مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۶، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۵

تقارن جواب بهین برای دامنه‌ای متقارن

محسن زیوری رضاپور[۱] و مهدی جلالوند

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۵/۱۲

چکیده: در این مقاله یک مسئله بیشینه‌سازی وابسته به یک معادله *لاپلاسین* با شرط مرزی *دیریکله* را، روی دسته تجدید آرایش‌های یک تابع نامنفی، در نظر می‌گیریم. وقتی دامنه‌ی معادله متقارن باشد، تحت شرایط خاص، ثابت می‌کنیم که جواب بهین مسئله بیشینه‌سازی وابسته به آن نیز متقارن خواهد بود. همچنین نشان می‌دهیم که جواب بهین یکتاست.

واژه‌های کلیدی: معادله لاپلاسین، مسئله بیشینه‌سازی، جواب بهین، تجدید آرایش، تقارن، یکتایی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۵J ۲۰، ۴۹J۲۰

۱- مقدمه

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} -\Delta u + h(x)u &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{۱}$$

در اینجا Ω دامنه‌ای کران‌دار و هموار در $\mathbb{R}^N$، h یک تابع نامنفی در $L^{\infty}(\Omega)$ و f تابعی در $L^{2}(\Omega)$ است. فرض کنیم $u_{fh} \in H_0^1(\Omega)$ (که به f و h وابسته است) بیانگر جواب ضعیف مسئله (۱) باشد و $J(f,h)=\int_{\Omega} f\, u_{fh} dx$. در مقاله [۶] مسئله بهینه‌سازی

$$\max_{h\in R[h_0]} \max_{f\in R[f_0]} J(f,h), \tag{۲}$$

موردبررسی قرارگرفته است که در آن h_0 و f_0 همان ویژگی‌هایی که برای h و f در مسئله (۱) بیان کردیم را دارا بوده و $R[h_0]$ و $R[f_0]$ به ترتیب بیانگر دسته‌های تجدید آرایش‌های

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: mzivari@scu.ac.ir

توابع $h_\circ$ و $f_\circ$ می‌باشند. نویسنده اول در [۶] ثابت کرده است که زوج $(\hat{f},\hat{h})\in R[f_\circ]\times R[h_\circ]$ چنان وجود دارد که

$$J(\hat{f},\hat{h})=\max_{h\in R[h_\circ]}\max_{f\in R[f_\circ]} J(f,h).$$

مسئله مقدار مرزی (۱) در مدل‌های فیزیکی بسیاری ظاهر می‌شود، اما یکی از آن‌ها که ما در اینجا مختصری راجع به آن توضیح می‌دهیم عبارت است از خماندن یک غشاء کشسان. فرض کنید Ω یک ناحیه مسطح است که از یک غشاء کشسان که در مرزهای آن ثابت است تشکیل شده است. همچنین فرض کنید این غشاء غیر *ایزوتروپیک* است؛ یعنی، از مواد مختلف و با چگالی‌های متفاوتی ساخته‌شده است که این نقش تابع h را بیان می‌کند. حال نیروی عمودی f را بر Ω تحمیل می‌کنیم. جواب u_{fh} بیانگر جابجایی غشاء در نقاط مختلف Ω می‌باشد. سرانجام مسئله بهینه‌سازی (۲) به دنبال بهترین طرح برای غشاء (تابع $\hat{h}$) و نیروی عمودی بهین روی آن (تابع $\hat{f}$) است که کمیت J را بیشینه کنند.

در این مقاله ثابت می‌کنیم که اگر $\Omega=B$ یک گوی به مرکز مبدأ مختصات و $h\in L^\infty(B)$ و $f_\circ\in L^۲(B)$ توابعی نامنفی باشند که $h=h_*$ و برای هر $c\geq ۰$ داشته باشیم

$$\left|\{x\in B: f_\circ(x)=ch(x)\}\right|=\circ,$$

آنگاه

$$J(f_\circ^*,h)=\max_{f\in R[f_\circ]} J(f,h),$$

که در اینجا h_* بیانگر تجدید آرایش متقارن صعودی h و $f_\circ^*$ بیانگر تجدید آرایش متقارن نزولی $f_\circ$ است (تعاریف دقیق آن‌ها در بخش بعد آمده است). همچنین اگر $E\subseteq\mathbb{R}^N$ آنگاه $|E|$ بیانگر اندازه *لبگ* N - بعدی E می‌باشد؛ بنابراین ما نشان خواهیم داد در صورتی‌که دامنه، B، متقارن باشد، آنگاه جواب بهین، $f_\circ^*$، متقارن و یکتاست.

