

## مدل سازی ریاضی جریان خون به عنوان سیال دولایه‌ای در طول رگ گرفته شده

احمد رضا حقیقی<sup>۱</sup> و محمد شهبازی اصل

گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه

تاریخ پذیرش: ۹۳/۱/۲۱

تاریخ دریافت: ۹۲/۶/۲۶

**چکیده:** در این مقاله یک مدل ریاضی برای جریان خون پالسی و دولایه‌ای در طول "رگ گرفته شده" شبیه سازی شده است. در این شبیه سازی رگ خونی، انعطاف پذیر و جریان خون به صورت دولایه‌ای است، به طوری که لایه مرکزی سیال میکروپلار و لایه‌ی جانبی سیال نیوتنی پلازما است. معادلات حاکم بر جریان خون دولایه‌ای با اعمال تبدیل مختصات مناسب و با به کارگیری روش تفاضل متناهی به صورت عددی حل شده و پروفیل سرعت برای جریان خون دولایه‌ای به دست آمده است. مشخصه‌های اصلی جریان خون از جمله دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان از روی پروفیل سرعت حاصل شده و در مورد تأثیر میزان گرفتگی بر روی آن‌ها بحث شده است.

**واژه‌های کلیدی:** سیال میکروپلار، رگ گرفته شده، سیال نیوتنی، روش تفاضل متناهی، جریان خون.

**رده بندی ریاضی:** ۹۲C۳۵، ۹۲B۰۵.

### ۱- مقدمه

بیماری‌های قلبی-عروقی علت عمده‌ی مرگ و میر در ایالات متحده و بسیاری از کشورهای جهان است. سالانه بیش از یک میلیون نفر در آمریکا و بیش از ۱۹ میلیون نفر در جهان یک بار حمله قلبی را تجربه می کنند [۱]. حالتی را که رسوبات چربی در رگ‌های بدن جمع می شود آترواسکلروز (تصلب شرایین) می نامند. آترواسکلروز موجب تنگی رگ‌های خونی شده و عبور جریان خون را با اختلال مواجه می سازد. اگر این وضعیت در عروق خونی قلب رخ دهد، منجر به انسداد عروق قلب و در نتیجه موجب آنژین قلبی می شود، همچنین آترواسکلروز دستگاه عصبی مرکزی باعث ایسکمی گذاری مغزی و سکته می شود. بسیاری از محققان بر این باورند که

مطالعه‌ی خواص دینامیکی جریان خون در درک و درمان بسیاری از بیماری‌های قلبی-عروقی نقش اساسی دارد [۲-۶].

در بسیاری از مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی جریان خون، جریان خون به‌صورت نیوتنی [۷-۹] و یا غیرنیوتنی [۵، ۱۰-۱۳] در نظر گرفته‌شده است. مندل جریان خون را به‌عنوان سیال غیرنیوتنی و غیرخطی در نظر گرفته و معادلات حاکم بر جریان خون در این تحقیق را با استفاده از روش تفاضل متناهی حل کرده و تأثیر عوامل مختلفی همچون غیرخطی بودن، ماهیت غیرنیوتنی بودن جریان و شدت گرفتگی بر روی مشخصه‌های جریان خون را بررسی نموده است [۱۰]. چاکراواری و مندل جریان سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر غیرخطی، در طول رگ گرفته‌شده را به عنوان جریان خون در نظر گرفته و به بررسی مشخصه‌های جریان خون پرداخته‌اند. آنان نتیجه گرفته‌اند که فرض غیرالاستیک بودن دیواره‌ی رگ مناسب نبوده و باید دیواره رگ را به‌صورت الاستیک و وابسته به زمان در نظر گرفت [۹].

خون سیالی است که از سوسپانسیون سلول‌های مختلفی مانند گلبول‌های قرمز، گلبول‌های سفید و پلاکت‌ها در مایعی به نام پلاسما تشکیل شده است [۱۴]. فرض نیوتنی بودن جریان خون برای جریان‌های با کرنش برشی بالا مورد قبول است که این امر برای جریان در طول رگ‌هایی با قطر داخلی بزرگ صادق است. بنابراین برای جریان در طول رگ‌هایی با قطر داخلی کم نمی‌توان از فرض نیوتنی بودن جریان خون استفاده کرد؛ زیرا در چنین رگ‌هایی خون رفتار غیرنیوتنی دارد [۵، ۱۰، ۱۲ و ۱۳]. همچنین به نظر اغلب محققان، هنگامی که خون در طول رگ‌هایی با قطر داخلی کم جریان دارد وجود لایه‌ی جانبی پلاسما و لایه‌ی مرکزی متشکل از سوسپانسیون گلبول‌های قرمز مشاهده شده است [۱۵-۱۸]. بنابراین برخی از محققان با در نظر گرفتن جریان خون به‌صورت سیال دولایه‌ای، به بررسی مشخصه‌های جریان خون پرداخته‌اند [۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۰]. فیلیپ و چاندر را جریان خون را به عنوان سیال دولایه‌ای متشکل از لایه‌ی مرکزی میکروپلار و لایه‌ی جانبی پلاسما، در نظر گرفته و به بررسی تأثیر گرفتگی بر مشخصه‌های جریان خون پرداخته‌اند. آنان به این نتیجه رسیدند که با افزایش گرفتگی، مقدار مقاومت در برابر جریان خون افزایش می‌یابد. از جمله‌ی ضعف‌های تحقیق آنان، غیرالاستیک بودن رگ و پایا بودن جریان خون است [۱۷].

در اواسط دهه شصت میلادی ارینگن مطالعات گسترده‌ای در زمینه‌ی سیالات میکروفلوئید (سیالات با ساختار میکرو) انجام داد [۲۱ و ۲۲]. او به ارزیابی شاخه‌ای از این سیالات پرداخت که در آن‌ها از تغییر شکل المان‌های زیرساختی سیال صرف‌نظر شده و تنها حرکات چرخشی و خطی میکرو ذرات مورد بررسی قرار می‌گرفت و این دسته از سیالات را تحت عنوان سیال میکروپلار نام‌گذاری کرد. این نوع سیالات در بردارنده‌ی برخی اثرات میکروسکوپی ناشی از تغییر شکل محلی و میکروحرکات عناصر است [۲۳]. از جمله سیالات میکروپلار می‌توان خون

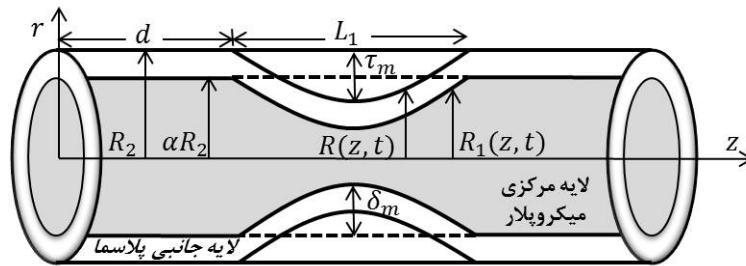
حیوانات، کریستال مایع و مایعات با سوسپانسیون را نام برد. تئوری سیالات میکروپلار قادر به توصیف برخی پدیده‌های فیزیکی است که توسط معادلات ناویر-استوکس کلاسیک نمی‌توان آن‌ها را بیان کرد؛ زیرا در این شرایط معادلات حاکم متفاوتی با معادلات ممنتوم زاویه‌ای و خطی به‌دست می‌آید [۱۹]. در این نوع سیالات، علاوه بر بردار سرعت کلاسیک، بردار ریزچرخش و پارامتر چرخش به منظور بررسی میکروچرخش‌ها معرفی می‌شود، به‌همین دلیل استفاده از این نوع جریان برای توصیف جریان خون، مناسب‌تر از سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی است [۱۴، ۱۹ و ۲۴].

