

بهینه‌سازی روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری

اسماعیل حسام‌الدینی^۱، محسن ریاحی

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۳/۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۱/۱

چکیده: تاکنون روش تجزیه آدومیان به‌طور گسترده‌ای برای حل انواع معادلات دیفرانسیل به‌کار گرفته شده است. اما در برخی موارد دیده شده است که این روش دقت کمتری نسبت به روش‌های دیگر از جمله روش‌های هموتویی دارد. از آنجایی که این روش، یک روش نسبتاً عمومی و قدرتمند برای یافتن جواب‌های تحلیلی-تقریبی از انواع معادلات دیفرانسیل می‌باشد، در این مقاله سعی شده با به-کارگیری الگوی استاندارد این روش، یک روش بهینه جدید آدومیان^۲ را طوری ارائه دهیم که دقت روش تجزیه آدومیان را به میزان قابل توجهی افزایش دهد. ماهیت اصلی این روش تکراری متکی بر به‌کارگیری یک پارامتر کنترل‌کننده در همگرایی آن می‌باشد. در این روش جدید، پارامتر کنترل‌کننده در همگرایی، شبیه به پارامتر مورد استفاده در روش تحلیلی هموتویی است. این پارامتر به نحوی مشخص می‌شود که دقت جواب حاصل را تا حد قابل قبولی افزایش دهد. برای تعیین این پارامتر بهینه‌کننده از روش کمترین مربعات استفاده شده است. مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهند که روش بحث شده معتبر، کارا و دارای دقت بسیار زیادی در حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری است، و می‌توان از آن به‌طور معمول در حل معادلات دیفرانسیل بهره برد.

واژه‌های کلیدی: روش تجزیه آدومیان، معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری، روش‌های تحلیلی-تقریبی، بهینه‌سازی.

رده‌بندی ریاضی: ۴۹K۲۰، ۲۶A۳۳.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: اسماعیل حسام‌الدینی hesameddini@sutech.ac.ir

۱- مقدمه

به‌طور کلی یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل مشکل است، از این‌رو اخیراً روش‌های تقریبی مختلفی از جمله روش تداخلی هموتوبی [۱-۳]، روش تحلیلی هموتوبی [۴ و ۵] و روش تجزیه آدومیان^۱ برای حل این‌گونه معادلات گسترش پیدا کرده است. اکثر تحقیقات علمی روش‌های گوناگونی را برای فرمول‌بندی و مدل کردن ساختارهای فیزیکی ارائه می‌دهند. در سال‌های اخیر دانشمندان علوم پایه و مهندسی توجه زیادی به محاسبات کسری داشته‌اند و کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری در فیزیک و مهندسی به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است. بسیاری از پدیده‌ها در رشته‌های مختلف توسط معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری به‌طور ظریفی قابل مدل‌بندی هستند. از جمله می‌توان به پدیده‌هایی در مسایل کنترلی، مدل‌های آماری، مسائل اقتصادی، الکترومغناطیس، الکتروشیمی، کیهان‌شناسی، صوت‌شناسی، خطوط مخابرات و علوم مواد اشاره کرد [۶-۹]. در آغاز سال ۱۹۸۰ آدومیان روش جدیدی را برای معادلات تابعی [۱۰ و ۱۱] ارائه داد. روش تجزیه آدومیان و اصلاحات آن [۱۲-۱۴] از جمله روش‌های تحلیلی-تکراری و شناخته شده برای حل معادلات خطی و غیر خطی معمولی، با مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی می‌باشد. بسیاری از محققان ثابت کرده‌اند که اگر جواب دقیق یک معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد، آن‌گاه سری به‌دست آمده از روش آدومیان با سرعت زیادی به جواب دقیق همگرا است. چرال همگرایی روش آدومیان را در [۱۵] مورد بررسی قرار داد. علاوه بر آن چرال و آدومیان [۱۶] اثبات جدیدی را از این روش ارائه دادند. وزواز [۱۷] روش جدیدی را برای یافتن چند جمله‌ای‌های آدومیان ابداع کرد و روش اصلاح شده‌ی آدومیان را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی اکید به‌کار برد. بر پایه‌ی روش نیوتن، عباس‌بندی [۱۸] روش اصلاح شده آدومیان را برای ساخت یک الگوریتم تکراری قدرتمند به‌کار گرفت. بر پایه روش تحلیلی هموتوبی، سونگ و ونگ [۱۹] روش آدومیان را بهبود بخشیدند، که در آن، در چارچوب آدومیان استاندارد، منحنی‌های h را ساخته، یک روش بازگشتی را بنا نهاده و جواب‌های تقریبی با دقت بسیار بالایی را به‌دست آوردند. هدف این مقاله ارائه‌ی یک روش کارا و جدید برای بهبود بخشیدن به‌دقت روش آدومیان و تسریع در سرعت همگرایی آن، برای حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری می‌باشد. بر اساس این ایده، ما روش تجزیه آدومیان را توسعه می‌دهیم و یک فرمول تکراری را به شیوه‌ای موثر و متفاوت از آدومیان به‌دست می‌آوریم و برای یافتن جواب‌های تحلیلی-تقریبی دقیق‌تری از معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری آن را به‌کار می‌گیریم. پیاده‌سازی این روش بر مبنای یک الگوریتم تکراری است و می‌توان آن را توسط نرم‌افزارهای مختلفی از جمله میپل و متلب انجام داد.

