بررسی خواص تصادفی مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی شبکه

سمیه زارع‌زاده[1]

بخش آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۹/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۵

چکیده: در این مقاله، یک شبکه دو وضعیتی با n مؤلفه در نظر گرفته می‌شود و فرض بر این است که مؤلفه‌های شبکه طبق یک فرآیند پواسون ناهمگن از کار می‌افتند. بعد از خرابی شبکه، ممکن است برخی از مؤلفه‌های آن هنوز سالم باشند و بتوان آن‌ها را در شبکه جدید مورد استفاده قرار داد. در این مقاله، برخی از خواص سالخوردگی و ترتیب‌های تصادفی این‌گونه از مؤلفه‌ها بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ترتیب تصادفی؛ مقادیر رکورد؛ شبکه‌های دو وضعیتی؛ فرآیند پواسون ناهمگن؛ بردار علامت.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۹۰B۲۵، ۶۸M۱۵.

۱- مقدمه

قابلیت اعتماد شبکه، یک معیار مهم در طراحی و نگهداری شبکه‌های ارتباطی مانند شبکه‌های حمل‌ونقل و شبکه‌های مخابراتی است. شبکه تلفن (ثابت و همراه)، شبکه‌های کامپیوتری، اینترنت و سیستم‌های بی‌سیم نمونه‌هایی از شبکه‌های مخابراتی هستند. برای شبکه‌های حمل‌ونقل نیز می‌توان شبکه خیابان‌های یک شهر، شبکه راه‌آهن و شبکه‌های هواپیمایی را نام برد. یک شبکه را به‌عنوان مجموعه‌ای از گره‌ها و یال‌ها در نظر می‌گیرند که در آن هدف برقراری ارتباط بین کاربران برخی از گره‌های خاص شبکه که پایانه نامیده می‌شوند، می‌باشد. به‌عنوان مثال در شبکه‌های ارتباطی، گره‌ها بیانگر مراکز ارتباطی و یال‌ها همان کابل‌های ارتباطی هستند. شبکه را معمولاً با استفاده از یک گراف $G=(V,E)$ نمایش می‌دهند که در آن V مجموعه رئوس گراف (به‌منزله گره‌های شبکه) و E نشان‌دهنده مجموعه لبه‌های گراف (به‌عنوان یال‌های شبکه) است.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: s.zarezadeh@shirazu.ac.ir

ازنقطه‌نظر قابلیت اعتماد، یال‌ها و یا گره‌های شبکه در معرض شکست هستند که ممکن است بر اساس یک فرآیند تصادفی رخ دهند. منظور از «خرابی یال»، حذف یال از شبکه و «خرابی گره» به معنای حذف تمام یال‌های حادث به آن گره می‌باشد. خرابی یال‌ها و یا گره‌های شبکه ممکن است باعث تغییر وضعیت شبکه شود. وضعیت‌های یک شبکه می‌تواند با توجه به برقراری ارتباط بین پایانه‌ها تعریف شود. اگرچه شرایطی وجود دارند که در آن شبکه‌ها چند وضعیت دارند، در این مقاله تنها شبکه‌های دو وضعیتی (فعال و غیرفعال) در نظر گرفته می‌شوند. همچنین فرض می‌کنیم که تنها یال‌ها در معرض خرابی قرار دارند و گره‌های شبکه کاملاً قابل‌اعتماد هستند. ازاین‌رو هنگامی‌که به یک مؤلفه اشاره می‌کنیم، منظور یال شبکه است. قابل‌ذکر است که یک سیستم منسجم را می‌توان به‌عنوان یک شبکه دو وضعیتی با دو پایانه در نظر گرفت.

یکی از مفاهیم مهم برای مطالعه قابلیت اعتماد شبکه‌ها، مفهوم بردار علامت است که تنها به ساختار شبکه بستگی دارد [۱]. بردار علامت یک شبکه با n مؤلفه را با $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)$ نمایش می‌دهیم که در آن s_i، $i=1,\ldots,n$، احتمال این است که iامین خرابی از مؤلفه‌ها باعث از کار افتادن شبکه شود [۲]. فرض کنید که یک شبکه (سیستم منسجم) دارای n مؤلفه با طول عمرهای مستقل و هم توزیع $X_1,\ldots,X_n$ با توزیع مشترک F باشد. اگر متغیر تصادفی T نشان‌دهنده طول عمر این شبکه باشد، آنگاه می‌توان نوشت

$$P\left(T>t\right)=\sum_{i=1}^{n}s_i P(X_{i:n}>t), \qquad t>0, \tag{1}$$

که در آن $X_{i:n}$، $i=1,\ldots n$، iامین آماره ترتیبی از نمونه تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ است [۲]. توجه شود که برای $i=1,\ldots n$، $s_i=P\left(T=X_{i:n}\right)$. در سال‌های اخیر، محققین متعددی قابلیت اعتماد شبکه‌ها و سیستم‌های منسجم را بر مبنای بردار علامت بررسی کرده‌اند؛ زارع‌زاده و همکاران [۳] بر مبنای بردار علامت، قابلیت اعتماد توأم سیستم‌هایی را بررسی کردند که برخی از مؤلفه‌های آن‌ها مشترک هستند. پیشنهاد می‌شود که برای مباحث بیشتر در مورد قابلیت اعتماد سیستم‌ها بر مبنای بردار علامت، به‌عنوان مثال، به [۸-۴] و منابع آن‌ها مراجعه شود.

در تمام کارهای اشاره شده، فرض مستقل و هم توزیع بودن یا تبادل پذیر بودن طول عمر مؤلفه‌ها یک فرض اصلی است. اخیراً زارع‌زاده و اسدی [۹] مدلی را ارائه دادند که در آن فرض خرابی مؤلفه‌ها طبق یک فرآیند شمارشی با این فرض جایگزین می‌شود. طبق این مدل، در یک شبکه با n مؤلفه، خرابی مؤلفه‌ها ممکن است به دلیل رخداد شوک‌هایی باشد که طبق یک فرآیند شمارشی در زمان‌های تصادفی $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ ($N\geq n$) اتفاق می‌افتند. در واقع، شوک‌های وارده ممکن است یک دنباله از حوادث سنگین جاده‌ای، سیل، زلزله، آتش‌سوزی و غیره باشند. فرض می‌شود که هر شوک منجر به خرابی یک مؤلفه خواهد شد. یک فرآیند رایج و انعطاف‌پذیر

که می‌تواند به‌عنوان فرآیند خرابی مؤلفه‌های شبکه در نظر گرفته شود، فرآیند پواسون ناهمگن است. فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ را فرآیند پواسون ناهمگن با تابع شدت $\lambda(t)$ گویند هرگاه

الف) $N(۰) = ۰$.

ب) $N(t)$ دارای نموهای مستقل است.

ج) $P\left(N(t+h) - N(t) \geq ۲\right) = o(h)$.

د) $P\left(N(t+h) - N(t) = ۱\right) = \lambda(t)h + o(h)$.

اگر زمان رخداد kامین اتفاق را با ϑ_k نمایش دهیم آنگاه تابع بقای آن عبارت است از

$$\begin{aligned}\bar{G}_{(k)}(t) &= P\left(\vartheta_k > t\right) = P\left(N(t) < k\right) \\ &= \sum_{x=۰}^{k-۱} \frac{(\Lambda(t))^x}{x!} e^{-\Lambda(t)}, \quad t > ۰,\ k = ۰,۱,۲,\ldots\end{aligned}$$

که در آن $\Lambda(t) = E\left(N(t)\right) = -\log \bar{G}(t)$ و $\bar{G}(t)$ تابع قابلیت اعتماد زمان رخداد اولین اتفاق است. تابع $\Lambda(t)$ را تابع مقدار میانگین می‌گویند که $\lambda(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t)$. در واقع فرآیند پواسون ناهمگن یک فرآیند پواسون است که نرخ آن تابعی از زمان است [۱۰]. فرآیند پواسون ناهمگن ارتباط نزدیکی با مقادیر رکورد در یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $Y_۱, Y_۲, \ldots$ با تابع توزیع مشترک G و تابع چگالی g دارد. به این صورت که مشاهده Y_j یک مقدار رکورد بالا (یا به‌طور ساده یک رکورد) است هرگاه از تمام مشاهدات قبلی آن بزرگ‌تر باشد. اگر nامین رکورد را با R_n نمایش دهیم، آنگاه تابع چگالی R_n به‌صورت

$$g_{(n)}(t) = g(t)\frac{\left[\Lambda(t)\right]^{n-۱}}{(n-۱)!}, \qquad t > ۰,\ n = ۱,۲,\ldots.$$

به دست می‌آید [۱۱]. اگر ϑ_k، $k = ۱,۲,\ldots$، بیانگر زمان‌های رخداد یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)$ باشند و R_k، $k = ۱,۲,\ldots$، مقادیر رکورد بالای متناظر با دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک $G(t) = ۱ - \exp\left(-\Lambda(t)\right)$ باشند آنگاه به ازای تمام مقادیر $k = ۱,۲,\ldots$ می‌توان ادعا کرد که ϑ_k و R_k هم توزیع هستند [۱۲].