مباحث ارائه‌شده در فرایند این مقاله شامل موارد زیر است:  
 مطالب مربوط به فرمول‌بندی ریاضی شامل تشریح هندسه‌ی رگ گرفته‌شده، معادلات ناویر-استوکس حاکم بر جریان خون پالسی، شرایط مرزی و شرایط اولیه اعمال‌شده در بخش ۲ ارائه‌شده است. در بخش ۳ با اعمال تبدیل مختصات شعاعی، رگ الاستیک و کسینوسی شکل به رگ غیرالاستیک و مستطیلی شکل تبدیل شده است. در بخش ۴ با استفاده از معادله‌ی پیوستگی، پروفیل سرعت شعاعی به‌دست آمده است. در بخش ۵ معادلات مربوط به پروفیل سرعت محوری و سرعت چرخشی با استفاده از روش تفاضل متناهی گسسته‌سازی شده و شرایط پایداری روش عددی بررسی شده است. در بخش ۶ سرعت محوری به‌دست آمده با استفاده از مدل‌سازی حاضر با نتیجه‌ی به‌دست آمده از مطالعه کانگ و ارینگن [۲۵] مقایسه شده تا کارایی مدل ارائه‌شده به اثبات برسد و در مورد تأثیر خاصیت ارتجاعی دیواره رگ الاستیک و میزان گرفتگی بر مشخصه‌های جریان خون دولایه‌ای بحث شده است. نهایتاً در بخش ۷ یک نتیجه‌گیری کلی ارائه شده است.

## ۲- فرمول‌بندی ریاضی

### ۲-۱- هندسه مسئله

رگ گرفته‌شده به‌صورت لوله استوانه‌ای با سطح مقطع مدور در نظر گرفته می‌شود که جریان خون گذرنده از آن به‌صورت سیال دولایه‌ای متقارن محوری است که لایه‌ی مرکزی آن سیال میکروپلار و لایه‌ی جانبی آن سیال نیوتنی است. سیستم مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  را که به ترتیب بیانگر شعاع، زاویه و مختصات طولی نقطه طول رگ است در نظر می‌گیریم. هندسه‌ی بی‌بعد مستقل از زمان رگ غیرالاستیک گرفته‌شده در لایه جانبی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱) [۱۶، ۱۷، ۱۹ و ۲۰]:



شکل ۱: هندسه رگ گرفته شده در حضور جریان خون دولایه‌ای

$$R(z) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_m}{2R_1} \right) \left\{ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{L_1} \left( z - d - \frac{L_1}{2} \right) \right) \right\} \right], & d \leq z \leq d + L_1 \\ 1 & o.w. \end{cases}$$

در معادله بالا  $R_1$  شعاع ثابت رگ باز در ناحیه فراتر از گرفتگی،  $L_1$ ،  $L$  و  $d$  به ترتیب طول رگ مورد نظر، طول گرفتگی و طول ناحیه‌ی بالادست و  $\tau_m$  حداکثر گرفتگی است.  $R(z)$  شعاع رگ غیرالاستیک گرفته شده در لایه جانبی و  $R(z) = \alpha R(z)$  شعاع رگ غیرالاستیک گرفته شده در لایه مرکزی است. هندسه وابسته به زمان جریان سیال دولایه‌ای در طول رگ الاستیک گرفته شده می‌تواند با ضرب کردن  $R(z)$  و  $R_1(z)$  در پارامتر زمان  $a_1(t) = 1 + k_r \cos(\omega t - \phi)$  به دست آید، که در آن  $\phi$  و  $k_r$  به ترتیب بیانگر زاویه فاز و پارامتر نوسان می‌باشند [۲۶].

## ۲-۱- معادلات حاکم

جریان خون را به صورت پالسی، غیرخطی، لایه‌ای، ناپایا، تراکم‌ناپذیر و کاملاً گسترش یافته فرض می‌کنیم. معادلات ناویر-استوکس حاکم بر جریان سیال میکروپلار در لایه‌ی مرکزی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است [۲۷ و ۲۸]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \frac{m}{Re} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{v_1}{r^2} \right) + \frac{m}{Re} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{JM}{1-m} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w}{\partial r} + u_1 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\nu N}{Re} w + \frac{N}{Re} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right). \quad (3)$$

معادلات ناویر-استوکس حاکم بر لایه‌ی جانبی پلازما به همراه معادله پیوستگی برای جریان سیال میکروپلار و جریان سیال نیوتنی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است [۹ و ۲۹]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{v_i}{r} = 0 \quad (i=1,2). \quad (6)$$

اندیس  $i=1$  مربوط به پارامترهای جریان سیال میکروپلار در لایه‌ی مرکزی و اندیس  $i=2$  مربوط به پارامترهای جریان سیال نیوتنی در لایه‌ی جانبی است. پارامترهای بی‌بعد استفاده‌شده در معادلات (۱) تا (۶) به‌صورت زیر هستند [۱۱ و ۲۷]:

$$u_i = \frac{u_i^*}{U}, \quad v_i = \frac{v_i^*}{U}, \quad w = \frac{R_r w^*}{U}, \quad r = \frac{r^*}{R_r}, \quad z = \frac{z^*}{R_r}, \quad t = \frac{t^* U}{R_r}, \quad J = \frac{J^*}{R_r^2}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_i U^2}$$

$$Re = \frac{\rho_i U R_r}{\mu_i + \kappa}, \quad N = \frac{\kappa R_r^2}{\nu}, \quad M = \frac{\mu R_r^2}{\nu}, \quad m = \frac{\kappa}{\mu_i + \kappa}.$$

$u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب سرعت محوری، سرعت شعاعی و سرعت چرخشی،  $p$  فشار،  $J$  ثابت میکرواینرسی،  $\rho$  چگالی،  $\mu$  و  $\kappa$  ویسکوزیته و ویسکوزیته چرخشی و  $\nu$  ثابت ماده است. گرادین فشار  $\partial p / \partial z$  در معادلات بالا برای بدن انسان به‌صورت  $-\partial p / \partial z = A_1 + A_2 \cos \omega t$  فرض می‌شود که در آن  $\omega = 2\pi f_p$  و  $f_p$  فرکانس پالسی،  $A_1$  دامنه‌ی ثابت گرادین فشار و  $A_2$  دامنه‌ی پالسی است [۳، ۹، ۱۲، ۱۳ و ۲۰].

