

## یک جواب عددی پایدار برای یک مسئله‌ی کران متحرک معکوس انتقال حرارت با استفاده از روش مارچینگ

مرتضی گرشاسبی<sup>۱\*</sup>، هاتف دستور<sup>\*</sup>، مهدی جلالوند<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

<sup>\*\*</sup> گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۸/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۲۳

**چکیده:** در این مقاله کاربرد روش مارچینگ و روش مولیفیکیشن برای حل یک مسئله کران متحرک مربوط به معادله گرما مورد بررسی قرار می‌گیرد. داده‌های این مسئله به صورت همراه با اختلال در نظر گرفته می‌شوند. یک روند منظم‌سازی براساس روش مولیفیکیشن و نیز روش مارچینگ برای حل مسئله مورد نظر ارائه می‌گردد و همگرایی و پایداری جواب این روش اثبات می‌شود. چند مثال عددی به منظور نشان دادن توانایی روش و نیز کارایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

**واژه‌های کلیدی:** انتقال حرارت، مسئله معکوس، مسائل کران متحرک، مسئله استفان، روش مارچینگ.

رده‌بندی ریاضی: ۳۵R۳۷، ۳۵K۰۵

### ۱- مقدمه

مسائل کران متحرک، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند پدیده ذوب یخ که در آن‌ها گذر زمان موجب تغییر کران می‌شوند را توجیه می‌کنند. این گونه مسائل بسیاری از پدیده‌ها مانند انجماد فلزات، انجماد آب و یا غذا، رشد بلور، جوش کاری، فرسایش و ... را توصیف می‌کنند [۱-۳]. این گونه مسائل را اغلب به عنوان مسائل استفان می‌شناسند. مسئله استفان مستقیم مربوط به حالتی است که شرایط اولیه و مرزی موجود و همچنین خواص گرمایی و ترموفیزیکی جسم معلوم است، در این صورت مسئله استفان مستقیم نیازمند تعیین دما و سطح کران متحرک

است. اما مسئله استفان معکوس شامل تعیین شرایط اولیه و یا شرایط مرزی و یا خواص گرمایی مسئله انتقال گرمای جسم علاوه بر تابع دمای مجهول موجود در مسئله است. این دسته از مسائل معکوس به دسته‌ی بسیار مهمی از مسائل بدووضع از نظریه کنترل تعلق دارند که دارای کاربردهای متنوع مهندسی است. به‌عنوان مثال در تکنولوژی پالایش با مفهوم بازسازی کریستالی، از حل مسئله استفان، که شامل یافتن دما و شار گرمایی در سطح ثابت است، چیزی که مورد انتظار است این است که مسطح بودن فرآیند تشکیل کریستال را تضمین می‌کند [۴ و ۵].

در این مقاله یک مسئله معکوس کران متحرک (مسئله معکوس استفان) با استفاده از یک روش منظم‌سازی براساس روند مولیفیکیشن گسسته و روش مارچینگ به‌طور عددی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. روش مولیفیکیشن گسسته یک فرآیند فیلترینگ بر پایه انتگرال‌های تلفیقی است که برای منظم‌سازی مسائل بدووضع قابل استفاده است.

در بخش دوم این مقاله به فرمول‌بندی مسئله‌ی معرفی شده می‌پردازیم. در بخش سوم، یک فرآیند عددی را براساس روش مولیفیکیشن و روش مارچینگ برای حل مسئله‌ی ارائه شده در بخش دوم، معرفی می‌کنیم. بخش چهارم شامل آنالیز همگرایی و پایداری روش عددی معرفی شده در بخش سوم است و در پایان، در بخش پنجم، دو مثال عددی برای روش ارائه شده، مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

