

مقایسه‌ی دو زیر مجموعه از خانواده توزیع‌های بتا-G با دو زیر مجموعه از خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو

شهرام یعقوب زاده شهرستان^۱ و علی شادرخ

گروه آمار دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۲/۱۸

چکیده: در این مقاله دو توزیع از خانواده توزیع‌های بتا-G با دو توزیع متناظر از خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G که G یک توزیع از خانواده توزیع‌های سری توانی می‌باشد معرفی می‌شود. سپس این دو خانواده با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو و به کمک آماره‌های آزمون نیکویی برازش و تابع نرخ خطر و دو مجموعه از داده‌های واقعی مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که خانواده توزیع‌های بتا-G مدلی مناسب‌تر برای توزیع طول عمر می‌باشد. **واژه‌های کلیدی:** توزیع بتا-G، توزیع زگرافوس-بالاکریشنان-G، تابع نرخ خطر، شبیه‌سازی مونت کارلو، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲E۱۵، ۶۲F۳۰.

۱- مقدمه

توزیع‌های متفاوتی به کمک خانواده توزیع‌های بتا-G (G) یک توزیع پیوسته دلخواه معرفی شده توسط [۱] به‌عنوان توزیع‌های طول عمر معرفی شدند که می‌توان به بتا گامبل [۲]، بتا وایبول [۳]، بتا نمایی تعمیم‌یافته [۴] و بتا وایبول هندسی [۵] اشاره کرد. خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G (G) یک توزیع پیوسته دلخواه و کاربرد آن توسط [۶] معرفی شد. توزیع زگرافوس-بالاکریشنان-لگ لجستیک نیز توسط [۷] با انتخاب توزیع لگ لجستیک به‌جای G در خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G، معرفی و ویژگی‌های آن بررسی شد. در این مقاله خانواده توزیع‌های بتا-G (در حالت $a=1$) و زگرافوس-بالاکریشنان-G با انتخاب دو توزیع از

توزیع‌های سری توانی با استفاده از تابع نرخ خطر و آماره‌های آزمون نیکویی برآزش به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌شوند؛ بنابراین ساختار این مقاله به این صورت می‌باشد که در بخش‌های دوم و سوم به ترتیب دو توزیع از خانواده توزیع‌های بتا-G در حالت $a=1$ و دو توزیع از خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G معرفی شده و تابع نرخ خطر و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها به دست آورده می‌شود. در بخش چهارم این دو خانواده از توزیع‌ها با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی مقایسه می‌شود. بخش پنجم هم مربوط به نتایج مقاله می‌باشد.

۲- دو توزیع از خانواده توزیع‌های بتا-G در حالت $a=1$

۲-۱- توزیع بتا وایبول هندسی

با انتخاب توزیع وایبول هندسی معرفی شده توسط [۸] به جای G در خانواده توزیع‌های بتا-G، توزیع بتا وایبول هندسی^۱ با تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی به ترتیب به صورت زیر تولید می‌باشد.

$$f(x; \alpha, \beta, b, \theta) = ab\beta^\alpha (1-\theta)^b x^{\alpha-1} e^{-b(\beta x)^\alpha} \left(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^{-(1+b)} \quad (1)$$

$$F(x; \alpha, \beta, b, \theta) = 1 - \frac{(1-\theta)^b e^{-b(\beta x)^\alpha}}{\left(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^b} \quad (2)$$

که $x > 0$ ، $\alpha, \beta, b > 0$ و $0 < \theta < 1$ می‌باشد. ویژگی‌های این توزیع نیز توسط [۵] به تفصیل بررسی شد.

اگر X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۱) باشند آنگاه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β ، θ و b به کمک مجموعه معادلات $U_n(\Theta) = 0$ به دست می‌آید که در آن $U_n(\Theta) = \left(\frac{\partial \log L}{\partial \alpha}, \frac{\partial \log L}{\partial \beta}, \frac{\partial \log L}{\partial \theta}, \frac{\partial \log L}{\partial b} \right)$ و $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, b)$ می‌باشد. در نتیجه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\Theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}, \hat{b})$ به کمک روابط زیر به دست آورده می‌شوند.

$$\hat{b} = n \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\log(1 - \hat{\theta} e^{-(\hat{\beta} x_i)^\alpha}) + (\hat{\beta} x_i)^\alpha - \log(1 - \hat{\theta}) \right] \right\}^{-1}$$

$$\hat{\theta} = 1 - n \hat{b} \left[(\hat{b} + 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-(\hat{\beta} x_i)^\alpha}}{1 - \hat{\theta} e^{-(\hat{\beta} x_i)^\alpha}} \right]^{-1}$$

$$\alpha - n \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\theta (\beta x_i)^\alpha e^{-(\beta x_i)^\alpha} \log(\beta x_i)}{1 - \theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} - (1 - b (\beta x_i)^\alpha) \log(\beta x_i) \right] \right\}^{-1} = 0$$

$$\beta^\alpha - n \left\{ \sum_{i=1}^n \left[b x_i^\alpha - \frac{\theta (b + 1) x_i^\alpha e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1 - \theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} \right] \right\}^{-1} = 0$$

