

برآورد قابلیت اعتماد، در مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای بر پایه توزیع گومپرتز

شهرام یعقوب زاده شهرستانی^۱

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۹/۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱

چکیده: در این مقاله، قابلیت اعتماد در مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، وقتی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع‌های گومپرتز با پارامترهای شکل متفاوت α و β و پارامتر یکسان λ هستند، به روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی برآورد می‌شود. همچنین به روش شبیه‌سازی مونت کارلو، یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده و برای تشریح روش‌های برآورد از دو مجموعه داده‌های واقعی استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، برآورد قابلیت اعتماد، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، میانگین مربع خطا، برآورد بیزی، توزیع گومپرتز.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۵، ۶۲G۰۵، ۶۲N۰۵

۱-مقدمه

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع گومپرتز^۲ (گومپرتز [۱]) به ترتیب به صورت زیر است.

$$f(x) = \alpha e^{\lambda x} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

که λ پارامتر مقیاس و α پارامتر شکل هستند. در این مقاله، توزیع با تابع چگالی احتمال (۱) و تابع توزیع تجمعی (۲) با نماد $Gom(\alpha, \lambda)$ نشان داده می‌شود. توزیع گومپرتز برای برآورد داده‌های علوم مختلف از جمله کامپیوتر، بازاریابی، زیست‌شناسی، بیمه و برای مدل‌بندی داده‌های نرخ مرگ‌ومیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $Gom(\alpha, \lambda)$ و $Gom(\beta, \lambda)$ در نظر گرفته می‌شوند، برآورد قابلیت اعتماد^۱، در مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای^۲ به دست آورده می‌شود. یک سیستم با k مؤلفه را در نظر بگیرید که این مؤلفه‌ها، به ترتیب مقاومت‌های تصادفی X_1, X_2, \dots, X_k ، دارند و این مقاومت‌های تصادفی، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع هستند. همچنین هر کدام از این k مؤلفه، تنش تصادفی Y دارد. این سیستم تا زمانی فعال است که حداقل s مؤلفه از k ($1 \leq s \leq k$) مؤلفه، مقاومتش بر تنشش غلبه کند. بنابراین قابلیت اعتماد سیستم چند مؤلفه‌ای، معیاری برای توصیف طول عمر این سیستم است که برآورد آن به روش‌های مختلف و مقایسه آن‌ها با یکدیگر توصیه می‌شود.

یک هواپیما با چهار موتور را در نظر بگیرید که متغیرهای X_1, X_2, X_3, X_4 و X_5 بیانگر قدرت موتورها (متغیرهای مقاومت) و متغیر Y بیانگر عامل دما (متغیر تنش) باشد که روی کارکرد موتورها تأثیرگذار است. فرض کنید سیستم این هواپیما طوری است که حداقل باید دو موتور کار کند تا هواپیما سقوط نکند. بنابراین، احتمال کار کردن حداقل دو موتور از چهار موتور، احتمال سقوط نکردن هواپیما است (پاکدامن و احمدی [۲]).

یک پل را در نظر بگیرید که برای ایمنی بیشتر توسط شش کابل نگه‌داشته است، طوری که حداقل لازم است تا چهار کابل از شش کابل پاره نشود تا پل سقوط نکند، بنابراین احتمال پاره نشدن حداقل چهار کابل از شش کابل، احتمال سالم ماندن پل است (پاکدامن و احمدی [۲]).

فرض کنید Y, X_1, X_2, \dots, X_k متغیرهای تصادفی مستقل از هم و $G(y)$ تابع توزیع پیوسته Y و $F(x)$ تابع توزیع پیوسته مشترک X_1, X_2, \dots, X_k باشند. آنگاه با توجه به باتاچاریا و جانسون [۳]، قابلیت اعتماد در سیستم چند مؤلفه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$R_{s,k} = P[at Least s of the (X_1, X_2, \dots, X_k) exceed Y] \quad (3)$$

$$= \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F(y)]^i [F(y)]^{k-i} dG(y),$$