شرایط مرزی و شرایط اولیه (برحسب  $(r, z, t)$ ) برای جریان خون دولایه‌ای در طول رگ الاستیک به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۷، ۲۶ و ۳۰]:

لایه‌ی مرکزی (خط  $r = 0$ ):

$$v_1 = w = \partial u_1 / \partial r = 0.$$

مرز جداکننده دو سیال (خط  $r = R_1$ ):

$$v_1 = v_r, u_1 = u_r, (\tau_{rz})_1 = (\tau_{rz})_r, w = -\lambda \partial u_1 / \partial r, 0 < \lambda < 1.$$

جداره رگ (خط  $r = R$ ):

$$u_r = 0, v_r = \partial R / \partial t$$

$$u_r(r, z, 0) = \bar{u}_r \left[ 1 - (r/R)^2 \right], v_r(r, z, 0) = w(r, z, 0) = 0, (i = 1, 2)$$

$$u_1(r, z, 0) = \bar{u}_1 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{\gamma}{\beta^2} I_0(\beta) \left\{ \frac{I_0\left(\frac{\beta r}{R}\right)}{I_0(\beta)} - 1 \right\} \right], \gamma = \frac{m\beta}{4I_0(\beta)}, \beta^2 = N(\nu - m).$$

$\bar{u}$  در روابط بالا سرعت میانگین،  $I_0$  تابع بسل بهبودیافته مرتبه صفر از نوع اول و  $I_1$  تابع بسل بهبودیافته مرتبه اول از نوع اول است.

شرایط مرزی و شرایط اولیه برای جریان خون دولایه‌ای در طول رگ غیرالاستیک همانند شرایط اعمال شده برای رگ الاستیک است با این تفاوت که زمانی که خون در رگ غیرالاستیک جریان دارد مقدار  $v_r$  در جداره رگ برابر صفر فرض می‌شود.

### ۳- تبدیل مختصات

به منظور بی‌حرکت و ثابت کردن دیواره رگ الاستیک، تبدیل مختصات  $\xi = r/R$  را بر روی معادلات و شرایط مرزی ارائه شده اعمال می‌کنیم [۵، ۸، ۹، ۱۱ و ۱۹]. با اعمال این تبدیل مختصات به معادلات ناویر-استوکس حاکم بر جریان خون دولایه‌ای و شرایط اولیه و شرایط مرزی، رگ کسینوسی شکل و الاستیک به رگ غیرالاستیک مستطیل شکل تبدیل می‌شود. نتیجه اعمال این تبدیل مختصات روی معادله پیوستگی (۶) و شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \frac{v_i}{\xi R} + \frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} = 0, (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\xi = 0 \Rightarrow v_1(\xi, z, t) = w(\xi, z, t) = \frac{\partial u_1(\xi, z, t)}{\partial \xi} = 0 \quad (8)$$

$$\xi = \alpha \Rightarrow v_1(\xi, z, t) = v_r(\xi, z, t), u_1(\xi, z, t) = u_r(\xi, z, t),$$

$$\left(\tau_{\xi z}\right)_1 = \left(\tau_{\xi z}\right)_r, w = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \quad (9)$$

$$\xi = 1 \Rightarrow u_r(\xi, z, t) = 0, v_r(\xi, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (10)$$

#### ۴- سرعت شعاعی

برای به‌دست آوردن سرعت شعاعی در لایه‌ی مرکزی، معادله (۷) را در  $R$  ضرب می‌کنیم و نسبت به  $\xi$  در بازه صفر تا  $\xi$  انتگرال می‌گیریم:

$$\xi v_1(\xi, z, t) + R \int_0^\xi \xi \frac{\partial u_1}{\partial z} d\xi - \frac{\partial R}{\partial z} \xi^2 u_1 + \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\xi \tau_{\xi z} u_1 d\xi \quad (11)$$

برای  $\xi = \alpha$  با استفاده از شرط مرزی (۹) رابطه بالا به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\int_0^\alpha \xi \frac{\partial u_1}{\partial z} d\xi = \int_0^\alpha \xi \left[ -\frac{\tau}{R} \frac{\partial R}{\partial z} u_1 + \frac{\alpha}{R} \left( \alpha \frac{\partial R}{\partial z} u_{1\alpha} - v_{1\alpha} \right) f(\xi) \right] d\xi. \quad (12)$$

در رابطه بالا  $u_{1\alpha} = u_1(\xi, z, t)|_{\xi=\alpha} = u_r(\xi, z, t)|_{\xi=\alpha}$  و  $f(\xi)$  تابع دلخواهی است که در رابطه  $\int_0^\alpha \xi f(\xi) d\xi = 1$  صدق می‌کند. با انتخاب  $f(\xi) = 4(\xi^2 - 1)/\alpha^2(\alpha^2 - 2)$  و قرار دادن آن در رابطه (۱۲)، همچنین با توجه به هم‌ارزی انتگرال در دو طرف رابطه (۱۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\tau}{R} \frac{\partial R}{\partial z} u_1 + \frac{\alpha}{R} \left( \alpha \frac{\partial R}{\partial z} u_{1\alpha} - v_{1\alpha} \right) \frac{4(\xi^2 - 1)}{\alpha^2(\alpha^2 - 2)}. \quad (13)$$

سرعت محوری لایه‌ی مرکزی، با جایگذاری رابطه‌ی (۱۳) در رابطه‌ی (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$v_1(\xi, z, t) = \frac{\partial R}{\partial z} \xi u_1 - \xi \left[ \left( \alpha \frac{\partial R}{\partial z} u_{1\alpha} - v_{1\alpha} \right) \frac{(\xi^2 - 2)}{\alpha(\alpha^2 - 2)} \right]. \quad (14)$$

برای به‌دست آوردن سرعت شعاعی لایه‌ی جانبی، معادله (۷) را در  $R$  ضرب می‌کنیم و نسبت به  $\xi$  در بازه  $\alpha$  تا  $\xi$  انتگرال می‌گیریم، سپس شرایط مرزی (۲۳) را در رابطه به‌دست آمده تأثیر می‌دهیم. در نهایت با انجام عملیاتی مشابه عملیات بالا رابطه زیر برای سرعت محوری لایه جانبی به‌دست می‌آید:

$$v_r(\xi, z, t) = \frac{\xi^r + 1}{2\xi} \left[ \frac{\partial R}{\partial z} u_r - \frac{R}{2} \left( \frac{\xi^r - 1}{\xi^r + 1} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{2}{\xi^r + 1} \frac{\partial R}{\partial t} \right]. \quad (15)$$

