2};
 \end{aligned}$$

حال مدل  $CCR$  قطعی بر اساس روش مقدار امید ریاضی به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} & \max \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{r=1}^s u_r \left[ \left( y_p^{a-m_1} + y_p^{b-m_1} + y_p^{c-m_1} + y_p^{d-m_1} \right) + \left( y_p^{a-m_r} + y_p^{b-m_r} + y_p^{c-m_r} + y_p^{d-m_r} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varphi \sum_{r=1}^s u_r \left( -y_p^a \int_0^1 L(t) dt + y_p^\beta \int_0^1 R(t) dt \right) \right\}, \\ & s.t. \left\{ \sum_{i=1}^s v_i \left[ \left( x_{ij}^{m_1-a} + x_{ij}^{m_1-b} + x_{ij}^{m_1-c} + x_{ij}^{m_1-d} \right) + \left( x_{ij}^{m_r-a} + x_{ij}^{m_r-b} + x_{ij}^{m_r-c} + x_{ij}^{m_r-d} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varphi \sum_{i=1}^s v_i \left( -x_{ip}^\alpha \int_0^1 L(t) dt + x_{ip}^\beta \int_0^1 R(t) dt \right) \right\} = \lambda \\ & \sum_{r=1}^s u_r \left[ \left( y_p^{a-m_1} + y_p^{b-m_1} + y_p^{c-m_1} + y_p^{d-m_1} \right) + \left( y_p^{a-m_r} + y_p^{b-m_r} + y_p^{c-m_r} + y_p^{d-m_r} \right) \right] \\ & \quad + \varphi \sum_{r=1}^s u_r \left( -y_p^a \int_0^1 L(t) dt + y_p^\beta \int_0^1 R(t) dt \right) - \\ & \quad \left\{ \sum_{i=1}^s v_i \left[ \left( x_{ij}^{m_1-a} + x_{ij}^{m_1-b} + x_{ij}^{m_1-c} + x_{ij}^{m_1-d} \right) + \left( x_{ij}^{m_r-a} + x_{ij}^{m_r-b} + x_{ij}^{m_r-c} + x_{ij}^{m_r-d} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \varphi \sum_{i=1}^s v_i \left( -x_{ip}^\alpha \int_0^1 L(t) dt + x_{ip}^\beta \int_0^1 R(t) dt \right) \right\} \leq 0; j = 1, \dots, n; u_r, v_i \geq 0; r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

##### ۵- تحلیل پوششی داده‌های راف

فرض کنید فرض کنید  $n$  واحد تصمیم‌گیری که هر یک با  $m$  ورودی،  $s$  خروجی تولید می‌کنند را در نظر بگیرید. بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم‌گیرنده  $j$  ام بردارهای راف به صورت زیر هستند [۲۰].

$$\hat{X}_j = (\hat{x}_{1j}, \dots, \hat{x}_{mj})^T > 0 \text{ and } \hat{Y}_j = (\hat{y}_{1j}, \dots, \hat{y}_{sj})^T > 0 \quad j = 1, \dots, n$$

جایی که  $\hat{x}_{ij}$  نشان دهنده مقدار ورودی  $i$  ام از  $DMU_j$  ام و  $\hat{y}_{ij}$  نشان دهنده مقدار خروجی  $r$  ام از  $DMU_j$  ام است. فرض کنید  $DMU_o$ ، واحد تصمیم‌گیری مورد بررسی باشد.  $\hat{X}_o$  و  $\hat{Y}_o$  بردارهای ورودی و خروجی هستند. بدون از دست دادن عمومیت فرض کنید که تمام داده‌های ورودی و خروجی  $\hat{x}_{ij}$  و  $\hat{y}_{ij}$  بیانگر مقادیر نادقیق و مبهم می‌باشند. بر طبق مدل  $CCR$  در  $DEA$ ، می‌توان یک مدل  $DEA$  را با بردارهای راف به صورت مدل (۱۳) بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{X}_j \leq \theta \hat{X}_o \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{Y}_j \geq \hat{Y}_o \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (13)
 \end{aligned}$$