فرض کنید T بیانگر طول عمر یک شبکه با بردار علامت $\mathbf{s} = (s_۱, s_۲, \ldots, s_n)$ باشد. زارع‌زاده و اسدی [۹] نشان دادند که هرگاه مؤلفه‌های شبکه بر مبنای یک فرآیند پواسون ناهمگن از کار

بیفتند، آنگاه قابلیت اعتماد شبکه را می‌توان به‌صورت آمیخته‌ای از توابع بقای R_kها بیان کرد. یعنی،

$$P\left(T>t\right)=\sum_{k=1}^{n} s_k P\left(R_k>t\right), \qquad t>0, \tag{۲}$$

که در آن $s_k=P\left(T=R_k\right), k=1,\ldots,n$، kامین عضو بردار علامت $\mathbf{s}$ است. شبکه‌های زیادی وجود دارند که بردار علامت آن‌ها به‌صورت

$$\mathbf{s}=\left(s_1,\ldots,s_u,0,\ldots,0\right) \tag{۳}$$

است، که در آن $u=\max\max\{i \mid s_i>0\}$. در مهندسی قابلیت اعتماد، سیستم‌های $(n-k+1)$ از n و بسیاری از سیستم‌های منسجم دیگر دارای بردار علامت به فرم (۳) هستند؛ [۱۳] و مثال ۳-۲ را ببینید. در شبکه‌هایی که دارای بردار علامت به فرم (۳) هستند، پس از خرابی شبکه برخی از مؤلفه‌های شبکه سالم خواهند ماند. فرض کنید که پس از خرابی شبکه، مؤلفه‌های سالم آن مجدداً در یک شبکه جدید با شرایط محیطی مشابه نصب شده و مورد استفاده قرار گیرد. از این‌رو مطالعه قابلیت اعتماد طول عمر باقیمانده چنین مؤلفه‌هایی اهمیت خواهد داشت. در سال‌های اخیر، چندین نویسنده خواص قابلیت اعتماد طول عمر باقیمانده این‌گونه مؤلفه‌ها را تحت سناریوهای مختلف بررسی کرده‌اند (به [۸] و [۱۹-۱۴] مراجعه کنید). بایرامو و آرنولد [۱۴] یک سیستم $(n-k+1)$ از n با مؤلفه‌های مستقل و هم توزیع را در نظر گرفته و توزیع طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی سیستم را موردتحقیق قرار دادند. در ادامه، بالاکریشنان و همکاران [۱۶,۱۷] برخی نتایج جدید در مورد ترتیب‌های تصادفی یک متغیره و چندمتغیره درباره طول عمر مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی یک سیستم $(n-k+1)$ از n را به دست آوردند. همچنین بالاکریشنان و همکاران [۱۶] یک ویژگی مشخصه سازی در مورد توزیع نمایی را ارائه دادند که نسبت به قضیه مطرح شده توسط بایرامو و آرنولد [۱۴]، مستلزم شرایط ضعیف‌تری است. کلکین‌نما و اسدی [۱۸] نتایج را به یک سیستم منسجم که در آن مؤلفه‌ها دارای طول عمرهای مستقل و هم توزیع هستند بسط دادند و توزیع طول عمر باقیمانده مؤلفه‌هایی که قطعاً بعد از خرابی چنین سیستمی سالم می‌مانند را مورد بحث قرار دادند و برخی از خواص تصادفی دیگر آن نیز توسط کلکین‌نما و همکاران [۱۹] بررسی شد. قابل‌ذکر است که نتایج دو مقاله اخیر جهت یک شبکه که دارای بردار علامت به فرم (۳) و مؤلفه‌هایی با طول عمر مستقل و هم توزیع هستند نیز قابل کاربرد است.

در این مقاله، یک شبکه با بردار علامت به فرم (۳) را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که خرابی مؤلفه‌های آن بر اساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)$ رخ می‌دهد. در

این صورت همانند مدل ارائه شده توسط سامانیگو [۲] در رابطه (۱)، داشتن توزیع طول عمر مؤلفه‌های شبکه لازم نیست. هدف بررسی خواص تصادفی طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم پس از خرابی شبکه است. به این منظور ابتدا در بخش ۲، برخی نتایج در مورد طول عمر باقیمانده مؤلفه‌هایی که پس از کار افتادن شبکه، قطعاً سالم می‌مانند را بررسی می‌کنیم. یک نمایش آمیخته برای تابع بقای توأم مؤلفه‌های سالم بر مبنای بردار علامت به دست آورده و یک رابطه بین میانگین طول عمر باقیمانده مؤلفه‌ها و طول عمر مورد انتظار از مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی شبکه مشخص می‌کنیم. برخی ترتیب‌های تصادفی یک متغیره و چند متغیره بین طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم در شبکه‌های مختلف نیز در این بخش بیان شده است. قابل‌ذکر است که نتایج حاصل از این بخش، زمانی که یک سیستم $(n-k+۱)$ از n داریم نیز برقرار است. در بخش ۳، بر مبنای بردار علامت، خواص تصادفی کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عمر باقیمانده از مؤلفه‌های سالم پس از شکست شبکه بررسی می‌شود. چندین مثال برای نشان دادن نتایج مقاله ارائه می‌گردد.

۲- تعاریف و مفاهیم موردنیاز

در این بخش، تعاریف برخی از مفاهیم سالخوردگی و ترتیب‌های تصادفی که در مقاله استفاده می‌شوند مطرح می‌گردند.

تعریف ۲-۱: متغیر تصادفی طول عمر X با تابع توزیع F و تابع بقای $\bar{F}=۱-F$ را در نظر بگیرید.

الف) گوییم X یک متغیر تصادفی IFR (DFR) است اگر نرخ خطر آن صعودی (نزولی) باشد یا به‌طور معادل $\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$ به ازای هر $x \geq ۰$ نسبت به t نزولی (صعودی) باشد.

ب) گوییم X داری میانگین عمر باقیمانده نزولی (صعودی) است ($DMRL$ ($IMRL$)) هرگاه

$$E\left(X-t|X>t\right)=\frac{۱}{\bar{F}(t)}\int_t^{\infty}\bar{F}(x)dx$$

نسبت به t نزولی (صعودی) باشد.

پ) گوییم برای X، نو بهتر (بدتر) از کهنه است (NBU (NWU)) اگر برای تمام مقادیر $t \geq ۰$،

$$\frac{۱}{\bar{F}(t)}\int_t^{\infty}\bar{F}(x)dx \leq_{st} (\geq_{st})\bar{F}(t).$$

تعریف ۲-۲: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی، به ترتیب دارای توابع چگالی f و g، توابع توزیع F و G و توابع بقا $\bar{F}=1-F$ و $\bar{G}=1-G$ باشند. X را کوچک‌تر از Y در

الف) ترتیب تصادفی معمولی گوییم ($X \leq_{st} Y$) هرگاه برای هر x داشته باشیم $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$.

ب) ترتیب میانگین عمر باقیمانده گوییم ($X \leq_{mrl} Y$) هرگاه $\int_x^\infty \bar{F}(u)du \Big/ \int_x^\infty \bar{G}(u)du$ نسبت به x نزولی باشد.

پ) ترتیب نرخ خطر گوییم ($X \leq_{hr} Y$) هرگاه $\frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}$ نسبت به x نزولی باشد.

ت) ترتیب نرخ خطر معکوس گوییم ($X \leq_{rh} Y$) هرگاه $\frac{F(x)}{G(x)}$ نسبت به x نزولی باشد.

ث) ترتیب نسبت درستنمایی گوییم ($X \leq_{lr} Y$) هرگاه $\frac{f(x)}{g(x)}$ نسبت به x در اجتماع نقاط تکیه‌گاه دو متغیر تصادفی نزولی باشد.

تعریف ۲-۳: دو بردار تصادفی $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ و $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$، به ترتیب با توابع چگالی f و g، توابع توزیع F و G و توابع بقا $\bar{F}$ و $\bar{G}$ را در نظر بگیرید. برای $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$، می‌نویسیم $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}=(x_1\wedge y_1,\ldots,x_n\wedge y_n)$ و $\mathbf{x}\vee\mathbf{y}=(x_1\vee y_1,\ldots,x_n\vee y_n)$ که در آن $x_i\wedge y_i=\min\{x_i,y_i\}$ و $x_i\vee y_i=\max\{x_i,y_i\}$، $i=1,\ldots,n$.

الف) $\boldsymbol{X}$ را در ترتیب تصادفی چند متغیره معمولی کوچک‌تر از $\boldsymbol{Y}$ گوییم و با نماد $\mathbf{X}\leq_{st}\mathbf{Y}$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر تابع صعودی $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$، داشته باشیم $E(\phi(\mathbf{X}))\leq E(\phi(\mathbf{Y}))$.

ب) $\boldsymbol{X}$ را در ترتیب نرخ خطر چند متغیره کوچک‌تر از $\boldsymbol{Y}$ گوییم و با نماد $\mathbf{X}\leq_{hr}\mathbf{Y}$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\bar{F}(\mathbf{x})\bar{G}(\mathbf{y})\leq\bar{F}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\bar{G}(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})$.