### ۵- گسسته سازی و روش تفاضل متناهی

#### ۵-۱- سرعت محوری و سرعت چرخشی

برای محاسبه‌ی پروفیل سرعت محوری و سرعت چرخشی از روش تفاضل متناهی استفاده می‌شود. ایده اصلی روش تفاضل متناهی جاگذاری جملات مشتق در معادلات دیفرانسیل با فرمول‌های تقریب تفاضلی است، برای رسیدن به این منظور با توجه به دقت مرتبه دوم فرمول تقریب تفاضل مرکزی کلیه‌ی مشتق‌های مکانی به‌وسیله‌ی فرمول تقریب تفاضل مرکزی تقریب زده می‌شود. به‌منظور رسیدن به روش صریح کلیه مشتق‌های زمانی را به‌وسیله فرمول تقریب پیشرو، تقریب می‌زنیم. بنابراین یک روش صریح پیشرو در زمان خواهیم داشت که می‌تواند با توجه به شرایط اولیه و شرایط مرزی در هر لحظه به‌صورت نقطه به نقطه جریان را تحلیل کند. فرمول‌های تقریب تفاضل مرتبه اول و مرتبه دوم مکانی، به‌همراه فرمول تقریب تفاضل پیشرو زمانی مربوط به  $u_i(\xi, z, t)$  به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (u_i)_{f\xi} &= \frac{\partial u_i}{\partial \xi} = \frac{(u_i)_{i,j+1}^k - (u_i)_{i,j-1}^k}{2\Delta} + O(h^2), \\ (u_i)_{s\xi} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} = \frac{(u_i)_{i,j+1}^k - 2(u_i)_{i,j}^k + (u_i)_{i,j-1}^k}{\Delta^2} + O(h^2) \\ (u_i)_{fz} &= \frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{(u_i)_{i+1,j}^k - (u_i)_{i-1,j}^k}{2\Delta z} + O(h^2), \\ (u_i)_{sz} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = \frac{(u_i)_{i+1,j}^k - 2(u_i)_{i,j}^k + (u_i)_{i-1,j}^k}{(\Delta z)^2} + O(h^2) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{(u_i)_{i,j}^{k+1} - (u_i)_{i,j}^k}{\Delta t} + O(h), \end{aligned} \quad \begin{cases} i=1 \Rightarrow \Delta = \Delta\xi \\ i=2 \Rightarrow \Delta = \Delta\xi' \end{cases}$$

در روابط بالا داریم:



$$\begin{cases} \xi_j = (j-1)\Delta\xi, (j=1,2,\dots,N_c+1); \xi_{(N_c+1)} = \alpha. \\ \xi_j = \alpha + (j-(N_c+1))\Delta\xi', (j=N_c+1, N_c+2, \dots, N+1); \xi_{(N+1)} = 1. \\ z_i = (i-1)\Delta z, (i=1,2,\dots,M+1). \\ t_i = (k-1)\Delta t, (i=1,2,\dots). \end{cases}$$

$\Delta z$ ،  $\Delta t$  و طول گام‌های مربوط به جهت محوری، جهت شعاعی و جهت زمانی می‌باشند. به منظور به دست آوردن پروفیل سرعت محوری و سرعت چرخشی، ابتدا تبدیل مختصات ارائه شده در بخش ۳ را روی معادلات (۱)، (۳) و (۴) اعمال می‌کنیم و سپس فرمول‌های تقریب تفاضلات متناهی ارائه شده در این بخش را روی این معادلات اعمال می‌کنیم.

$$(u_{\nu})_{i,j}^{k+1} = (u_{\nu})_{i,j}^{k+1} + \Delta t \left[ -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_i^k + (T_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{f\xi}^k + (T_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{s\xi}^k - (u_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{fz}^k + \frac{1}{Re} (u_{\nu})_{sz}^k + \frac{m}{Re \xi_j R_i^k} \left( (w)_{i,j}^k + \xi_j (w)_{f\xi}^k \right) \right] \quad (16)$$

$$(u_{\nu})_{i,j}^{k+1} = (u_{\nu})_{i,j}^k + \Delta t \left[ -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_i^k + (T_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{f\xi}^k + (T_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{s\xi}^k - (u_{\nu})_{i,j}^k (u_{\nu})_{fz}^k + \frac{1}{Re} (u_{\nu})_{sz}^k \right] \quad (17)$$

$$(w)_{i,j}^{k+1} = (w)_{i,j}^k + \Delta t \left[ (T_{\nu})_{i,j}^k (w)_{f\xi}^k + (T_{\delta})_{i,j}^k (w)_{s\xi}^k - (u_{\nu})_{i,j}^k (w)_{fz}^k + \frac{1-m}{M Re J} \left\{ (w)_{sz}^k - \frac{(w)_{i,j}^k}{(\xi_j R_i^k)^{\nu}} \right\} + \frac{(1-m)N}{M Re J R_i^k} \left\{ -\nu R_i^k (w)_{i,j}^k + R_i^k (v_{\nu})_{fz}^k - \xi_j \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k (v_{\nu})_{f\xi}^k - (u_{\nu})_{f\xi}^k \right\} \right] \quad (18)$$

$T_{\nu}$  تا  $T_{\delta}$  در روابط بالا به صورت زیر می‌باشند:

$$(T_{\nu})_{i,j}^k = \frac{1}{(R_i^k)^{\nu}} \left[ \xi_j R_i^k \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_i^k + \xi_j R_i^k \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k (u_{\nu})_{i,j}^k - (v_{\nu})_{i,j}^k R_i^k + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{\xi_j} + \nu \xi_j \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)_i^k\right)^{\nu} - \xi_j R_i^k \left(\frac{\partial^{\nu} R}{\partial z^{\nu}}\right)_i^k \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 (T_{\tau})_{i,j}^k &= \frac{1}{Re} \frac{1}{(R_i^k)^{\nu}} \left[ 1 + \left( \xi_j \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k \right)^{\nu} \right] \\
 (T_{\tau})_{i,j}^k &= \frac{1}{(R_i^k)^{\nu}} \left[ \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^k + \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k (u_{\tau})_{i,j}^k - (v_{\tau})_{i,j}^k R_i^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{1}{\xi_j} + \nu \xi_j \left( \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k \right)^{\nu} - \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial^{\nu} R}{\partial z^{\nu}} \right)_i^k \right\} \right] \\
 (T_{\tau})_{i,j}^k &= \frac{1}{(R_i^k)^{\nu}} \left[ \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^k + \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k (u_{\tau})_{i,j}^k - (v_{\tau})_{i,j}^k R_i^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-m}{M Re J} \left\{ \frac{1}{\xi_j} + \nu \xi_j \left( \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k \right)^{\nu} - \xi_j R_i^k \left( \frac{\partial^{\nu} R}{\partial z^{\nu}} \right)_i^k \right\} \right] \\
 (T_{\delta})_{i,j}^k &= \frac{1-m}{M Re J} \frac{1}{(R_i^k)^{\nu}} \left[ 1 + \left( \xi_j \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k \right)^{\nu} \right]
 \end{aligned}$$