که در آن X_1, X_2, \dots, X_k متغیرهای تصادفی مستقل و دارای تابع توزیع مشترک $F(x)$ و تنش تصادفی Y هستند. نویسندگان زیادی به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت تک مؤلفه‌ای برای توزیع‌های مختلف پرداخته‌اند. بعضی از آن‌ها عبارتند از: انیس و جیسر [۴]، داونت [۵]، آواد و چارف [۶]، ناندی و ایچ [۷]، ركب و کاندو [۸]، کاندو و گوپتا [۹]، ركب و همکاران [۱۰]، اصغرزاده و همکاران [۱۱]، لیو و تسای [۱۲]، ال-موتایری و همکاران [۱۳] و گیتانی و همکاران [۱۴]. برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای که توسط باتاچاریا و جانسون [۳] و پاندی برهان اودین [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت، در سال‌های اخیر نیز مورد توجه بعضی از نویسندگان قرار گرفت. مانند راثو و کنتام [۱۶]، راثو [۱۷-۱۸] و راثو و همکاران [۱۹] که به برآورد قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای به ترتیب برای توزیع‌های لگ-لجستیک، نمایی تعمیم‌یافته، رایلی و وایبول توانی پرداخته‌اند. در بخش دوم این مقاله، $R_{s,k}$ در حالت‌های یکسان بودن و متفاوت بودن پارامتر مقیاس به دست آورده می‌شود. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و برآورد بیزی $R_{s,k}$ در بخش سوم به دست آورده می‌شود. در بخش چهارم به روش مونت کارلو، مطالعه شبیه‌سازی انجام می‌شود. همچنین در این بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی، برای تشریح روش‌های برآورد استفاده می‌گردد. بخش پنجم نیز به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲- محاسبه $R_{s,k}$

در این بخش، $R_{s,k}$ در حالت‌های یکسان بودن و متفاوت بودن پارامتر مقیاس بر اساس توزیع گومپرتز به دست آورده می‌شود.

۲-۱- محاسبه $R_{s,k}$ در حالت یکسان بودن پارامتر مقیاس

فرض کنید X (مقاومت) و Y (تنش) متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $Gom(\alpha, \lambda)$ و $Gom(\beta, \lambda)$ هستند. با توجه به رابطه (۳)، قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای برای توزیع گومپرتز به صورت

$$\begin{aligned}
 R_{s,k} &= \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^{\infty} [e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)}]^i [1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)}]^{k-i} \beta e^{\lambda y} e^{-\frac{\beta}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)} dy \\
 &= \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j \beta}{\beta + (j+i)\alpha}
 \end{aligned} \tag{۴}$$

به دست آورده می‌شود، که مثلاً" به ازای $(s, k) = (1, 3), (2, 4)$ داریم:

$$R_{\gamma, \tau} = \frac{\beta^\tau + \epsilon \alpha \beta^\tau + \gamma \alpha^\tau \beta}{(\beta + \alpha)(\beta + \tau \alpha)(\beta + \tau \alpha)} \quad R_{\gamma, \epsilon} = \frac{\beta^\tau + \epsilon \alpha \beta^\tau + \tau \epsilon \alpha^\tau \beta}{(\beta + \tau \alpha)(\beta + \tau \alpha)(\beta + \tau \alpha)}$$

۲-۲- محاسبه $R_{s,k}$ در حالت متفاوت بودن پارامتر مقیاس

در این زیر بخش به قضیه‌ای اشاره می‌شود که در محاسبه $R_{s,k}$ مفید است.

قضیه ۱: به ازای هر $\gamma \in R$ و $|z| < 1$ داریم:

$$(-\log(1-z))^\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\gamma) z^{m+\gamma}$$

که در آن $\rho_m(\gamma) = 1$ و به ازای $m \geq 1$ ، $\rho_m(\gamma) = m\psi_{m-1}(m+\gamma-1)$ است، که ضرایب (ψ_m) ها چندجمله‌ای‌های استرلینگ نام دارند و در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\psi_{n-1}(w) = \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \left[H_n^{n-1} - \frac{w+\tau}{n+\tau} H_n^{n-\tau} + \frac{(w+\tau)(w+\tau)}{(n+\tau)(n+\tau)} H_n^{n-\tau} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=\tau}^n \frac{w+i}{n+i} \right) H_n^\circ \right] \right]$$

که در آن H_n^m ها اعداد مثبت هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند. برای جزئیات بیشتر و نحوه محاسبه (ψ_m) ها به کاستلارس و لمونته [۲۰] رجوع شود.

$$H_n^\circ = H_{n+1}^n = 1, \quad H_{n+1}^\circ = \prod_{i=0}^n (\tau i + 1)$$

$$H_{n+1}^m = (\tau n + 1 - m) H_n^m + (n + m - 1) H_n^{m-1}$$

برهان: به وارد [۲۱] رجوع شود.