که به صورت یک فرم بسته به دست نمی‌آیند و در این مقاله به روش تکراری نیوتن-رافسون و با استفاده از نرم‌افزار R به دست آورده می‌شوند. برای متغیر تصادفی X با تابع‌های توزیع تجمعی F و چگالی احتمال f و Θ به عنوان بردار پارامترها، تابع نرخ خطر به صورت زیر می‌باشد.

$$h(x, \Theta) = \frac{f(x; \Theta)}{1 - F(x; \Theta)}$$

بنابراین تابع نرخ خطر توزیع بتا وایبول هندسی به صورت $h(x; \alpha, \beta, b, \theta) = \frac{\alpha \beta^\alpha \theta x^{\alpha-1}}{1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}}$ به دست می‌آید که با توجه به خاصیت پایایی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و به کمک $\hat{\Theta}$ ، $\hat{h}(x, \hat{\Theta})$ به دست آورده می‌شود.

۲-۲- بتا رایلی تعمیم یافته هندسی

با توجه به روش تولید توزیع سری‌های توانی معرفی شده توسط [۹]، پس از تولید توزیع رایلی تعمیم یافته هندسی، با انتخاب آن به جای G در خانواده توزیع‌های بتا- G ، توزیع بتا ایلی تعمیم یافته هندسی^۱ با تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی به ترتیب به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$f(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \frac{\alpha b (1-\theta)^b \beta^\alpha x e^{-(\beta x)^\alpha} (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^{\alpha-1} \left[1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha \right]^{b-1}}{\left\{ 1 - \theta \left[1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha \right] \right\}^{b+1}} \quad (۳)$$

$$F(x; \alpha, \beta, \theta, b) = 1 - \frac{\left\{ (1-\theta) \left[1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha \right] \right\}^b}{\left\{ 1 - \theta \left[1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha \right] \right\}^b} \quad (۴)$$

بطوریکه $\alpha, \beta, b > 0$ ، $x > 0$ و $0 < \theta < 1$ می‌باشد.

بر اساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع با تابع چگالی احتمال (۳)، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β ، θ و b به کمک مجموعه معادلات زیر به دست آورده می‌شوند.

$$\alpha - n \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{A_i (b + \alpha \theta B_i - 1)}{B_i - \theta B_i^\alpha} - \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}) \right\}^{-1} = 0$$

$$n - \beta^\alpha \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^\alpha + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}} + \sum_{i=1}^n \frac{C_i (\alpha \theta B_i - 1)}{B_i - \theta B_i^\alpha} \right\}^{-1} = 0$$

$$\hat{b} = n \left[- \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{(1-\theta) B_i}{1 - \theta B_i^\alpha} \right) \right]^{-1}$$

$$\theta + nb \left[(b+1) \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{1 - \theta B_i^\alpha} \right]^{-1} - 1 = 0$$

و $B_i = 1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha$ ، $A_i = (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}) \log(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})$ که $C_i = x_i^\alpha e^{-(\beta x_i)^\alpha} (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^{\alpha-1}$ به دست نمی‌آیند و در این مقاله به روش تکراری نیوتن-رافسون و با استفاده از نرم‌افزار R به دست آورده می‌شوند. همچنین با استفاده از روابط (۳) و (۴) تابع نرخ خطر توزیع بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$h(x; b, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha b (1-\theta)^b \beta^\alpha x e^{-(\beta x)^\alpha} \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^{\alpha-1} \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]^{b-1}}{\left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}^b - \left\{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}^b} \times \left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}^{-1}$$

که به کمک برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β ، θ و b ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی تابع نرخ خطر به دست آورده می‌شود.

۳- دو توزیع از خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- G

۳-۱- توزیع زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی

با انتخاب توزیع وایبول هندسی به جای G در خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- G ، توزیع زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی^۱ با تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی به ترتیب زیر به دست می‌آید.

$$f(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \frac{\alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} (1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha}}{\Gamma(b) \left(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha} \left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha}}{\left(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha} \right] \right\}^{b-1}$$

$$F(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \frac{\Gamma\left(b, -\log \left[\frac{(1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha}}{\left(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha} \right]\right)}{\Gamma(b)}$$