نتیجه اعمال تقریب تفاضلات متناهی روی شرایط اولیه و مرزی به شکل زیر خواهد بود:

$$(v_{\tau})_{i,1}^k = (w)_{i,1}^k = 0, \quad (u_{\tau})_{i,1}^k = (u_{\tau})_{i,\nu}^k, \quad (u_{\tau})_{i,N_c+1}^k = (u_{\tau})_{i,N_c+1}^k, \quad (v_{\tau})_{i,N_c+1}^k = (v_{\tau})_{i,N_c+1}^k$$

$$\begin{aligned}
 (u_{\tau})_{i,N_c}^k &= (u_{\tau})_{i,N_c+1}^k - \frac{\Delta \xi}{C} \left[ (u_{\tau})_{f\xi}^k + (1-a) R_i^k (v_{\tau})_{fz}^k - (\partial p / \partial z)_i^k \right. \\
 &\quad \left. \{ a \xi_j R_i^k (u_{\tau})_{fz}^k + \xi_j (v_{\tau})_{f\xi}^k + a (v_{\tau})_{i,j}^k \} - c R_i^k (w)_{i,j}^k \right] \\
 (u_{\tau})_{i,N+1}^k &= 0, \quad (v_{\tau})_{i,N+1}^k = (\partial R / \partial t)_i^k
 \end{aligned}$$

$$(u_{\tau})_{i,j}^1 = \nu \bar{u}_{\tau} \left\{ 1 - \xi_j^{\nu} + \frac{\nu \gamma}{\beta^{\nu}} I_{\circ}(\beta) \left\{ \frac{I_{\circ}(\beta \xi_j)}{I_{\circ}(\beta)} - 1 \right\} \right\},$$

$$(u_{\tau})_{i,j}^1 = \nu \bar{u}_{\tau} (1 - \xi_j^{\nu}), \quad (v_{\tau})_{i,j}^1 = (w)_{i,j}^1 = 0$$

$$a = \frac{\mu_{\lambda}}{\mu_{\tau}}, \quad b = \frac{\mu_{\lambda} + \kappa}{\mu_{\tau}}, \quad c = \frac{\kappa}{\mu_{\tau}}, \quad C = b - a \left( \xi \frac{\partial R}{\partial t} \right)^{\nu}.$$

مقادیر دبی حجمی ( $Q$ ) و مقاومت در برابر جریان ( $\Lambda$ ) از روابط زیر به دست می آید [۵]:

$$Q_i^k = 2\pi(R_i^k)^2 \left[ \int_0^\alpha \xi_j(u_{i,j})^k d\xi_j + \int_\alpha^1 \xi_j(u_{i,j})^k d\xi_j \right] \quad (19)$$

$$\Lambda_i^k = \left| L \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_i^k \right| / Q_i^k. \quad (20)$$

### ۵-۲- شرایط پایداری

مقدار طول گام شعاعی در لایه‌ی مرکزی برابر  $\Delta\xi = 0.019$  و در لایه‌ی جانبی برابر  $\Delta\xi' = 0.005$  و مقدار طول گام طولی برابر  $\Delta z = 0.1$  فرض می‌شود. برای محاسبه طول گام زمانی پیشرو باید توجه داشت که روش عددی ارائه‌شده یک روش صریح است که شرط پایداری آن بر طبق عدد کورانت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۲۶ و ۳۱]:

$$\Delta t = c \text{Min} [\Delta t_r, \Delta t_l], \Delta t_l \leq \text{Min} \left[ \frac{Re}{2} \frac{\Delta\xi^2 \Delta z^2}{(\Delta\xi^2 + \Delta z^2)} \right],$$

$$\Delta t_r \leq \text{Min} \left[ \frac{\Delta\xi}{u}, \frac{\Delta z}{v} \right], 0 < c < 1.$$

بنابراین طول گام زمانی در این تحقیق برابر  $\Delta t = 0.0001$  فرض شده است.

### ۶- نتایج و مباحث عددی

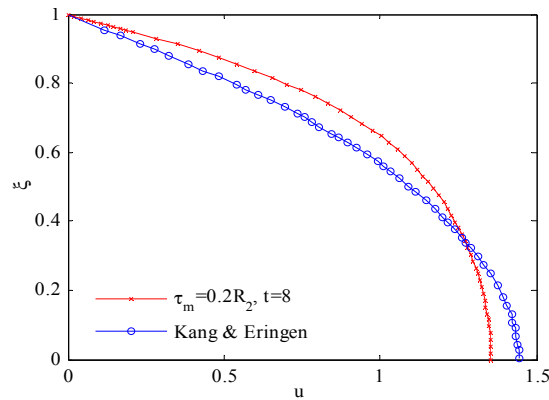
مدل‌سازی ارائه‌شده در نرم‌افزار MATLAB با استفاده از پارامترهای زیر صورت گرفته است [۱۹ و ۳۲]:

$$L = 30, d = 7, L_1 = 15, \phi = 0, k_r = 0.05, f_p = 1/2, Re = 300,$$

$$M = 1, N = 1, m = 0.85, \Delta\xi = 0.019, \Delta\xi' = 0.005, \Delta z = 0.1,$$

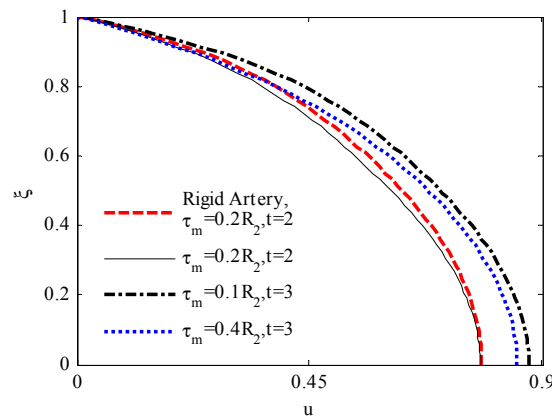
$$\Delta t = 0.0001, A_0 = 0.1, A_1 = 0.2A_0, R_1 = 1/52, \alpha = 0.95.$$

به منظور اعتباردهی به نتایج به‌دست آمده، سرعت محوری به‌دست آمده از مطالعه کانگ و ارینگن [۲۵] در شکل (۲) با سرعت محوری به‌دست آمده از مطالعه حاضر در نقطه بحرانی  $z = 14$  مورد مقایسه قرار گرفته است. در زمان  $t = 8$  توافق خوبی با [۲۵] به‌دست آمده است که این مسئله درستی نتایج به‌دست آمده را به اثبات می‌رساند.



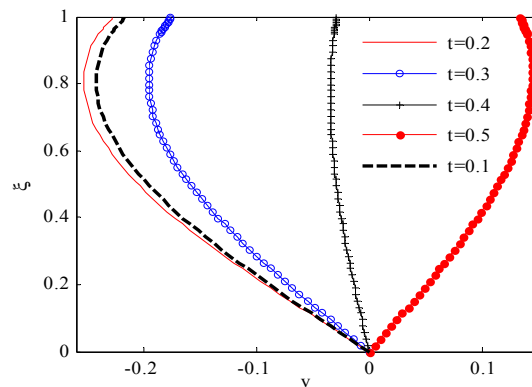
شکل ۲: مقایسه سرعت محوری بی‌بعد به‌دست آمده با نتیجه کانگ و ارینگن [۲۵]

نمودار سرعت محوری بی‌بعد جریان خون در طول رگ الاستیک و رگ غیرالاستیک با میزان گرفتگی یکسان ( $\tau_m = 0/2R_2$ ) در زمان  $t=2$ ، به‌همراه نمودار سرعت محوری بی‌بعد جریان خون در طول رگ الاستیک برای میزان گرفتگی‌های  $\tau_m = 0/1R_2$  و  $\tau_m = 0/4R_2$  در زمان  $t=3$  در شکل (۳) نشان داده شده است. شکل (۳) نتیجه می‌دهد که در زمان  $t=2$  سرعت محوری جریان خون در طول رگ غیرالاستیک بیشتر از سرعت محوری جریان خون در طول رگ الاستیک است. با مقایسه گراف‌های مربوط به سرعت محوری جریان خون برای گرفتگی‌های  $\tau_m = 0/1R_2$  و  $\tau_m = 0/4R_2$  در شکل (۳) مشخص می‌شود که با افزایش میزان گرفتگی، سرعت محوری کاهش یافته است.



