

حل عددی برخی مسائل مستقیم و معکوس هدایت گرمایی دوبعدی به کمک روش جواب بنیادی

جواد دمیرچی^۱، علی جانمحمدی، مسعود حسن پور، رضا معمار باشی

گروه ریاضی، دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۳

چکیده: در این مقاله یک روش عددی برپایه روش جواب بنیادی برای حل برخی مسائل مستقیم و معکوس هدایت گرمایی دوبعدی به کار گرفته می‌شود. براساس جواب بنیادی معادله گرما و خواص نظری جواب‌های بنیادی شامل استقلال خطی و چگال بودن، با جایگذاری مناسب نقاط منبعی، روش جواب بنیادی برای حل برخی مسائل هدایت گرمایی دوبعدی معرفی می‌شود. سیستم خطی به‌دست‌آمده از روش فوق برای مسائل مستقیم و معکوس، یک سیستم خطی بد حالت بوده و لذا از یک روند منظم‌سازی به نام منظم‌سازی تیخونوف با معیار منحنی ال برای یافتن پارامتر منظم‌ساز، برای به دست آوردن یک جواب عددی پایدار استفاده می‌شود. نتایج عددی نشان دهنده کارایی و دقت روش مورد نظر می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: مسائل هدایت گرمایی دوبعدی، مسائل مستقیم و معکوس، روش جواب بنیادی، منظم‌سازی تیخونوف.

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۶۵M۸۰، ۳۵R۳۰

۱- مقدمه

روش‌های حل مسائل معکوس در دهه‌های اخیر به سبب کاربردهای این مسائل در علوم پایه، مهندسی، فیزیک،... از رشد قابل توجهی بهره‌مند شده است. یک رده خاص از این مسائل به نام مسائل معکوس سهموی از نوع مسائل انتقال گرما می‌باشند. در بررسی یک سیستم فیزیکی وابسته به یک مجموعه از پارامترها شامل یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی، همراه با شرایط اولیه و مرزی معلوم، اگر همه پارامترهای سیستم به‌طور کامل معلوم باشند، آنگاه برای ورودی داده‌شده به سیستم خروجی حاصل قابل پیش‌بینی است، اما در برخی موارد برخی پارامترهای

سیستم به سبب عدم دسترسی مجهول و به دلیل اینکه در اکثر کاربردهای صنعتی و فیزیکی، معلوم بودن این پارامترها (از جمله شار گرمایی سطح، ضریب نفوذ، ...) به سبب راندمان بهینه سیستم مهم است بنابراین سعی می‌شود با مشاهده خروجی قابل دسترس که معمولاً از طریق اندازه‌گیری به دست آورده می‌شوند، این پارامترهای مجهول تعیین شوند. تعیین این پارامترها به‌عنوان مسائل معکوس هدایت گرمائی نامیده می‌شوند که در مقابل مسائل مستقیم هدایت گرمائی می‌باشند که تنها شامل تعیین توزیع دما می‌باشد. امروزه بررسی مسائل معکوس انتقال حرارت یک بخش لازم و ضروری در توسعه و پیشرفت علوم مهندسی و صنعتی از جمله طراحی تجهیزات، سیستم‌ها و ابزار حرارتی، مسائل انتقال حرارت در مکانیک، تصویربرداری پزشکی، مسائل هدایت گرمایی، مسائل نفوذ می‌باشد [۱-۴]. با توجه به ماهیت کاربردی و صنعتی بودن این مسائل روش‌های تحلیلی و عددی بسیاری برای حل مسائل معکوس هدایت گرمایی ارائه شده است [۵-۸]. این مسائل اغلب در زمره مسائل بد وضع شناخته می‌شوند [۲-۴]، لذا روش‌های منظم‌سازی در جهت رفع ناپایداری جواب مسائل فوق معرفی می‌شوند. در این مقاله روش جواب بنیادی به‌عنوان یکی از روش‌های بدون شبکه برای حل مسائل مستقیم و معکوس هدایت گرمایی معرفی می‌شود. این روش اولین بار توسط کوپراذره معرفی شد [۹]. ایده اساسی روش فوق مبتنی بر توزیع نقاط منبعی در خارج دامنه مسئله و نمایش جواب بر اساس ترکیب خطی جواب‌های بنیادی عملگر دیفرانسیل جزئی مسئله موردنظر با ضرایب مجهول است که این ضرایب با برقراری شرایط کرانه‌ای تعیین می‌شوند [۱۰]. در مقایسه با روش‌های عددی مبتنی بر شبکه‌بندی، سادگی این روش به‌خصوص برای حل مسائل با ابعاد بالا و دامنه‌های نامنظم است [۱۱ و ۱۲]. با توجه به اینکه به‌کارگیری روش جواب بنیادی در حل مسائل معکوس هدایت گرمایی منجر به ایجاد دستگاه معادلات خطی بدحالت می‌شود، بنابراین از روش منظم‌سازی تیخونوف همراه با معیار منحنی ال برای انتخاب پارامتر منظم‌ساز برای به دست آوردن یک جواب پایدار این سیستم استفاده می‌شود [۲، ۱۳ و ۱۴]. ساختار این مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم روش جواب بنیادی برای حل مسائل هدایت گرمایی و جواب بنیادی معادله گرما در حالت کلی معرفی شده و برخی خواص جواب‌های بنیادی از جمله استقلال خطی و چگال بودن بررسی می‌شود. در بخش سوم روش منظم‌سازی تیخونوف برای حل سیستم خطی بد وضع تولیدشده با روش فوق معرفی می‌شود. در بخش چهارم مسائل هدایت گرمایی مستقیم و معکوس در حالت کلی معرفی می‌شوند و دو رده از مسائل هدایت گرمایی از جمله مسائل در حالت دوبعدی و مسائل پسر و موردبررسی قرار می‌گیرند. در بخش نتایج عددی روش جواب بنیادی برای حل دو مسئله هدایت گرمایی مستقیم و معکوس در فضای دوبعدی با دامنه‌های مختلف و همچنین یک مسئله پسر و گرمای دوبعدی بکار گرفته می‌شود.