که در آن $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ و $0 < \theta < 1$ می‌باشد. براساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای α ، β ، θ و b ، به کمک مجموعه معادلات زیر به دست آورده می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{(b-1)(\beta x_i)^\alpha \log \beta x_i}{(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}) \log \left[\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} \right]} + \log \beta x_i - \frac{\tau \theta (\beta x_i)^\alpha \log \beta x_i}{(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha})} \right] = 0 \\ & n + \beta^\alpha \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{(b-1)x_i^\alpha}{(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}) \log \left[\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} \right]} - \frac{\tau \theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha})} \right] \right\} = 0 \\ & n + (b-1) \sum_{i=1}^n \frac{1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}) \log \left[\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} \right]} + \tau (1-\theta) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} = 0 \\ & \sum_{i=1}^n \log \left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}} \right] \right\} + \psi(b) = 0 \end{aligned}$$

که $\psi(x) = d(\log \Gamma(x))/dx$ می‌باشد. این برآوردها به صورت یک فرم بسته به دست نمی‌آیند و در این مقاله به روش تکراری نیوتن-رافسون و با استفاده از نرم افزار R به دست آورده می‌شوند. تابع نرخ خطر این توزیع نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$h(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \frac{\alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} (1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha} \left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha}}{(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})} \right] \right\}^{b-1}}{\left\{ \Gamma(b) - \Gamma \left(b, -\log \left[\frac{(1-\theta) e^{-(\beta x)^\alpha}}{(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})} \right] \right) \right\} (1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^\tau}$$

۳-۲- توزیع زگرافوس-بالاکریشنان-رایلی تعمیم‌یافته هندسی

با انتخاب توزیع رایلی تعمیم‌یافته هندسی به جای G در خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان- G ، توزیع زگرافوس-بالاکریشنان-رایلی تعمیم‌یافته هندسی^۱ با تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی به ترتیب به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$f(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \frac{\alpha(1-\theta)\beta^\alpha x e^{-(\beta x)^\alpha} \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(b) \left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}^\alpha} \times \left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right\}^{b-1}$$

$$F(x; \alpha, \beta, \theta, b) = (\Gamma(b))^{-1} \Gamma \left(b, -\log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right)$$

که $\alpha, \beta, b > 0$ ، $x > 0$ و $0 < \theta < 1$ می‌باشد؛ بنابراین تابع نرخ خطر برای این توزیع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$h(x; \alpha, \beta, \theta, b) = \alpha(1-\theta)\beta^\alpha x e^{-(\beta x)^\alpha} \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

$$\times \frac{\left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right\}^{b-1}}{\left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}^\alpha}$$

$$\times \left[\Gamma(b) - \Gamma \left(b, -\log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right) \right]^{-1}$$

بر اساس نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n از توزیع زگرافوس-بالاکریشن-رایلی تعمیم یافته هندسی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهایش به کمک مجموعه معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 & n - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha \log\left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]} - \alpha \sum_{i=1}^n \log\left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right) \\
 & - \alpha (b-1) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha} \log\left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)}{\left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right] \left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}} \right\| \\
 & \times \left(\log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right)^{-1} = 0 \\
 & n + \beta \left\| \left((\alpha-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}} - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha + (b-1) \right. \right. \\
 & \quad \times \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i^\alpha e^{-(\beta x_i)^\alpha} \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^{\alpha-1}}{\left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right] \left\{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]\right\}} \\
 & \quad \left. \left. \times \log \left[\frac{(1-\theta) \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]}{1 - \theta \left[1 - \left(1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha}\right)^\alpha\right]} \right] \right] \right\| = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n}{1-\theta} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha}{1 - \theta [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]} + \frac{(b-1)}{1-\theta} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha] - 1}{1 - \theta [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]} \right\} \\
& \times \left(\log \left[\frac{(1-\theta) [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]}{1 - \theta [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]} \right] \right)^{-1} \Bigg\} = 0 \\
& \sum_{i=1}^n \log \left\{ -\log \left[\frac{(1-\theta) [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]}{1 - \theta [1 - (1 - e^{-(\beta x_i)^\alpha})^\alpha]} \right] \right\} - n\psi(b) = 0
\end{aligned}$$

که به صورت یک فرم بسته به دست نمی‌آیند و در این مقاله به روش تکراری نیوتن-رافسون و با استفاده از نرم افزار R به دست آورده می‌شوند

۴- تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی توزیع‌های بتا وایبول هندسی و بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی به ترتیب با توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- وایبول هندسی و زگرافوس-بالاکریشن-رایلی تعمیم‌یافته هندسی مقایسه می‌شود که مراحل شبیه‌سازی به صورت زیر می‌باشد.