پ) $\boldsymbol{X}$ را در ترتیب نسبت درستنمایی چند متغیره کوچک‌تر از $\boldsymbol{Y}$ گوییم و با نماد $\mathbf{X}\leq_{lr}\mathbf{Y}$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\leq f(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})g(\mathbf{x}\vee\mathbf{y}).$$

برای جزئیات بیشتر در مورد ترتیب‌های جزئی بین متغیرها و بردارهای تصادفی به شیکد و شانتیکومار [۲۰] مراجعه کنید.

۳- برخی نتایج تصادفی در مورد مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی یک شبکه

شبکه‌ای با طول عمر T و n مؤلفه که دارای بردار علامت به فرم (۳) است را در نظر بگیرید. فرض کنید که خرابی مؤلفه‌ها براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)=-\log\bar{G}(t)$ اتفاق بیفتند. بنابراین بعد از خرابی شبکه، ***n-u*** مؤلفه آن قطعاً سالم خواهند ماند. زمان شکست این مؤلفه‌ها برابر با $R_{u+1},\ldots,R_n$ خواهد بود که $Z_1,\ldots,Z_{u-n}$ را به‌عنوان یک جایگشت تصادفی از $R_{u+1},\ldots,R_n$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید مؤلفه‌های سالم در یک شبکه جدید که در یک شرایط محیطی مشابه با قبل کار می‌کند نصب شوند. این مؤلفه‌ها در شبکه جدید تحت فرآیند تصادفی مشابه یعنی یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)=-\log\bar{G}(t)$ از کار می‌افتند. در این صورت برای زمان باقیمانده تا خرابی این‌گونه مؤلفه‌ها که با $Z_1^c,\ldots,Z_{n-u}^c$ نشان می‌دهیم می‌توان نوشت:

$$Z_i^c=Z_i-T,\qquad i=1,\ldots,n-u. \tag{۴}$$

در ادامه قصد داریم تا تابع بقای توأم Z_i^cها را به دست آوریم. در ابتدا، دو لم زیر را اثبات می‌کنیم. اولین لم به‌راحتی بر اساس توزیع توأم رکوردها اثبات می‌شود. بنابراین از بیان جزئیات آن صرف‌نظر می‌شود.

لم ۳-۱: فرض کنید $R_1,\ldots,R_n$، نشان‌دهنده n رکورد اول از دنباله متغیرهای تصادفی مستقل با تابع بقای مشترک $\bar{G}$ باشند. اگر $(Z_1,\ldots,Z_{n-m})$ را به‌عنوان یک جایگشت تصادفی از $R_{m+1},\ldots,R_n$ در نظر بگیریم، آنگاه با در نظر گرفتن $R_k=t$، Z_iها متغیرهای تصادفی مستقل با تابع بقای مشترک $\bar{G}(t+z)\big/\bar{G}(t)$ هستند.

لم ۳-۲: شبکه‌ای با طول عمر T شامل n مؤلفه را در نظر بگیرید. فرض کنید شکست مؤلفه‌ها بر اساس یک فرآیند پواسون ناهمگن رخ دهد. اگر $A\subseteq[0,\infty)$ و $P(T\in A)>0$، آنگاه

$$P(T=R_k\,|\,T\in A)=\frac{s_k P(R_k\in A)}{P(T\in A)}$$

اثبات: داریم

$$P\left(T=R_k|T\in A\right)=\frac{P\left(T\in A|T=R_k\right)P\left(T=R_k\right)}{P\left(T\in A\right)}$$
$$=\frac{s_k P\left(R_k\in A|T=R_k\right)}{P\left(T\in A\right)}=\frac{s_k P\left(R_k\in A\right)}{P\left(T\in A\right)}$$

که آخرین تساوی از این واقعیت که بردار علامت به مکانیسم تصادفی خرابی مؤلفه‌ها بستگی ندارد، نتیجه می‌شود [۲].

حال قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳-۱: شبکه‌ای با بردار علامت به فرم (۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید G_T تابع توزیع زمان از کار افتادن شبکه باشد. در این صورت تابع بقا توأم Z_i^cها به‌صورت

$$\bar{H}_c\left(z_1,\dots,z_{n-u}\right)=\int_0^\infty\prod_{j=1}^{n-u}\frac{\bar{G}\left(z_j+t\right)}{\bar{G}\left(t\right)}dG_T\left(t\right).$$

بیان می‌شود.

اثبات: با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$\bar{H}_c\left(z_1,\dots,z_{n-u}\right)\equiv P\left(Z_1^c>z_1,\dots,Z_{n-u}^c>z_{n-u}\right)$$
$$=\int_0^\infty\sum_{k=1}^{u}P\left(Z_1^c>z_1,\dots,Z_{n-u}^c>z_{n-u},T=t,T=R_k\right)dt$$
$$=\int_0^\infty\sum_{k=1}^{u}P\left(Z_1^c>z_1,\dots,Z_{n-u}^c>z_{n-u}\,|\,R_k=t,T=R_k\right)P\left(T=R_k|T=t\right)dG_T\left(t\right)$$
(۵)

از طرفی بنابر لم ۳-۲ داریم

$$P\left(T=R_k|T=t\right)=\frac{s_k\,g_{(k)}\left(t\right)}{\sum_{k=1}^{u}s_k\,g_{(k)}\left(t\right)} \qquad (۶)$$

که در آن $g_{(k)}$ تابع چگالی kامین رکورد است. با استفاده از روابط (۵) و (۶) و با توجه به این‌که پیشامدهای $\{T = R_k\}$ و $\{Z_1^c > z_1,\ldots,Z_{n-u}^c > z_{n-u}\}$ مستقل از یکدیگر هستند می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\bar{H}_c\left(z_1,\ldots,z_{n-u}\right) &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{u} P\left(Z_1^c > z_1,\ldots,Z_{n-u}^c > z_{n-u} \mid R_k = t\right) s_k\, g_{(k)}(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{u} P\left(Z_1 > z_1 + t,\ldots,Z_{n-u} > z_{n-u} + t \mid R_k = t\right) s_k\, dG_{(k)}(t) \\ &= \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-u} \frac{\bar{G}\left(z_j + t\right)}{\bar{G}(t)}\, dG_T(t).\end{aligned}$$

که آخرین تساوی با استفاده از لم ۳-۱ به‌دست‌آمده است. به‌این‌ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

نکته ۳-۱: بردار علامت سیستم $(n-k+1)$ از n به شکل $(\overbrace{0,\ldots,0}^{k-1},1,\overbrace{0,\ldots,0}^{n-k})$ است که حالت خاصی از رابطه (۳) می‌باشد. برای این نوع سیستم منسجم، تعداد مؤلفه‌هایی که قطعاً بعد از شکست سیستم، سالم می‌مانند برابر با $n-k$ است. فرض کنید $Z_1^{(k)}$،...،$Z_{n-k}^{(k)}$ بیانگر طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم سیستم $(n-k+1)$ از n بعد از خرابی آن باشد. از قضیه ۳-۱، تابع بقای توأم $Z_i^{(k)}$ها به‌صورت

$$\bar{H}_c^{(k)}\left(z_1,\ldots,z_{n-k}\right) = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-k} \frac{\bar{G}\left(z_j + t\right)}{\bar{G}(t)}\, dG_{(k)}(t), \qquad (۷)$$

به دست می‌آید، که در آن $G_{(k)}$ تابع توزیع kامین رکورد است.

از قضیه۳-۱ و رابطه (۲) می‌توان نتیجه گرفت که Z_i^cها متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر با تابع بقای مشترک

$$\bar{H}_c(z) \equiv P\left(Z^c > z\right) = \int_0^\infty \frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\, dG_T(t) \qquad (۸)$$

$$= \sum_{k=1}^{u} s_k\, \bar{H}^{(k)}(z), \qquad (۹)$$

هستند، که در آن $\bar{H}^{(k)}(z)$ تابع بقای مشترک مؤلفه‌های سالم یک سیستم $(n-k+۱)$ از n، بعد از خرابی آن می‌باشد به‌طوری‌که

$$\bar{H}^{(k)}(z)=\int_{۰}^{\infty}\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}dG_{(k)}(t). \qquad (۱۰)$$

این نشان می‌دهد که تابع بقای حاشیه‌ای مؤلفه‌هایی که بعد از خرابی شبکه قطعاً سالم می‌مانند به‌صورت آمیخته‌ای از تابع بقای حاشیه‌ای مؤلفه‌هایی است که بعد از خرابی یک سیستم $(n-k+۱)$ از n سالم می‌مانند.