۲- روش جواب بنیادی

عناصر متناهی، عناصر کرانه‌ای و تفاضلات متناهی روش‌های متداول برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند. در سال‌های اخیر، روش عددی جدیدی بنام روش جواب بنیادی ارائه شده است و هنگامی که جواب بنیادی حاکم بر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معلوم باشد، بکار برده می‌شود. در این روش نیازی به شبکه‌بندی دامنه مورد بحث نیست. می‌توان گفت برای معادلات با مشتقات جزئی خطی با ضرایب ثابت، جواب بنیادی وجود دارد [۱۵]. ایده‌ی اصلی روش جواب بنیادی تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی برحسب یک سری جواب‌های پایه‌ای معادله‌ی حاکم است. مسئله‌ی خوش وضع زیر را در نظر بگیرید:

$$L(u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$B(u(x)) = g(x), \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

به طوری که L یک اپراتور خطی مرتبه دوم و B یک اپراتور کران‌دار است. Ω دامنه‌ی باز همبند با کران $\partial\Omega$ و g یک تابع معلوم است. تقریب جواب با استفاده از روش جواب بنیادی عبارت است از:

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j F(x, y_j), \quad (3)$$

به طوری که y_j ها، N نقطه‌ی منبعی متمایز بیرون $\bar{\Omega}$ ، $F(x, y)$ یک جواب بنیادی برای عملگر دیفرانسیل جزئی خطی با ضرایب ثابت L است به طوری که: $L(F(x, y)) = \delta(x - y)$ که y یک نقطه منبعی در خارج از دامنه و δ تابع دلتای دیراک است. در حالت کلی جواب بنیادی معادله گرمایی $u_t(X, t) - \alpha \Delta u(X, t) = 0$ در فضای n بعدی به صورت زیر ارائه شده است [۱۶ و ۲]:

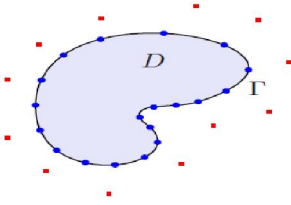
$$F(X, t) = \frac{H(t)}{(\sqrt{4\pi\alpha t})^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|X\|^2}{4\alpha t}},$$

$\|X\|$ نرم در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n و $H(t)$ تابع هوی‌ساید است.

با جایگذاری رابطه‌ی (۳) در شرط کرانه‌ای (۲) و هم‌محلی در M نقطه روی $\Gamma = \partial\Omega$ ، $\{x_i\}_{i=1}^M$ داریم:

$$B(u_N(x_k)) \approx \sum_{j=1}^N c_j F(x_k, y_j) = g(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

برای یک نمایش از یک جایگاه نقاط هم‌محلی و منبعی به‌عنوان نمونه شکل (۱) را ببیند.



شکل (۱): نمایشی از جایگاه ممکن نقاط منبعی (■) و نقاط هم‌محلی (●).

سیستم معادلات تولیدشده با شرایط مرزی حاکم عبارت است از:

$$Ac = g, \quad (۴)$$

به‌طوری که A یک ماتریس $M \times N$ است که مقادیر جواب بنیادی در نقاط متناظر هم‌محلی و نقاط منبعی را شامل می‌شود و درایه‌های ماتریس به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A_{kj} = F(x_k, y_j), \quad k = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N. \quad (۵)$$

باید توجه کرد که موقعیت نقاط منبعی با آزمون و خطا به دست می‌آید.

۲-۱- خاصیت چگال بودن ترکیبات خطی برای جواب بنیادی

جواب بنیادی برای معادله گرمای n بعدی $(X, t) \in D_T$ ، $u_t(X, t) - \Delta u(X, t) = 0$ عبارت است از:

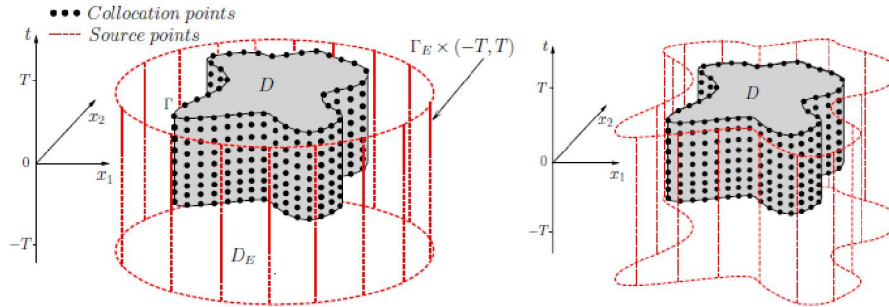
$$F(X, t; Y, \tau) = \frac{H(t - \tau)}{(\sqrt{4\pi(t - \tau)})^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|X - Y\|^2}{4(t - \tau)}}. \quad (۶)$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $F(X, t; Y, \tau)$ به‌عنوان یک تابع از X و t ، به ازای هر $(X, t) \neq (Y, \tau)$ در معادله گرما صدق می‌کند. فرض کنید D_E یک دامنه باز، شامل \bar{D} ، با سطح کران دار Γ_E باشد. فرض کنید $\{Y_j, \tau_m\}; j, m = 1, 2, \dots$ یک مجموعه شمارش‌پذیر که در همه‌جا مجموعه‌ایی چگال از نقاط در $\Gamma_E \times [-T, T]$ است. شکل (۲) نشان می‌دهد که چگونه نقاط منبعی می‌تواند در اطراف یک دامنه D (در فضای دوبعدی) قرار بگیرند.

سری نامتناهی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{\infty}(X, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(j)} F(X, t; Y_j, \tau_m). \quad (7)$$

توجه داشته باشید به علت تابع هوی باید در رابطه (۶)، برای $t \leq \bar{\tau} = \min_{m,j: c_m^{(j)} \neq 0} \tau_m$ همواره داریم: $u_{\infty}(X, t) = 0$. همچنین با توجه به خاصیت خطی بودن نیز در معادله گرما صدق می‌کند.



شکل (۲): روش جواب بنیادی برای مسئله هدایت گرمایی دوبعدی، نقاط منبعی در فضای دامنه \bar{D} در بازه زمانی $[-T, T]$ قرار گرفته‌اند.

در این قسمت خاصیت استقلال خطی و چگال بودن جواب بنیادی روی سطوح جانبی و پایه به‌وسیله قضایای زیر ارائه می‌شود که استفاده از روش جواب بنیادی جهت تقریب زدن را توجیه می‌کند.

قضیه ۱. مجموعه توابع $\{F(X, t; Y_j, \tau_m)\}_{j,m=1}^{\infty}$ تعریف‌شده روی $\Gamma \times (-T, T)$ دارای استقلال خطی و چگال در $L^{\infty}(\Gamma \times (-T, T))$ می‌باشند.

قضیه ۲. مجموعه توابع $\{F(X, t; Y_j, \tau_m)\}_{j,m=1}^{\infty}$ با $\tau_m < 0$ ، دارای استقلال خطی و چگال در $L^{\infty}(D)$ می‌باشند.

برهان. برای اثبات قضایای فوق به [۱۱ و ۱۰] رجوع کنید.