۴-۱- شبیه‌سازی از توزیع وایبول هندسی

در مرحله اول از توزیع یکنواخت در فاصله (۰,۱) نمونه‌های تصادفی $n = 50, 100, 200, 500$

استخراج شده و سپس به کمک رابطه $X = \frac{1}{\beta} \left[-\log \left(\frac{1-U}{1-\theta U} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$ که U دارای توزیع

یکنواخت در فاصله (۰,۱) می‌باشد، نمونه‌های تصادفی $n = 50, 100, 200, 500$ از توزیع وایبول هندسی با پارامترهای $(\alpha, \beta, \theta) = (2, 3, 0.5)$ تولید می‌شود. در مرحله دوم با استفاده از نمونه‌های تولید شده در مرحله اول، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و با استفاده از خاصیت

پایایی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، تابع نرخ خطر توزیع‌های بتا وایبول هندسی و زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی به دست آورده می‌شود.

جدول (۱): میانگین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر توزیع بتا وایبول هندسی (BWG)

حجم نمونه	میانگین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها				میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	\hat{b}	
۵۰	۰/۰۳۹۲۵	۰/۸۲۲۹	۰/۶۰۹۶۵	۰/۱۰۹۸۵	۰/۰۳۲۱۶
۱۰۰	۰/۰۲۷۹۳	۶/۲۸۸۱	۰/۶۶۶۶۴	۰/۰۹۲۲۴	۰/۰۱۶۰۲
۲۰۰	۰/۰۲۱۲۲	۸/۲۶۰۱	۰/۷۰۶۷۳	۰/۰۷۹۷۶	۰/۰۰۸۷۸
۵۰۰	۰/۰۱۶۰۴	۱۲/۲۵۶	۰/۷۴۲۵۱	۰/۰۶۹۴۳	۰/۰۰۴۸۹

جدول (۲): میانگین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر توزیع زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی (ZBWG)

حجم نمونه	میانگین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها				میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	\hat{b}	
۵۰	۰/۰۶۵۳۲	۹/۰۰۲۷	۰/۸۸۷۶۵	۴/۸۰۸۷	۰/۰۴۷۱۰
۱۰۰	۰/۰۴۷۸۳	۱۲/۷۴۲	۰/۸۲۶۶۹	۴/۸۰۴۲	۰/۰۲۷۳۴
۲۰۰	۰/۰۳۸۲۴	۱۸/۰۲۳	۰/۷۸۶۵۴	۴/۸۰۴۷	۰/۰۱۷۷۳
۵۰۰	۰/۰۲۹۷۳	۲۸/۵۰۲	۰/۷۲۳۰۴	۴/۷۹۵۲	۰/۰۱۱۵۰

در مرحله سوم، مراحل اول و دوم ۲۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین برآورد پارامترها به‌عنوان برآورد ماکسیمم درستنمایی در نظر گرفته می‌شود. همچنین میانگین مربع خطای ۲۰۰۰ برآورد تابع نرخ خطر محاسبه شده و توزیعی انتخاب می‌شود که میانگین مربع خطای تابع نرخ خطر آن کمتر باشد. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده که نشان دهنده برتری توزیع بتا وایبول هندسی نسبت به توزیع زگرافوس-بالاکریشن-وایبول هندسی می‌باشد.

۴-۲- شبیه‌سازی از توزیع رایلی تعمیم‌یافته هندسی

در مرحله اول از توزیع یکنواخت در فاصله (۰,۱) نمونه‌های تصادفی $n = ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۵۰۰$ استخراج شده و سپس به کمک رابطه

$$X = \frac{1}{\beta} \left\{ -\log \left[1 - \left(\frac{(1-\theta)U}{1-\theta U} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

جدول (۳): میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر توزیع بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی (BGRG)

میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر	میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها				حجم نمونه
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	\hat{b}	
۰/۰۶۸۹۱	۵/۸۱۵۸	۰/۷۹۸۷۲	۰/۴۹۷۴۳	۱/۱۰۲۲۶	۵۰
۰/۰۴۲۵۳	۳/۹۱۳۷	۰/۷۹۰۳۴	۰/۴۹۸۲۹	۱/۰۱۰۷	۱۰۰
۰/۰۴۶۹۳	۳/۷۴۳۹	۰/۷۸۶۵۸	۰/۴۹۹۲۱	۱/۰۰۳۳	۲۰۰
۰/۰۳۰۰۹	۳/۶۵۸۳	۰/۷۷۹۸۵	۰/۴۹۹۶۷	۱/۰۰۲۴	۵۰۰

جدول (۴): میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر توزیع زگرافوس-بالاکریشن-رایلی تعمیم‌یافته هندسی (ZBGRG)