از رابطه (۸)، تابع چگالی مشترک Z_i^cها به‌صورت $h_c(z)=\int_{۰}^{\infty}\frac{g(z+t)}{\bar{G}(t)}dG_T(t)$ به دست می‌آید. بنابراین نتیجه می‌شود که تابع نرخ خطر و تابع میانگین عمر باقیمانده Z^cها به ترتیب به‌صورت

$$\lambda_c(z)=\frac{h_c(z)}{\bar{H}_c(z)}=\int_{۰}^{\infty}\lambda_G(z+t)dG_z(t),$$

$$m_c(z)=E\left(Z^c-t|Z^c>t\right)=\int_{۰}^{\infty}m_G(z+t)dG_z(t),$$

هستند، که در آن λ_G و m_G به ترتیب تابع نرخ خطر و تابع میانگین عمر باقیمانده توزیع G هستند و

$$dG_z(t)=\frac{\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}dG_T(t)}{\int\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}dG_T(t)}.$$

در ادامه، رابطه بین امید ریاضی طول عمر مؤلفه‌ای که بعد از خرابی شبکه قطعاً سالم می‌ماند و میانگین عمر باقیمانده مؤلفه را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳-۲: شبکه‌ای با طول عمر T و شامل n مؤلفه را در نظر بگیرید که در آن خرابی مؤلفه‌ها براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)=-\log\bar{G}(t)$ اتفاق می‌افتد. فرض کنید Z^c یک متغیر تصادفی نامنفی و بیانگر طول عمر مؤلفه‌ای است که بعد از خرابی شبکه

قطعاً سالم می‌ماند. در این صورت $E\left(Z^c\right)=E\left(m_G\left(T\right)\right)$ که در آن m_G تابع میانگین عمر باقیمانده مربوط به توزیع G است.

اثبات: داریم

$$E\left(Z^c\right)=\int_0^\infty \bar{H}_c\left(z\right)dz=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\bar{G}\left(z+t\right)}{\bar{G}\left(t\right)}dG_T\left(t\right)dz$$
$$=\int_0^\infty m_G\left(t\right)dG_T\left(t\right)=E\left(m_G\left(T\right)\right).$$

یک نتیجه ساده از قضیه ۳-۲ این است که اگر G یک توزیع NBUE (NWUE) با میانگین μ باشد، یعنی برای تمام $t\geq 0$، $m_G\left(t\right)\leq(\geq)\mu$ باشد، آنگاه $E\left(Z^c\right)\leq(\geq)\mu$.

مثال ۳-۱: یک شبکه موازی را در نظر بگیرید که در آن خرابی تنها یک یال باعث خرابی شبکه خواهد شد. بنابراین بردار علامت شبکه به‌صورت $\mathbf{s}=\left(1,0,\ldots,0\right)$ است. فرض کنید خرابی یال‌ها براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda\left(t\right)=-\log\bar{G}\left(t\right)$ رخ می‌دهد. بنابر رابطه (۱۰)، یال‌هایی که بعد از خراب شدن شبکه سالم می‌مانند دارای تابع بقای مشترک $\bar{H}^{(1)}\left(t\right)=\int\bar{G}_t\left(z\right)dG\left(t\right)$ هستند. همچنین متوسط طول عمر باقیمانده یال‌های سالم به‌صورت

$$E\left(Z^{(1)}\right)=E\left(m_G\left(R_1\right)\right)=-\int\bar{G}\left(x\right)\log\bar{G}\left(x\right)dx$$

به دست می‌آید. این اندازه را «آنتروپی باقیمانده تجمعی» می‌نامند [۲۱].

قضیه ۳-۳: دو شبکه را در نظر بگیرید که شکست مؤلفه‌های هر شبکه براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن اتفاق می‌افتد. فرض کنید Y_i، $i=1,2$، بیانگر زمان شکست اولین مؤلفه در iامین شبکه است و دارای تابع توزیع G_i و میانگین عمر باقیمانده m_{G_i} باشد. علاوه بر این فرض کنید Z_i^c، $i=1,2$، نشان‌دهنده طول عمر باقیمانده مؤلفه‌هایی است که بعد از خرابی iامین شبکه سالم می‌مانند. هرکدام از شرایط زیر نتیجه می‌دهد که $E\left(Z_1^c\right)\leq E\left(Z_2^c\right)$.

الف) اگر Y_1 یا Y_2، IMRL باشند، $Y_1\leq_{mrl}Y_2$ و $\frac{m_{G_1}\left(t\right)}{m_{G_2}\left(t\right)}\geq\frac{m_{G_1}\left(0\right)}{m_{G_2}\left(0\right)}$.

ب) اگر Y_1 یا Y_2، IMRL باشند و $Y_1\leq_{hr}Y_2$.

اثبات: فرض کنید G_{T_i}، $i=۱,۲$، بیانگر تابع توزیع زمان از کار افتادن iامین شبکه باشد. فرض می‌کنیم $Y_۲$، $IMRL$ است. اثبات در حالتی که $Y_۱$، $IMRL$ است به‌طور مشابه انجام می‌شود.

الف) با استفاده از فرض $Y_۱ \le_{mrl} Y_۲$ می‌توان نوشت

$$E\left(Z_۱^c\right)=\int_۰^{\infty} m_{G_۱}(t)\,dG_{T_۱}(t) \le \int_۰^{\infty} m_{G_۲}(t)\,dG_{T_۱}(t). \qquad (۱۱)$$

از طرفی $Y_۱ \le_{mrl} Y_۲$ و $\frac{m_{G_۱}(t)}{m_{G_۲}(t)} \ge \frac{m_{G_۱}(۰)}{m_{G_۲}(۰)}$ نتیجه می‌دهد که $Y_۱ \le_{st} Y_۲$ (قضیه ۳.A.۲ از [۲۰]). زارع زاده و اسدی [۹] نشان دادند که $Y_۱ \le_{st} Y_۲$ نتیجه می‌دهد $T_۱ \le_{st} T_۲$. بنابراین از $T_۱ \le_{st} T_۲$ نتیجه می‌شود که برای تمام توابع صعودی h، $E\left(h\left(T_۱\right)\right) \le E\left(h\left(T_۲\right)\right)$ (صفحه ۴ از [۲۰]). پس داریم

$$\int_۰^{\infty} m_{G_۲}(t)\,dG_{T_۱}(t) \le \int_۰^{\infty} m_{G_۲}(t)\,dG_{T_۲}(t) = E\left(Z_۲^c\right). \qquad (۱۲)$$

بنابراین از روابط (۱۱) و (۱۲) اثبات کامل می‌شود.

ب) از فرض $Y_۱ \le_{hr} Y_۲$ نتیجه می‌شود که $Y_۱ \le_{mrl} Y_۲$ و $Y_۱ \le_{st} Y_۲$. بنابراین مشابه با قسمت (لف) نتیجه حاصل می‌گردد.

در ادامه برخی از ترتیب‌های تصادفی را در مورد مسئله، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳-۴: فرض کنید مؤلفه‌های یک شبکه براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن خراب شوند. همچنین متغیر تصادفی Z^c بر طبق رابطه (۴) تعریف شده و Y بیانگر زمان خرابی اولین مؤلفه است.

الف) اگر Y، NBU (NWU) باشد آنگاه $Z^c \le_{st} (\ge_{st}) Y$.

ب) اگر Y،$DMRL$ ($IMRL$) باشد آنگاه $Z^c \le_{mrl} (\ge_{mrl}) Y$.

پ) اگر Y،IFR (DFR) باشد آنگاه $Z^c \le_{hr} (\ge_{hr}) Y$.

ت) اگر لگاریتم تابع چگالی Y، مقعر (محدب) باشد آنگاه $Z^c \le_{lr} (\ge_{lr}) Y$.

اثبات: فرض کنید Y دارای تابع چگالی g و تابع بقای $\bar{G}$ است.

الف) اگر Y، NBU (NWU) باشد، داریم

$$\bar{H}_c(x)=\int_0^{\infty}\frac{\bar{G}(t+x)}{\bar{G}(t)}dG_T(t)\leq(\geq)\bar{G}(x)\int_0^{\infty}dG_T(t)=\bar{G}(x).$$

ب) اگر Y، $DMRL$ ($IMRL$) باشد آنگاه $\dfrac{\int_{x+t}^{\infty}\bar{G}(u)du}{\bar{G}(t)\int_{x}^{\infty}\bar{G}(u)du}$ نسبت به x نزولی (صعودی) است.

از طرفی،

$$\frac{\int_x^{\infty}\bar{H}_c(z)dz}{\int_x^{\infty}\bar{G}(z)dz}=\frac{\int_x^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\bar{G}(t+z)}{\bar{G}(t)}dG_T(t)dz}{\int_x^{\infty}\bar{G}(z)dz}=\int_0^{\infty}\frac{\int_{x+t}^{\infty}\bar{G}(u)du}{\bar{G}(t)\int_x^{\infty}\bar{G}(u)du}dG_T(t).$$

بنابراین عبارت فوق نیز نسبت به x نزولی (صعودی) است. پس می‌توان نوشت $Z^c\leq_{mrl}(\geq_{mrl})Y$.

پ) فرض IFR (DFR) بودن Y نتیجه می‌دهد که $\dfrac{\bar{G}(t+x)}{\bar{G}(x)}$ برای تمام tها نسبت به x نزولی (صعودی) است. پس عبارت

$$\frac{\bar{H}_c(x)}{\bar{G}(x)}=\int_0^{\infty}\frac{\bar{G}(t+x)}{\bar{G}(t)\bar{G}(x)}dG_T(t)$$

نیز نسبت به x نزولی (صعودی) است و بنابراین $Z^c\leq_{hr}(\geq_{hr})Y$.