۲- تعاریف، قضایا و مقدمات

تعریف ۱: تابع حقیقی $h(x)$ را متعلق به فضای C_μ ، $(\mu \in \mathbb{R})$ گوئیم، هرگاه عدد حقیقی $p > \mu$ موجود باشد به طوری که $h(x) = x^p h_1(x)$ ، $h_1(x) \in C(0, \infty)$ و گوئیم متعلق به فضای C_μ^n است هرگاه $h^{(n)} \in C_\mu$.

تعریف ۲: عملگر انتگرال ریمان-لیوویل (J^α) از مرتبه کسری $\alpha \geq 0$ ، برای تابع $h \in C_\mu$ ، $(\mu \geq -1)$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$J^\alpha h(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} h(\xi) d\xi, \quad \alpha > 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

$$J^0 h(x) = h(x).$$

برخی از خواص عملگر J^α ، که در این مقاله به آن‌ها نیاز داریم، به شکل زیر می باشند:

$$J^\alpha J^\beta h(x) = J^\beta J^\alpha h(x),$$

$$J^\alpha J^\beta h(x) = J^{\alpha+\beta} h(x),$$

$$J^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}.$$

تعریف ۳: مشتق کسری (D^α) از تابع $h(x)$ و در حالت کاپوتو عبارت است از:

$$D^\alpha h(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{m-\alpha-1} h^{(m)}(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$D^0 h(x) = h(x),$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، $x > 0$ ، $h \in C_{-1}^m$ و $m-1 < \alpha \leq m$. برخی از خواص مهم این نوع مشتق عبارت است از:

$$D^\alpha J^\alpha h(x) = h(x),$$

$$J^\alpha D^\alpha h(x) = h(x) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}.$$

قضیه ۱: معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x, u(x)) = 0. \quad (3)$$

جوابی برای این معادله با استفاده از روش آدومیان به صورت زیر است:

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x). \quad (4)$$

اگر این سری همگرا باشد، آن گاه (۴) جواب معادله دیفرانسیل (۳) خواهد بود.

اثبات: مقاله [۲۰] را ببینید.

۳- پیاده سازی روش

به منظور بیان و توصیف این روش، معادله دیفرانسیل غیر خطی عمومی از مرتبه کسری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$[D^\alpha + R + N]u = g, \quad (5)$$

که در آن D^α عملگر خطی مشتق‌گیری از مرتبه کسری کاپوتو، R قسمت خطی مسئله، N قسمت غیر خطی، u تابعی مجهول و g تابعی تحلیلی و معلوم است. معادله (۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$D^\alpha u = g - [R + N]u. \quad (6)$$

با استفاده از عملگر معکوس $J^\alpha = (D^\alpha)^{-1}$ و اعمال آن بر دو طرف رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} u^{(k)}(0) + J^\alpha g - J^\alpha [R + N]u, \quad m-1 < \alpha \leq m. \quad (7)$$

بنابر روش آدومیان استاندارد، جواب u می‌تواند توسط یک سری نامتناهی به صورت زیر داده شود:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (8)$$

و جمله‌ی غیر خطی Nu می‌تواند به صورت

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (9)$$

تجزیه شود، که در آن A_n ها چندجمله‌ای‌های آدومیان هستند، و به صورت زیر قابل تعریف می‌باشند:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0. \quad (10)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۸) و (۹) در رابطه‌ی (۷) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} u^k(\cdot) + J^\alpha g - J^\alpha R \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) - J^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right). \quad (11)$$

از این رو بنا بر روش آدومیان استاندارد داریم:

$$u_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} u^k(\cdot) + J^\alpha g, \quad (12)$$

$$u_{n+1} = -J^\alpha (R(u_k) + A_k).$$

اکنون به منظور پیاده‌سازی روش بهینه‌ی آدومیان پارامتر کنترل همگرایی را وارد این معادلات می‌کنیم و روابط جدید زیر را به دست می‌آوریم:

$$u_0 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} u^k(\cdot) + J^\alpha g, \quad (13)$$

$$u_{k+1} = -J^\alpha [R(u_k) + A_k],$$

$$\hat{u}_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} w^k u_{n-k}.$$

واضح است که اگر $w = 0$ باشد، این روش بهینه همان روش آدومیان استاندارد است. بنابر این روش، جواب معادله دیفرانسیل (۵) به صورت یک سری نامتناهی از مؤلفه‌های \hat{u}_n به صورت

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{u}_m = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!k!} w^k u_{m-k}, \quad (14)$$

در نظر گرفته می‌شود که این جواب شامل یک پارامتر کنترل کننده‌ی همگرایی w می‌باشد. پارامتر w موجود در معادله‌ی (۱۴) نقش مشابه پارامتر \hbar در همگرایی روش آنالیز هموتوبی ایفا می‌کند، که ابزاری موثر را برای کنترل همگرایی فراهم می‌آورد. بنابر نظریه منحنی- \hbar از لیاو [۵]، واضح است که مقدار معتبری از w را برگزینیم به طوری که به طور قطع مطمئن شویم که سری جواب همگرا است. برای اطلاعات بیشتر در مورد انتخاب پارامتر همگرایی می-