میانگین مربع خطای برآورد تابع نرخ خطر	میانگین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها				حجم نمونه
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	\hat{b}	
۲۱۶۶/۲۸	۱/۰۸۵۲	۴/۵۱۸۹	۰/۵۸۹۵۵	۱/۰۰۹۷	۵۰
۸۳۲/۳۴	۱/۰۷۸۲	۴/۳۳۹۷	۰/۵۵۶۷۲	۱/۰۰۱۶	۱۰۰
۷۲۳/۲۹	۱/۰۷۳۵	۴/۱۷۳۳	۰/۴۸۷۶۱	۱/۰۰۱۷	۲۰۰
۴۴۳/۱۶	۱/۰۷۱۱	۴/۱۲۹۵	۰/۴۳۲۳۴	۱/۰۰۰۲	۵۰۰

که U دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ می‌باشد، نمونه‌های تصادفی $n = 50, 100, 200, 500$ از توزیع رایلی تعمیم‌یافته هندسی با پارامترهای $(\alpha, \beta, \theta) = (2, 3, 0.5)$ تولید می‌شود. در مرحله دوم با استفاده از نمونه‌های تولیدشده در مرحله اول، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و با استفاده از خاصیت پایایی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، تابع نرخ خطر توزیع‌های بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی و زگرافوس-بالاکریشن-رایلی تعمیم‌یافته هندسی به دست آورده می‌شود. در مرحله سوم، مراحل اول و دوم ۲۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین برآورد پارامترها به‌عنوان برآورد ماکسیمم درست‌نمایی در نظر گرفته می‌شود. همچنین میانگین مربع خطای

۲۰۰۰ برآورد تابع نرخ خطر محاسبه شده و توزیعی انتخاب می‌شود که میانگین مربع خطای تابع نرخ خطر آن کمتر باشد. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۳ و ۴ آورده شده که نشان‌دهنده برتری توزیع بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی نسبت به توزیع زگرافوس-بالاکریشان-رایلی تعمیم‌یافته هندسی می‌باشد.

۴-۳- داده‌های واقعی

اولین مجموعه داده‌ها شامل ۶۳ مقدار اندازه‌گیری شده در یک آزمایشگاه فیزیک در شهر لندن درباره مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتیمتری می‌باشد. از این مجموعه داده‌ها توسط [۱۰] برای برازش توزیع بتا نمایی تعمیم‌یافته استفاده شد. جدول ۵ مقادیر برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه، معیار اطلاع آکائیک^۱، معیار اطلاع آکائیک سازگار^۲، معیار اطلاع بی‌زی^۳، معیار اطلاع هانان کوئیک^۴ و جدول ۶ مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش کرامر ون میسس^۵ (T_{CM})، واتسن^۶ (T_W)، کولموگوروف-اسمیرنوف^۷ (T_{K-S}) و لیائو-شیموکاوا^۸ (T_{L-S}) (برای اطلاعات بیشتر به [۱۱] رجوع شود) را که به صورت زیر تعریف می‌شوند برای این مجموعه داده‌ها نشان می‌دهد.

$$AIC = -2L(\hat{\Theta}) + 2k$$

$$CAIC = -2L(\hat{\Theta}) + \frac{2kn}{n-k-1}$$

$$BIC = -2L(\hat{\Theta}) + 2k \log(n)$$

$$HQIC = -2L(\hat{\Theta}) + 2k \log(\log(n))$$

$$T_{CM} = \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i, \hat{\Theta}) - \frac{i-1}{2n} \right]^2$$

-
- 1- Akaike Information Criterion (AIC)
 - 2- Consistent Akaike Information Criterion (CAIC)
 - 3- Bayesian Information Criterion (BIC)
 - 4- Hannan-Quinn Information Criterion (HQIC)
 - 5- Cramer vonMises (CM)
 - 6- Watson (W)
 - 7- Kolmogorov-Smirnov (K-S)
 - 8- Liao-Shimokawa (L-S)

$$T_W = T_{CM} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{F(x_i, \hat{\Theta})}{n} - \frac{1}{2} \right]^2$$

$$T_{K-S} = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - F(x_i, \hat{\Theta}), F(x_i, \hat{\Theta}) - \frac{i-1}{n} \right)$$

$$T_{L-S} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\max_i \left(\frac{i}{n} - F(x_i, \hat{\Theta}), F(x_i, \hat{\Theta}) - \frac{i-1}{n} \right)}{\sqrt{F(x_i, \hat{\Theta}) [1 - F(x_i, \hat{\Theta})]}}$$

جدول (۵): برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه و معیارهای اطلاع این توزیع‌ها برای اولین مجموعه از داده‌ها