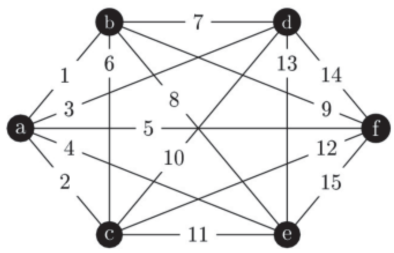
ت) زمانی که لگاریتم g مقعر (محدب) باشد، $\dfrac{g(t+x)}{g(x)}$ برای تمام tها نسبت به x نزولی (صعودی) خواهد بود. بنابراین

$$\frac{h_c(x)}{g(x)}=\int_0^{\infty}\frac{g(t+x)}{\bar{G}(t)g(x)}dG_T(t)$$

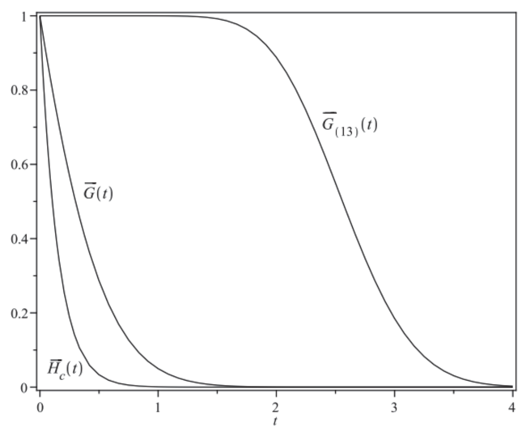
نسبت به x نزولی (صعودی) است که معادل با این است که بنویسیم $Z^c\leq_{hr}(\geq_{hr})Y$.

مثال ۳-۲: یک شبکه با گراف کامل شامل ۶ رأس که در شکل ۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. فرض کنید گره‌ها نشان‌دهنده ۶ مکان مختلف در یک شهر و یال‌های شبکه کابل‌های نوری جهت ارتباط بین هر دو مکان باشند. شبکه را زمانی فعال در نظر می‌گیریم که ارتباط بین تمام مکان‌های مشخص شده، توسط کابل‌های نوری برقرار باشد. همچنین فرض کنید که کابل‌ها در معرض یک نوع شوک قرار گرفته و طبق یک فرآیند پواسون ناهمگن خراب می‌شوند. هدف تعیین طول عمر باقیمانده کابل‌هایی هست که بعد از غیرفعال شدن شبکه قطعاً سالم می‌مانند. الپرین و همکاران [۲۲] بردار علامت این شبکه را به‌صورت زیر تخمین زده‌اند:

$$\mathbf{s} = (\text{۰,۰,۰,۰,۰/۰۰۲۰۵,۰/۱۰۱۵۵, ۰/۰۲۹۸۲,۰/۰۷۱۹۳۷, ۰/۱۵۵۲۱۲,۰/۲۹۸۸۳۴,۰/۴۳۱۹۹۲,۰,۰,۰,۰})$$



شکل (۱): یک شبکه با گراف کامل



شکل (۲): نمودار توابع قابلیت اعتماد Z^c، Y، $R_{۱۳}$

فرض کنید Y بیانگر زمان خرابی اولین یال و دارای تابع بقا $\bar{G}(t)=e^{-t^{۲}-۲t}, t>۰$ باشد. تحت این فرض،شکل ۲ نمودارهای توابع قابلیت اعتماد Z^{c}، $\bar{H}_{c}(t)$ و $\bar{G}(t)$ را نشان می‌دهد. بنابر قسمت (الف) قضیه۳-۴، $\bar{G}(t)$ یک کران بالا برای $\bar{H}_{c}(t)$ است. همچنین شکل ۲ نمودار تابع قابلیت اعتماد ۱۳امین ضعیف‌ترین یال این شبکه که با $\bar{G}_{(۱۳)}(t)$ نمایش داده شده است را نشان می‌دهد. در این وضعیت، مشاهده می‌شود که $E\left(Z^{c}\right)=۰/۱۴۹۳$.

همچنین فرض می‌کنیم که متغیر تصادفی Y^{*} بیانگر زمان خرابی اولین یال با تابع بقا زیر است

$$\bar{G}^{*}(t)=\frac{۱}{(۱+t)^{۲}}, \qquad t>۰.$$

تحت این شرایط می‌توان مشاهده کرد که $E\left(Z_{*}^{c}\right)=۱۲۹۳/۱۴۲۵$. از طرفی به‌سادگی می‌توان نشان داد که $Y \leq_{hr} Y^{*}$ و Y^{*}، $IMRL$ است. پس براساس قضیه ۳-۳، $E\left(Z^{c}\right)\leq E\left(Z_{*}^{c}\right)$.

قضیه ۳-۵: فرض کنید $Z^{(k)}$ نشان‌دهنده طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم، پس از خرابی یک سیستم $(\mathrm{n-k+۱})$ از n باشد. درصورتی‌که Y بیانگر زمان شکست اولین مؤلفه باشد و $k\leq k'$:

الف) اگر Y، DFR (IFR) باشد آنگاه $Z^{(k)} \leq_{st} (\geq_{st}) Z^{(k')}$.

ب) اگر Y، DFR (IFR) باشد آنگاه $Z^{(k)} \leq_{hr} (\geq_{hr}) Z^{(k')}$.

پ) اگر Y داری تابع چگالی لگاریتم محدب (لگاریتم مقعر) باشد، آنگاه $Z^{(k)} \leq_{lr} (\geq_{lr}) Z^{(k')}$.

اثبات: متغیر تصادفی Y_{t} را به‌صورت $Y_{t}=(Y-t \mid Y>t)$ تعریف می‌کنیم. از رابطه (۱۰)، تابع بقای $Z^{(k)}$ آمیخته‌ای از تابع بقای Y_{t} است. یعنی

$$P\left(Z^{(k)}>z\right)=\int_{۰}^{\infty} P\left(Y_{t}>z\right) dG_{(k)}(t).$$

الف) می‌توان به‌سادگی مشاهده کرد که مقادیر رکورد به‌صورت ترتیب تصادفی معمولی مرتب شده‌اند. یعنی برای $k\leq k'$ داریم $R_{k} \leq_{st} R_{k'}$. از طرفی متغیر تصادفی Y، DFR (IFR) است اگر و تنها اگر $P(Y_{t}>z)$ نسبت به t صعودی (نزولی) باشد (قضیه $A.۱۳۰$ از [۲۰]). بنابراین $R_{k} \leq_{st} R_{k'}$ نتیجه می‌دهد که برای تمام توابع صعودی (نزولی) h، $E\left(h\left(R_{k}\right)\right)\leq(\geq) E\left(h\left(R_{k'}\right)\right)$ (صفحه ۴ از [۲۰]). پس داریم

$$P\left(Z^{(k)}>z\right)=\int_{\circ}^{\infty}P\left(Y_t>z\right)dG_{(k)}(t)\le(\ge)\int_{\circ}^{\infty}P\left(Y_t>z\right)dG_{(k')}(t)$$
$$=P\left(Z^{(k')}>z\right).$$

ب) طبق قضیه ۱.B.۳۸از [۲۰]، Y، DFR (IFR) است اگر و تنها اگر برای هر $t\le t'$، $Y_t\le_{hr}(\ge_{hr})Y_{t'}$. ازآنجاکه مقادیر رکورد بر اساس ترتیب نرخ خطر مرتب شده‌اند یعنی $R_k\le_{hr}R_{k'}$، با استفاده از فرع ۳-۳ (فرع ۳-۱) خالدی و شیکد [۲۳] نتیجه می‌شود که $Z^{(k)}\le_{hr}(\ge_{hr})Z^{(k')}$.

پ) می‌توان نشان داد که لگاریتم تابع چگالیY محدب (مقعر) است اگر و تنها اگر برای $t\le t'$، $Y_t\le_{lr}(\ge_{lr})Y_{t'}$. چون $R_k\le_{lr}R_{k'}$، با استفاده از فرع ۵,۳ خالدی و شیکد [۲۳]، نتیجه می‌گیریم که $Z^{(k)}\le_{lr}(\ge_{lr})Z^{(k')}$.

قضیه ۳-۶: دو شبکه به ترتیب با بردارهای علامت $\mathbf{s}_۱$ و $\mathbf{s}_۲$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که مؤلفه‌های شبکه‌ها بر اساس فرآیند پواسون ناهمگن از کار می‌افتند که Y زمان خرابی اولین مؤلفه است. همچنین Z_i^c بیانگر طول عمر باقیمانده مؤلفه‌ای است که به‌طور حتم بعد از شکست iامین شبکه، $i=۱,۲$، سالم می‌ماند.

الف) اگر $\mathbf{s}_۱\le_{st}\mathbf{s}_۲$ و Y، DFR (IFR) باشد، آنگاه $Z_۱^c\le_{st}(\ge_{st})Z_۲^c$.

ب) اگر $\mathbf{s}_۱\le_{hr}\mathbf{s}_۲$ و Y، DFR (IFR) باشد، آنگاه $Z_۱^c\le_{hr}(\ge_{hr})Z_۲^c$.