به طور کلی وقتی با مقادیر نادقیق سروکار داریم، می‌توانیم متغیرهای راف را به مقادیر قطعی تبدیل و انتقال دهیم. در نظریه‌ی برنامه‌ریزی راف، روش‌های زیادی برای انتقال مقادیر راف به مقادیر قطعی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، بر اساس روش مقدار امید ریاضی است که در بخش‌های قبل به آن اشاره شد. روش دیگر بر اساس مقادیرهای  $\alpha$  خوش‌بینانه و  $\alpha$  بدبینانه متغیر راف است که از حالت نادقیق به حالت قطعی تبدیل می‌شود. در این روش مقادیرهای  $\alpha$  خوش‌بینانه و  $\alpha$  بدبینانه با پارامترهای متغیر راف در مدل  $DEA$  سروکار دارد؛ بنابراین مدل (۱۳) می‌تواند به برنامه‌ریزی ماکزیمم و برنامه‌ریزی مینیمم نسبت به سطح  $\alpha$  و متغیر راف تبدیل می‌شود. مقادیرهای  $\alpha$  خوش‌بینانه و  $\alpha$  بدبینانه متغیر راف به صورت زیر می‌باشد.

تعریف: فرض کنید  $\xi$  یک متغیر راف و  $\alpha \in [0, 1]$  باشد، آنگاه:

$$\xi_{\text{sup}}(\alpha) = \sup \{ r \mid Tr \{ \xi \geq r \} \geq \alpha \}$$

که مقدار  $\alpha$  خوش‌بینانه  $\xi$  نامیده می‌شود و

$$\xi_{\text{inf}}(\alpha) = \inf \{ r \mid Tr \{ \xi \leq r \} \geq \alpha \}$$

مقدار  $\alpha$  بدبینانه  $\xi$  تعریف می‌شود.

### ۵-۱- حل مدل تحلیل پوششی داده‌های راف

بر اساس روش‌های گفته‌شده، واضح است که متغیرهای راف در مدل  $RDEA$  (۱۳) می‌تواند به یک مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای نسبت به سطح درستی  $\alpha$  تبدیل می‌شود. متغیرهای راف می‌تواند به  $\hat{X}_j = (\hat{x}_{1j}, \dots, \hat{x}_{mj})^T > 0$  بازه‌ی  $[X_j^{\text{sup}(\alpha)}, X_j^{\text{inf}(\alpha)}]$  و  $\hat{Y}_j = (\hat{y}_{1j}, \dots, \hat{y}_{sj})^T > 0$  بازه‌ی  $[Y_j^{\text{sup}(\alpha)}, Y_j^{\text{inf}(\alpha)}]$  نسبت به  $\xi_{\text{sup}(\alpha)} \geq \xi_{\text{inf}(\alpha)}$  و  $0 < \alpha \leq 1$  منتقل می‌شود. به منظور سروکار داشتن با متغیرهای راف نادقیق، مدل  $RDEA$  (۱۳) به مدل برنامه‌ریزی زیر تبدیل می‌شود [۲۰]:

Min  $\theta$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j [X_j^{\sup(\alpha)}, X_j^{\inf(\alpha)}] \leq \theta [X_o^{\sup(\alpha)}, X_o^{\inf(\alpha)}] \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j [Y_j^{\sup(\alpha)}, Y_j^{\inf(\alpha)}] \geq [Y_o^{\sup(\alpha)}, Y_o^{\inf(\alpha)}] \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (14)$$