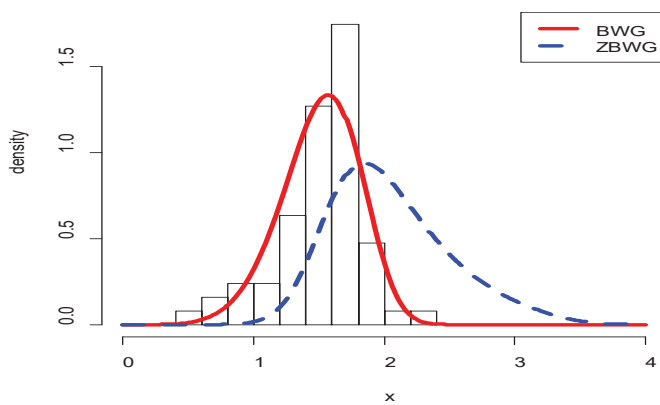
پارامترها و معیارها								توزیع‌ها
HQIC	BIC	CAIC	AIC	$\hat{\theta}$	\hat{b}	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	
۳۶/۱	۴۶/۹	۳۹/۱	۳۸/۴	۰/۹۹۵۹	۵۲/۲۸	۰/۱۲۲۱	۵/۸۵۸	BWG
۱۶۴/۷	۱۷۵/۶	۱۶۷/۷	۱۶۷	۰/۹۶۸۵	۱/۸۸۳	۰/۳۵۹۶	۶/۴۶۷	ZBWG
۳۰/۳	۴۱/۲	۳۲/۳	۳۲/۶	۰/۷۱۲۱	۱/۷۶۶	۱/۲۸۹	۱/۵۶۰	BGRG
۳۹/۶	۵۰/۵	۴۱/۹	۴۱/۲	۰/۹۹۹۹	۰/۴۲۶۷	۰/۱۶۱۱	۵/۱۴۵	ZBGRG

جدول (۶): مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش توزیع‌های مورد مقایسه برای اولین مجموعه داده‌ها

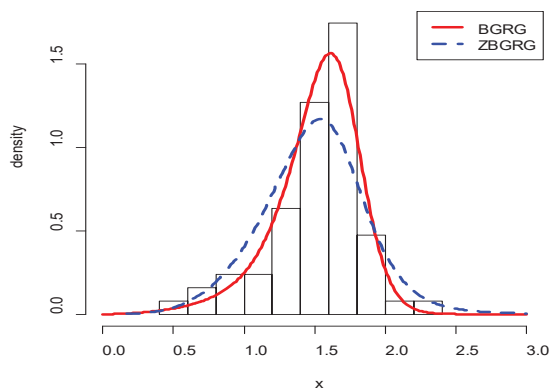
آماره‌ها				توزیع‌ها
L-S	K-S	W	CM	
۴/۱۹۶۷۲۴	۰/۱۵۱۰۰۱۰	۱۵/۴۵۰۵۱	۰/۲۱۱۷۱۳	BWG
۶/۴۴۷۹۲۵	۰/۲۴۱۹۳۶۰	۱۶/۲۳۴۴۹	۰/۸۹۵۴۳۲۷	ZBWG
۰/۲۷۵۷۳۵۲	۰/۱۰۸۱۳۱۶	۱۵/۳۴۴۴۳	۰/۰۹۲۷۱۹۶	BGRG
۸/۱۳۳۷۸۳	۰/۴۱۳۸۳۷۱	۲۰/۰۱۶۲۴	۴/۵۱۸۹۴۹	ZBGRG

که در آن $\hat{\Theta}$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی Θ (بردار پارامترها)، k تعداد پارامترها، n حجم نمونه، $L(\hat{\Theta})$ مقدار عددی لگاریتم تابع درست‌نمایی به ازای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و $F(\cdot)$ تابع توزیع می‌باشد. به کمک نتایج جدول‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G نسبت به توزیع‌های متناظرشان در خانواده توزیع‌های زگرافوس-

بالاکریشنان-G به عنوان مدل برازش شده به داده‌ها بهتر می‌باشد. نمودار برآورد تابع‌های چگالی احتمال توزیع‌های اشاره شده در بخش‌های دوم و سوم به ازای این مجموعه از داده‌ها در شکل ۱ نشان داده شده که بیانگر برتری بودن توزیع‌های خانواده توزیع‌های بتا-G نسبت به توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان-G می‌باشد.



شکل (۱-الف): نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G و زگرافوس-بالاکریشنان-G



شکل (۱-ب): نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های بتا رایلی تعمیم‌یافته هندسی و زگرافوس-بالاکریشنان-رایلی تعمیم‌یافته هندسی