۳- منظم‌سازی

برای غلبه بر ناپایداری مسائل بد وضع، تکنیک منظم سازی یک استراتژی مهم است. ایده‌ی اساسی این روش، ساختن یک الگوریتم پایدار از نوسانات (اختلالات) به‌منظور تولید یک

جواب تقریبی که نسبت به نوسان داده‌های ورودی غیر حساس است. در مورد مفهوم منظم‌سازی و نظریه‌های مربوط به مراجع [۴ و ۱۳] رجوع کنید. همان‌طور که اشاره شد، به‌کارگیری روش جواب بنیادی اغلب یک سیستم خطی از معادلات به‌صورت رابطه (۴) را نتیجه می‌دهد که ماتریس ضرایب آن دارای عدد حالت بسیار بزرگ است. از آنجاکه بردار g از طریق مشاهده و اندازه‌گیری به دست می‌آید، در نتیجه شامل خطاهای اندازه‌گیری است و اگر برداری که شامل اختلال می‌شود را با g_e نشان می‌دهیم داریم:

$$g_e = g + e = Ac + e. \quad (۸)$$

یک جواب کلاسیک از رابطه (۴) معمولاً یک جواب بی معنی را نتیجه می‌دهد. با توجه به این نکته، برای ساختن یک تقریب قابل قبول و پایدار برای معادله (۴)، روش منظم‌سازی تیخونوف بکار گرفته می‌شود، که شامل جایگزینی سیستم معادله (۴) با سیستمی است که حساسیت کمتری نسبت به اختلالات نسبت به ورودی دستگاه دارد. این روش معادله (۴) را با مسئله مینیمم سازی زیر بر اساس مسئله کمترین مربعات جایگزین می‌کند:

$$\min \|Ac - g\|^2 + \lambda \|L_k c\|^2, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad (۹)$$

به‌طوری که $\lambda > 0$ پارامتر منظم‌ساز است. جمله باقیمانده $\|Ac - g\|^2$ در رابطه (۹) می‌تواند به‌عنوان یک شاخص درباره دقت جواب سیستم باشد. نرم $\|L_k c\|^2$ در رابطه (۹)، رفتار نوسانی زیاد جواب به علت اختلال را کنترل می‌کند. عملگرهای L_k به‌عنوان تقریب‌های مشتقات ایجاد شده‌اند و L_0 برابر با ماتریس همانی و برای $k = 1$ هموار مرتبه اول (C^1) و ...

$$L_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}.$$

برای اینکه مینیمم رابطه (۹) را مشخص نماییم، گرادیان رابطه (۹) را برابر صفر قرار می‌دهیم، در نتیجه، مینیمم کننده c_λ جواب سیستم زیر است:

$$(A^T A + \lambda L_k^T L_k) c_\lambda = A^T g. \quad (۱۰)$$

قضیه ۳. فرض کنید A ماتریسی $M \times N$ باشد، آنگاه سیستم خطی (۱۰) یک جواب منحصر به فرد برای $(\lambda > 0)$ دارد.

قضیه ۴. فرض کنید A ماتریسی $M \times N$ و $\lambda > 0$ ، آنگاه عنصر یکتای c_λ وجود دارد که جواب مسئله مینیمم‌سازی زیر می‌باشد.

$$\min \|Ac - g\|^2 + \lambda \|L_k c\|^2, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

برهان: برای اثبات قضایای فوق به [۱۳] رجوع نمایید.

تعیین یک مقدار مناسب برای پارامتر منظم‌سازی λ در جهت افزایش دقت حائز اهمیت می‌باشد و هنوز به صورت یک مسئله جدی تحت تحقیقات و مطالعات می‌باشد [۱۳ و ۱۴]. در این مقاله روش معیار منحنی ال برای تعیین پارامتر منظم‌سازی λ به کار گرفته می‌شود. یک منحنی به صورت زیر را که توسط هانسن و آلری معرفی شده است را منحنی ال می‌نامند [۱۴].

$$L = \left\{ \left(\text{Log}(\|L_k c_\lambda\|^2), \text{Log}(\|Ac_\lambda - g_e\|^2) \right), \lambda > 0 \right\}.$$

یک پارامتر منظم‌سازی مناسب چون λ^* متناظر با گوشه‌ی منحنی ال در نظر گرفته می‌شود.

۴- مسئله هدایت گرمایی n بعدی مستقیم و معکوس

فرض کنید $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ و $T > 0$ یک عدد حقیقی ثابت باشد. جسم رسانای D یک جسم به شکل n بعدی با دامنه بسته کران‌دار با سطح مرزی به قدر کافی هموار $\Gamma = \partial D$ می‌باشد. بستر جسم D عبارت است از: $\bar{D} = D \cup \Gamma$. همچنین با در نظر گرفتن $D_T = D \times (0, T]$ و $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T]$. با این فرض که Δ عملگر لاپلاسین است، مسئله هدایت گرمایی در دامنه D_T ، با شرایط مرزی دیریکله و شرط اولیه به صورت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X, t) - \Delta u(X, t) = 0, \quad (X, t) \in D_T, \quad (11)$$

$$u(X, t) = h(X, t), \quad (X, t) \in \Gamma_T, \quad (12)$$

$$u(X, 0) = u_0(X), \quad X \in D, \quad (13)$$

به طوری که $h(X, t)$ و $u_0(X)$ توابع به قدر کافی هموار و معلوم می‌باشند. برای تضمین وجود و یکتایی جواب برای مسئله (۱۱) - (۱۳) شرایط سازگاری زیر را اعمال می‌کنیم:

$$u_0(X) = h(X, 0), \quad \text{و} \quad \frac{\partial h}{\partial t}(X, 0) = \Delta u_0(X), \quad X \in \Gamma. \quad (14)$$

با این شرایط، قضیه زیر وجود و یکتایی جواب مسئله فوق را تضمین می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنید $u_0(X) \in C^2(\bar{D})$ و $h(X, t) \in C^1(\bar{\Gamma}_T)$ در شرایط رابطه (۱۴) صادق باشند، آنگاه جواب یکتا $u \in C^{1,1}(\bar{D}_T)$ برای مسئله هدایت گرمایی (۱۱)–(۱۳) وجود دارد که به‌طور پیوسته به داده‌های مسئله وابسته می‌باشد.

برهان : به [۱۶] رجوع کنید.

به‌ویژه قضیه ۵ بیانگر این می‌باشد که مسئله با معادلات (۱۱)–(۱۳) خوش وضع می‌باشد. مسئله تعیین تابع توزیع دما $u(X, t)$ با استفاده از شرایط اولیه و مرزی معلوم $u_0(X)$ و $h(X, t)$ یک مسئله مستقیم هدایت گرمایی نامیده می‌شود. با معلوم بودن تابع $u = u(X, t)$ می‌توان تابع‌های مختلفی از $u(X, t)$ را به صورت $M(u(X, t)) = g$ تعریف نمود که M عملگر دلخواهی خطی یا غیرخطی بر $u(X, t)$ می‌باشد. با توجه به تعریف مسئله مستقیم، استفاده از داده‌های $\{u_0, h\}$ و g ، تعیین شرایط اولیه و کرانه‌ای به‌عنوان یک مسئله معکوس هدایت گرمایی نامیده می‌شود. شرط $M(u(X, t)) = g$ به‌عنوان شرط اضافی مسئله معکوس نامیده می‌شود [۱۷، ۲].