توان به مراجع [۲۵-۲۱] مراجعه نمود. روش ما برای انتخاب مقدار بهینه‌ی w متکی بر روش کمترین مربعات [۲۶] می‌باشد. همچنین می‌توان از روش‌های دیگری چون گالرکین^۱ و یا روش هم محل^۲ [۳۰-۲۷] نیز برای یافتن پارامتر بهینه‌ی همگرایی استفاده کرد. برای این منظور پاسخ (۱۴) را در معادله دیفرانسیل (۵) قرار می‌دهیم، و در نتیجه داریم:

$$\mathfrak{R}(x; w) := [D^\alpha + R + N] \left(u_\circ(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x) \right) = g(x), \quad x_\circ \leq x \leq x_\tau \quad (15)$$

که در واقع \mathfrak{R} باقیمانده‌ی (یا مقدار خطای) معادله دیفرانسیل (۵) می‌باشد. اگر $\mathfrak{R} = 0$ ، آن-گاه (۱۴) جواب دقیق معادله دیفرانسیل (۵) است، در غیر این صورت به‌منظور بهینه کردن مقدار w قرار می‌دهیم:

$$\Psi(w) = \int_{x_\circ}^{x_1} \mathfrak{R}^2(x; w) dx. \quad (16)$$

اکنون تابع $\Psi(w)$ را کمینه می‌کنیم. برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial w} \Psi(w) = 0. \quad (17)$$

این معادله را برحسب w حل می‌کنیم و w بهینه را می‌یابیم. اکنون با جایگذاری این مقدار از w در معادله‌ی (۱۴) به جواب بهینه از (۵)، توسط روش آدومیان رسیده‌ایم. به‌منظور روشن‌تر شدن بحث و نشان‌دادن کارایی و دقت این روش در ادامه چند مثال آورده شده است.

۴- مثال‌های عددی

مثال ۱. (معادله‌ی کسری ریکاتی) مسئله مقدار اولیه زیر را با شرط اولیه $u(0) = 0$ در نظر می‌گیریم [۳۱]:

$$D^\alpha u(x) = 2u(x) - u^2(x) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (18)$$

برای یافتن پاسخ این معادله بنا بر روش بهینه آدومیان، روابط بازگشتی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$u_0(x) = u(\circ) + J^\alpha(1),$$

$$u_{k+1}(x) = -J^\alpha \left(-\gamma u_k(x) + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right)^\gamma \right)_{\lambda=0}, \quad k \geq 0. \quad (19)$$

با حل معادلات فوق توسط نرم افزار Maple داریم:

$$u_0(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_1(x) = \frac{\gamma}{\Gamma(\gamma\alpha+1)} x^{\gamma\alpha} - \frac{\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} x^{\gamma\alpha},$$

$$u_2(x) = \frac{\gamma^2}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)} x^{\gamma^2\alpha} - \left(\frac{\gamma\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} + \frac{\gamma^2\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right) x^{\gamma^2\alpha} + \frac{\gamma^2\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} x^{\gamma^2\alpha}.$$

اکنون قرار می دهیم:

$$\hat{u}_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} w^k u_{n-k}. \quad (21)$$

با جایگذاری روابط (۲۰) در (۲۱) خواهیم داشت:

$$\hat{u}_1(x) = w u_0 + u_1 = w \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma}{\Gamma(\gamma\alpha+1)} x^{\gamma\alpha} - \frac{\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} x^{\gamma\alpha},$$

$$\hat{u}_2(x) = w^2 u_0 + \gamma w u_1 + u_2 = w^2 \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \gamma w \left(\frac{\gamma}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)} x^{\gamma^2\alpha} - \frac{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} x^{\gamma^2\alpha} + \frac{\gamma^2}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)} x^{\gamma^2\alpha} \right) - \left(\frac{\gamma\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} + \frac{\gamma^2\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right) x^{\gamma^2\alpha} + \frac{\gamma^2\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)}{\Gamma(\gamma^2\alpha+1)\Gamma(\gamma\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^\gamma} x^{\gamma^2\alpha}, \dots \quad (22)$$

و در نتیجه جواب تقریبی را به صورت زیر برمی گزینیم:

$$u(x; w) = u_0(x) + \sum_{n=1}^5 \hat{u}_n. \quad (23)$$

در حالت خاص فرض کنیم که $\alpha = 1$ باشد، تابع باقیمانده را تشکیل داده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathfrak{R}(x; w) = \frac{\partial}{\partial x} u(x; w) - \mathfrak{r} u(x; w) + (u(x; w))^{\mathfrak{r}} - 1. \quad (24)$$