## ۲- شرح مسئله معکوس

در مسئله یک بعدی استفان مستقیم می‌خواهیم مرز آزادی که توسط رابطه  $x = s(t)$  معرفی می‌شود و دمای  $u(x, t)$  را در دامنه  $D = (0, s(t)) \times (0, T_f]$  که  $T_f > 0$  زمان پایانی دلخواه است، تعیین کنیم. در نقطه  $x = 0$  مرز ثابتی داریم که آن را با  $\Gamma_U$  نشان می‌دهیم. اجتماع مرزها را با  $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_S$  نشان می‌دهیم و بستر دامنه  $D$  را با  $\bar{D} = [0, s(t)] \times [0, T_f]$  نشان می‌دهیم. در مسئله مستقیم تک‌مرحله‌ای استفان می‌خواهیم جواب  $u(x, t)$  را که در معادله یک بعدی زیر صدق می‌کند، بیابیم:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < s(t), \quad 0 < t < T_f, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < s(0), \quad (2)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(s(t), t) = q(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$u_x(s(t), t) = -\frac{ds}{dt}(t), t > 0. \quad (5)$$

که در این جا  $s(t)$  تابعی معلوم و همچنین  $s(t)$  و  $s_t(t)$  توابعی کراندار هستند. به منظور حل معادلات (۱) تا (۵) ابتدا با تغییر متغیر  $\zeta = x/s(t)$  کران را ثابت می‌کنیم. در این صورت معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$T_{\zeta\zeta}(\zeta, t) = s^2 T_t(\zeta, t) - s\zeta \frac{ds}{dt} T_\zeta, \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < t < T_f, \quad (6)$$

$$T(\zeta, 0) = \varphi(\zeta s(0)), \quad 0 < \zeta < 1, \quad (7)$$

$$T(0, t) = p(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$T(1, t) = q(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$T_x(1, t) = -s q(t), \quad t > 0. \quad (10)$$

در ادامه یک روش عددی بر اساس روش مولیفیکیشن را برای یافتن جواب مسئله (۶) تا (۱۰) ارائه می‌کنیم به طوری که  $\varphi(t)$  و  $q(t)$  تنها به صورت تقریبی  $\varphi^\varepsilon(t)$  و  $q^\varepsilon(t)$  تحت شرط زیر موجود باشد:

$$\|\varphi(t) - \varphi^\varepsilon(t)\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \|q(t) - q^\varepsilon(t)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

به دلیل وجود خطا در داده‌ها، ابتدا مسئله را با استفاده از روش مولیفیکیشن [۸] منظم‌سازی می‌کنیم.

## ۲- مسئله منظم‌سازی شده و روش مارچینگ

مسئله منظم‌سازی شده به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

هدف تعیین  $v(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$  است به طوری که در روابط زیر صدق کند:

$$v_{\zeta\zeta}(\zeta, t) = s^2 v_t(\zeta, t) - s\zeta \frac{ds}{dt} v_\zeta, \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < t < T_f, \quad (11)$$

$$v(\zeta, 0) = J_{\delta_1} \varphi(\zeta s(0)) = J_{\delta_1} \varphi'(\zeta), \quad 0 < \zeta < 1, \quad (12)$$

$$v(1, t) = J_{\delta_M} q(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

$$v_x(1, t) = -s(t)q(t), \quad t > 0. \quad (14)$$

که در این جا  $J_{\delta}(\cdot)$  بیان گر تابع مولیفایر شده توسط روش مولیفیکیشن با شعاع  $\delta$  می باشد،  $\delta'_M$  و  $\delta'_i$  به طور خودکار توسط الگوی GCV تعیین شده اند [۶].

فرض کنیم که  $M$  و  $N$  اعداد صحیح مثبت،  $h = \Delta x = 1/M$  و  $k = \Delta t = 1/N$  پارامترهای گسسته سازی تفاضلات متناهی از بازه  $I = [0, 1]$  باشند. توابع گسسته زیر را معرفی می کنیم:

$$U_{i,n} : v(ih, nk)$$

$$W_{i,n} : v_t(ih, nk)$$

$$Q_{i,n} : v_x(ih, nk)$$

$$Q_{i,n} : v_x(ih, nk)$$

الگوریتم روش مارچینگ به صورت زیر نوشته می شود:

$$-1 \quad \delta'_M \text{ و } \delta'_i \text{ را به کمک روش GCV انتخاب می کنیم.}$$

$$-2 \quad \text{بر توابع } \varphi^e \text{ و } q^e \text{ در بازه } [0, 1] \text{ مولیفیکیشن انجام می دهیم.}$$