فرض کنید X (مقاومت) و Y (تنش) متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $Gom(\alpha, \lambda)$ و $Gom(\beta, \eta)$ باشد. با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y} - 1)} \right]^i \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y} - 1)} \right]^{k-i} \beta e^{\eta y} e^{-\frac{\beta}{\eta}(e^{\eta y} - 1)} dy$$

به کمک بسط مک‌لورن $e^{-\frac{\beta}{\eta}(e^{\eta y} - 1)}$ و تغییر متغیر $t = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y} - 1)}$ و $\frac{\eta}{\lambda} = \delta$ و $v = \frac{\beta}{\alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 R_{s,k} &= ve^\eta \sum_{i=s}^{\beta} \sum_{j=0}^k \binom{k}{i} \frac{(-\beta)^j}{j!} \int_0^1 (\lambda - t)^i t^{k-i} \left(\lambda - \frac{\lambda}{\alpha} \log(\lambda - t)\right)^{\delta(j+1)-1} dt \\
 &= \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^1 \left[e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y} - 1)} \right]^i \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y} - 1)} \right]^{k-i} \beta e^{\eta y} e^{-\frac{\beta}{\eta}(e^{\eta y} - 1)} dy \\
 &= ve^\eta \sum_{i=s}^{\beta} \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{i} \binom{\delta(j+1)-1}{r} \frac{(-\beta)^j}{j!} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^r \int_0^1 (\lambda - t)^{i-1} t^{k-i} (-\log(\lambda - t))^r dt
 \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۱ داریم:

$$R_{s,k} = ve^\eta \sum_{i=s}^{\beta} \sum_{j=0}^k \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{k}{i} \binom{\delta(j+1)-1}{r} \frac{(-\beta)^j}{j!} \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^r \rho_q(r) \text{Beta}(i, k - i + q + r + 1)$$

۳- روش‌های برآورد $R_{s,k}$

در این بخش برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی $R_{s,k}$ به دست آورده می‌شود.

۳-۱- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$

فرض کنید X دارای توزیع $\text{Gom}(\alpha, \lambda)$ و Y دارای توزیع $\text{Gom}(\beta, \lambda)$ و $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ یک نمونه تصادفی از X و Y باشند. بنابراین لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = n \ln \alpha + m \ln \beta + \lambda \left(\sum_{i=1}^n X_i + \sum_{j=1}^m Y_j \right) - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda X_i} - 1) - \frac{\beta}{\lambda} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda Y_j} - 1)$$

است، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی α و β که به ترتیب با نمادهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\hat{\alpha}(\lambda) = \frac{n\lambda}{\sum_{i=1}^n (e^{\lambda X_i} - 1)}, \quad \hat{\beta}(\lambda) = \frac{m\lambda}{\sum_{j=1}^m (e^{\lambda Y_j} - 1)} \quad (5)$$

به دست آورده می‌شوند. با جایگذاری $\hat{\alpha}(\lambda)$ و $\hat{\beta}(\lambda)$ در $L(\alpha, \beta, \lambda)$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی λ یعنی $\hat{\lambda}_{ML}$ به دست می‌آید، که در حقیقت جواب معادله $K(\lambda) = \lambda$ است، طوری که

$$K(\lambda) = (n+m) \left(\frac{n \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda x_i}}{\sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1)} + \frac{m \sum_{j=1}^m y_j e^{\lambda y_j}}{\sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1)} - \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^m y_j \right)^{-1}$$

است. با استفاده از روش تکراری $K(\lambda^{(j)}) = \lambda^{(j+1)}$

می‌توان جواب معادله $K(\lambda) = \lambda$ را به دست آورد که برآورد ماکسیمم درست‌نمایی λ یعنی $\hat{\lambda}_{ML}$ است. اکنون به کمک رابطه (۵)، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی α و β به ترتیب به صورت‌های $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{\lambda}_{ML})$ و $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\hat{\lambda}_{ML})$ به دست می‌آیند. بعد از به دست آوردن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ که با نماد $\hat{R}_{s,k}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است.