۴-۱- روش جواب بنیادی برای حل مسائل هدایت گرمایی

۴-۱-۱- روش جواب بنیادی برای حل مسئله هدایت گرمایی دوبعدی

در این بخش روش جواب بنیادی برای یک دامنه دوبعدی بکار برده می‌شود و نقاط منبعی به‌صورت دلخواه جایگزین می‌شوند. یک تقریب برای جواب مسئله (۱۱)–(۱۳) به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_{M,N}(X, t) = \sum_{m=1}^{2M} \sum_{j=1}^N c_m^{(j)} F(X, t; Y_j, \tau_m), \quad (X, t) \in \bar{D}_T. \quad (۱۵)$$

دامنه دوبعدی دایره‌ای D با مرز Γ و شعاع $r_0 > 0$ به مرکز مبدأ مختصات را در نظر گرفته، و فرض می‌کنیم نقاط منبعی به‌صورت Y_j روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $r_0 + h > 0$ ، $(h > 0)$ قرار دارند. در ادامه مقادیر قابل قبول برای پارامتر h را انتخاب خواهیم کرد. نقاط زمانی $m = 1, \dots, 2M$ را در بازه $(-T, T)$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\tau_m = \frac{2(m-M)-1}{2M} T, \quad m = 1, \dots, 2M. \quad (۱۶)$$

با استفاده از مختصات قطبی، نقاط منبعی را به‌صورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$Y_j = (r_0 + h, \theta_j) = (r_0 + h, \frac{2\pi j}{N}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (17)$$

معادله (۱۵) در مختصات قطبی به صورت زیر قابل نمایش می باشد:

$$u_{M,N}(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^N c_m^{(j)} F(r, \theta, t; r_0 + h, \theta_j, \tau_m). \quad (18)$$

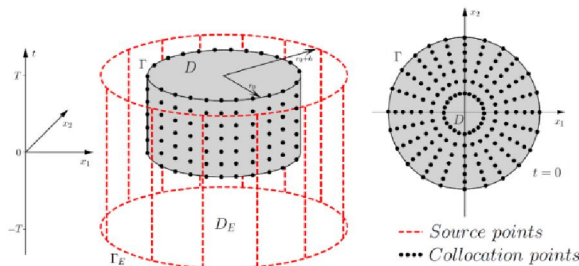
$2M \times N$ نقطه منبعی به طور کلی خارج از دامنه D و زمان مورد نظر مسئله قرار گرفته است. به منظور دسترسی به یک جواب یکتا، همان تعداد نقاط هم محلی را بر روی $\bar{\Gamma}_T \cup (D \times \{0\})$ ، انتخاب می کنیم. توجه داشته باشید که ضرورتی وجود ندارد تعداد نقاط هم محلی و نقاط منبعی یکسان باشد. برای انتخاب این نقاط به منظور سادگی در محاسبات فرض کنید:

$$(r_0, \theta_0) = (r_0, \frac{2\pi k}{N}), \quad k = 1, \dots, N \quad \text{و} \quad t_i = \frac{i}{M} T, \quad i = 0, 1, \dots, M$$

$(M+1) \times N$ نقطه هم محلی روی مرز قرار گرفته است. $(M-1) \times N$ نقطه باقیمانده، روی دامنه D به ازای $t=0$ قرار خواهند گرفت. $M-1$ دایره با شعاع

$r_l = (\frac{l}{M})^{\frac{1}{2}} r_0, \quad l = 1, \dots, M-1$ ، به طوری که ریشه دوم به منظور توسعه نقاط روی دامنه و جلوگیری از تجمع نقاط در مرکز معرفی شده است. N نقطه به فاصله های مساوی روی هر دایره قرار می گیرد:

$$(r_l, \theta_k) = (r_l, \frac{2\pi k}{N}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (19)$$



شکل (۳): موقعیت نقاط هم محلی و منبعی برای دامنه D به شکل دایره.

برای جزئیات بیشتر نمایش نموداری موقعیت نقاط مختلف هم‌محلی و منبعی شکل (۳) را ببینید. با اعمال شرایط اولیه و مرزی روابط (۱۲) و (۱۳)، ضرایب مجهول $c_m^{(j)}$ در (۱۸) تعیین می‌شوند. در مختصات قطبی معادلات:

$$u_{M,N}(r_o, \theta_k, t_i) = h(r_o, \theta_k, t_i), \quad (20)$$

$$u_{M,N}(r_1, \theta_k, \circ) = u_o(r_1, \theta_k, \circ), \quad (21)$$

به دست می‌آید، که $k = 1, \dots, N$ ، $i = 0, \dots, M$ ، $l = 1, \dots, M - 1$

سیستم معادلات (۲۰) و (۲۱) شامل $(M - 1) \times N + (M + 1) \times N = 2MN$ معادله و $2MN$ مجهول می‌باشد. این سیستم از معادلات به صورت ماتریسی $Ac = g$ نمایش داده می‌شود، به طوری که g بردار نمایش مقادیر توابع u_o و h در نقاط هم‌محلی متناظر می‌باشد. در اینجا لازم است ذکر کنیم اگرچه مسئله مستقیم (۱۱) - (۱۳) خوش وضع می‌باشد، اما ماتریس A به دست آمده از روش جواب بنیادی بدحالت می‌باشد. به منظور پایداری جواب به جای حل سیستم به دست آمده فوق از روش منظم‌سازی تیخونف استفاده کرده و سیستمی مشابه با سیستم (۱۰) با انتخاب $L_o = I$ حل می‌شود.

در حل یک مسئله معکوس، مشابه مسئله مستقیم مورد بحث، دستگاه معادلات خطی مشابه رابطه (۱۰) به دست می‌آید که تنها از شرط اضافی مسئله معکوس، مشابه شرایط اولیه و مرزی استفاده می‌شود.

۴-۱-۲- روش جواب بنیادی برای حل مسئله هدایت گرمایی پسر دو بعدی

با انتخاب دامنه مربعی $D_T = D \times (\circ, T]$ ، مرز Γ و D مرز خارجی با $d(\Gamma, \Gamma_E) > \circ$ و T زمان نهایی، مسئله هدایت گرمایی پسر دو بعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X, t) - \Delta u(X, t) = \circ, \quad (X, t) \in D_T, \quad (22)$$

$$u(X, t) = h(X, t), \quad (X, t) \in \Gamma_T, \quad (23)$$

$$u(X, T) = u_T(X), \quad X \in D, \quad (24)$$

به طوری که $h(X, t)$ و $u_T(X)$ توابع به قدر کافی هموار هستند. در این بخش خاصیت چگال بودن مجموعه جواب‌های بنیادی روی سطح پایه وقتی که $t = T$ ، برای توجیه استفاده از روش جواب بنیادی جهت تقریب توابع ارائه می‌شود.

قضیه ۶. مجموعه توابع $\{F(X, t; Y_j, \tau_m)\}_{j,m=1}^{\infty}$ با $\tau_m < T$ ، که $T \geq 0$ ، دارای استقلال خطی و مجموعه چگال در $L^2(D \times \{T\})$ می‌باشند.

برهان. به [۱۰] رجوع شود.