$$U_{M,n} = J_{\delta_M} q^e(nk) (n \neq 0), \quad U_{i,0} = J_{\delta'_i} \varphi^{ie}(ih), \quad i \in \{0, 1, \dots, M\}$$

$$Q_{M,n} = -s(nk) s_t(nk).$$

$$-3 \quad \text{از } J_{\delta_M} q^e(nk) \text{ نسبت به زمان مشتق بگیرد. قرار می دهیم.}$$

$$W_{M,n} = D_t(J_{\delta_M} q^e(nk)) (n \neq 0), \quad W_{M,0} = D_t(J_{\delta'_M} \varphi^e(0)).$$

$$-4 \quad \text{قرار دهید } i = M \text{، حال تا زمانی که } i \geq 1 \text{ اعمال زیر را انجام می دهیم:}$$

$$U_{i-1,n} = U_{i,n} - hQ_{i,n}, \quad (n \neq 0), \quad (15)$$

$$Q_{i-1,n} = Q_{i,n} - h \left[ (s(nk))^{\vee} W_{i,n} - s(nk) ih \frac{ds}{dt}(nk) Q_{i,n} \right] \quad (16)$$

$$W_{i-1,n} = W_{i,n} - hD_t(J_{\delta'_i} Q_{i,n}). \quad (17)$$

اگر  $X_{i,n}$  تابعی گسسته باشد، از این به بعد مقدار  $\max_n |X_{i,n}|$  را با  $|X_i|$  نمایش می دهیم.

فرض هموار  $u(x, t) \in C^{\vee}(I \times I)$  برای بحث پایداری و آنالیز خطا از روش ارائه شده را در نظر می گیریم.

### ۳- پایداری و آنالیز خطا

در این بخش به تحلیل پایداری و همگرایی از روش مارچینگ معرفی شده در روابط (۱۵) تا (۱۷) می‌پردازیم.

**قضیه ۱:** برای روش مارچینگ معرفی شده در روابط (۱۵) تا (۱۷)، ثابتی مانند  $\Lambda$  وجود دارد به طوری که

$$\max \{ |U_0|, |Q_0|, |W_0| \} \leq \Lambda \max \{ |U_M|, |Q_M|, |W_M| \}.$$

**اثبات:** فرض کنیم  $|\delta|_{-\infty} = \min_i (\delta_i, \delta'_i)$ ،  $M_s = \max_{t \in [0,1]} \{s(t)\}$  و  $K_s = \max_{t \in [0,1]} \{s_t(t)\}$  از قضیه ۳ از [۷] خواهیم داشت:

$$|D_t(Q_{i,n})| \leq \frac{C}{|\delta|_{-\infty}} |Q_{i,n}| \quad (۱۸)$$

که در آن  $C$  ثابتی مثبت است. حال با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$|W_{i-1,n}| \leq \left( 1 + h \frac{C}{|\delta|_{-\infty}} \right) \max \{ |Q_{i,n}|, |W_{i,n}| \}. \quad (۱۹)$$

همچنین از روابط (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$|U_{i-1,n}| \leq (1+h) \max \{ |U_{i,n}|, |Q_{i,n}| \}, \quad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} |Q_{i-1,n}| &\leq |Q_{i,n}| + h (M_s^\tau |W_{i,n}| + M_s K_s |Q_{i,n}| + M_f) \\ &\leq (1 + (1 + M_s^\tau + M_s K_s)h) \max \{ |W_{i,n}|, |Q_{i,n}|, M_f \}. \end{aligned} \quad (۲۱)$$

قرار می‌دهیم  $C_\delta = \max \left\{ 1 + M_s^\tau + M_s K_s, \frac{C}{|\delta|_{-\infty}} \right\}$ ، در این صورت از روابط (۱۹) تا (۲۱) نتیجه می‌شود:

$$\max \{ |U_{i-1}|, |Q_{i-1}|, |W_{i-1}| \} \leq (1 + h C_\delta) \max \{ |U_i|, |Q_i|, |W_i| \}, \quad (۲۲)$$

با  $M$  بار تکرار آخرین رابطه خواهیم داشت:

$$\max \{ |U_0|, |Q_0|, |W_0| \} \leq (1 + h C_\delta)^M \max \{ |U_M|, |Q_M|, |W_M| \}, \quad (۲۳)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\max \{|U_{\circ}|, |Q_{\circ}|, |W_{\circ}|\} \leq \exp(C_{\delta}) \max \{|U_M|, |Q_M|, |W_M|\}. \quad (۲۴)$$

با قرار دادن  $\Lambda = \exp(C_{\delta})$  برهان به پایان می‌رسد.