$$\hat{R}_{s,k} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j \hat{\beta}}{\hat{\beta} + (j+i)\hat{\alpha}}$$

۲-۱-۱- واریانس مجانبی $\hat{R}_{s,k}$

با توجه به راثو [۲۲] واریانس مجانبی $\hat{R}_{s,k}$ به صورت

$$V(\hat{R}_{s,k}) = V(\hat{\alpha}) \left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right)^{\top} + V(\hat{\beta}) \left(\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^{\top} \quad (۷)$$

به دست می‌آید، که در آن

$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^{j+1} (j+i)\beta}{(\beta + (j+i)\alpha)^{\top}}$$

$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j (j+i)\alpha}{(\beta + (j+i)\alpha)^{\top}}$$

$$V(\hat{\alpha}) = \left\{ E \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{\alpha^2}{n},$$

$$V(\hat{\beta}) = \left\{ E \left[-\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{\beta^2}{m}$$

هستند، که در محاسبه فاصله اطمینان مجانبی $R_{s,k}$ به ازای S و k مشخص مفید است.

۳-۲- برآورد بیزی $R_{s,k}$

در این بخش برآورد بیزی $R_{s,k}$ تحت تابع زیان درجه دوم یعنی $L(\theta, \hat{\theta}) = (\theta - \hat{\theta})^2$ به دست آورده می‌شود.

فرض کنید X_1, \dots, X_n و Y_1, \dots, Y_m دو نمونه تصادفی مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع‌های $Gom(\alpha, \lambda)$ و $Gom(\beta, \lambda)$ هستند. با فرض آن که پارامترهای α و β و λ مستقل از هم و به ترتیب دارای توزیع‌های پیشین

$$\pi(\alpha) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha^{a_1-1} e^{-b_1 \alpha}, b_1 > 0, a_1 > 0, \alpha > 0$$

$$\pi(\beta) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} e^{-b_2 \beta}, b_2 > 0, a_2 > 0, \beta > 0$$

$$\pi(\lambda) = \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \lambda^{a_3-1} e^{-b_3 \lambda}, b_3 > 0, a_3 > 0, \lambda > 0$$

هستند، توزیع پسین توأم α ، β و λ به صورت

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\alpha^{n+a_1-1} \beta^{m+a_2-1} \lambda^{a_3-1} e^{-\alpha(t+b_1)} e^{-\beta(u+b_2)} e^{-\lambda(b_3-n\bar{x}-m\bar{y})}}{\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2) \int_0^\infty \frac{\lambda^{a_3-1} e^{-\lambda(b_3-n\bar{x}-m\bar{y})}}{(t+b_1)^{n+a_1} (u+b_2)^{m+a_2}} d\lambda}$$

به دست آورده می‌شود که در آن $t = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1)$ ، $u = \lambda^{-1} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1)$ و است. چون

برآورد بیز تحت تابع زیان درجه دوم، امید ریاضی توزیع پسین است، بنابراین برآورد بیز $R_{s,k}$ که با نماد $\hat{R}_{s,k}^B$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\hat{R}_{s,k}^B = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty R_{s,k} \pi(\alpha, \beta, \lambda | \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\alpha d\beta d\lambda}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\alpha, \beta, \lambda | \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\alpha d\beta d\lambda}$$

به دست می‌آید. چون $\hat{R}_{s,k}^B$ به روش معمول به دست نمی‌آید، در این مقاله به کمک روش تقریب لیندلی [۲۳] به دست آورده می‌شود. به‌طورکلی جواب نسبت انتگرال‌های به فرم

$$E(u(\lambda) | \mathbf{z}) = \frac{\int u(\lambda) e^{Q(\lambda)} d\lambda}{\int e^{Q(\lambda)} d\lambda}$$

که در آن $Q(\lambda) = I(\lambda) + \rho(\lambda)$ ، $I(\lambda)$ لگاریتم تابع

درست‌نمایی مشاهدات و $\rho(\lambda)$ لگاریتم توزیع پیشین λ است. به روش تقریب لیندلی به‌صورت

$$E(u(\lambda) | \mathbf{z}) \cong \left[u + \frac{1}{\nu} \sum_i \sum_j (u_{ij} + \nu u_i \rho_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{\nu} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l L_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right]_{\hat{\lambda}} \quad (\lambda)$$