پ) اگر $\mathbf{s}_۱\le_{lr}\mathbf{s}_۲$ و Y دارای تابع چگالی لگاریتم محدب (لگاریتم مقعر) باشد، آنگاه $Z_۱^c\le_{lr}(\ge_{lr})Z_۲^c$.

اثبات: با توجه به نمایش آمیخته تابع بقای Z^cبر اساس تابع بقا $Z^{(k)}$ در رابطه (۹) و بر اساس قضایای حفظ خواص سالخوردگی در [۲۳] و قضیه ۳-۵ نتیجه حاصل می‌گردد.

در قضیه زیر، به یک ویژگی مشخص کننده توزیع نمایی دست می‌یابیم.

قضیه ۳-۷: شبکه‌ای در نظر بگیرید که خرابی مؤلفه‌های آن براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن باشد. فرض کنید Y بیانگر زمان شکست اولین مؤلفه و Z^c یک متغیر تصادفی با تابع توزیع (۸) باشد. در این صورت $Z^c\overset{d}{=}Y$ اگر و تنها اگر Y دارای توزیع نمایی باشد.

اثبات: اثبات مشابه با اثبات قضیه ۱ بایرامو و آرنولد [۱۴] است. به همین جهت از بیان جزئیات آن صرف‌نظر می‌شود.

در قضیه بعدی، برخی از ترتیب‌های تصادفی چند متغیره را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۳-۸: دو شبکه با بردارهای علامت $s_i=(s_{i1},\ldots,s_{iu},0,\ldots,0)$، $i=1,2$، را در نظر بگیرید. فرض کنید که مؤلفه‌های دو شبکه بر اساس فرآیندهای پواسون ناهمگن مختلف از کار می‌افتند و Y_i بیانگر زمان خرابی اولین مؤلفه در iامین شبکه باشد ($i=1,2$). علاوه بر این فرض کنید که $\mathbf{Z}_i^c=\left(Z_{i,1}^c,\ldots,Z_{i,n-u}^c\right)$ بردار طول عمر باقیمانده مؤلفه‌هایی است که بعد از خرابی iامین شبکه قطعاً سالم می‌مانند. اگر Y_1 یا Y_2، DFR باشند، $Y_1\le_{hr}Y_2$ و $\mathbf{s}_1\le_{st}\mathbf{s}_2$ آنگاه $\mathbf{Z}_1^c\le_{st}\mathbf{Z}_2^c$.

اثبات: فرض کنید متغیرهای تصادفی T_1 و T_2 بیانگر طول عمرهای دو شبکه، به ترتیب، با بردارهای علامت $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ باشند. اگر Y_i دارای تابع بقای $\bar{G}_i$، $i=1,2$، باشد، در این صورت $Y_1\le_{hr}Y_2$ اگر و تنها اگر برای هر t و x داشته باشیم $\frac{\bar{G}_1(t+x)}{\bar{G}_1(t)}\le\frac{\bar{G}_2(t+x)}{\bar{G}_2(t)}$. همچنین Y_i، DFR است اگر و تنها اگر $\frac{\bar{G}_i(t+x)}{\bar{G}_i(t)}$ نسبت به t صعودی باشد. بنابراین بنابر نمایش آمیخته ارائه شده در قضیه ۳-۱، اگر ثابت کنیم که $T_1\le_{st}T_2$ اثبات قضیه با استفاده از قضیه ۱٫۳از [۲۴] کامل می‌شود. فرض کنید $R_{1,k}$ و $R_{2,k}$ به ترتیب بیانگر kامین رکورد در دنباله متغیرهای تصادفی مستقل از توابع بقای $\bar{G}_1$ و $\bar{G}_2$ باشند. بنابر قضیه ۱٫۲ از [۲۵]، $Y_1\le_{st}Y_2$ نتیجه می‌دهد که $R_{1,k}\le_{st}R_{2,k}$. پس از رابطه (۲) می‌توان نوشت

$$P(T_1>t)=\sum_{k=1}^{n}s_{1k}P\left(R_{1,k}>t\right)\le\sum_{k=1}^{n}s_{1k}P\left(R_{2,k}>t\right). \qquad (13)$$

از طرفی، با توجه به $R_{2,k}\le_{st}R_{2,k+1}$ و فرض $\mathbf{s}_1\le_{st}\mathbf{s}_2$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{n}s_{1k}P\left(R_{2,k}>t\right)\le\sum_{k=1}^{n}s_{2k}P\left(R_{2,k}>t\right)=P(T_2>t). \qquad (14)$$

بنابراین از روابط (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌گیریم که $T_1\le_{st}T_2$.

قضیه ۳-۹: دو شبکه در نظر بگیرید که مؤلفه‌های آن‌ها براساس فرآیندهای پواسون ناهمگن یکسان از کار می‌افتند و Y بیانگر زمان اولین رخداد در فرآیند است. فرض کنید که بردار علامت

iامین شبکه به‌صورت $\mathbf{s}_i = \left(s_{i1},\ldots,s_{iu},0,\ldots,0\right)$، $i=1,2$، باشد. $\mathbf{Z}_i^c$ را همانند قضیه ۳-۸ تعریف می‌کنیم.

الف) اگر Y، DFR (IFR) و $\mathbf{s}_1 \le_{hr} \left(\le_{rh}\right)\mathbf{s}_2$، آنگاه $\mathbf{Z}_1^c \le_{hr} \left(\ge_{hr}\right)\mathbf{Z}_2^c$.

ب) اگر Y دارای تابع چگالی لگاریتم محدب (لگاریتم مقعر) باشد و $\mathbf{s}_1 \le_{lr} \mathbf{s}_2$، آنگاه $\mathbf{Z}_1^c \le_{lr} \left(\ge_{lr}\right)\mathbf{Z}_2^c$.

اثبات: فرض کنید T_1 و T_2 بیانگر طول عمر دو شبکه، به ترتیب، با بردارهای علامت $\mathbf{s}_1$ و $\mathbf{s}_2$ باشند. متغیر تصادفی Y_t را به‌صورت $Y_t = \left(Y - t \mid Y > t\right)$ تعریف می‌کنیم.

الف) زارع‌زاده و اسدی [۹] نشان دادند که تحت شرایط قضیه، $\mathbf{s}_1 \le_{hr} \left(\le_{rh}\right)\mathbf{s}_2$ نتیجه می‌دهد $T_1 \le_{hr} \left(\le_{rh}\right)T_2$. همچنین Y، DFR (IFR) است اگر و تنها اگر برای تمام مقادیر $t \le s$، $Y_t \le_{hr} \left(\ge_{hr}\right)Y_s$. بنابراین بر طبق نمایش آمیخته ارائه شده در قضیه ۳-۱ و با استفاده از قضیه ۱,۲ (قضیه ۵,۲) خالدی و شیکد [۲۳] نتیجه حاصل می‌شود.

ب) Y دارای تابع چگالی لگاریتم محدب (لگاریتم مقعر) است یعنی برای تمام مقادیر $t \le s$ داریم $Y_t \le_{lr} \left(\ge_{lr}\right)Y_s$. از رابطه $\mathbf{s}_1 \le_{lr} \mathbf{s}_2$ نتیجه می‌گیریم که $T_1 \le_{lr} T_2$؛ [۹] را ببینید. با توجه به نمایش آمیخته در قضیه۳-۱، از قضیه ۷,۲ (قضیه ۸,۲) خالدی و شیکد [۲۳] نتیجه به دست می‌آید.

۴- نتایجی در مورد ضعیف‌ترین و قوی‌ترین مؤلفه‌های سالم

فرض کنید T بیانگر طول عمر یک شبکه با بردار علامت به فرم (۳) باشد که مؤلفه‌های شبکه براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda\left(t\right) = -\log\bar{G}\left(t\right)$ از کار می‌افتند. همچنین متغیر تصادفی N تعداد مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی شبکه را نشان می‌دهد. بنابراین شبکه از کار می‌افتد هرگاه $n-N$ مؤلفه آن خراب شوند و طول عمر شبکه را می‌توان به‌صورت $T = R_{n-N}$ نوشت. به‌سادگی مشاهده می‌شود که

$$P\left(N = n-k\right) = P\left(T = R_k\right) = \begin{cases} s_k, & k = 1,\ldots,u \\ 0, & k = u+1,\ldots,n \end{cases}$$

فرض کنید که $\left(Z_1,\ldots,Z_N\right)$ بیانگر یک جایگشت تصادفی از $R_{n-N+1},\ldots,R_n$ باشد.بعد از خرابی شبکه، مؤلفه‌های سالم آن در شبکه‌ای استفاده می‌شود که با همان شرایط شبکه قبلی کار می‌کند. در این صورت طول عمر باقیمانده این مؤلفه‌ها که با $Z_1^*,\ldots,Z_N^*$ نشان داده می‌شود را به‌صورت

$$Z_i^* = Z_i - R_{n-N}, \qquad i = 1,\dots,N \tag{15}$$

می‌توان نوشت. اریلماز و بایرامو [۸] ویژگی‌های مؤلفه‌های سالم یک سیستم منسجم، زمانی که طول عمر مؤلفه‌ها مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک F هستند را مورد بررسی قرار دادند. در ادامه، توزیع توأم متغیرهای تصادفی (۱۵) را به دست می‌آوریم.