در حالت دوبعدی، بر اساس نتایج چگال بودن از قضایای (۱) و (۶)، یک تابع تقریب u_{N_1, N_2} با روش جواب بنیادی برای مسئله (۲۲) - (۲۴) به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(X, t) \approx u_{N_1, N_2}(X, t) = \sum_{n=1}^{2N_1} \sum_{j=1}^{4N_2} c_n^{(j)} F(X, t; Y_j, \tau_n), \quad (X, t) \in D_T. \quad (25)$$

نقاط هم‌محلی مربوط به زمان به صورت: $t_i = \frac{i}{M_1} T$ ، $i = 0, \dots, M_1 - 1$ در نظر گرفته می‌شود.

برای تعیین نقاط منبعی روی بازه $(-T, T)$ ، با توجه به $N_1 \geq M_1$ یا $N_1 < M_1$ دو حالت مختلف وجود دارد. برای سادگی فرض می‌کنیم به ازای عدد صحیح $k > 0$ داریم: $N_1 = kM_1$ یا $M_1 = kN_1$ ، بنابراین برای زمان $t > 0$ نقاط $(\tau_n)_{n=1, \dots, 2N_1}$ به جهت سهولت به صورت:

$$\tau_n = \begin{cases} -T + \frac{n}{kM_1} T - \frac{T}{2kM_1}, & n = 1, \dots, 2N_1, \quad N_1 = kM_1 \geq M_1, \\ -T + \frac{kn}{M_1} T - \frac{T}{2M_1}, & n = 1, \dots, 2N_1, \quad N_1 < M_1 = kN_1. \end{cases}$$

و روی مجموعه $D \times \{T\}$ نقاط: $l_0, l_1 = 0, \dots, K - 1$ ، $l_0, l_1 = 0, \dots, K - 1$ ، $X_T^{(l_0, l_1)} = (\frac{l_0}{K-1}, \frac{l_1}{K-1})$ و روی مرز خارجی، نقاط منبعی:

$$Y_j = \begin{cases} (-h + \frac{1+2h}{N_r} j, -h), & j = 0, \dots, N_r - 1, \\ (1+h, -h + \frac{1+2h}{N_r} (j - N_r)), & j = N_r, \dots, 2N_r - 1, \\ (h - \frac{1+2h}{N_r} (j - 2N_r), 1+h), & j = 2N_r, \dots, 3N_r - 1, \\ (-h, h - \frac{1+2h}{N_r} (j - 3N_r)), & j = 3N_r, \dots, 4N_r - 1, \end{cases}$$

انتخاب می‌شوند. موقعیت نقاط هم‌محلی روی مرزی به شکل مربع، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$X_m = \begin{cases} (\frac{m}{M_r}, 0), & m = 0, \dots, M_r - 1, \\ (1, \frac{m - M_r}{M_r}), & m = M_r, \dots, 2M_r - 1, \\ (1 - \frac{m - 2M_r}{M_r}, 1), & m = 2M_r, \dots, 3M_r - 1, \\ (0, 1 - \frac{m - 3M_r}{M_r}), & m = 3M_r, \dots, 4M_r - 1, \end{cases}$$

یک سیستم خطی از $M = K^r + 4M_r M_r$ معادله با $N = 4N_r N_r$ مجهولات $C_n^{(j)}$ به طوری که $j = 1, \dots, 4N_r$ و $n = 1, \dots, 2N_r$ می‌باشد، که بعد از به کارگیری شرایط مرزی دیریکله و نهایی به دست آمده است. نقاط هم‌محلی X_m و $X_r^{(l, l)}$ فوق را می‌توان در شرایط (۲۳) و (۲۴) جایگزین کرد. در سیستم به دست آمده مشابه با رابطه (۱۰)، روش منظم‌سازی تیخونف اعمال و سیستم حاصل با استفاده از L_0 حل می‌شود.

۵- نتایج عددی

به منظور سنجیدن دقت عددی روش جواب بنیادی، نتایج حاصل را با جواب دقیق قابل دسترس برای مثال‌های مختلف و متنوع مقایسه می‌کنیم. نتایج عددی برای مثال‌هایی با دامنه‌های مختلف که شامل دامنه به شکل مربع و دایره و همچنین جایگاه مختلف از نقاط منبعی ارائه خواهد شد.

مثال ۱. با در نظر گرفتن دامنه دایره‌ای و مرز آن به صورت $D = \{X : \|X\|^2 < 1\}$ ، $D_T = \{X : \|X\|^2 < 1, t \in (0, 1]\}$ و $\Gamma_T = \{(X, t) : \|X\|^2 = 1, t \in (0, 1]\}$

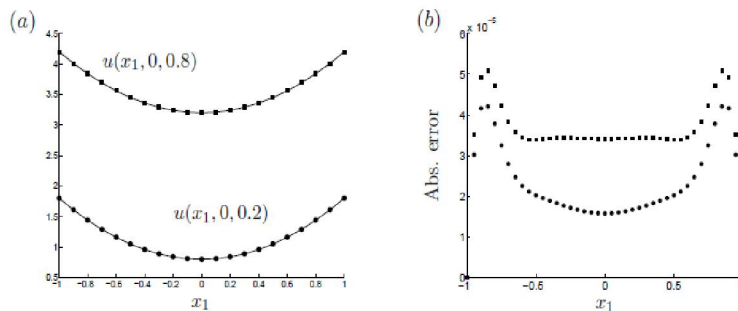
مسئله زیر به کمک روش جواب بنیادی که در بخش قبل شرح داده شد، مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X, t) - \Delta u(X, t) = 0, \quad (X, t) \in D_T, \quad (26)$$

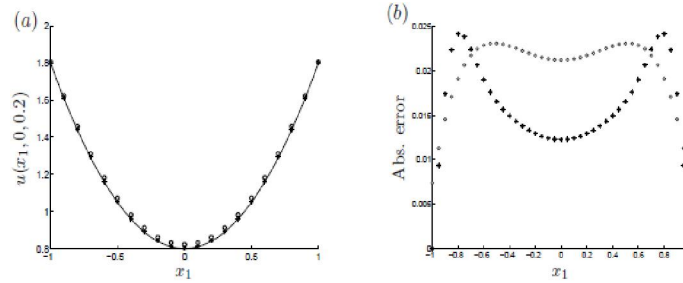
$$u(X, t) = \varphi t + 1, \quad (X, t) \in \Gamma, \quad (27)$$

$$u(X, 0) = \|X\|^2, \quad X \in D. \quad (28)$$

جواب دقیق مسئله (۲۶) - (۲۸) عبارت است از: $u(X, t) = \varphi t + \|X\|^2$. از: نقاط منبعی روی دایره‌ای به شعاع $1+h$ قرار دارند، به طوری که $h > 0$ به صورت مناسب انتخاب خواهد شد. مشاهده می‌شود که دقت جواب تقریبی وقتی $h > 4$ یا $h < 0.25$ کاهش می‌یابد. در شکل‌های (۴) و (۵)، نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق با روش جواب بنیادی به ازای $X = (x_1, 0)$ ، برای زمان‌های $t \in \{0.2, 0.8\}$ برای مقادیر h رسم شده است. با توجه به شکل (۵)، نتایج به دست آمده با $h = 4$ و $h = 0.5$ دارای دقت کمتری نسبت به مقادیری است که با انتخاب $h = 1$ محاسبه شده‌اند.