با فرض $-\frac{1}{\mathfrak{r}} \leq x \leq \frac{1}{\mathfrak{r}}$ ، تابع $\Psi(w)$ را تشکیل می‌دهیم و با مشتق‌گیری نسبت به w از آن و حل معادله حاصل داریم:

$$\Psi(w) = 0 \Rightarrow w = 0.3338987979. \quad (25)$$

جواب دقیق معادله (۱۸) برای $\alpha = 1$ به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x) = 1 + \sqrt{\mathfrak{r}} \tanh \left[\sqrt{\mathfrak{r}} x - \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}} \right) \right]. \quad (26)$$

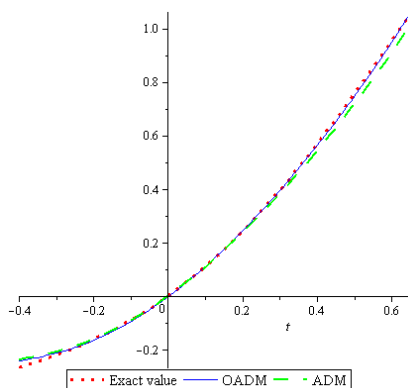
با قرار دادن w به دست آمده در رابطه (۲۳) جواب تقریبی معادله (۱۸) برای $\alpha = 1$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_{Optimal}(x) \approx & -0.9777077892x^{11} + 0.3165592091x^{10} - 0.1062104037x^9 \\ & - 0.189961822x^8 - 0.3458372086x^7 + 0.4675316112x^6 \\ & + 0.548030241x^5 - 0.3822985398x^4 - 0.258339292x^3 \\ & + 1.070279530x^2 + 1.034543275x. \end{aligned}$$

در حالت $w = 0$ جواب به دست آمده، همان جواب حاصل از روش آدومیان استاندارد است:

$$\begin{aligned} u_{Adomian}(x) = & -0.9777077892x^{11} + 0.3165592091x^{10} - 0.1649319256x^9 \\ & - 0.929229132x^8 - 0.3428819196x^7 + 0.4194121109x^6 \\ & + 0.5032945329x^5 - 0.3475308647x^4 - 0.2444444444x^3 \\ & + x^2 + x. \end{aligned}$$

در شکل ۱ جواب دقیق و جواب‌های به دست آمده از روش‌های آدومیان استاندارد و بهینه آدومیان برای حالت $\alpha = 1$ نمایش داده شده‌اند. در شکل ۲ جواب به دست آمده از روش بهینه آدومیان و روش استاندارد آدومیان برای $\alpha = 0.8$ به نمایش درآمده است.



شکل ۱: جواب معادله (۱۸) در حالت $\alpha = 1$.

در جدول ۱ جواب‌های تقریبی به دست آمده توسط روش بهینه آدومیان در حالت $\alpha = 1$ نمایش داده شده است. در جدول ۲ مقادیر تقریبی به دست آمده از دو روش برای $\alpha = 0.8$ محاسبه شده است. در این جدول اختلاف بین دو جواب و خطای حاصل از آن‌ها نیز به نمایش در آمده است. این مقادیر خطا نشان می‌دهند که در همسایگی مبدا مقدار خطا بسیار ناچیز است و با افزایش مقدار متغیر x ، مقدار خطا افزایش می‌یابد.

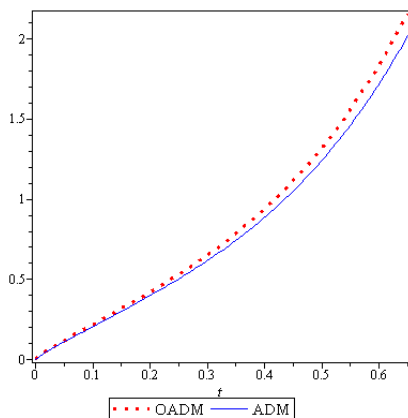
جدول ۱: جواب‌های عددی برای مثال (۱) در حالت $\alpha = 1$

Exact value- ADM	Exact value- OADM	ADM	OADM	Exact value	x
۰/۰۲۹۷۶۹	۰/۰۲۶۸۶۱	-۰/۲۳۶۱۰۷	-۰/۲۳۹۰۱۵	-۰/۲۶۵۸۷۶	-۰/۴
۰/۰۱۳۶۴۵	۰/۰۰۹۶۲۰	-۰/۲۰۷۰۵۸	-۰/۲۱۱۰۸۳	-۰/۲۲۰۷۰۳	-۰/۳
۰/۰۰۴۳۳۲	۰/۰۰۰۲۷۸	-۰/۱۵۸۷۳۰	-۰/۱۶۲۷۸۴	-۰/۱۶۳۰۶۲	-۰/۲
۰/۰۰۰۵۶۷	۰/۰۰۰۲۱۷۴	-۰/۸۹۷۹۴۹	-۰/۰۹۲۵۳۶	-۰/۰۹۰۳۶۲	-۰/۱
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰
۰/۰۰۰۵۶۹	۰/۰۰۳۵۷۱	۰/۱۰۹۷۲۶	۰/۱۱۳۸۶۶	۰/۱۱۰۲۹۵۲	۰/۱
۰/۰۰۴۳۰۵	۰/۰۰۵۲۶۵	۰/۲۳۷۶۷۲	۰/۲۴۷۲۴۲	۰/۲۴۱۹۷۷	۰/۲
۰/۰۱۳۰۷۴	۰/۰۰۳۰۹۶	۰/۳۸۲۰۳۱	۰/۳۹۸۲۰۰	۰/۳۹۵۱۰۵	۰/۳
۰/۰۲۶۱۱۹	۰/۰۰۲۲۳۴	۰/۵۴۱۶۹۴	۰/۵۶۵۵۷۸	۰/۵۶۷۸۱۲	۰/۴
۰/۰۳۹۱۱۲	۰/۰۰۶۳۱۸	۰/۷۱۶۹۰۳	۰/۷۴۹۶۹۷	۰/۷۵۶۰۱۴	۰/۵
۰/۰۴۳۹۶۴	۰/۰۰۰۸۴۲	۰/۹۰۹۶۰۲	۰/۹۵۲۷۲۵	۰/۹۵۳۵۶۶	۰/۶