۲- تعاریف و قضایای کمکی

در این بخش به بیان تعاریف و نتایج موردنیاز در بخش بعد اشاره می‌کنیم.

فرض کنیم Ω یک دامنه هموار و کران‌دار در $\mathbb{R}^N$ باشد. فرض کنیم $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ دو تابع اندازه‌پذیر باشند. گوییم f و g تجدید آرایش یکدیگرند هرگاه برای هر c حقیقی داشته باشیم

$$\left|\{x\in\Omega: f(x)\geq c\}\right|=\left|\{x\in\Omega: g(x)\geq c\}\right|.$$

اگر برای $1 \le p \le \infty$، $f \in L^p(\Omega)$ و g یک تجدید آرایش f باشد آنگاه $g \in L^p(\Omega)$ و $\|f\|_p = \|g\|_p$ که در آن $\|.\|_p$ بیانگر نرم استاندارد فضای $L^p(\Omega)$ است. در اینجا دسته تمام توابعی که تجدید آرایش تابع f می‌باشند را با $R[f]$ نشان می‌دهیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد تجدید آرایش توابع می‌توانید به [۳،۴ و ۵] مراجعه کنید.

تابع $u_{fh} \in H_0^1(\Omega)$ را یک جواب ضعیف مسئله مقدار مرزی (۱) گوییم هرگاه

$$\int_\Omega \nabla u_{fh}.\nabla v\,dx + \int_\Omega h u_{fh} v\,dx = \int_\Omega f v\,dx\,,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

وجود و یکتایی مسئله (۱) در مرجع [۱] بررسی شده است. توجه کنید که $u_{fh} \in H^2(\Omega)$ و در (۱) به معنای تقریباً همه‌جا صادق است.

می‌دانیم که u_{fh}، جواب یکتای مسئله (۱)، در مسئله تغییراتی زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned} J(f,h) = \int_\Omega f\, u_{fh}\,dx &= \int_\Omega |\nabla u_{fh}|^2 dx + \int_\Omega h u_{fh}^2 dx \\ &= \max_{w \in H_0^1(\Omega)} \Lambda(w,f,h), \end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن

$$\Lambda(w,f,h) := 2\int_\Omega f\,w\,dx - \int_\Omega h w^2 dx - \int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\,.$$

از این پس فرض می‌کنیم $\Omega = B$ یک گوی باز به مرکز مبدأ مختصات باشد. فرض کنیم $f: B \to \mathbb{R}$ تابعی نامنفی و اندازه‌پذیر باشد. تجدید آرایش متقارن نزولی f را با f^* نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^*(x) = \sup\{\alpha > 0 : \mu_f(\alpha) \ge |x|^N\, \omega_N\},$$

که در آن

$$\mu_f(\alpha) = |\{x \in B : f(x) \ge \alpha\}|,$$

و ω_N بیانگر حجم گوی واحد در $\mathbb{R}^N$ است. توجه کنید f^* به‌صورت شعاعی متقارن و نزولی است، بدین معنی که هرگاه $|x| = |y|$ آنگاه $f^*(x) = f^*(y)$ و هرگاه $|x| \le |y|$ آنگاه $f^*(x) \ge f^*(y)$. همچنین تجدید آرایش متقارن صعودی f را با f_* نشان داده که به‌صورت $f_* := -(-f)^*$ تعریف می‌شود. f_* به‌صورت شعاعی متقارن و صعودی است. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [۵] مراجعه کنید.

حال در ادامه دو لم مهم و موردنیاز برای اثبات نتایج اصلی را بیان می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنید f و g توابعی در $L^2(B)$ باشند. در این صورت

$$\int_B f^*(x) g_*(x)\,dx \le \int_B f(x) g(x)\,dx \le \int_B f^*(x) g^*(x)\,dx\,. \tag{۵}$$

لم ۲. اگر u تابعی نامنفی در $H_{\circ}^{1}(B)$ باشد، آنگاه $u^{*} \in H_{\circ}^{1}(B)$ و

$$\int_{B} |\nabla u|^{2} dx \geq \int_{B} |\nabla u^{*}|^{2} dx. \tag{۶}$$

بعلاوه، اگر در نامساوی (۶) تساوی برقرار باشد و

$$\left|\{x \in B : \nabla u^{*} = 0\}\right| = 0,$$

آنگاه تقریباً همه‌جا روی B، $u(x) = u^{*}(x)$.