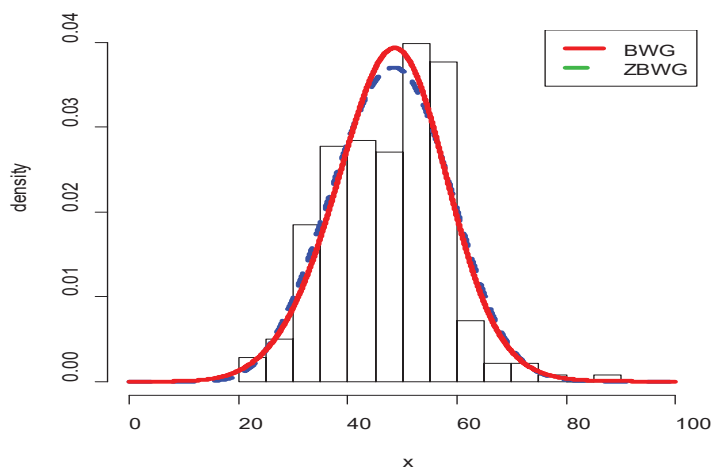
دومین مجموعه داده‌ها شامل ۲۸۱ مقدار درباره سن مرگومیر زنان بازنشسته ناتوان در سال ۲۰۰۴ است که توسط یک موسسه وابسته به سازمان تأمین اجتماعی در مکزیک تهیه شده است. از این مجموعه داده‌ها نیز توسط [۱۲] استفاده شد. جدول‌های ۷ و ۸ شامل تمام مقادیر معیارهای موجود در جدول‌های ۵ و ۶ نیز برای این مجموعه داده‌ها می‌باشد. به کمک نتایج جدول‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود که توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G نسبت به توزیع‌های متناظرشان در خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- G به‌عنوان مدل برازش شده به داده‌ها بهتر می‌باشند. نمودار برآورد تابع‌های چگالی احتمال توزیع‌های اشاره شده در بخش‌های دوم و سوم به ازای دومین مجموعه از داده‌ها در شکل ۲ نشان داده شده که مجدداً بیانگر برتری بودن توزیع‌های خانواده توزیع‌های بتا-G نسبت به توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- G می‌باشد. همچنین مقدار میانگین مربعات نرخ خطر توزیع‌های مورد مقایسه برای این دو مجموعه از داده‌ها به ازای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها محاسبه شده که در جدول ۹ آورده شده و نشان‌دهنده برتری توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G نسبت به توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن- G می‌باشد.

جدول (۷): برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه و معیارهای مقایسه این توزیع‌ها برای دومین مجموعه از داده‌ها

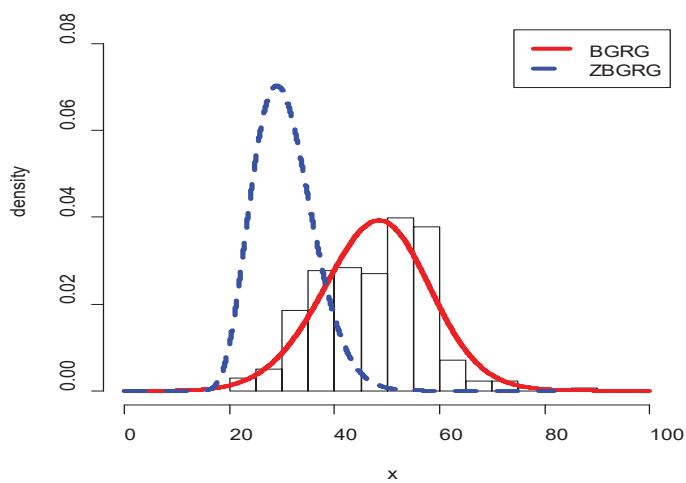
پارامترها و معیارها								توزیع‌ها
HQIC	BIC	CAIC	AIC	$\hat{\theta}$	\hat{b}	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	
۲۱۲۶/۸	۲۱۵۸/۱	۲۱۲۱/۱	۲۱۲۱	۰/۹۹۷۱	۴/۴۸۸	۰/۰۰۵۶	۵/۸۸۲	BWG
۲۱۳۵	۲۱۶۶/۳	۲۱۲۹/۳	۲۱۲۹/۲	۰/۷۴۹۸	۴/۷۵۲	۰/۰۳۰۶	۲/۹۱۹	ZBWG
۲۱۵۴/۶	۲۱۸۵/۹	۲۱۵۶/۹	۲۱۴۸/۸	۰/۹۹۲۱	۵/۴۵۵	۰/۰۰۷۰	۳/۰۶۱	BGRG
۳۴۰۶/۶	۳۴۳۷/۷	۳۴۱۶/۷	۳۴۰۰/۶	۰/۵۵۵۵	۴/۱۳۷	۰/۰۷۴۸	۷/۵۳۴	ZBGRG

جدول (۸): مقادیر آماره‌های آزمون نیکویی برازش توزیع‌های مورد مقایسه برای دومین مجموعه داده‌ها