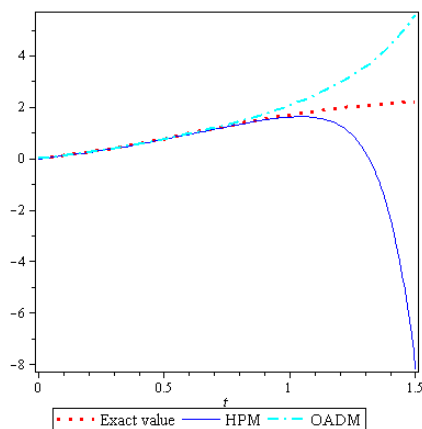
جدول ۲: خطای جواب‌های عددی برای مثال (۱) در حالت $\alpha = 0/8$

Error ADM	Error OADM	ADM - OADM	ADM	OADM	x
0/000000	0/000000	0/000000	0/000000	0/000000	0
0/041536	0/003252	0/008322	0/204274	0/212596	0.1
0/061162	0/004571	0/017697	0/398615	0/416312	0.2
0/075433	0/003249	0/029808	0/617111	0/646919	0.3
0/081257	0/002763	0/047018	0/887711	0/934729	0.4
0/087241	0/007241	0/072071	1/344127	1/316198	0.5
0/090014	0/009945	0/108373	1/723559	1/831932	0.6

همان‌گونه که از داده‌های جداول ۱ و ۲ مشخص است، جواب به‌دست آمده از روش بهینه آدومیان دارای دقت بالاتری نسبت به جواب‌های به‌دست آمده از روش استاندارد آدومیان است و جواب‌ها به جواب دقیق نزدیک‌تر هستند.

شکل ۲: مقایسه‌ی جواب معادله (۱۸) برای حالت $\alpha = 0/8$

خان [۳۱] جواب این معادله دیفرانسیل را از روش تداخلی هموتویی به‌دست آورده است. با مقایسه جواب به‌دست آمده از روش بهینه آدومیان و روش ارائه شده توسط خان [۳۱] می‌توان دید که روش بهینه آدومیان دارای دقت بسیار بالاتری نسبت به روش هموتویی می‌باشد و می‌بینیم که جواب در ناحیه‌ی بزرگ‌تری معتبر است و زمان اجرای این روش در مقایسه با روش هموتویی در حدود $0/6$ است. در شکل ۳ این جواب‌ها با هم مقایسه شده‌اند.



شکل ۳: مقایسه‌ی جواب‌های تداخلی هموتویی، بهینه آدومیان و جواب دقیق از معادله (۱۸) در حالت

$$\alpha = 1$$

مثال ۲. معادله‌ی غیرخطی کسری انتشار زیر را در نظر بگیرید [۳۲]:

$$D_t^\alpha u = (u^{\frac{1}{\gamma}} u_x)_x - u - u^{\frac{\gamma}{\gamma}}, \quad (27)$$

که تحت شرط اولیه زیر قرار می‌گیرد:

$$u(x, 0) = \left[\frac{1 + \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}x\right)}{1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{6}x\right)} \right]^\gamma. \quad (28)$$

بنابر روش آدومیان استاندارد داریم:

$$u_\alpha(x, t) = u(x, 0) + J^\alpha(u),$$

$$u_{k+1}(x, t) = -J^\alpha \left[u_k(x, t) + \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right)^\gamma \right. \\ \left. - \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right)^\gamma \left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j \right)_x \right) \right]_{\lambda=0}, \quad k \geq 0. \quad (29)$$

پس از حل معادلات بالا و با فرض $\hat{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} w^k u_{n-k}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 = w u_0 + u_1 = w & \left[\frac{1 + \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)}{1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)} \right] \\ & + \frac{\left[1 + \sqrt[2]{\tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)} + \tanh^{\sqrt[2]{}}\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right] t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \left[1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right]^{\sqrt[2]{}}}, \\ \hat{u}_2 = w^2 u_0 + \sqrt[2]{w} u_1 + u_2 = w^2 & \left[\frac{1 + \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)}{1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)} \right] \\ & + \sqrt[2]{w} \frac{\left[1 + \sqrt[2]{\tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right)} + \tanh^{\sqrt[2]{}}\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right] t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right)^{\sqrt[2]{}}} \\ & - \frac{\left(1 + \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right)^{\sqrt[2]{}} t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1) \left(1 - \tanh\left(\frac{1}{12} \sqrt{\epsilon} x\right) \right)^{\sqrt[2]{}}}, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