قضیه ۴-۱: فرض کنید مؤلفه‌های شبکه با بردار علامت به فرم (۳) براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t) = -\log \bar{G}(t)$ خراب می‌شوند. تابع بقای توأم متغیرهای تصادفی (۱۵) به‌صورت

$$\bar{H}_n^*(z_1,\dots,z_N) = \sum_{k=1}^{u} s_k \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-k} \frac{\bar{G}(z_j + t)}{\bar{G}(t)} dG_{(k)}(t),$$

نوشته می‌شود، که در آن $G_{(k)}$ بیانگر تابع توزیع kامین رکورد در دنباله متغیرهای تصادفی مستقل با تابع بقای مشترک $\bar{G}$ است.

اثبات: با استفاده از قانون احتمال کل داریم

$$\begin{aligned}\bar{H}_n^*(z_1,\dots,z_N) &= P(Z_1^* > z_1,\dots,Z_N^* > z_N) \\ &= \sum_{k=1}^{u} P(T = R_k) P(Z_1^* > z_1,\dots,Z_N^* > z_N \mid T = R_k) \\ &= \sum_{k=1}^{u} P(T = R_k) P(Z_1^* > z_1,\dots,Z_N^* > z_N \mid T = R_k)\end{aligned} \tag{16}$$

که احتمال شرطی در جمع‌وند، تابع بقای توأم طول عمر باقیمانده مؤلفه‌های سالم یک سیستم $(n-k+1)$ از n بعد از خراب شدن آن است. بنابراین با استفاده از نکته ۳-۱، قضیه نتیجه می‌شود.

در ادامه نشان می‌دهیم که قابلیت اعتماد ضعیف‌ترین (قوی‌ترین) مؤلفه‌های سالم شبکه به‌صورت ترکیبی از قابلیت اعتماد ضعیف‌ترین (قوی‌ترین) مؤلفه‌های سالم یک سیستم $(n-k+1)$ از n نوشته می‌شود. به این منظور ابتدا قابلیت اعتماد ضعیف‌ترین و قوی‌ترین مؤلفه سالم بعد از خرابی یک سیستم $(n-k+1)$ از n را به دست می‌آوریم. فرض کنید که مؤلفه‌های سیستم $(n-k+1)$ از n براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن توصیف شده در قضیه۴-۱ از کار می‌افتند. اگر به ترتیب $Z_{1:n-k}^{(k)}$ و $Z_{n-k:n-k}^{(k)}$ را طول عمر باقیمانده ضعیف‌ترین و قوی‌ترین مؤلفه سالم بعد از خرابی سیستم در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از رابطه (۷) داریم

$$P\left(Z_{1:n-k}^{(k)}>z\right)=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}dG_{(k)}(t) \tag{17}$$

و

$$P\left(Z_{n-k:n-k}^{(k)}>z\right)=1-\int_{0}^{\infty}\left(\frac{G(z+t)-G(t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}dG_{(k)}(t). \tag{18}$$

حال، قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴-۲:

الف) اگر G یک توزیع DFR باشد، آنگاه $Z_{1:n-k}^{(k)} \leq_{st} Z_{1:n-k-1}^{(k+1)}$.

ب) اگر G یک توزیع IFR باشد، آنگاه $Z_{n-k:n-k}^{(k)} \geq_{st} Z_{n-k-1:n-k-1}^{(k+1)}$.

اثبات: الف) G یک توزیع DFR است اگر و تنها اگر برای تمام zها نسبت به t صعودی باشد. ازآنجاکه $R_k \leq_{st} R_{k+1}$، براساس رابطه (۱۷) داریم

$$\begin{aligned}P\left(Z_{1:n-k}^{(k)}>z\right)&=\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}dG_{(k)}(t)\in\\&\leq\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}dG_{(k+1)}(t)\\&\leq\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k-1}dG_{(k+1)}(t)=P\left(Z_{1:n-k-1}^{(k)}>z\right)\end{aligned}$$

که آخرین نامساوی از اینکه $\left(\frac{\bar{G}(t+z)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}$ نسبت به k صعودی است، نتیجه می‌شود.

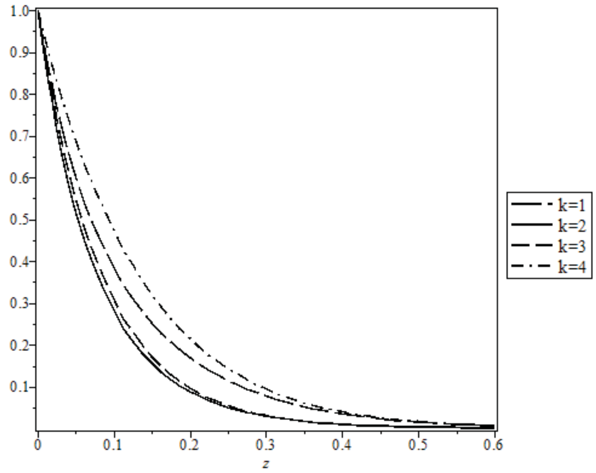
ب) می‌دانیم که G یک توزیع IFR است اگر و تنها اگر برای تمام zها، $\frac{\bar{G}(t+z)}{\bar{G}(t)}$ نسبت به t نزولی باشد. با توجه به اینکه

$$P\left(Z_{n-k:n-k}^{(k)}\leq z\right)=\int_{0}^{\infty}\left(1-\frac{\bar{G}(t+z)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k}dG_{(k)}(t),$$

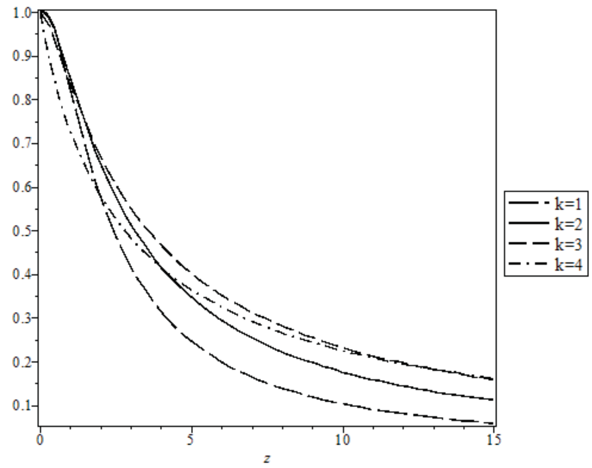
اثبات مشابه با قسمت (الف) کامل می‌گردد.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که با برقرار نبودن فرضیات قضیه ۴-۲ ممکن است نتیجه برقرار نباشد.

مثال ۴-۱: یک سیستم $(۶-k)$ از ۵ که مؤلفه‌های آن براساس یک فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t)=-\log\bar{G}(t)$ خراب می‌شوند را در نظر بگیرید. شکل ۳، تابع قابلیت اعتماد ضعیف‌ترین مؤلفه سالم بعد از خرابی این سیستم را برای $\bar{G}(t)=e^{-t^{۳}}, t>۰$ که یک توزیع IFR است، نشان می‌دهد. همچنین شکل ۴، نمودار تابع قابلیت اعتماد قوی‌ترین مؤلفه سالم بعد از خرابی سیستم را برای $\bar{G}(t)=\frac{۱}{(۱+t)^{۲}}, t>۰$ که یک توزیع DFR است، نشان می‌دهد. همان‌طور که نمودارها نشان می‌دهند، قضیه ۴-۲ زمانی که مفروضات برقرار نیستند، ممکن است برقرار نباشد.



شکل (۳): نمودار $P\left(Z_{۱:۵-k}^{(k)}>z\right)$ برای $\bar{G}(t)=e^{-t^{۳}}, t>۰$



شکل (۴): نمودار $P\left(Z^{(k)}_{5-k:5-k} > z\right)$ برای $\bar{G}(t)=\frac{1}{(1+t)^2}, t>0$

اگر $Z^{*}_{1:N}$ ($Z^{*}_{N:N}$) را ضعیف‌ترین (قوی‌ترین) مؤلفه سالم بعد از خرابی شبکه در نظر بگیریم، آنگاه با فرض اینکه بردار علامت شبکه به فرم (۳) باشد، با استفاده از قضیه ۴-۱ داریم

$$\begin{aligned} P\left(Z^{*}_{1:N} > z\right) &= P(Z^{*}_{1} > z, \ldots, Z^{*}_{N} > z) \\ &= \sum_{k=1}^{u} s_k \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\bar{G}(z+t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k} dG_{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} > z\right) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P\left(Z^{*}_{N:N} > z\right) &= 1 - P\left(Z^{*}_{1} \le z, \ldots, Z^{*}_{N} \le z\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{u} s_k \int_{0}^{\infty} \left(\frac{G(z+t) - G(t)}{\bar{G}(t)}\right)^{n-k} dG_{(k)}(t) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{n-k:n-k} \le z\right) = \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{n-k:n-k} > z\right). \end{aligned}$$