شکل (۴): (a) جواب دقیق (—) و مقادیر تقریبی برای تابع $u(x_1, 0, 0.2)$ (●) و تابع $u(x_1, 0, 0.8)$ (■) (b) نمودارهای خطای مطلق متناظر، با $h = 1$ و $\lambda = 10^{-4}$ برای مثال ۱.

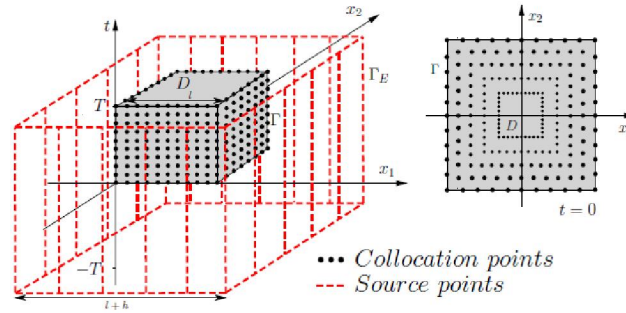


شکل (۵): (a) جواب دقیق (-) و مقادیر تقریبی برای تابع $u(x_1, 0, 0.2)$ (b) نمودار خطا مطلق متناظر با (a) ، (*) $h = 0.5$ و $h = 4$ ، برای مثال ۱.

جدول (۱): جواب دقیق و تقریبی $u(x_1, 0, 0.2)$ با $h = 0.5$ و $h = 4$ برای مثال ۱.

$u_{num}(x_1, 0, 0.2)$ $h = 4$	$u_{num}(x_1, 0, 0.2)$ $h = 0.5$	$u_{exact}(x_1, 0, 0.2)$	x_1
۰/۸۲۱۵	۰/۸۱۲۰	۰/۸۰۰۰	۰/۰
۰/۸۳۱۸	۰/۸۲۲۳	۰/۸۱۰۰	۰/۱
۰/۸۶۲۱	۰/۸۵۳۳	۰/۸۴۰۰	۰/۲
۰/۹۱۲۴	۰/۹۰۴۵	۰/۸۹۰۰	۰/۳
۰/۹۸۲۷	۰/۹۷۵۸	۰/۹۶۰۰	۰/۴
۱/۰۷۳۱	۱/۰۶۷۱	۱/۰۵۰۰	۰/۵
۱/۱۸۲۵	۱/۱۷۹۰	۱/۱۶۰۰	۰/۶
۱/۳۱۲۳	۱/۳۱۰۵	۱/۲۹۰۰	۰/۷
۱/۴۵۹۶	۱/۴۶۴۱	۱/۴۴۰۰	۰/۸
۱/۶۲۶۳	۱/۶۱۹۴	۱/۶۱۰۰	۰/۹
۱/۸۰۷۵	۱/۸۰۰۰	۱/۸۰۰۰	۱/۰

مثال ۲ (مسئله معکوس). در این مثال دامنه مربعی با اضلاعی به طول l در نظر گرفته می‌شود. نقاط منبعی علاوه بر دایره، روی مربع قرار گرفته‌اند، شکل (۶) را ببینید. اشکالی را که نقاط منبعی برای مشخص شدن روی آن قرار دارند، طوری تغییر می‌دهیم که برای جایگذاری نقاط منبعی نیازی به شکل Γ نباشد.



شکل (۶): روش جواب بنیادی در دو بعد برای دامنه‌ای به شکل مربع

مسئله زیر را با دامنه $D = (0,1) \times (0,1)$ و $D_T = D \times (0,3]$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X, t) - \Delta u(X, t) = 0, \quad (X, t) \in D_T, \quad (29)$$

$$u(x_1, 0, t) = u(x_1, 1, t) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi x_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad x_1 \in (0,1), t \in (0,3], \quad (30)$$

$$u(0, x_2, t) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi x_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad x_2 \in (0,1), t \in (0,3], \quad (31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi^2 t}{4}}, \quad x_2 \in (0,1), t \in (0,3], \quad (32)$$

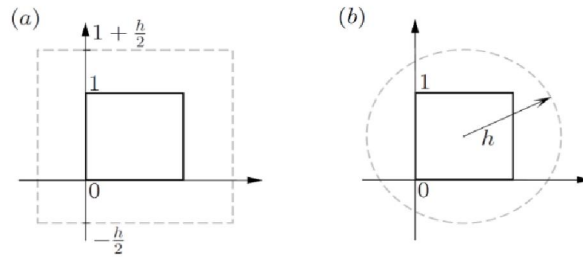
$$u(x_1, x_2, 0) = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi x_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (x_1, x_2) \in D. \quad (33)$$

این یک مسئله معکوس است که شرط مرزی در نقطه $x_1 = 1$ مجهول می‌باشد، که قصد داریم به کمک شرط اضافی مشخص شده در نقطه $x_1 = 0$ (رابطه ۳۲) مقدار مجهول $u(1, x_2, t)$ را تعیین نماییم. جواب دقیق مسئله (۲۹) - (۳۳) عبارت است از:

$$u(x_1, x_2, t) = \sqrt{2} e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \left[\cos\left(\frac{\pi x_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right], \quad (X, t) \in D_T. \quad (34)$$

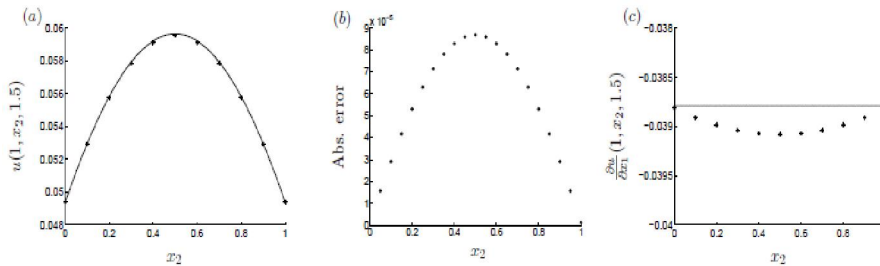
در این مثال قصد داریم نشان دهیم که نتایج، وقتی نقاط منبعی روی یک مربع قرار گرفته‌اند به همان دقتی هستند که این نقاط روی دایره قرار می‌گیرند. وقتی که نقاط منبعی روی یک دامنه مربعی قرار دارند آن‌ها را در بازه $(-\frac{h}{2}, 1 + \frac{h}{2}) \times (-\frac{h}{2}, 1 + \frac{h}{2})$ در نظر گرفته و هنگامی که نقاط

منبعی روی دایره قرار گرفته‌اند آن‌ها روی ناحیه دایره‌ای به شعاع h به مرکز $(0, 0)$ در نظر گرفته می‌شوند. شکل (۷) را ببیند.