فرض کنیم $\alpha = 1$ ، جواب تقریبی را به صورت

$$u(x, t; w) = u_0(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k(x, t; w), \quad (31)$$

اختیار می‌کنیم. با تشکیل تابع باقیمانده، داریم:

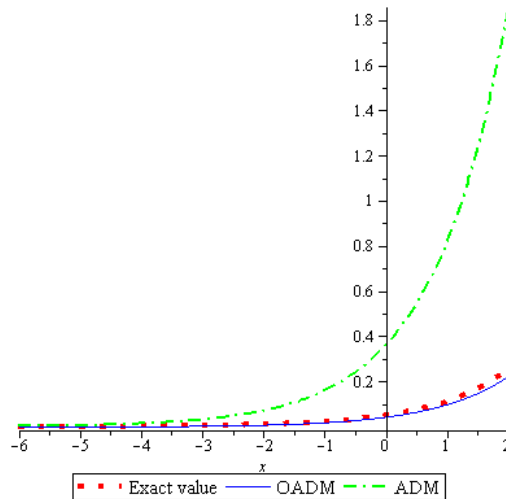
$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(x, t; w) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t; w) - \frac{\partial}{\partial x} \left[(u(x, t; w))^{\frac{1}{\sqrt[2]{}}} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t; w)) \right] + u(x, t; w) \\ + [u(x, t; w)]^{\sqrt[2]{}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Psi(w) = \int_1^{\sqrt[2]{}} \int_{-\sqrt[2]{}}^{\sqrt[2]{}} [\mathfrak{R}(x, t; w)] dx dt = 0 \Rightarrow w = 0.1375947892.$$

جواب دقیق معادله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است:

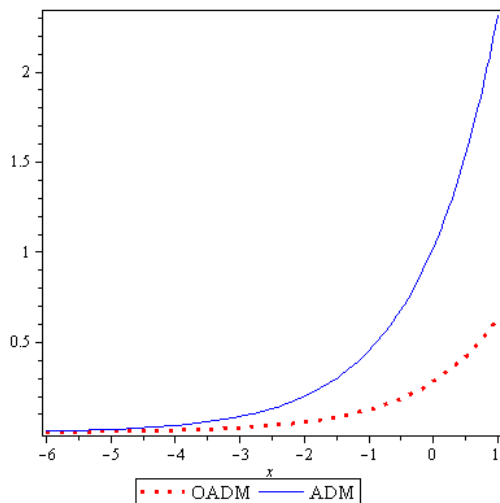
$$u(x,t) = \left[\frac{1 + \tanh\left(\frac{1}{12}\sqrt{6}x - \frac{1}{4}t\right)}{1 - \tanh\left(\frac{1}{12}\sqrt{6}x - \frac{1}{4}t\right)} \right]^2. \quad (33)$$

با جایگذاری w در رابطه (۳۱) جواب تقریبی معادله (۲۷) به دست می آید.



شکل ۴: جواب معادله (۲۷) برای $\alpha = 1$ و $t = 3$

در شکل ۴ مقایسه‌ای نموداری بین جواب دقیق و جواب‌های تقریبی آدومیان بهینه و آدومیان استاندارد در حالت $\alpha = 1$ و $t = 3$ به نمایش گذاشته شده است. در شکل ۵ جواب به دست آمده از روش بهینه آدومیان و روش استاندارد آدومیان برای $\alpha = 0.8$ رسم شده است.



شکل ۵: مقایسه‌ی جواب معادله (۲۷) برای حالت $\alpha = 0/8$ و $t = 3$

جدول ۳: جواب‌های عددی برای مثال (۲) در حالت $t = 3$ و $\alpha = 1$

Exact value- ADM	Exact value- OADM	ADM	OADM	Exact value	x
۰/۰۰۲۳۳۱	۰/۰۰۰۰۲۹	۰/۰۰۲۷۰۲	۰/۰۰۳۲۹۲	۰/۰۰۳۷۱	-۶
۰/۰۰۵۲۷۴	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۰۰۶۱۱۴	۰/۰۰۰۷۴۵	۰/۰۰۰۸۴۰	-۵
۰/۰۱۱۹۳۳	۰/۰۰۰۲۱۵	۰/۰۱۳۸۳۲	۰/۰۰۱۶۸۵	۰/۰۰۱۹۰۰	-۴
۰/۰۲۶۹۹۹	۰/۰۰۰۴۸۵	۰/۰۳۱۲۹۷	۰/۰۰۳۸۱۳	۰/۰۰۴۲۹۸	-۳
۰/۰۶۱۰۸۶	۰/۰۰۱۱۰۰	۰/۰۷۰۸۱۲	۰/۰۰۸۶۲۶	۰/۰۰۹۷۲۶	-۲
۰/۱۶۰۲۱۷	۰/۰۰۲۴۸۸	۰/۱۶۰۲۱۷	۰/۰۱۹۵۱۷	۰/۰۲۲۰۰۵	-۱
۰/۳۱۲۷۱۳	۰/۰۰۵۶۲۸	۰/۳۶۲۵۰۰	۰/۰۴۴۱۵۹	۰/۰۴۹۷۸۷	۰
۰/۷۰۷۵۳۲	۰/۰۱۲۷۳۵	۰/۸۲۰۱۷۸	۰/۰۹۹۹۱۱	۰/۱۱۲۶۴۶	۱