شکل ۳: سرعت محوری بی‌بعد در راستای شعاع بی‌بعد در نقطه  $z = 14$

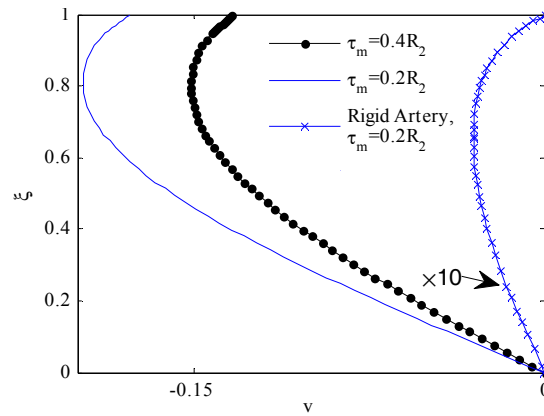
شکل (۴) رفتار سرعت شعاعی جریان خون در طول رگ الاستیک با گرفتگی  $\tau_m = 0/4R_r$  در یک دوره قلبی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۴)، در دوره سیستول (از  $1/0$  تا  $3/0$  ثانیه) با توجه به گرادیان فشار وارده ناشی از پمپاژ طبیعی قلب، تمامی سرعت شعاعی در ناحیه منفی محور مختصات قرار دارد و با افزایش زمان مقدار سرعت شعاعی افزایش می‌یابد. در دوره دیاستول (از  $5/0$  تا  $7/0$  ثانیه) تمامی سرعت شعاعی به ناحیه مثبت محور مختصات انتقال می‌یابد و با افزایش زمان مقدار سرعت شعاعی کاهش می‌یابد به‌طوری که در دوره دیاستول بعدی (زمان  $t=1$ ) دوباره تمامی سرعت شعاعی به ناحیه منفی محور مختصات انتقال می‌یابد.



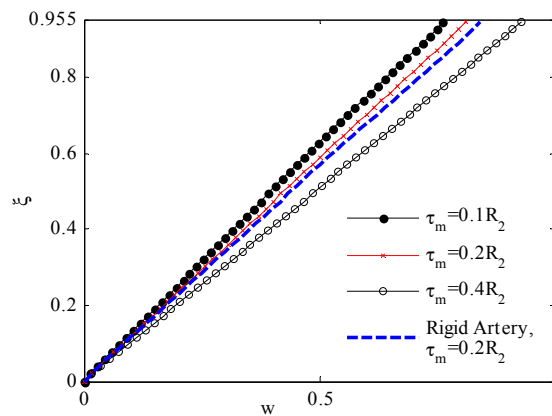
شکل ۴: رفتار سرعت شعاعی بی‌بعد در یک دوره قلبی در نقطه  $z=14$

سرعت شعاعی بی‌بعد جریان خون دولایه‌ای در راستای شعاع بی‌بعد در زمان  $t=2$  برای گرفتگی‌های  $\tau_m = 0/2R_r$  و  $\tau_m = 0/4R_r$  در شکل (۵) نشان داده شده است. مقایسه گراف‌های مربوط به سرعت شعاعی جریان خون در طول رگ الاستیک در شکل (۵) نتیجه می‌دهد که در زمان  $t=2$  با افزایش میزان گرفتگی، سرعت شعاعی جریان خون افزایش می‌یابد. شکل (۵) نشان می‌دهد که مقدار سرعت شعاعی جریان خون در طول رگ غیرالاستیک بسیار کمتر از رگ الاستیک است و با توجه به شرط مرزی اعمال‌شده، مقدار آن در محور و جداره رگ برابر صفر است.

شکل (۶) سرعت چرخشی برای گرفتگی‌های مختلف در زمان  $t=3$  را نشان می‌دهد. مقدار سرعت چرخشی جریان خون با نزدیک شدن به دیواره رگ در حال افزایش است، که این امر ناشی از شرط مرزی اعمال‌شده در این ناحیه است. با مقایسه گراف‌های ارائه‌شده برای سرعت چرخشی جریان خون در رگ الاستیک مشخص می‌شود که با افزایش میزان گرفتگی، سرعت چرخشی افزایش می‌یابد. با توجه به شکل (۶) سرعت چرخشی جریان خون در رگ غیرالاستیک بیشتر از مقدار آن در رگ الاستیک است.

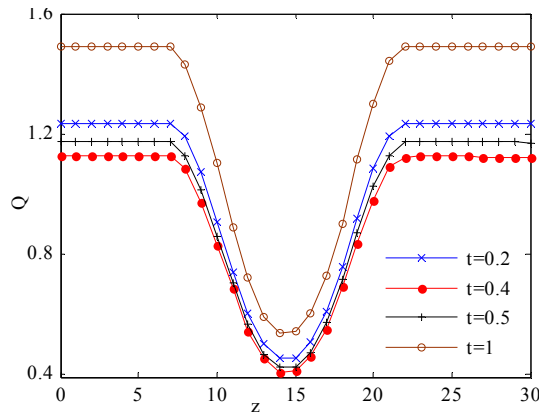


شکل ۵: سرعت شعاعی بی‌بعد در راستای شعاع بی‌بعد در زمان  $t = 2$  در نقطه  $z = 14$



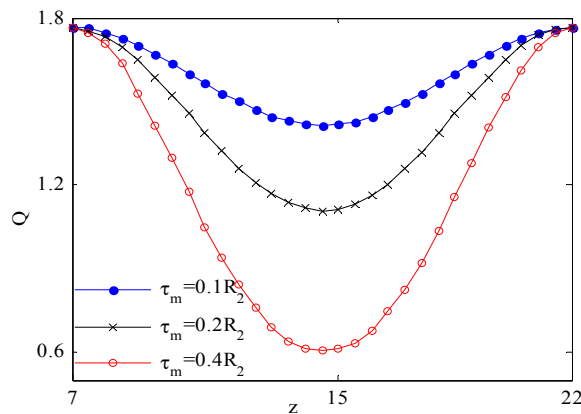
شکل ۶: نمودار سرعت چرخشی در راستای شعاع بی‌بعد شده در زمان  $t = 3$  در نقطه  $z = 14$

شکل (۷) میزان دبی حجمی را در زمان‌های متفاوت برای گرفتگی یکسان ( $\tau_m = 0.4R_2$ ) نشان می‌دهد. رفتار دبی حجمی در یک دوره قلبی از روی شکل مشخص است. با توجه به شکل (۷) از زمان  $t = 0.2$  تا  $t = 0.4$  (در دوره سیستول) میزان دبی حجمی کاهش می‌یابد، ولی با شروع دوره دیاستول، میزان دبی حجمی افزایش می‌یابد. شکل (۷) نشان می‌دهد که دبی حجمی رفتاری متناظر با هندسه‌ی گرفتگی دارد به طوری که در نواحی فراتر از گرفتگی میزان دبی حجمی ثابت است ولی با شروع ناحیه گرفتگی میزان دبی حجمی کاهش می‌یابد و در نقطه حداکثر گرفتگی، میزان دبی حجمی به حداقل می‌رسد.