برای اثبات لم‌های ۱ و ۲ به [۲ و ۵] رجوع کنید.

۳- یکتایی و تقارن جواب بهین

در این بخش به بیان و اثبات نتایج اصلی در این مقاله می‌پردازیم.

قضیه ۱. فرض کنید $f_{\circ} \in L^{2}(B)$ و $h \in L^{\infty}(B)$ توابعی نامنفی باشند به‌طوری‌که $h = h_{*}$ و

$$\left|\{x \in B : f_{\circ}(x) = ch(x)\}\right| = 0, \quad \forall c \geq 0.$$

در این صورت

(i) برای هر $f \in R[f_{\circ}]$ داریم: $J(f,h) \leq J(f^{*},h)$.

(ii) اگر $J(f,h) = J(f^{*},h)$ آنگاه $f = f^{*}$ تقریباًهمه‌جا روی B.

اثبات: (i) فرض کنیم $f \in R[f_{\circ}]$ و u_{fh} بیانگر جواب یکتای مسئله (۱) وابسته به توابع f و h باشد. با توجه به روابط (۴)، (۵) و (۶) و فرض $h = h_{*}$ داریم

$$\begin{aligned}
J(f,h) &= \int_{B} f u_{fh} dx \\
&= 2\int_{B} f u_{fh} dx - \int_{B} h (u_{fh})^{2} dx - \int_{B} |\nabla u_{fh}|^{2} dx \\
&\leq 2\int_{B} f^{*} u_{fh}^{*} dx - \int_{B} h (u_{fh})^{2} dx - \int_{B} |\nabla u_{fh}^{*}|^{2} dx \\
&\leq 2\int_{B} f^{*} u_{fh}^{*} dx - \int_{B} h_{*} (u_{fh}^{*})^{2} dx - \int_{B} |\nabla u_{fh}^{*}|^{2} dx \\
&= \Lambda(u_{fh}^{*}, f^{*}, h) \\
&\leq \Lambda(u_{f^{*}h}, f^{*}, h) \\
&= J(f^{*}, h),
\end{aligned} \tag{۸}$$

که این اثبات بند (i) را تمام می‌کند.

(ii) فرض کنیم $J(f,h)=J(f^*,h)$؛ بنابراین تمام نامساوی‌ها در (۸) به تساوی تبدیل شده و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&۲\int_B f\, u_{fh}dx-\int_B h\,(u_{fh})^۲dx-\int_B\left|\nabla u_{fh}\right|^۲dx\\&=۲\int_B f^{\,*}u^*_{fh}dx-\int_B h\,(u_{fh})^۲dx-\int_B\left|\nabla u^*_{fh}\right|^۲dx.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$۲\Big(\int_B f\, u_{fh}dx-\int_B f^{\,*}u^*_{fh}dx\Big)=\int_B\left|\nabla u_{fh}\right|^۲dx-\int_B\left|\nabla u^*_{fh}\right|^۲dx.$$

با توجه به (۶) سمت راست تساوی فوق نامنفی و بنابر (۵) سمت چپ آن نامثبت است؛ بنابراین

$$\int_B\left|\nabla u_{fh}\right|^۲dx=\int_B\left|\nabla u^*_{fh}\right|^۲dx. \qquad (۹)$$

با توجه به $J(f,h)=J(f^*,h)$ و (۸) داریم $\Lambda(u^*_{fh},f^*,h)=\Lambda(u_{f^*h},f^*,h)$. لذا بنابر یکتایی جواب مسئله (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$u^*_{fh}=u_{f^*h}\quad \text{a.e. on } B. \qquad (۱۰)$$

ادعا: تساوی زیر برقرار است:

$$\left|\{x\in B:\nabla u_{f^*h}=\circ\}\right|=\circ.$$

اثبات ادعا: می‌دانیم

$$-\Delta u_{f^*h}+h(x)u_{f^*h}=f^{\,*}(x),\quad \text{in } B. \qquad (۱۱)$$

فرض کنیم $A=\{x\in B:\nabla u_{f^*h}=\circ\}$ و $|A|>\circ$. در این صورت $u_{f^*h}=c$ روی A. لذا با توجه به (۱۱) روی مجموعه A خواهیم داشت

$$f^{\,*}(x)=c\,h(x),\ x\in A,$$

که این با فرض قضیه در تناقض است؛ بنابراین فرض خلف باطل است و $|A|=\circ$. لذا با توجه به لم ۲، روابط (۸)، (۹)، (۱۰) و ادعای فوق داریم

$$u^*_{fh}=u_{f^*h}=u_{fh}\quad \text{a.e. on } B. \qquad (۱۲)$$

حال از روابط (۱) و (۱۲) نتیجه می‌گیریم که

$$-\Delta u_{fh} + hu_{fh} = f\,(x) \ \text{ in } \ B,$$
$$-\Delta u_{fh} + hu_{fh} = f^{\,*}(x) \text{ in } \ B.$$