در جدول ۳ مقایسه‌ای عددی بین جواب‌ها در حالت $\alpha = 1$ صورت گرفته است. در جدول ۴ مقادیر تقریبی به‌دست آمده از دو روش برای $\alpha = 0/8$ و $t = 3$ محاسبه شده‌اند. در این جدول اختلاف دو جواب و خطای حاصل از آن‌ها نیز به نمایش در آمده است. این مقادیر خطا نشان می‌دهند که به کاهش مقدار متغیر x و با فرض ثابت بودن t ، مقدار خطا کاهش می‌یابد و خطای به‌دست آمده از روش بهینه آدومیان در مقایسه با روش استاندارد آن قابل اغماض می‌باشد. همانگونه که از داده‌های جداول مشخص است، جواب به‌دست آمده از روش

آدومیان بهینه اختلاف کمتری با جواب دقیق دارد و با کاهش مقدار α مقدار خطا افزایش می‌یابد.

جدول ۴: خطای جواب‌های عددی برای مثال (۲) در حالت $\alpha = 0.8$

Error ADM	Error OADM	ADM - OADM	ADM	OADM	x
۰/۰۰۱۴۵۲	۰/۰۰۰۴۵۸	۰/۰۰۵۵۸۷	۰/۰۰۷۶۴۵	۰/۰۰۲۰۵۸	-۶
۰/۰۰۰۸۱۹۶	۰/۰۰۰۹۹۴	۰/۰۱۲۶۴۱	۰/۰۱۷۲۹۸	۰/۰۰۴۶۵۶	-۵
۰/۰۱۰۰۴۵	۰/۰۰۱۹۴۷	۰/۰۲۸۶۰۱	۰/۰۳۹۱۳۷	۰/۰۱۰۵۳۶	-۴
۰/۰۶۱۷۶۸	۰/۰۰۵۶۱۳	۰/۰۶۴۷۱۱	۰/۰۸۸۵۵۰	۰/۰۲۳۸۳۸	-۳
۰/۲۰۰۴۸۱	۰/۰۰۸۸۸۲	۰/۱۴۶۴۱۴	۰/۲۰۰۳۴۹	۰/۰۵۲۹۳۵	-۲
۰/۶۸۵۴۱۳	۰/۰۱۳۴۵۱	۰/۳۳۱۲۷۰	۰/۴۵۳۳۰۱	۰/۱۲۲۰۳۱	-۱
۰/۸۸۸۴۲۶	۰/۰۵۵۷۴۳	۰/۷۴۹۵۱۸	۱/۰۲۵۶۲۰	۰/۲۷۶۱۰۲	۰
۱/۰۰۴۸۷۰	۰/۰۷۰۵۴۱	۱/۶۹۵۸۲۹	۱/۳۲۰۵۲۶	-۱/۶۲۴۶۹۷	۱

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش بهینه آدومیان برای یافتن جواب‌های تحلیلی-تقریبی معادلات کسری ریکاتی و انتشار که مشتقات کسری در حالت کاپوتو تعریف شده‌اند مورد استفاده قرار داده‌ایم. طرح ارائه شده یک سری را با یک پارامتر کنترل همگرایی برای جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل پیشنهاد می‌کند. مثال‌های عددی نشان می‌دهند که انتخاب مناسب پارامتر همگرایی، می‌تواند جواب تقریبی مناسبی را برای معادلات دیفرانسیل به دست آورد و در نتیجه الگوریتم یاد شده به عنوان یک الگوریتم تکراری قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی کسری عمل می‌کند. کلید کارایی این روش متکی بر انتخاب صحیح این پارامتر است. همان‌گونه که مثال‌ها نشان می‌دهند، این الگوی جدید دقت بسیار بالاتری نسبت به روش آدومیان استاندارد دارد.

مراجع

- [1] He, J.H. (1999), Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 257-262.
- [2] Hesameddini, E. and Latifizadeh, H. (2009), A new vision of the He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **10**, 1415-1424.
- [3] Hesameddini, E. and Latifizadeh, H. (2009), An optimal choice of initial solutions in the homotopy perturbation method. *International*

- Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **10**, 1389-1398.
- [4] Liao, S.J. (1992), *On the proposed homotopy analysis technique for nonlinear problems and its applications*, Ph.D. Dissertation. Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China.
- [5] Liao, S.J. (2004), On the homotopy analysis method for nonlinear problems, *Applied Mathematics and Computation*, **147**(2), 499-513.
- [6] West, B.J. and Bolognab, M. and Grigolini, P. (2003), *Physics of Fractal Operators*, Springer, New York.
- [7] Miller, K.S. and Ross, B. (1993), *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York.
- [8] Samko, S.G. and Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993), *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon.
- [9] Einicke, G.A. and White, L.B. and Bitmead, R.R. (2003), The use of fake algebraic Riccati Equations for co-channel demodulation, *IEEE Transactions on Signal Processing*, **51**(9) 129-134.
- [10] Adomian, G. (1990), A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation, *Mathematical and Computer Modelling*, **13**(7) 17-42.
- [11] Adomian, G. (1994), *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer, Boston, HA.
- [12] Hosseini, M.M. (2006), Adomian decomposition method with Chebyshev polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, **175**, 1685-1693.
- [13] Duan, J.S. and Rach, R. (2011), A new modification of the adomian decomposition method for solving boundary value problems for higher order nonlinear differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 4090-4118.
- [14] Kumar, M. and Singh, N. (2010), Modified Adomian Decomposition Method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems, *Computers and Chemical Engineering*, **34**, 1750-1760.
- [15] Abbaoui, K. and Cherruaul, Y. (1995), New ideas for proving convergence of decomposition methods, *Computers & Mathematics with Applications*, **29**, 103-8.

- [16] Cherruau, Y. and Adomian, G. (1993), Decomposition method: a new proof of convergence. *Mathematical and Computer Modelling*, **18**(12): 103-6.
- [17] Wazwaz, A.A. (2000), A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, **111**, 33-51.
- [18] Abbasbandy, S. (2005), Extended Newton's method for a system of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, **170**, 648-656.
- [19] Song, L.N. and Wang, W.G. (2010), Approximate rational Jacobi elliptic function solution of the fractional differential equation via the enhanced Adomian decomposition method, *Phys. Lett. A* **374**, 3190-3196.
- [20] Allan, F. (2007), Derivation of the Adomian decomposition method using the homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 6-14.
- [21] Liao, S.J. (2009), Notes on the homotopy analysis method: some definitions and theorems, *Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 983-997.
- [22] Liao, S.J. (2010), An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations, *Commun. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 2003-2016.
- [23] Abbasbandy, S. and Ashtiani, M. and Babolian, E. (2010), Analytical solution of the Sharma-Tasso-Olver equation by homotopy analysis method, *Z. Naturforsch.* **65a**, 285-290.
- [24] Zurigat, M. and Momani, S. and Alawneh, A. (2010), Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic-differential equations by homotopy analysis method, *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1227-1235.
- [25] Molabahrami, A. and Khani, F. (2009), The homotopy analysis method to solve the Burgers-Huxley equation, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **10**, 589-600.
- [26] Shah, R.A. and Islam, S. and Siddiqui, A.M. and Haroon, T. (2012), Wire coating analysis with Oldroyd 8-constant fluid by Optimal Homotopy Asymptotic Method, *Computers & Mathematics with Applications*, **63**, 695-707.
- [27] Herisanu, N. and Marinca, V. and Dordea, T. and Madescu, G. (2008), A new analytical approach to nonlinear vibration of an electrical

- machine, in: *Proceeding of the Romanian Academy*, Series A 9, 3, pp. 229-236.
- [28] Marinca, V. and Herisanu, N. (2008), Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer, *International Communication in Heat and Mass Transfer* **35**, 710-715.
- [29] Marinca, V. and Herisanu, N. and Bota, C. and Marinca, B. (2009), An optimal homotopy asymptotic method applied to the steady flow of a fourth grade fluid past a porous plant, *Applied Mathematics Letters*, **22**, 245-251.
- [30] Iqbal, S. and Idrees, M. and Siddiqui, A.M and Ansari, A.R. (2010), some solutions of the linear and nonlinear Klein-Gordon equations using the optimal homotopy asymptotic method, *Applied Mathematics and Computation*, **216**, 2898-2909.
- [31] khan, N.A and Ara, A. and Jamil, M. (2011), An efficient approach for solving the Riccati equation with fractional order, *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 2683-268.
- [32] Wang, J. and Zhang, X.L. and Song, L.N. and Zhang, H.Q. (2006), A new general algebraic method with symbolic computation and its application to two nonlinear differential equations with nonlinear terms of any order, *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1330–1340.

Optimization of the Adomian Decomposition Method for Solving Differential Equation with Fractional Order

Esmail Hesameddini, Mohsen Riahi

Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract

Up to now, Adomian Decomposition Method (ADM) has been widely employed in solving different kinds of differential equations. However, in many cases it is observed that the ADM has a lower precision in comparison with other methods, especially that of Homotopic ones. ADM is a relatively general and powerful method for finding analytical approximate results from different equations. In this paper, we seek to raise Optimal Adomian Decomposition Method (OADM) precision by employing the standard pattern of ADM. The main character of this repetitive method is based on employment of a controlling parameter in convergence, which resemble the parameters used in Homotopy Analysis Method (HAM). This parameter is indicated in such a way to reasonably increase the precision of obtained results. To indicate the optimizing parameter, the Least Squares Method has been used. The presented examples demonstrate that, how the above mentioned method has validity, applicability and a high degree of precision in solving differential equations of fractional order so that it can be generally used in solving differential equations.

Keywords: Adomian Decomposition Method, differential equations with fractional order, Approximate analytical methods, Optimization.

Mathematics Subject Classification (2000): 26A33, 49K20.