به دست می‌آید که در آن $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ، $i, j, k, l = 1, 2, \dots, m$ ، $u_i = \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda_i}$ ، $u = u(\lambda)$

ماتریس $\{-L_{ij}\}$ هستند. برای $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ رابطه (۸) به‌صورت

$$E(u(\lambda) | \mathbf{z}) = u + \sum_{i=1}^r u_i a_i + a_4 + a_5 + \frac{1}{\nu} \left[A \sum_{i=1}^r u_i \sigma_{1i} + B \sum_{i=1}^r u_i \sigma_{2i} + C \sum_{i=1}^r u_i \sigma_{3i} \right]_{(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)}$$

تبدیل می‌شود که در آن $\hat{\lambda}_1$ ، $\hat{\lambda}_2$ و $\hat{\lambda}_3$ به ترتیب برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای λ_1 ، λ_2 و λ_3 هستند و همچنین داریم:

$$a_i = \sum_{j=1}^r \rho_j \sigma_{ij} \quad i = 1, 2, 3 \quad a_4 = u_{12} \sigma_{12} + u_{13} \sigma_{13} + u_{23} \sigma_{23} \quad a_5 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^r u_{ii} \sigma_{ii}$$

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_{ii} L_{ii1} + \nu (\sigma_{12} L_{121} + \sigma_{13} L_{131} + \sigma_{23} L_{231}),$$

$$B = \sum_{i=1}^r \sigma_{ii} L_{ii2} + \nu (\sigma_{12} L_{122} + \sigma_{13} L_{132} + \sigma_{23} L_{232})$$

$$C = \sum_{i=1}^r \sigma_{ii} L_{ii3} + \nu (\sigma_{12} L_{123} + \sigma_{13} L_{133} + \sigma_{23} L_{233}),$$

$$D = L_{11}L_{\tau\tau}^{\gamma} - L_{11}L_{\tau\tau}L_{\tau\tau} + L_{11}^{\gamma}L_{\tau\tau}$$

$$\sigma_{11} = \frac{L_{\tau\tau}L_{\tau\tau} - L_{\tau\tau}^{\gamma}}{D}, \sigma_{1\tau} = \sigma_{\tau 1} = \frac{L_{11}L_{1\tau}}{D}, \sigma_{1\tau} = \sigma_{\tau 1} = \frac{L_{1\tau}L_{\tau\tau}}{D}, \sigma_{\tau\tau} = \frac{L_{11}L_{\tau\tau} - L_{1\tau}^{\gamma}}{D}$$

$$\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\tau\tau} = \frac{-L_{11}L_{\tau\tau}}{D}, \sigma_{\tau\tau} = \frac{L_{11}L_{\tau\tau}}{D}$$

بنابراین برای $(\lambda_1, \lambda_\tau, \lambda_r) = (\alpha, \beta, \lambda)$ و $u = u(\alpha, \beta, \lambda) = R_{s,k}$ که در رابطه (۴) داده شده است، داریم:

$$\rho_1 = \frac{a_1 - 1}{\alpha} - b_1, \quad \rho_\tau = \frac{a_\tau - 1}{\beta} - b_\tau, \quad \rho_r = \frac{a_r - 1}{\lambda} - b_r,$$

$$L_{11} = -\frac{n}{\alpha^\gamma}, \quad L_{\tau\tau} = -\frac{m}{\beta^\gamma}, \quad L_{1\tau} = L_{\tau 1} = 0$$

$$L_{\tau\tau} = \frac{\gamma}{\lambda^\gamma} \left(\alpha \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda x_i} + \sum_{j=1}^m y_j e^{\lambda y_j} \right) - \frac{\gamma}{\lambda^\gamma} \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1) + \beta \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1) \right\}$$

$$- \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n x_i^\gamma e^{\lambda x_i} + \sum_{j=1}^m y_j^\gamma e^{\lambda y_j} \right)$$

$$L_{1\tau} = L_{\tau 1} = \frac{1}{\lambda^\gamma} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda x_i},$$

$$L_{\tau\tau} = L_{\tau\tau} = \frac{1}{\lambda^\gamma} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1) - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m y_j e^{\lambda y_j}$$

$$L_{111} = \frac{\gamma n}{\alpha^\gamma}, L_{\tau\tau\tau} = L_{1\tau\tau} = 0,$$