**قضیه ۴:** برای روش مارچینگ معرفی شده در روابط (۱۵) تا (۱۷)، به ازای  $\delta$  ثابت، هرگاه  $h$  و  $\varepsilon$  به صفر میل کنند، جواب مولیفایر شده گسسته به جواب دقیق در نقاط افراز میل می‌کند.

**اثبات:** از تعاریف تابع خطاهای گسسته داریم:

$$\nabla U_{i,n} = U_{i,n} - v(ih, nk), \nabla Q_{i,n} = Q_{i,n} - v_x(ih, nk), \nabla W_{i,n} = W_{i,n} - v_t(ih, nk).$$

با استفاده از سری تیلور خواهیم داشت:

$$v((i-1)h, nk) = v(ih, nk) - hv_x(ih, nk) + O(h^2),$$

$$v_x((i-1)h, nk) = v_x(ih, nk) - h[(s(nk))^T v_t(ih, nk) - s(nk)(ih)s_t(nk)v_x(ih, nk)] + O(h^2),$$

$$v_t((i-1)h, nk) = v_t(ih, nk) - h\left(\frac{d}{dt}v_x(ih, nk)\right) + O(h^2).$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} \nabla U_{i-1,n} &= \nabla U_{i,n} + (U_{i-1,n} - U_{i,n}) - (v((i-1)h, nk) - v(ih, nk)) \\ &= \nabla U_{i,n} - h\nabla Q_{i,n} + O(h^2), \end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned} \nabla Q_{i-1,n} &= \nabla Q_{i,n} + (Q_{i-1,n} - Q_{i,n}) - (v_x((i-1)h, nk) - v_x(ih, nk)) \\ &= \nabla Q_{i,n} + h\left[(s(nk))^T \nabla W_{i,n} - (s(nk))(ih)s_t(nk)\nabla Q_{i,n}\right] + O(h^2), \end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} \nabla W_{i-1,n} &= \nabla W_{i,n} + (W_{i-1,n} - W_{i,n}) - (v_t((i-1)h, nk) - v_t(ih, nk)) \\ &= \nabla W_{i,n} - h(D_t(J_{\nabla^T} Q_{i,n}) - v_{xt}(ih, nk)) + O(h^2). \end{aligned} \quad (۲۷)$$

حال از روابط (۲۵) تا (۲۷) با استفاده از قضیه ۴ از [۷] نتیجه می‌شود:

$$|\nabla U_{i+1,n}| \leq |\nabla U_{i,n}| + h|\nabla Q_{i,n}| + O(h^2),$$

$$|\nabla Q_{i+1,n}| \leq |\nabla Q_{i,n}| + h(M_s^T |\nabla W_{i,n}| + M_s K_s |\nabla Q_{i,n}|) + O(h^2)$$

$$|\nabla W_{i+1,n}| \leq |\nabla W_{i,n}| + h \left( C \frac{|\nabla Q_{i,n}| + k}{|\delta|_{-\infty}} + C_{\delta} k^{\gamma} \right) + O(h^{\gamma}).$$

فرض کنیم

$$\nabla_i = \max \{ |\nabla U_{i,n}|, |\nabla W_{i,n}|, |\nabla Q_{i,n}| \},$$

$$C_{\circ} = \max \left\{ 1, M_s^{\gamma} + M_s K_s, \frac{C}{|\delta|_{-\infty}} \right\}, C_1 = \frac{ck}{|\delta|_{-\infty}} + C_{\delta} k^{\gamma}.$$

در این صورت داریم:

$$\nabla_{i-1} \leq (1 + hC_{\circ})\nabla_i + hC_1 + O(h^{\gamma}) \leq (1 + hC_{\circ})(\nabla_i + C_1) + O(h^{\gamma}), \quad (28)$$