بنابراین $f = f^{\,*}$ تقریباً همه‌جا روی B. □

قضیه ۲. فرض کنیم شرایط قضیه ۱ برقرار باشند. در این صورت $f_\circ^*$ جواب یکتای مسئله بهینه‌سازی زیر می‌باشد

$$\max_{f\,\in R[f_\circ]} J(f\,,h). \tag{۱۳}$$

اثبات. فرض کنیم $\hat{f} \in R[f_\circ]$ جواب مسئله بیشینه‌سازی (۱۳) باشد. با توجه به بند (i) قضیه ۱ برای هر $f \in R[f_\circ]$ خواهیم داشت

$$J(f\,,h) \le J(\hat{f},h) \le J(\hat{f}^{\,*},h) \le J(\hat{f},h).$$

بنابراین $J(\hat{f},h) = J(\hat{f}^{\,*},h)$ و لذا بناتر قضیه ۱ بند (ii) نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{f} = \hat{f}^{\,*} = f_\circ^* \quad \text{a.e. on } B.$$

بنابراین $f_\circ^*$ جواب یکتای مسئله (۱۳) می‌باشد. □

تذکر: توجه کنید که در یک دسته تجدید آرایش، تجدید آرایش متقارن نزولی، صرف‌نظر از مجموعه‌های با اندازه لبگ صفر، یکتاست.

نکته: با توجه به قضیه ۴٫۱ از [۶]، تابع صعودی φ چنان وجود دارد که

$$f_\circ^*(x) = \varphi(u_{f_\circ^* h}(x)), \quad x \in B.$$

بنابراین با افزایش (کاهش) مقادیر $u_{f_\circ^* h}$ روی B، مقادیر $f_\circ^*$ نیز روی B افزایش (کاهش) می‌یابد. در نتیجه $f_\circ^*$ کمترین مقادیر خود را روی ∂B اختیار می‌کند.

نتیجه: فرض کنیم شرایط قضیه ۱ برقرار باشند و $f_\circ(x) = \chi_E(x)$ که $E \subset B$ و $|E| = \gamma \in (\circ, |B|)$. در این صورت جواب یکتای مسئله‌ی $\max_{f\,\in R[f_\circ]} J(f\,,h)$ عبارت است از $f_\circ^*(x) = \chi_{E^*}(x)$ که در آن E^* یک گوی هم‌مرکز با مبدأ مختصات و با اندازه γ می‌باشد.

مراجع

[1] Badiale, M. and Serra, E. (2011). *Semilinear elliptic equations for beginners, Existence results via the variational approach*, Universitext, Springer, London, ISBN: 978-0-85729-226-1.

[2] Brothers, J.E. and Ziemer, W.P. (1988). Minimal rearrangements of Sobolev functions, *Reine Angew. Math.,* **384,** 153-179.

[3] Burton, G.R. (1987). Rearrangements of Functions, Maximization of Convex Functionals, and Vortex Rings, *Math. Ann*., **276**, 225-253.

[4] Burton, G.R. (1989). Variational problems on classes of rearrangements and multiple configurations for steady vortices, *Ann. Inst. Henri Poincare*, **6**, 295-319.

[5] Kawohl, B. (1985). *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE,* Lectures Notes in Mathematics, **1150**, Berlin.

[6] Zivari-Rezapour, M. (2013). Maximax rearrangement optimization related to a homogeneous Dirichlet problem, *Arab. J. Math*. **2**, 427-433.

Symmetry of Optimal Solution When Domain is Symmetric

Mohsen Zivari-Rezapour and Mehdi Jalalvand

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this paper, we consider a maximization problem related to a Laplacian equation with Dirichlet boundary conditions, where the admissible set is a rearrangement class of a non-negative function. When the domain of the equation is symmetric, under some suitable assumptions, we prove that the optimal solution of the maximization problem is symmetric and unique.

Keywords: Laplacian equation, Maximization problem, Optimal solution, Rearrangement, Symmetry, Uniqueness.

Mathematics Subject Classification (2010): 35J20, 49J20