به طوری  $[X_j^{\sup(\alpha)}, X_j^{\inf(\alpha)}]$  و  $[Y_j^{\sup(\alpha)}, Y_j^{\inf(\alpha)}]$  بازه‌های انتقال یافته از متغیرهای راف  $X_j = (\hat{x}_{1j}, \dots, \hat{x}_{mj})^T > 0$  و  $Y_j = (\hat{y}_{1j}, \dots, \hat{y}_{sj})^T > 0$  به ترتیب تحت سطح درستی  $0.5 < \alpha \leq 1$  است. واضح است که تحت سطح درستی  $\alpha$  اگر ورودی‌های  $DMU_o$  مینیمم مقدار هستند و خروجی‌های  $DMU_o$  ماکزیمم مقدار هستند، درحالی‌که ورودی‌های بقیه‌ی  $n-1$  تا  $DMU$  ماکزیمم مقدار هستند و خروجی‌های بقیه‌ی  $n-1$  تا  $DMU$  مینیمم مقدار هستند، آنگاه ماکزیمم مقدار کارایی برای  $DMU_o$  به دست آمده است؛ بنابراین مدل بازه‌ای برنامه‌ریزی (۱۴) به صورت زیر قابل تبدیل است [۲۱].

Min  $\theta$

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq o}}^n \lambda_j X_j^{\inf(\alpha)} + \lambda_{j_o} X_o^{\sup(\alpha)} \leq \theta X_o^{\sup(\alpha)} \\ \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq o}}^n \lambda_j Y_j^{\sup(\alpha)} + \lambda_{j_o} Y_o^{\inf(\alpha)} \geq Y_o^{\inf(\alpha)} \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (15)$$

مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۵) یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی با پارامتر  $\alpha$  است و ضمانت می‌کند که ماکزیمم مقدار برای  $DMU_o$  به دست آمده است که آن را با  $\theta^{\inf(\alpha)}$  نشان می‌دهیم. مطابقاً اگر ورودی‌های  $DMU_o$  ماکزیمم مقدار هستند و خروجی‌های  $DMU_o$  مینیمم مقدار هستند، درحالی‌که ورودی‌های بقیه‌ی  $n-1$  تا  $DMU$  مینیمم مقدار هستند و خروجی‌های بقیه‌ی  $n-1$  تا  $DMU$  ماکزیمم مقدار هستند، آنگاه مینیمم مقدار کارایی برای  $DMU_o$  به دست آمده است؛ بنابراین مدل بازه‌ای برنامه‌ریزی (۱۵) به صورت زیر قابل تبدیل است.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq o}}^n \lambda_j X_j^{\text{sup}(\alpha)} + \lambda_o X_o^{\text{inf}(\alpha)} \leq \theta X_o^{\text{inf}(\alpha)} \\
 & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq o}}^n \lambda_j Y_j^{\text{inf}(\alpha)} + \lambda_o Y_o^{\text{sup}(\alpha)} \geq Y_o^{\text{sup}(\alpha)} \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \right. \quad (16)
 \end{aligned}$$

مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۶) یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی با پارامتر  $\alpha$  است و ضمانت می‌کند که مینیمم مقدار برای  $DMU_o$  به دست آمده است که آن را با  $\theta^{\text{sup}(\alpha)}$  نشان می‌دهیم. فرض کنید  $(\theta^*)^{\text{inf}(\alpha)}$  و  $(\theta^*)^{\text{sup}(\alpha)}$  جواب‌های بهینه ماکزیمم مقدار (۱۵) و مینیمم مقدار (۱۶) باشد آنگاه واضح است که  $(\theta^*)^{\text{inf}(\alpha)} \geq (\theta^*)^{\text{sup}(\alpha)}$ .

تعریف:  $DMU_o$  کارای  $DEA$  راف است اگر بهترین کارایی ممکن در کران بالای آن یعنی  $(\theta^*)^{\text{inf}(\alpha)} = 1$  داشته باشد.