آماره‌ها				توزیع‌ها
L-S	K-S	W	CM	
۰/۹۵۳۱۷۷۴	۰/۸۰۶۲۲۶۶	۷۰/۰۸۸۵۳	۰/۳۱۸۲۰۴۳	BWG
۸۶۴/۴۴۱۲	۰/۸۳۱۹۵۹۳	۱۴۶/۷۱۹۵	۷۷/۴۲۹۲۲	ZBWG
۰/۱۳۷۵۷۲۶	۰/۷۷۷۶۹۰۱	۷۰/۰۲۹۷۲	۰/۲۸۰۴۱۰۹	BGRG
۳۰/۲۲۸۲۲	۰/۹۹۷۵۹۳۷	۱۶۰/۸۷۶۵	۹۱/۶۱۹۰۳	ZBGRG



شکل (۲-الف): نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G و زگرافوس-بالاکریشنان-G



شکل (۲-ب): نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G و زگرافوس-بالاکریشنان-G

جدول (۹): میانگین مربع خطای تابع نرخ خطر برای هر دو مجموعه داده‌ها

توزیع‌ها	میانگین مربع خطای تابع نرخ خطر	
	مجموعه داده‌های اول	مجموعه داده‌های دوم
BWG	۰/۰۰۲۵۳۶۰۶	۰/۰۰۰۰۳۹۲۹
ZBWG	۰/۰۰۳۵۷۲۵۱	۰/۰۰۰۰۱۰۸۸۹
BGRG	۰/۰۰۰۰۳۹۲۲۶	$۱/۱۲ \times ۱۰^{-۷۱}$
ZBGRG	۰/۰۱۰۲۹۷۹۶۰	$۱/۳۰ \times ۱۰^{-۱۲}$

۵- نتایج

در این مقاله با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه از داده‌ها، دو توزیع از خانواده توزیع‌های بتا-G با دو توزیع از خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشن-ان-G، به کمک آماره‌های آزمون نیکویی برازش و تابع نرخ خطر مقایسه شد و نشان داده شد که توزیع‌های متعلق به خانواده توزیع‌های بتا-G برای برازش به داده‌ها بهتر می‌باشد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله نهایت تشکر را از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله و ارائه پیشنهادات سازنده برای بهتر شدن مقاله را دارند.

مراجع

- [1] Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F. (2002). Beta normal distribution and its applications, *Communications in Statistics- Theory Methods*, **31**, 497-512.
- [2] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004). The beta Gumbel distribution, *Mathematical Problems in Engineering*, **10**, 323-332.
- [3] Lee, C. Famoye, F. and Olumolade, O. (2007). The Beta-Weibull distribution: Some properties and applications to censored data, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **6**, 173-186.
- [4] Barreto-Souza, W., Alessandro, H. S.S. and Cordeiro, G.M.M. (2010). The beta generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**(2), 159-172.

- [5] یعقوب زاده، شهرام؛ شادرخ، علی؛ یارمحمدی، مسعود (۱۳۹۴). چندجمله‌ای‌های استرلینگ و تعمیمی جدید از توزیع وایبول هندسی، علوم آماری، دوره ۹، شماره ۱، ۱۱۹-۱۴۱.
- [6] Zografos, K. and Balakrishnan, N. (2009). On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference, *Statistical Methodology*, **6**, 344–362.
- [7] Ramos, M.W.A., Cordeiro, G.M., Marinho, P.R.D., Dias, C.R. B. and Hamedani, G.G. (2013). The Zografos-Balakrishnan Log-Logistic Distribution: Properties and Applications, *Communications in Statistics–Theory Methods*, **12**(3), 225-244.
- [8] Barreto-Souza, W., de Morais, A.L. and Cordeiro, G.M. (2011). The Weibull-geometric distribution, *Journal of Statistical computation and Simulation*, **81**, 645–657.
- [9] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families, *Biometrika*, **84**, 641–652.
- [10] Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013). Exponentiated Weibull–Poisson distribution: Model properties and applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76–97.
- [11] Chen, G. and Balakrishnan, N. (1995). A general purpose approximate goodness-of-fit test, *Journal of Quality Technology*, **27**, 154–161.
- [12] Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A. and Cabrera, E. (2009). Mixture inverse Gaussian distributions and its transformations, *Moments and applications, Statistics*, **43**, 91–104.

**Comparing Two Subsets of the Family of Beta-G Distributions
with two Subsets of the Family of Distributions Zografos-
Balakrishnan- G by Using Monte Carlo Simulation**

Shahram Yaghoobzadeh Shahrestani, Ali Shadrokh

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, IRAN.

Abstract

In this paper two distributions from the family of beta-G distributions with two distributions corresponding to the family Zografos-Balakrishnan-G, where G is a distribution from the family distributions of power series, are introduced. Then both families are compared by Monte Carlo simulation using goodness of fit test and rate risk function and two sets of real data. The results show that the family of distributions of beta-G is more suitable model for distribution of a lifetime.

Keywords: The Beta-G of family distributions, The Zografos-Balakrishnan-G of family distributions, The hazard rate function, monte carlo simulation, Maximum likelihood estimation.

Mathematics Subject Classification: 62E15, 62F30.