پس از  $L$  تکرار خواهیم داشت:

$$\nabla_L \leq \exp(C_{\circ})(\nabla_M + C_1). \quad (29)$$

همچنین از روابط زیر مشاهده می‌کنیم که هرگاه  $\varepsilon$ ،  $h$  و  $k$  به صفر میل کنند، در این- صورت  $\nabla_M$  و  $C_1$  نیز به صفر میل می‌کنند، در نتیجه  $(\nabla_M + C_1)$  و نیز  $\nabla_{\circ}$  به صفر میل می‌کنند.

$$|\nabla U_{M,n}| \leq C(\varepsilon + k),$$

$$|\nabla Q_{M,n}| \leq C(\varepsilon + k),$$

$$|\nabla W_{M,n}| \leq C\delta_M(\varepsilon + k) + C_{\delta} k^{\gamma}.$$

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش به منظور نشان دادن توانایی فرایند عددی ارائه شده، چند مثال عددی را ارائه می‌کنیم. در تمامی حالات در تعریف مولیفیکیشن، بدون از دست دادن کلیت،  $p = 3$  را اختیار می‌کنیم. شعاع روش مولیفیکیشن همواره توسط GCV انتخاب می‌شود. داده‌های اولیه و مرزی با اضافه کردن خطاهای تصادفی به مقادیر دقیق توابع به دست آمده است. به عنوان مثال، برای تابع داده‌ای  $h(x, t)$ ، نسخه مختل آن توسط رابطه زیر بازسازی می‌شود [۶]:

$$h_{j,n}^{\varepsilon} = h(x_j, t_n) + \varepsilon_{j,n}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, T,$$

که در این جا  $\varepsilon_{j,n}$  ها، متغیرهای تصادفی گاوسی با واریانس  $\varepsilon^2$  هستند.

مقدار دقیق و تقریبی جواب با استفاده از نرم وزن دار  $I_\nu$  که توسط رابطه زیر معرفی شده است  
سنجیده می شوند [۸]:

$$\frac{\left[ (\nu / (M + 1)(N + 1)) \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |v(ih, jl) - U_{i,j}|^\nu \right]^{1/\nu}}{\left[ (\nu / (M + 1)(N + 1)) \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |v(ih, jl)|^\nu \right]^{1/\nu}}.$$

**مثال ۱:** اولین مثال شامل کرانی متحرک است که توسط رابطه زیر معرفی می شود:

$$s(t) = \sqrt{2} - 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad t \in [0, T = 1]. \quad (30)$$

به علاوه شرایط اولیه و مرزی این مسئله به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u(x, 0) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right), x \in [0, s(0)], s(0) = \sqrt{2} - 1, \quad (31)$$

$$u(s(t), t) = 0, t \in (0, 1], \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(s(t), t) = -s'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, t \in (0, 1]. \quad (33)$$

جواب دقیق متناظر با این مسئله در رابطه زیر آمده است:

$$u(x, t) = -1 + \exp\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right), (x, t) \in [0, s(t)] \times [0, 1].$$

حال با تغییر متغیر، مسئله‌ی جدید با استفاده از معادلات معرفی شده در روابط (۳۰) تا (۳۳) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$T_{\zeta\zeta}(\zeta, t) = s^\nu T_t(\zeta, t) - s \zeta \frac{ds}{dt} T_\zeta, \zeta \in (0, 1), t \in (0, 1],$$

$$T(\zeta, 0) = \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \zeta - \zeta - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - 1, \zeta \in (0, 1),$$

$$T(0, t) = p(t), t \in (0, 1],$$

$$T(1, t) = 0, t \in (0, 1],$$

$$T_x(1, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{t}{2} - 1, t \in (0, 1].$$

جواب دقیق  $T(\zeta, t)$  متناظر با مسئله جدید به صورت زیر است:



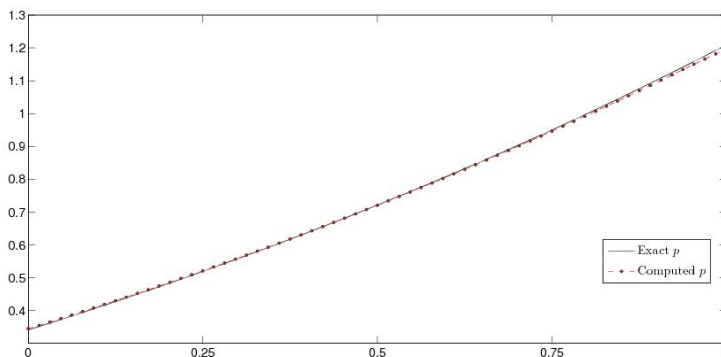
$$U(\zeta, t) = \exp\left(\frac{t}{2} - \zeta + \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta - \frac{t\zeta}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - 1.$$