حال با استفاده از مفاهیم گفته‌شده و تعاریف راف فازی در  $DEA$  به بررسی یک مثال عددی از چند شرکت می‌پردازیم و کارایی را با استفاده از مدل‌های راف فازی (۱۲) و مدل جدید ورشکستگی را با استفاده از مدل‌های (۱۵) و (۱۶) گفته‌شده در این مقاله مورد بحث قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
 & \max E_j - \sum_j d_j \\
 & s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j [y_j^{\text{sup}(\alpha)}, y_j^{\text{inf}(\alpha)}] \leq [y_o^{\text{sup}(\alpha)}, y_o^{\text{inf}(\alpha)}] - \left( E_j - \sum_j d_j \right) g_y \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \geq x_{io} \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad E_j - \sum_j d_j \geq 0 \\
 & \quad \lambda_j \geq 0
 \end{aligned} \quad (17)$$

این مدل تبدیل‌شده‌ی مدل (۴) با استفاده از مفاهیم  $DEA$  راف، می‌باشد در این مدل خروجی‌ها به‌عنوان یک مقدار در مجموعه راف فازی در نظر گرفته می‌شوند و ورودی‌ها همچنان در حالت قطعیت بررسی می‌شوند. بدین‌صورت یک سیستم اطلاعاتی متشکل از اشیاء تحت عنوان سازمان



(شرکت، تشکیلات و...) و شاخص‌های بدهی، سرمایه، فروش و ارزیابی عملکرد و... که به صورت یک مقدار کیفی و در مجموعه راف فازی است را در نظر می‌گیریم. قابل ذکر است که مجموعه فوق را به صورت مقداری در بازه (۰,۱۰۰) در نظر می‌گیریم و با استفاده از مفاهیم راف فازی در *DEA*، مدل‌های کارایی و ورشکستگی را برای این مثال عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌توان گفت که شاخص‌های انتخاب شده در این بحث به دلیل اهمیت آن‌ها در فعالیت‌های اقتصاد انتخاب شده‌اند. قابل ذکر است که برای حل مدل (۱۷)، باید آن را در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه مطابق با مدل‌های (۱۵) و (۱۶) تفکیک و حل نمود.

### ۵-۲-مثال عددی

سیستم اطلاعاتی متشکل از ۸ شرکت دارویی به‌عنوان اشیا و شاخص‌های سرمایه، بدهی، فروش شرکت دارویی، شاخص‌های قطعی و کمی بوده و شاخص ارزیابی عملکرد داده‌ی راف فازی می‌باشد که در جدول ۱ داده شده‌اند را بررسی می‌کنیم.

جدول (۱): مقادیر مربوط به شاخص‌ها و شرکت‌ها (ویژگی‌ها یا اشیاء)

شرکت‌ها	شاخص‌ها		
	سرمایه ( $X_1$ )	بدهی ( $X_2$ )	فروش ( $X_3$ )
DMU 1	۱۲۳	۴۶	۱۱
DMU 2	۲۳۴	۷۸	۳
DMU 3	۱۷۶	۶۸	۱۶۴
DMU 4	۲۸	۱۷	۱۶۵
DMU 5	۵۳۰	۷۱	۱۷۱
DMU 6	۶۹	۶۹	۷۶
DMU 7	۱۰۹	۸۵	۳۷
DMU 8	۱۳۵	۷۲	۶۰

حال با استفاده از مدل (۱۲)، کارایی شرکت‌ها را محاسبه می‌کنیم که در جدول ۲، ستون دوم، مقادیر آن ذکر شده است. سپس مدل ورشکستگی جدید را با استفاده از مدل  $\alpha$  سطح (راف بازه‌ای) مطرح شده در بخش *DEA* راف حل کرده و آن را به دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه، (طبق مدل‌های (۱۵) و (۱۶)) تبدیل و محاسبه می‌کنیم که در ستون‌های سوم و چهارم قابل مشاهده است و این‌گونه ورشکستگی شرکت‌ها را ارزیابی و مورد بحث قرار می‌دهیم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود میزان ورشکستگی در مدل بدبینانه همواره بیشتر از میزان ورشکستگی در مدل خوش‌بینانه است.