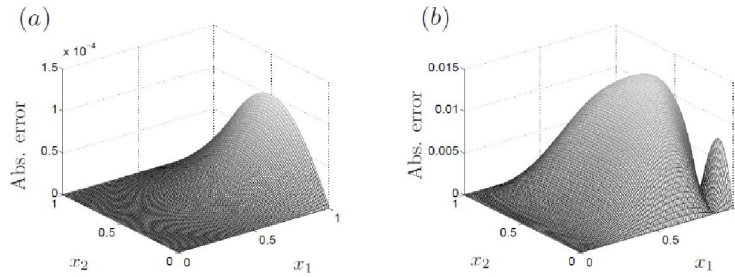
شکل (۷): جایگذاری نقاط منبعی در دامنه‌های جواب به شکل مربع واحد و دایره برای مثال ۲.

شکل (۸) به ترتیب جواب دقیق $u(1, x_2, 1/5)$ و مشتق نرمال $\frac{\partial u}{\partial x_1}(1, x_2, 1/5)$ را در مقایسه با جواب تقریبی به دست آمده با $h = 3$ و $\lambda = 10^{-8}$ نمایش می‌دهد.



شکل (۸): (a) جواب دقیق (-)، جواب تقریبی $u_{M,N}$ با روش جواب بنیادی (*)، (b) نمودار خطا مطلق متناظر، (c) مشتق نرمال دقیق (-)، $\frac{\partial u}{\partial x_1}(1, x_2, 1/5)$ ، جواب تقریبی مشتق با روش جواب بنیادی (*)، تمامی تقریب‌های به دست آمده با $h = 3$ برای مثال ۲.

در شکل (۹) نمودار خطای مطلق در زمان $t = 2/5$ برای دو مقدار مختلف h ارائه شده است. با توجه به این شکل می‌توان پی برد که وقتی نقاط منبعی خیلی نزدیک به مرز جایگزین شوند، خطا افزایش می‌یابد.



شکل (۹): خطای مطلق $|u(x_1, x_2, 2/5) - u_{M,N}(x_1, x_2, 2/5)|$ به ازای جواب تقریبی $u_{M,N}$ با روش جواب بنیادی با استفاده از نقاط منبعی قرار گرفته روی یک مربع با: $h = 3$ (a) و $h = 1$ (b) برای مثال ۲.

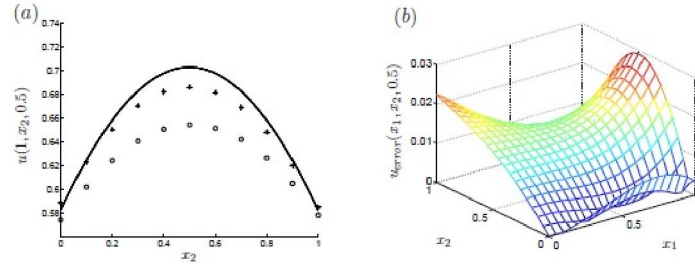
در شکل (۱۰)، نویزهای تصادفی برای خطاهای اندازه‌گیری، به داده‌های مرزی دیریکله رابطه (۳۱) به صورت زیر اضافه شده‌اند:

$$u^\delta(x_\tau, t) = u(x_\tau, t) + N(x_\tau, t), \quad (35)$$

به طوری که $N(x_\tau, t)$ یک توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف استاندارد:

$$\sigma = \delta \times \max |u(x_\tau, t)|, (x_\tau, t) \in (0, 1) \times (0, 3), \quad (36)$$

و δ سطح نویز نسبی است. برای نمونه می‌توان یک مجموعه یازده تایی از توابع نویزدار به صورت تصادفی $\{u_k^\delta(x_\tau, t)\}_{k=0, \dots, 10}$ ، و نقاط منبعی به روش جواب بنیادی روی یک دایره به شعاع h به مرکز $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ در نظر گرفت. شکل (۱۰) نموداری از جواب دقیق $u(1, x_\tau, 0/5)$ و جواب تقریبی روش جواب بنیادی با بالاترین دقت و کمترین دقت جواب برای این مجموعه یازده تایی از داده‌ها به ترتیب با نماد (*) و (o) که با نویز $\delta = 3\%$ ، $h = 3$ ، $T = 3$ و $\lambda = 10^{-6}$ به دست آمده، نمایش می‌دهد. جدول (۲) مقدار جواب دقیق $u(1, x_\tau, 0/5)$ و جواب تقریبی متناظر با شکل (۱۰) را ارائه می‌دهد.



شکل (۱۰): (a) جواب دقیق $u(1, x_2, 0.5)$ ، بهترین دقت (*) و کمترین دقت (o) جواب تقریبی روش جواب بنیادی از یازده مجموعه مختلف از داده‌های نویزدار با سطح نویز $\delta = 3\%$ ، خطای مطلق $|u(x_1, x_2, 0.5) - u_{M,N}(x_1, x_2, 0.5)|$ به ازای $\delta = 3\%$ از مجموعه داده نویزدار مثال ۲.

نویز تصادفی به مقدار دما در زمان نهایی و همچنین به مقدار دما در شرایط مرزی مسئله اضافه می‌شود. توجه داشته باشید که نویز اضافه شده به صورت $\tilde{b} = b(1 + randn \times \delta)$ به طوری که $randn$ یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است. با انتخاب مقادیر $N_1 = 7$ ، $N_2 = 7$ ، $K = 8$ ، $M_1 = 7$ ، $M_2 = 7$ ، در شکل (۱۱)، جواب تقریبی دمای اولیه به دست آمده با روش جواب بنیادی و نمودار خطای مطلق، با استفاده از پارامترهای مثال ۳ رسم شده است.

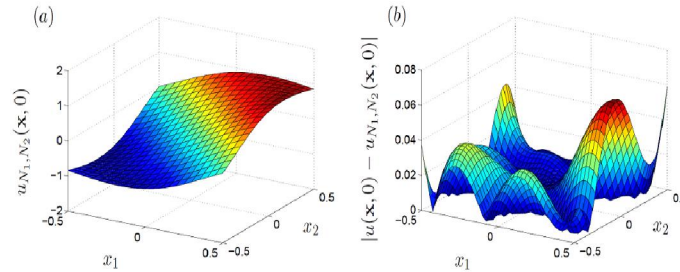
جدول (۲): جواب دقیق و تقریبی $u(1, x_2, 0.5)$ با بهترین و کمترین دقت روش جواب بنیادی از یازده مجموعه مختلف از داده‌های نویزدار با سطح نویز $\delta = 3\%$.