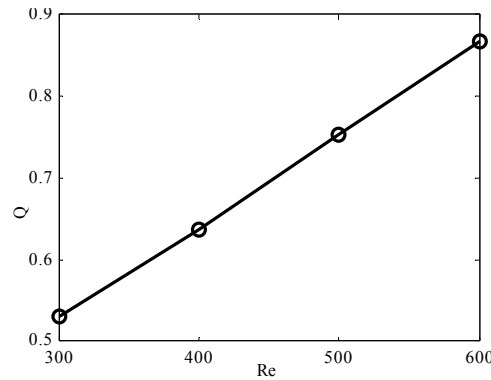
شکل ۷: توزیع دبی حجمی برای گرفتگی  $\tau_m = 0.4R_1$

در شکل (۸) مقایسه میزان دبی حجمی برای گرفتگی‌های مختلف در زمان  $t=3$  در طول ناحیه گرفته‌شده از رگ مفروض ارائه‌شده است. مقایسه گراف‌های ارائه‌شده در شکل (۸) نتیجه می‌دهد که با افزایش گرفتگی، میزان دبی حجمی کاهش می‌یابد.

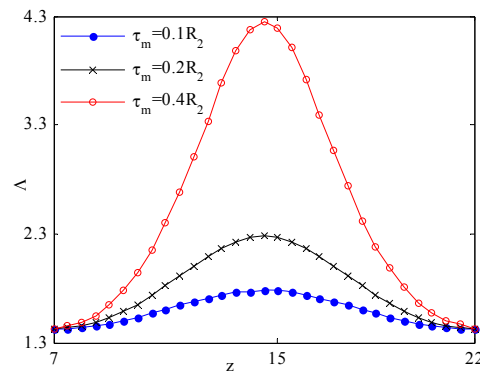


شکل ۸: توزیع دبی حجمی در ناحیه گرفته‌شده برای گرفتگی‌های مختلف در زمان  $t=3$

در شکل (۹) تأثیر عدد رینولدز بر روی دبی حجمی در زمان  $t=1$  در نقطه بحرانی  $z=14$  برای گرفتگی  $\tau_m = 0.4R_1$  نشان داده شده است. با افزایش عدد رینولدز مقدار سرعت شعاعی افزایش می‌یابد، از طرفی با توجه به رابطه (۱۹) سرعت شعاعی با دبی حجمی رابطه مستقیم دارد. بنابراین با افزایش عدد رینولدز میزان دبی حجمی افزایش پیدا می‌کند. شکل (۹) درستی این مطلب را به اثبات می‌رساند.



شکل ۹: دبی حجمی برای اعداد رینولدز متفاوت ( $\tau_m = 0.4R_2$ ,  $t = 1$ ,  $z = 14$ )

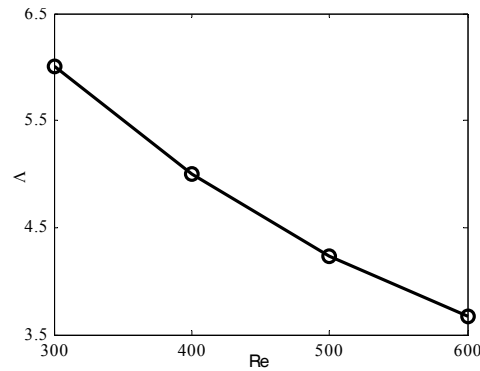


شکل ۱۰: مقاومت در برابر جریان در ناحیه گرفته شده برای گرفتگی های مختلف در زمان  $t = 3$

شکل (۱۰) نشانگر میزان مقاومت در برابر جریان برای گرفتگی های مختلف در زمان  $t = 2$  در طول ناحیه گرفته شده از رگ مفروض است. با توجه به شکل (۱۰) با افزایش گرفتگی، میزان مقاومت در برابر جریان افزایش یافته است که این امر با نتیجه به دست آمده از مطالعه فیلیپ و چاندرا [۱۷] مطابقت دارد. همچنین واضح است که حداکثر مقدار مقاومت در برابر جریان در نقطه حداکثر گرفتگی اتفاق می افتد.

شکل (۱۱) به منظور بررسی تأثیر عدد رینولدز بر روی مقاومت در برابر در زمان  $t = 1$  در نقطه بحرانی  $z = 14$  برای گرفتگی  $\tau_m = 0.4R_2$  ارائه شده است. در شکل (۹) نتیجه گرفته شد که با افزایش عدد رینولدز مقدار دبی حجمی افزایش می یابد. از طرفی با توجه به رابطه (۲۰) مقاومت در برابر جریان با دبی حجمی رابطه عکس دارد؛ بنابراین با افزایش عدد رینولدز مقدار مقاومت در برابر جریان کاهش می یابد. شکل (۱۱) درستی این مطلب را به اثبات می رساند.





شکل ۱۱: مقاومت در برابر جریان برای اعداد رینولدز متفاوت ( $\tau_m = 0.4R_p$ ,  $t = 1$ ,  $z = 14$ )

با توجه به شکل‌های (۷)، (۸) و (۱۰) کمترین مقدار دبی حجمی و بیش‌ترین مقدار مقاومت در برابر جریان در نقطه حداکثر گرفتگی اتفاق می‌افتد که این امر با یافته‌های ایلینای و ورسارهایدا [۲۷] مطابقت دارد.

### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی برای جریان خون دولایه‌ای در طول رگ گرفته‌شده ارائه شده است. جریان لایه‌ی مرکزی سیال میکروپلار و جریان لایه‌ی جانبی سیال نیوتنی در نظر گرفته شده است. جریان خون به‌صورت پالسی، غیرخطی، لایه‌ای، ناپایا و کاملاً گسترش‌یافته فرض شده است. نتایج به‌دست آمده از مطالعه حاضر با نتایج موجود قبلی مورد مقایسه قرار گرفته و کارایی مدل ارائه‌شده به اثبات رسیده است. نتایج به‌دست آمده از مدل‌سازی ارائه‌شده نشان می‌دهد که با افزایش میزان گرفتگی سرعت شعاعی، سرعت چرخشی و مقاومت در برابر جریان افزایش می‌یابد ولی مقدار سرعت محوری و دبی حجمی کاهش می‌یابد. به‌منظور نشان دادن تأثیر خاصیت ارتجاعی دیواره رگ بر مشخصه‌های جریان خون، پروفیل سرعت جریان خون در طول رگ الاستیک و رگ غیرالاستیک مقایسه شد و تفاوت بین مقادیر آن‌ها اهمیت الاستیک فرض کردن رگ خونی را به اثبات رساند.

### سپاسگزاری

نویسندگان مقاله از مرکز محاسبات ریاضی، پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM) بابت همکاری صمیمانه در اجرای برنامه‌های MATLAB کمال تشکر را دارند.