اختلاف نتایج عددی و تحلیلی با استفاده از نرم  $l_p$  در جدول ۱ برای دو سطح مختلف از خطا نشان داده شده است.

جدول ۱: خطای نسبی  $l_p$  برای مثال ۱

$u_x$	$u_t$	$u$	$\varepsilon$	$N$	$M$
۰/۰۰۴۳۳۵۲	۰/۰۱۶۱۹	۰/۰۰۶۶۴۲۴	۰/۰۰۱	۶۴	۶۴
۰/۰۰۳۰۷۴۴	۰/۰۱۴۹۷۱	۰/۰۰۶۹۸۴	۰/۰۰۱	۱۲۸	۱۲۸
۰/۰۰۴۳۰۰۶	۰/۰۲۲۲۴۸	۰/۰۰۸۲۵۲۷	۰/۰۰۱	۲۵۶	۲۵۶
۰/۰۰۴۳۳۵۲	۰/۰۱۶۱۹	۰/۰۷۱۷۴۲	۰/۰۱	۶۴	۶۴
۰/۰۰۳۰۷۴۴	۰/۰۱۴۹۷۱	۰/۰۷۴۶۹۴	۰/۰۱	۱۲۸	۱۲۸
۰/۰۰۴۳۰۰۵	۰/۰۲۲۲۴۸	۰/۰۷۶۰۹۳	۰/۰۱	۲۵۶	۲۵۶

شکل ۱ اختلاف بین مقدار دقیق و محاسبه شده  $p(t)$  را نشان می‌دهد و شکل ۲ اختلاف بین جواب دقیق و عددی  $T(\zeta, t)$  را نشان می‌دهد.



شکل ۱: جواب عددی و دقیق شرط مرزی  $p(t)$  برای مثال ۱

مثال ۲: در این مثال کران متحرک توسط تابع غیر خطی زیر معرفی می‌شود:

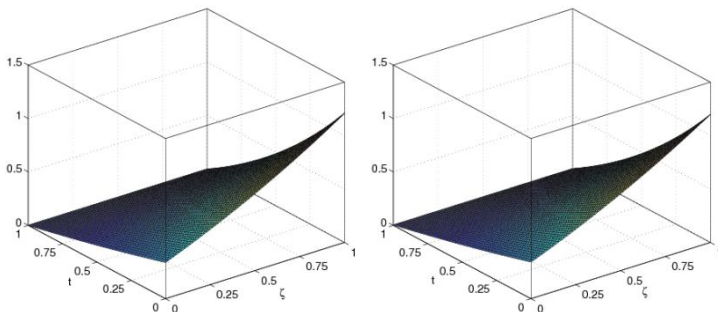
$$s(t) = 2 - \sqrt{3 - 2t}, \quad t \in ]0, T = 1]. \quad (34)$$

شرایط اولیه و مرزی برای این مسئله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x, 0) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}, \quad x \in [0, s(0)], \quad s(0) = \sqrt{2} - 1, \quad (35)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad t \in (0, 1], \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(s(t), t) = -s'(t) = \sqrt{3-2t}, \quad t \in (0, 1]. \quad (37)$$



شکل ۲: جواب دقیق (شکل سمت چپ) و عددی (شکل سمت راست) برای مثال ۱

جواب دقیق متناظر با این مسئله در رابطه زیر آمده است:

$$u(x, t) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} - t, \quad (x, t) \in [0, s(t)] \times [0, 1].$$