$u_{num}(1, x_2, 0.5)$	$u_{num}(1, x_2, 0.5)$	$u_{exact}(1, x_2, 0.5)$	x_2
۰/۵۷۶۶	۰/۵۸۸۲	۰/۵۸۲۴	۰/۰
۰/۶۰۲۲	۰/۶۲۲۶	۰/۶۲۴۴	۰/۱
۰/۶۲۴۸	۰/۶۵۰۴	۰/۶۵۸۲	۰/۲
۰/۶۴۰۵	۰/۶۷۰۷	۰/۶۸۲۹	۰/۳
۰/۶۵۰۵	۰/۶۸۳۲	۰/۶۹۸۰	۰/۴
۰/۶۵۶۶	۰/۶۸۸۰	۰/۷۰۳۱	۰/۵
۰/۶۵۱۰	۰/۶۸۲۴	۰/۶۹۸۰	۰/۶
۰/۶۴۱۵	۰/۶۶۹۴	۰/۶۸۲۹	۰/۷
۰/۶۲۶۳	۰/۶۴۸۵	۰/۶۵۸۲	۰/۸
۰/۶۰۳۷	۰/۶۲۰۰	۰/۶۲۴۴	۰/۹
۰/۵۷۸۰	۰/۵۸۴۳	۰/۵۸۲۴	۱/۰

مثال ۳. مسئله هدایت گرمایی پسرو دوبعدی در دامنه جواب $D = [0, 0.5] \times [0, 0.5]$ را مشابه مسئله مورد بررسی در مرجع [۱۲]، با جواب دقیق به شکل:

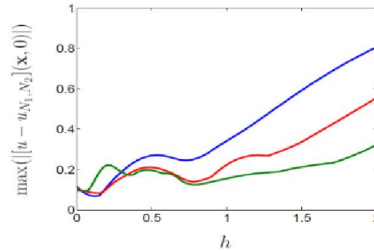
$$u(X, t) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi(x_1 + x_2)\right)e^{-\pi^2 t}, \quad (X, t) \in D \times [0, T], \quad (37)$$

را در نظر گرفته که برای به دست آوردن روابط (۲۳) و (۲۴) استفاده می‌شود.



شکل (۱۱): (a) جواب تقریبی با روش جواب بنیادی $u_{M, N}(X, 0)$ ، (b) خطای مطلق برای $u_{M, N}(X, 0) \in D_T$ هر دو نمودار با $\delta = 5\%$ ، $h = 0.11$ ، $T = 1$ ، $\lambda = 10^{-1}$ ، برای مثال ۳.

شکل (۱۲)، ماکزیمم خطای مطلق که در بازه $h = [0, 2]$ رسم شده را نمایش می‌دهد، در نتیجه برای این مسئله به نظر می‌رسد که مقادیر کوچک‌تر h دقت بیشتری را نتیجه می‌دهد.



شکل (۱۲): نمودار ماکزیمم خطای مطلق $\max_{X \in D} |u(X, 0) - u_{M, N}(X, 0)|$ روی $h = [0, 2]$ ، $\lambda = 10^{-1}$ (-)، $\lambda = 10^{-2}$ (-)، $\lambda = 10^{-3}$ (-) برای $T = 1$ ، با $\delta = 5\%$ ، برای مثال ۳.

۶ - نتیجه‌گیری

نتایج عددی نشان می‌دهند که در مقایسه با سایر روش‌های از جمله روش عناصر مرزی روش جواب بنیادی نیازمند نقاط مرزی و منبعی کمتر برای تولید یک جواب دقیق است. شاید مهم‌ترین

قابلیت و توانایی روش، سازگاری این روش می‌باشد. در مقایسه با سایر روش‌ها این روش دارای این مزیت می‌باشد که نیازمند گسسته سازی روی مرز نبوده و شامل محاسبات زیاد و استفاده از تقریب انتگرال روی مرز دامنه نیست. مزیت دیگر روش بنیادی سادگی آن جهت پیاده‌سازی است.

منابع

- [1] Kirsch, A. (1996). *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer Verlag, New York.
- [2] Cannon, G.R. (1984). *The One Dimensional Heat Equation*, Addison Wesley.
- [3] Alifanov, O. M. (1994). *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer, New York.
- [4] Beck, J.V., Blackwell, B. and Clair, S.R.St. (1985). *Inverse Heat conduction – Ill Posed Problem*. John Wiley, New York.
- [5] Hasanov, A., Otelbaev, M. and Akpayev, B. (2011). Inverse heat conduction problems with boundary and final measured output data, *Inverse Prob. Sci. Eng*, **19(7)**, 985-1006.
- [6] Damirchi, J. and Shidfar, A. (2013). Stability results for an inverse parabolic problem, *Advances in System Science and Applications*, **13(4)**, 392-400.
- [7] Mera, N.S. (2005). The method of fundamental solutions for the backward heat conduction problem, *Inverse Problems Sci. Eng*, **13**, 65–78.
- [8] Johansson, B.T. and Lesnic, D. (2008). A method of fundamental solutions for transient heat conduction, *Eng. Anal. Boundary Elements*, **32**, 697–703.
- [9] Kupradze, V. D. (1967). On the Approximating Solution of Problems in Mathematical Physics, *Russian Math, Surveys*, **22**, 58-107.
- [10] Kythe, P.K. (1996). *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*, Birkhauser Boston Inc, Boston.
- [11] Johannsson, B.T. (2017). Properties of a method of fundamental solution for the parabolic heat equations, *App. Math. Letter*, **65**, 83-89.
- [12] Hon, Y.C. and LI, M. (2009). A discrepancy principle for the source points location in using the fundamental solution methods for solving the BHCP, *Int. J. Comput. Math*, **6**, 181–197.
- [13] Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*, John Wiley, New York, Toronto.

- [14] Hansen, P.C. (1992). Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Rev*, **34**, 561–580.
- [15] Ortner, N. and Wagner, P. (1997). A survey on explicit representation formulae for fundamental solutions of linear partial differential operators, *Acta Appl. Math.*, **47**, 101–124.
- [16] Friedman, A. (1964). *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, USA.
- [17] Fu, C.L., Qian, Z. and Shi, R. (2007). A modified method for a backward heat conduction problem, *Appl. Math. Comput*, **185**, 564–573.

Numerical Solution of Some 2-Dimensional Direct and Inverse Heat Conduction Problems by Method of Fundamental Solutions

Javad Damirchi, Ali Janmohammadi, Masoud Hasanpour, Reza Memarbashi

Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran.

Abstract

In this paper, a numerical method based on the method of fundamental solutions (MFS) is employed for solving some two dimensional direct and inverse heat conduction problems. Based on the fundamental solution to the heat equation and theoretical properties of these solutions, including linear independence and denseness, with suitable placement of source points, the MFS is introduced for solving two dimensional heat conduction problems. Since the resultant matrix of the MFS is ill-conditioned for solving direct and inverse problems, to regularize this matrix equation, we apply Tikhonov regularization technique, while the choice of the regularization parameter is based on L-curve criteria to obtain a stable solution. Numerical results show the effectiveness and ability of the proposed method.

Keywords: Two Dimensional Heat Conduction Problems, Direct and Inverse Problems, Method of Fundamental Solutions, Tikhonov Regularization Method.

Subject Classification (2010): 35R30, 65M80.