جدول (۲): شرکت‌ها و نتایج محاسبه ورشکستگی

شرکت‌ها	شاخص‌ها	
	ورشکستگی در حالت بدبینانه (inf)	ورشکستگی در حالت خوش‌بینانه (sup)
DMU 1	۰/۱۷	۰/۰۶
DMU 2	۰/۱۷	جواب ندارد
DMU 3	۰/۰۷	جواب ندارد
DMU 4	۰/۱	۰/۰۲
DMU 5	جواب ندارد	جواب ندارد
DMU 6	۰/۱۷	۰/۰۴
DMU 7	جواب ندارد	جواب ندارد
DMU 8	۰/۱۷	۰/۰۳

### ۵-۳- تحلیل نتایج عددی

نتایج و تحقیقات استفاده از مدل‌های تبدیل مقادیر راف فازی در *DEA* نشان دادند که شرکت‌هایی با داشتن کارایی نسبتاً بالا و وضعیتی که با توجه به شرایط و حالت خوش‌بینانه بررسی و حل می‌شوند ممکن است در آن‌ها مدل ورشکستگی جواب نداشته باشد و این حالت بیان‌کننده‌ی حالتی است که در آن شرکت در وضعیتی رو به خوش‌بین بررسی شده و بالطبع در وضعیت ورشکستگی قرار نمی‌گیرد. قابل ذکر است که کارایی شرکت‌ها با استفاده از مدل (۱۲) و ورشکستگی بازه‌ای با استفاده از مدل (۱۷) محاسبه می‌شود (درواقع مدل (۱۷) در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه بر اساس مدل‌های (۱۵) و (۱۶) بررسی و حل شده‌اند). به همین علت است که  $DMU_5$  با داشتن وضعیت کیفی متوسط در مجموعه راف فازی و کارایی ۰/۷۹ درصد با توجه به شاخص‌های موردبررسی در جدول (۱) نه در حالت خوش‌بینانه و نه در حالت بدبینانه جواب ندارد و این نشان‌دهنده‌ی این مطلب است که شاخص‌های موردبررسی با اثر متقابل و خاصیت جبرانی شاخص‌ها، با توجه به مدل‌های فوق و مقادیر موردنظر، شرکت را کارا معرفی کرده است و ورشکستگی آن با توجه به تبدیل مدل ورشکستگی جدید راف فازی در حالتی است که جواب ندارد. درواقع  $DMU_5$  با داشتن سرمایه‌ی نسبتاً بالا و مطالبات کمتر و فروش نسبتاً خوب تحت تأثیر سرمایه خود توانسته است که وضعیت خود را بهینه نگه دارد و مدل فوق این موضوع را تأیید می‌کند. به همین ترتیب به‌عنوان مثال  $DMU_1$  با داشتن کارایی ۰/۰۵، با سرمایه‌ی نسبتاً قابل توجه و با داشتن تقریباً  $1/3$  بدهی نسبت به سرمایه، مقدار ورشکستگی آن در بازه‌ای کوچک قرار می‌گیرد و این نشان می‌دهد که ورشکستگی با استفاده از مدل فوق با در

نظر گرفتن تمام شاخص‌ها و تأثیر شاخص‌ها بر یکدیگر و بهبود در شاخص‌های دیگر، مقدار ورشکستگی را کوچک در نظر گرفته است اما امکان ورشکستگی در این شرکت توسط این مدل اعلام شده است هر چند که کوچک است اما باید توجه شود که می‌توان با بهبود در بخش‌های دیگر باعث کنترل هرچه بهتر ورشکستگی خواهد شد و دارایی‌های خالص پس از پرداخت مطالبات را در جهت بهتر و حتی تولید در بخش‌های پربازده قرار داد. قابل ذکر است با توجه به مباحث راف بازه‌ای می‌توان گفت که نامساوی  $(\theta^*)^{\sup(\alpha)} \geq (\theta^*)^{\inf(\alpha)}$  در حالت‌های عددی برقرار می‌باشد. به همین ترتیب شرکت‌های دیگر بررسی می‌شوند.