حال با تغییر متغیر، مسئله‌ی جدید با استفاده از معادلات معرفی شده در روابط (۳۴) تا (۳۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$T_{\zeta\zeta}(\zeta, t) = s^2 T_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - s \zeta \frac{ds}{dt} T_{\zeta}, \quad \zeta \in (0, 1), \quad t \in (0, 1],$$

$$T(\zeta, 0) = 4\zeta - 2\sqrt{3}\zeta + 2\sqrt{3}\zeta^2 - \frac{\sqrt{3}\zeta^2}{2} - \frac{1}{2}, \quad \zeta \in (0, 1),$$

$$T(0, t) = p(t), \quad t \in (0, 1],$$

$$T(1, t) = 0, \quad t \in (0, 1],$$

$$T_x(1, t) = 2t + 2\sqrt{3-2t} - 3, \quad t \in (0, 1].$$

جواب دقیق  $T(\zeta, t)$  متناظر با مسئله جدید به صورت زیر است

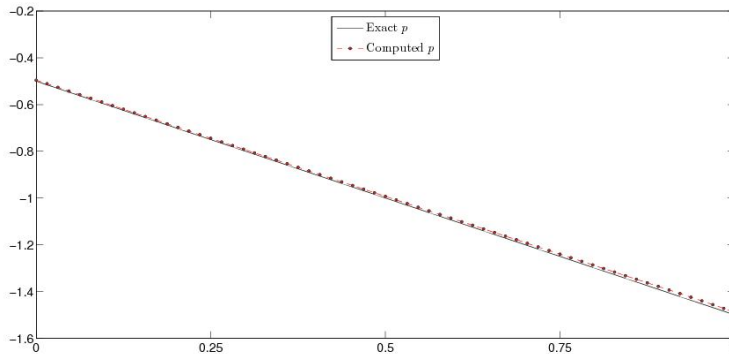
$$U(\zeta, t) = 4\zeta - t - 2\zeta\sqrt{3-2t} + t\zeta^2 + 2\zeta^2\sqrt{3-2t} - \frac{7\zeta^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

اختلاف بین نتایج عددی و تحلیلی با استفاده از نرم  $l_p$  در جدول ۲ برای دو سطح مختلف از خطا نشان داده شده است.

جدول ۲: خطای نسبی  $l_p$  برای مثال ۲

$u_x$	$u_t$	$u$	$\varepsilon$	$N$	$M$
۰/۰۰۴۳۳۵۲	۰/۰۱۶۱۹	۰/۰۰۶۶۴۲۱	۰/۰۰۱	۶۴	۶۴
۰/۰۰۳۰۷۴۴	۰/۰۱۴۹۷۱	۰/۰۰۶۹۸۴	۰/۰۰۱	۱۲۸	۱۲۸
۰/۰۰۴۳۰۰۶	۰/۰۲۲۲۴۸	۰/۰۰۸۲۵۲۷	۰/۰۰۱	۲۵۶	۲۵۶
۰/۰۰۴۳۳۵۲	۰/۰۱۶۱۹	۰/۰۷۱۷۴۲	۰/۰۱	۶۴	۶۴
۰/۰۰۳۰۷۴۴	۰/۰۱۴۹۷۱	۰/۰۷۴۶۹۴	۰/۰۱	۱۲۸	۱۲۸
۰/۰۰۴۳۰۰۵	۰/۰۲۲۲۴۸	۰/۰۷۶۰۹۳	۰/۰۱	۲۵۶	۲۵۶

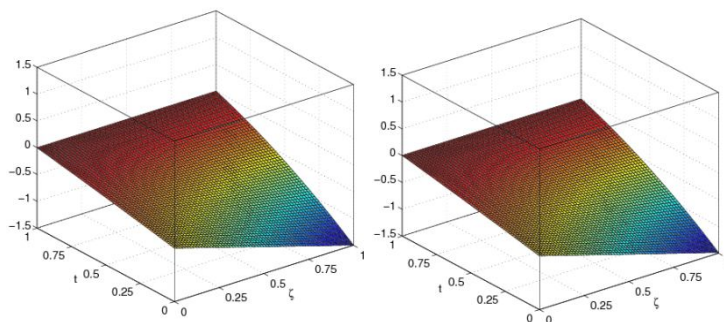
شکل ۳ اختلاف بین مقدار دقیق و محاسبه شده  $p(t)$  را نشان می‌دهد و شکل ۴ اختلاف بین جواب دقیق و عددی  $T(\zeta, t)$  را نشان می‌دهد.