## مراجع

- [1] Naghavi M., Libby P., Falk E., Casscells S. W., Litovsky S., Rumberger J., Badimon J. J., Stefanadis C., Moreno P. and Pasterkamp G. (2003), From vulnerable plaque to vulnerable patient a call for new definitions and risk assessment strategies: part I, *Circulation*, **108**(14), 1664-1672.
- [2] Tu C. and Deville M. (1996), Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenoses, *J. biomechanics*, **29**(7), 899-908.
- [3] Chakravarty S. and Mandal P. K. (2004), Unsteady flow of a two-layer blood stream past a tapered flexible artery under stenotic conditions, *Comput. Methods Appl. Math.*, **4**(4), 391-409.
- [4] Sankar D. (2011), Two-phase non-linear model for blood flow in asymmetric and axisymmetric stenosed arteries, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **46**(1), 296-305.
- [5] Sankar D. and Lee U. (2011), FDM analysis for MHD flow of a non-Newtonian fluid for blood flow in stenosed arteries, *j. mech. sci. technol*, **25**(10), 2573-2581.
- [6] Haghighi A. R. (2012), Mathematical model of the impact of pressure drop on human body, *Selcuk J. Appl. Math* **13**(1), 35-40.
- [7] Long Q., Xu X., Ramnarine K. and Hoskins P. (2001), Numerical investigation of physiologically realistic pulsatile flow through arterial stenosis, *J. biomechanics*, **34**(10), 1229-1242.
- [8] Belardinelli E. and Cavalcanti S. (1991), A new nonlinear two-dimensional model of blood motion in tapered and elastic vessels, *Comput. Biol. Med*, **21**(1), 1-13.
- [9] Chakravarty S. and Mandal P. K. (2000), Two-dimensional blood flow through tapered arteries under stenotic conditions, *Internat. J. Non-Linear Mech*, **35**(5), 779-793.
- [10] Mandal P. K. (2005), An unsteady analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis, *Internat. J. Non-Linear Mech*, **40**(1), 151-164.
- [11] Ikbal M. A., Chakravarty S., Wong K. K., Mazumdar J. and Mandal P. K. (2009), Unsteady response of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery in magnetic field, *Comput. Appl. Math*, **230**(1), 243-259.
- [12] Ismail Z., Abdullah I., Mustapha N. and Amin N. (2008), A power-law model of blood flow through a tapered overlapping stenosed artery, *Appl. Math. Comput*, **195**(2), 669-680.

- [13] Varshney G., Katiyar V. K. and Kumar S. (2010), Effect of magnetic field on the blood flow in artery having multiple stenosis: a numerical study, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, **2**(2), 67-82.
- [14] Mekheimer K. S. and El Kot M. (2008), The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis, *Acta. Mech. Sin*, **24**(6), 637-644.
- [15] Akay G. and Kaye A. (1985), Numerical solution of time dependent stratified two-phase flow of micropolar fluids and its application to flow of blood through fine capillaries, *Inr. J. Engng. Sci*, **23**(3), 265-276.
- [16] Srivastava V. P. and Saxena M. (1994), Two-layered model of Casson fluid flow through stenotic blood vessels: Application to the cardiovascular system, *J. Biomech*, **27**, 921-928.
- [17] Philip D. and Chandra P. (1996), Flow of Eringen fluid (simple microfluid) through an artery with mild stenosis, *Int. J. Eng. Sci*, **34**(1), 87-99.
- [18] Sharan M. and Popel A. S. (2001), A two phase model for flow of blood in narrow tubes with increased effective viscosity near the wall, *Biorheol*, **28**, 415-428.
- [19] Ikbal M. A., Chakravarty S. and Mandal P. K. (2009), Two-layered micropolar fluid flow through stenosed artery: Effect of peripheral layer thickness, *Comput. Math. Appl*, **58**(7), 1328-1339.
- [20] Biswas D. and Chakraborty U. S. (2010), Two-Layered Pulsatile Blood Flow in a Stenosed Artery with Body Acceleration and Slip at Wall, *AAM: Intern. J*, **5**(2), 303-320.
- [21] Eringen A. C. (1964), Simple microfluids, *Int. J. Eng. Sci*, **2**, 205-217.
- [22] Eringen A. C. (1966), Theory of microfluids, *J. Math. Mech*, **16**, 1-18.
- [23] Bhargava R., Agarwal R., Kumar L. and Takhar H. S. (2004), Finite element study of mixed convection micropolar flow in a vertical circular pipe with variable surface conditions, *Internat. J. Engrg. Sci*, **42**(1), 13-27.
- [24] Yamaguchi N. (2005), Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain, *Math. Meth. Appl. Sci*, **28** (13), 1507-1526.
- [25] Kang C. and Eringen A. (1976), The effect of microstructure on the rheological properties of blood, *Bull. Math. Biol*, **38**(2), 135-159.

- [26] Mustapha N., Amin N., Chakravarty S. and Mandal P. K. (2009), Unsteady magnetohydrodynamic blood flow through irregular multi-stenosed arteries, *Comput. Biol. Me*, **39**(10), 896-906.
- [27] Abdullah I. and Amin N. (2010), A micropolar fluid model of blood flow through a tapered artery with a stenosis, *Math. Meth. Appl. Sci*, **33**(16), 1910-1923.
- [28] Devanathan R. and Parvathamma S. (1983), Flow of micropolar fluid through a tube with stenosis, *Med. & Biol. Eng. & Comput*, **21**(4), 438-445.
- [29] Liu G.-T., Wang X.-J., Ai B.-Q. and Liu L.-G. (2004), Numerical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis, *Chinese. J. Phys*, **42**(4), 401-409.
- [30] Pralhad R. and Schultz D. (1988), Two-layered blood flow in stenosed tubes for different diseases, *Biorheology*, **25**(5), 715-726.
- [31] Mukhopadhyay S. and Layek G. (2008), Numerical Modeling of a Stenosed Artery Using Mathematical Model of Variable Shape, *AAM: Intern. J*, **3**(2), 308-328.
- [32] Sankar D., Goh J. and Ismail M. A. (2010), FDM analysis for blood flow through stenosed tapered arteries, *Boundary Value Problems*, Article ID 917067, 16 pages.

## **A Mathematical Modeling of a Two-Layered Blood Flow Through Constricted Vessels**

Ahmad Reza Haghighi and Mohammad Shahbazi Asl

Department of Mathematics, Urmia University of technology, Urmia, Iran

### **Abstract**

In this paper, a mathematical model of pulsatile and two-layered blood flow through constriction vessels is simulated. The blood vessel has been assumed to be elastic and the blood flow is treated as a two-layered fluid, such that the core region is a micropolar fluid and the peripheral layer is a Newtonian plasma fluid. By applying suitable coordinate transformation, the governing equations have been solved numerically using the finite difference method, and the velocity profile of the two-layered blood flow has been achieved. The flow characteristics including the volumetric flow rate and the resistive impedance were obtained, and the effects of the stenosis size on these characteristics have been discussed.

**Keywords:** Micropolar fluid, Constricted vessels, Newtonian fluid, Finite difference method, Blood flow

**Mathematics Subject Classification (2010):** 92B05, 92C35.