## ۶- نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله مطالعه بر روی مدل‌های ورشکستگی، به‌خصوص مدل ورشکستگی جدید با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها و تئوری مجموعه‌های راف بود که روشی جدید از استفاده از این دو روش ارائه شد و این مدل را در یک مثال کاربردی با استفاده از مدل‌های موجود در راف فازی و *DEA* راف مورد بحث و بررسی قرار دادیم. تلفیق این دو روش باعث درک بیشتر و طبقه‌بندی بهتری از سازمان‌های مورد بررسی در دو حالت ورشکستگی و غیر ورشکستگی را ارائه کرد. بدین منظور، ورشکستگی و عدم ورشکستگی شرکت‌ها با استفاده از شاخص‌ها و ارزیابی عملکرد به‌صورت مقدار کیفی در مجموعه‌های راف فازی بررسی بهتری از طبقه‌بندی شرکت‌ها را در پیش داشت که علت آن استفاده از شاخص‌ها و تشکیل سیستم اطلاعاتی منظم و دقیق‌تری می‌باشد. از طرفی با استفاده از مدل ورشکستگی جدید ارائه‌شده و تبدیل مدل فوق در حالت راف فازی و راف بازه‌ای این مدل را مورد مطالعه قرار دادیم و کارایی آن با استفاده از مدل‌های فوق نیز در *DEA* مورد بررسی قرار گرفت. نتایج، شرکت‌ها را به دو دسته ورشکسته و غیر ورشکسته تقسیم کرد. برای توضیح بیشتر می‌توان بیان کرد که در واقع بازه‌ی به‌دست‌آمده به‌وسیله مدل‌های فوق بیان‌کننده مقداری است که بیان می‌کند که شرکت می‌تواند با توجه به شاخص‌های دیگر ورشکستگی را بهبود دهد. در واقع ورشکستگی در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه تحت یک بازه با مقادیر *inf* و *sup* ارائه شد که قابل بهبود تحت شرایط کنترل‌شده خواهد بود و قدرت تشخیص *DEA* و مجموعه‌های راف با استفاده از شرایط فوق مورد بحث قرار گرفت. خصوصیات مدل پیشنهادی با استفاده از یک مثال عددی بررسی شده است که نشان می‌دهد که شرکت‌های با سرمایه‌ی نسبتاً بالا یا حتی بسیار زیاد ممکن است دارای اندکی ورشکستگی باشند که نشان‌دهنده این مطلب است که فروش و داشتن بدهی و بررسی شاخص‌های دیگر سهم بسیار عظیمی در تشخیص ورشکستگی و غیر ورشکستگی را دارا می‌باشد و بازه‌ای تحت عنوان بازه‌ی ورشکستگی ارائه می‌شود که قابل بهبود از حالت ورشکستگی به حالت غیر ورشکستگی با بررسی شاخص‌ها خواهد بود. به‌خصوص که تابع هدف این مدل، دارایی خالص و مطالبات را مدنظر قرار

می‌دهد. همچنین ارزیابی‌های فوق نشان داد محاسبات در قالب یک سیستم اطلاعاتی در راف همراه با مدل‌های *DEA* و مفاهیم راف فازی و *DEA* راف به دلیل در نظر گرفتن تمامی شاخص‌ها و همچنین اشیای دسته‌بندی شده و به دست آوردن بازه‌ای تحت عنوان بازه‌ی ورشکستگی، بهتر و راحت‌تر می‌تواند به ما در ارزیابی ورشکستگی کمک کند و یک سیستم جامع از اطلاعات را چنان در اختیار ما قرار می‌دهد که کار با مفاهیم، اشیا (سازمان‌ها و یا شرکت‌ها) و شاخص‌های موجود در مسائل را برای ما راحت‌تر می‌کند و بازه‌ای از ورشکستگی را چنان در اختیار ما قرار می‌دهد که با استفاده از این بازه می‌توان در پی رفع نواقص موجود در پیشرفت سازمان‌ها برآمد. لازم به ذکر است که نتایج با شاخص‌های دیگر و شرایط مسئله می‌تواند تغییر کند.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب ارتقای کیفی مقاله گردید، کمال تشکر را دارند.