همچنین توزیع توأم $Z^{*}_{1:N}$ و $Z^{*}_{N:N}$ را می‌توان به‌صورت یک آمیخته نمایش داد. برای نشان دادن این موضوع، توجه کنید که

$$P\left(Z^*_{1:N} \le x, Z^*_{N:N} \le y\right) = P\left(Z^*_{N:N} \le y\right) - P\left(Z^*_{1:N} > x, Z^*_{N:N} \le y\right). \quad (19)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} P\left(Z^*_{1:N} > x, Z^*_{N:N} \le y\right) &= P(x < Z^*_1 \le y, \ldots, x < Z^*_N \le y) \\ &= \sum_{k=1}^{u} s_k \int_0^\infty \left(\frac{G\left(y+t\right) - G\left(x+t\right)}{\bar{G}\left(t\right)}\right)^{n-k} dG_{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} > x, Z^{(k)}_{n-k:n-k} \le y\right). \end{aligned}$$

در این صورت از رابطه (۱۹) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P\left(Z^*_{1:N} \le x, Z^*_{N:N} \le y\right) &= \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{n-k:n-k} \le y\right) \\ &- \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} > x, Z^{(k)}_{n-k:n-k} \le y\right) \\ &= \sum_{k=1}^{u} s_k P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} \le x, Z^{(k)}_{n-k:n-k} \le y\right). \end{aligned}$$

حال قضیه زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۴-۳: فرض کنید $\mathbf{s}_1 = \left(s_{11}, \ldots, s_{1u}, 0, \ldots, 0\right)$ و $\mathbf{s}_2 = \left(s_{21}, \ldots s_{2u}, 0, \ldots, 0\right)$ بردارهای علامت دو شبکه باشند که مؤلفه‌های هرکدام از آن‌ها بر طبق فرآیند پواسون ناهمگن با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t) = -\log \bar{G}(t)$ از کار می‌افتند. همچنین N_1 و N_2 به ترتیب بیانگر تعداد مؤلفه‌های سالم بعد از خرابی شبکه باشند.

الف) اگر $\mathbf{s}_1 \le_{st} \mathbf{s}_2$ و G یک توزیع DFR باشد، آنگاه $Z^*_{1:N_1} \le_{st} Z^*_{1:N_2}$.

ب) اگر $\mathbf{s}_1 \le_{st} \mathbf{s}_2$ و G یک توزیع IFR باشد، آنگاه $Z^*_{N_1:N_1} \ge_{st} Z^*_{N_2:N_2}$.

اثبات: الف) با استفاده از قضیه ۴-۲، اگر G یک توزیع DFR باشد، آنگاه $P(Z^{(k)}_{1:n-k} > z)$ نسبت به k صعودی است. ازآنجاکه $\mathbf{s}_1 \le_{st} \mathbf{s}_2$، داریم

$$P\left(Z^{*}_{1:N_1} > z\right) = \sum_{k=1}^{u} s_{1,k} P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} > z\right) \le \sum_{k=1}^{u} s_{2,k} P\left(Z^{(k)}_{1:n-k} > z\right) = P\left(Z^{*}_{1:N_2} > z\right).$$

ب) اثبات مشابه با قسمت (الف) است.

مثال ۴-۲: دو شبکه با گراف‌هایی که در شکل ۵ آمده است را در نظر بگیرید. ترمینال‌های شبکه سمت چپ و راست به ترتیب $\{a,b,c,d\}$ و $\{a,d\}$ هستند. هر شبکه کار می‌کند اگر و تنها اگر تمام ترمینال‌های آن به هم متصل باشند. فرض کنید یال‌های دو شبکه بر اساس فرآیندهای پواسون ناهمگن یکسان با تابع مقدار میانگین $\Lambda(t) = -\log\bar{G}(t)$ در معرض خرابی باشند. بردارهای علامت دو شبکه به‌صورت زیر به دست می‌آیند

$$\mathbf{s}_2 = (0, 0/2, 0/6, 0/2, 0), \qquad \mathbf{s}_1 = (0, 0/2, 0/8, 0, 0).$$

شکل (۵): شبکه‌ها با بردارهای علامت $\mathbf{s}_1$ (سمت چپ) و $\mathbf{s}_2$ (سمت راست)

ازآنجاکه $\mathbf{s}_2 \le_{st} \mathbf{s}_1$، با استفاده از قضیه۴-۲ و با توجه به اینکه G یک توزیع DFR (IFR) است، داریم $Z_{1:N_2} \le_{st} Z_{1:N_1}$ $(Z_{N_2:N_2} \ge_{st} Z_{N_1:N_1})$.

تشکر و قدردانی

نویسنده از داوران ارجمند که نظرات سازنده‌شان موجب بهبود مقاله شد و از سردبیر محترم مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی کمال قدردانی را دارد.

منابع

[1] Boland, P.J., Samaniego, F.J. and Vestrup, E.M. (2003). Linking dominations and signatures in network reliability theory, In: *Lindquist,*

B.H., Doksum, K.A. (Eds) Mathematical and statistical methods in reliability. World Scientific, Singapore, 89-103.

[2] Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **34**, 69-72.

[3] Zarezadeh, S., Mohammadi, L. and Balakrishnan, N. (2018). On the joint signature of several coherent systems with some shared components, *European Journal of Operational Research*, **264**(3), 1092-1100.

[4] Navarro, J., Balakrishnan, N. and Samaniego. F.J. (2008). Mixture representations of residual lifetimes of used systems. *Journal of Applied Probability*, **45**, 1097-1112.

[5] Eryilmaz, S. (2014). A study on reliability of coherent systems equipped with a cold standby component, *Metrika*, **77**, 349-359.

[6] Gertsbakh, I., Rubinstein, R., Shpungin, Y. and Vaisman, R. (2014). Permutational methods for performance analysis of stochastic flow networks, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **28**(1), 21-38.

[7] Patelli, E., Feng, G., Coolen, F.P. and Coolen-Maturi, T. (2017). Simulation methods for system reliability using the survival signature, *Reliability Engineering & System Safety*, **167**, 327-337.

[8] Eryilmaz, S. and Bayramoglu, I. (2012). On extreme residual lives after the failure of the system, *Mathematical Problems in Engineering*, 1-11.

[9] Zarezadeh, S. and Asadi, M. (2013). Network reliability modeling under stochastic process of component failures, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**(4), 917-929.

[10] Nakagawa, T. (2011). *Stochastic Processes: With Applications to Reliability Theory,* New York: Springer-Verlag.

[11] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (2011). *Records,* Wiley.

[12] Gupta, R. C. and Kirmani, S.N.U.A. (1988). Closure and monotonicity properties of nonhomogeneous Poisson processes and record values, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **2**, 475-484.

[13] Balakrishnan, N. and Asadi, M. (2012). A proposed measure of residual life of live components of a coherent system, *IEEE Transactions on Reliability*, **61**(1), 41-49.

[14] Bairamov, I. and Arnold, B.C. (2008). On the residual life lengths of the remaining components in a (n - k + 1)-out-of-n system, *Statistics & Probability Letters*, **78**, 945-952.

[15] Gurler, S. (2012). On residual lifetimes in sequential (n-*k*+1)-out-of-*n* systems. *Statistical Papers*, **53**(1), 23-31.

[16] Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2014). Stochastic orderings and ageing properties of residual life lengths of live components in (n-k+ 1)-out-of-n systems, *Journal of Applied Probability*, **51**(1), 58-68.

[17] Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2016). Multivariate stochastic comparisons of multivariate mixture models and their applications, *Journal of Multivariate Analysis*, **145**, 37-43.

[18] Kelkinnama, M. and Asadi, M. (2014). Stochastic properties of components in a used coherent system, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **16**(3), 675-691.

[19] Kelkin Nama, M., Asadi, M. and Zhang, Z. (2013). On the residual life lengths of the remaining components in a coherent system, *Metrika*, **76**(7), 979-996.

[20] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*, New York: Springer-Verlag.

[21] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C. and Wang, F. (2004). Cumulative residual entropy: A new measure of information, *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**(6), 1220-1228.

[22] Elperin, T., Gertsbakh, I. and Lomonosov, M. (1991). Estimation of network reliability using graph evolution models, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**(5), 572-581.

[23] Khaledi, B.E. and Shaked, M. (2010). Stochastic comparisons of multivariate mixtures. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**(10), 2486-2498.

[24] Belzunce, F., Mercader, J.A., Ruiz, J.M. and Spizzichino, F. (2009). Stochastic comparisons of multivariate mixture models. *Journal of Multivariate Analysis*, **100**(8), 1657-1669.

[25] Ahmadi, J. and Arghami, N.R. (2001). Some univariate stochastic orders on record values. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **30**, 69-74.

On the Stochastic Properties of Unfailed Components in Used Networks

Somayeh Zarezadeh

Department of Statistics, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract

We consider a two-state network consists of n components and assume that the failure of components occur according to a nonhomogeneous Poisson process. Some networks have the property that after the failure, some of the components remain unfailed. The remaining unfailed components might be resumed from the network and be used again in a new network. In this paper, we explore some aging properties and stochastic comparisons of the residual lifetime of remaining unfailed components of the failed network.

Keywords: Stochastic Ordering; Record values; Two-state networks; Nonhomogeneous Poisson Process; Signature.

Mathematics Subject Classification (2010): 90B25, 68M15.