شکل ۳: جواب عددی و دقیق شرط مرزی  $p(t)$  برای مثال ۲

## ۶- نتیجه گیری

از نتایج عددی ارائه شده در این مقاله می‌توان این نتیجه را گرفت که جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش مارچینگ در مقایسه با جواب‌های دقیق، حتی با تغییراتی نسبتاً زیاد در خطاها که بر داده‌های مرزی و اولیه ورودی اعمال شده بود، دقت خوبی را از خود نشان داده است. تغییرات در سطح خطا تغییرات چندانی را در مقدار جواب تقریبی ایجاد نکرد، به جز حالتی که  $t$  به زمان پایانی  $T_f$  نزدیک می‌شود. این نتایج با نتایجی که پیش از این در [۱-۳] به دست آمده است، سازگار است.



شکل ۴: جواب دقیق (شکل سمت چپ) و عددی (شکل سمت راست) برای مثال ۲

## سپاس‌گزاری

از حمایت‌های مالی معاونت پژوهشی دانشگاه دامغان در خصوص طرح پژوهشی شماره ۹۱/Math/۱۰۶/۱۹۷ تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

## مراجع

- [1] Goldman N.L. (1997), *Inverse Stefan Problem*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht.
- [2] Rubinstein L.I. (1971), *The Stefan Problem*, American Mathematical Society, Providence.

- [3] Rubinstein L.I. (1979), The Stefan problem: Comments on its present state, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **24**, 259-277.
- [4] Grzymkowski R., Slota D. (2006), One-phase inverse Stefan problem solved by Adomain decomposition method, *Computers & Mathematics with Applications*, **51**, 33-40.
- [5] Johansson B.T., Lesnic D., Reeve T. (2011), A method of fundamental solutions for the one-dimensional inverse Stefan problem, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4367-4378.
- [6] Murio D.A. (2002), *Mollification and space marching*, in: K. Woodbury (Ed.), *Inverse Engineering Handbook*, CRC Press.
- [7] Garshasbi M., Reihani P., Dastour H. (2012), A stable numerical solution of a class of semi-linear Cauchy problems, *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, **4**, 56-67.
- [8] Murio D.A., (1993), *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley and Sons, New York.
- [9] Anderssen B., de Hogg F., Hegland M. (1998), A stable finite difference ansatz for higher order differentiation of nonexact data, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **58**, 223-232.
- [10] Ang D.D., Pham Ngoc Dinh A., Tranh D. (1996), An inverse Stefan problem: identification of boundary value, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **66**, 75-84.
- [11] Beck J.V., Blackwell B., C.R.S.C. Jr. (1985), *Inverse Heat Conduction*, John Wiley-Interscience Publication, New York.
- [12] Garshasbi M., Damirchi J., Reihani P. (2010), Parameter estimation in an inverse initial-boundary value problem of heat equation, *Journal of Advances in Differential Equations*, **2**, 49-60.
- [13] Murio D.A., Paloschi J.R. (1988), Combined mollification-future temperatures procedure for solution of inverse heat conduction problem, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **23**, 235-244.
- [14] Murio D.A., Yi ZH. (2002), Source Term Identification in 1-D IHCP, *Computers & Mathematics with Applications*, **47**, 1921-1933.

---

## A Stable Numerical Solution of an Inverse Moving Boundary Problem of Heat Conduction Using Discrete Mollification Approach

Morteza Garshasbi\*, Hatef Dastour\* and Mehdi jalalvand\*\*

\* School of Mathematics and Computer Sciences, Damghan University, Damghan, Iran

\*\*Department of Mathematics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

### Abstract

In this paper the application of marching scheme and mollification approach to solve a one dimensional inverse moving boundary problem for the heat equation is investigated. The problem is considered with noisy data. A regularization method based on marching scheme and discrete mollification approach is developed to solve the proposed problem and the stability and convergence of numerical solution is proved. To show the ability and efficiency of the proposed method, some numerical experiments are investigated.

**Keywords:** Heat Conduction, Inverse Problem, Moving Boundary Problems, Stefan Problem, Marching Scheme.

**Mathematics Subject Classification (2000):**35K05, 35R37.