### مراجع

- [1] Premachandra, I.M., Gurmeeth, S.B. and Toshiyuki S. (2009). DEA as a tool for bankruptcy assessment: A comparative study with logistic regression technique. *European Journal of Operational Research*, **193**, 412-424.
- [2] Altman, E.I. (1968). Financial ratios, discriminated analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, **23**, 589-609.
- [3] Dimitras A.I., Susmag R. and Zopounidis C. (1999). Business failure prediction using rough sets. *European Journal of Operational Research*, **114**, 263-280.
- [4] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353.
- [5] Kaufmann, A. (1975). *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. New York, Academic Press.
- [6] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28.
- [7] Nahmias, S. (1978). Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 97-110.
- [8] Dubois, D., and Prade, H. (1988a). Fuzzy numbers: An overview, *Analysis of Fuzzy Information*, **2**, 3-39.
- [9] Dubois, D., and Prade, H. (1990). Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, *International Journal of General Systems*, **17**, 191-208.

- [10] Morsi, N.N., and Yakout, M.M. (1998). Axiomatics for fuzzy rough sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **100**, 327–342.
- [11] Wang, Y. (2003). Mining stock price using fuzzy rough set system. *Expert Systems with Applications*, **24**, 13–23.
- [12] Khanjani Shiraz, R., Vincent, C. and Jalalzadeh, L. (2014). Fuzzy Rough DEA model: A possibility and expected value approaches, *Expert Systems with Applications*, **41**, 434-444.
- [13] Leobardo Plata-Pérez and Joss Sánchez-Pérez. (2011). Convexity and marginal contributions in bankruptcy games. *EconoQuantum*, **8**, 61-72.
- [14] Dagan, N., and Voliji, O. (1993). the bankruptcy problem: A cooperative bargaining approach. *Mathematical Social Sciences*, **26**, 287-297.
- [15] Charnes, A. Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.
- [16] Chambers, R.G., Chung, Y. and Fare, R. (1998). Profit directional distance function and Nerlovian efficiency. *Journal of Optimization and Theory and Application*, **12**, 233-247
- [17] Udaya, S., Pakala T.P.M. and Mallikarjunappa T. (2012). A modified directional distance formulation of DEA to assess bankruptcy: An application to IT/ITES companies in India. *Expert Lists with Applications*, **39**, 1988-1997.
- [18] Francis E.H. and Tay, L.S. (2002). Economic and Financial prediction using rough sets model. *European journal of Operational Research*, **141**, 641-659.
- [19] Malcolm J., Beynon. M. and Peel, J. (2001). Variable precision rough set theory and data discretisation: an application to corporate failure prediction. *Omega*, **29**, 561-576.
- [20] Jiuping Xu, Bin Li and Desheng Wu. (2009). Rough data envelopment analysis and its application to supply chain performance *International Journal of Production Economics*. **122**, 628-638.
- [21] Entani, T., Maeda, Y. and Hideo, T. (2002). Dual models of interval DEA and it's extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.

## A New Method for Determining Bankruptcy Using DEA and Rough Set Theory

Aida Batamiz, Faranak Hossein Zadeh Saljooghi and Ali Akbar Sanavi

Faculty of Mathematics, Sistan and Baluchestan University, Zahedan, Iran.

### Abstract

In the changing economic conditions and volatility in financial environments in commercial is very important for predict financial performance, One of these is predict financial crisis and bankruptcy assessment. Data envelopment analysis (*DEA*) is a powerful tool available to managers that Benchmark your company's performance in their business activities. The conventional data envelopment *DEA* models are to evaluate each *DMU* optimistically. *DEA* is evaluation model from the optimistic viewpoint. In fact it will be evaluated in optimistic state. However, other models have been introduced in the *DEA* to measure the efficiency with which the pessimistic viewpoint of their specific applications such as assessing the failures and bankruptcy. In this paper combine Rough set theory and a new model in *DEA* about bankruptcy and it measure the efficiency and bankruptcy with establishment of an information system and the use of indicators calculates bankruptcy and efficiency using *DEA* Rough concepts and Fuzzy Rough. The results of the model in determining bankruptcies reviewed the number of organization.

**Keywords:** Bankruptcy, Game theory, Rough set theory, Fuzzy Rough, *DEA* Rough.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62C86.