$$L_{\tau\tau 1} = L_{1\tau\tau} = \frac{\gamma}{\lambda^\gamma} \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda x_i} - \frac{\gamma}{\lambda^\gamma} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1), L_{\tau\tau\tau} = \frac{\gamma m}{\beta^\gamma}$$

$$\begin{aligned}
L_{\tau\tau\tau} &= L_{\tau\tau\tau} = -\frac{\tau}{\lambda^\tau} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1) + \frac{\tau}{\lambda^\tau} \sum_{j=1}^m y_j e^{\lambda y_j} - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^m y_j^\tau e^{\lambda y_j} \\
L_{\tau\tau\tau} &= \frac{\epsilon\alpha}{\lambda^\tau} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1) - \frac{\epsilon\alpha}{\lambda^\tau} \sum_{i=1}^n x_i e^{\lambda x_i} + \frac{\tau\alpha}{\lambda^\tau} \sum_{i=1}^n x_i^\tau e^{\lambda x_i} - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i^\tau e^{\lambda x_i} \\
&+ \frac{\epsilon\beta}{\lambda^\tau} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1) \\
&- \frac{\epsilon\beta}{\lambda^\tau} \sum_{j=1}^m y_j e^{\lambda y_j} + \frac{\tau\beta}{\lambda^\tau} \sum_{j=1}^m y_j^\tau e^{\lambda y_j} - \frac{\beta}{\lambda} \sum_{j=1}^m y_j^\tau e^{\lambda y_j}, u_\tau = \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \lambda} = 0 \\
u_{i\tau} &= \frac{\partial^\tau R_{s,k}}{\partial \lambda_i \partial \lambda} = 0, i = 1, \tau, \tau, u_i = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^{j+1} (j+i)\beta}{(\beta + (j+i)\alpha)^\tau} \\
u_\tau &= \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j (j+i)\alpha}{(\beta + (j+i)\alpha)^\tau}, u_{11} = \tau \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{i} \binom{k-i}{j} \\
u_{1\tau} &= u_{\tau 1} = \frac{\partial^\tau R_{s,k}}{\partial \alpha \partial \beta} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j (j+i)(\beta - (j+i)\alpha)}{(\beta + (j+i)\alpha)^\tau} \\
u_{\tau\tau} &= \frac{\partial^\tau R_{s,k}}{\partial \tau \beta} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{i} \binom{k-i}{j} \frac{(-1)^j \beta}{(\beta + (j+i)\alpha)^\tau}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$a_\tau = u_{1\tau} \sigma_{1\tau}, a_\delta = \frac{u_{11} \sigma_{11} + u_{\tau\tau} \sigma_{\tau\tau}}{\tau}, A = \sigma_{11} L_{111} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}, B = \sigma_{\tau 1} L_{\tau\tau 1} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}$$

$$C = \tau \sigma_{1\tau} L_{1\tau\tau} + \tau \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}$$

در نتیجه، برآورد بیزی $R_{s,k}$ به ازای $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$ که به ترتیب برآورد ماکسیمم درست‌نمایی α ، β و λ هستند، به صورت

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{s,k}^B &= R_{s,k} + [u_1 a_1 + u_\tau a_\tau + u_{1\tau} \sigma_{1\tau} + \frac{u_{11} \sigma_{11} + u_{\tau\tau} \sigma_{\tau\tau}}{\tau}] \\
&+ \frac{1}{\tau} (\sigma_{11} L_{111} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}) (u_1 \sigma_{11} + u_\tau \sigma_{\tau\tau}) \\
&+ \frac{1}{\tau} (\sigma_{\tau 1} L_{\tau\tau 1} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}) (u_1 \sigma_{\tau 1} + u_\tau \sigma_{\tau\tau}) \\
&+ \frac{1}{\tau} (\tau \sigma_{1\tau} L_{1\tau\tau} + \tau \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau} + \sigma_{\tau\tau} L_{\tau\tau\tau}) (u_1 \sigma_{1\tau} + u_\tau \sigma_{\tau\tau})
\end{aligned}$$

۳- به‌طور کلی به ازای $v \geq \frac{3}{4}$ کارایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از برآورد بیز آن در هر دو حالت (s, k) بیشتر است. همچنین با افزایش حجم نمونه، قدر مطلق آریبی و میانگین مربع خطا در هر دو حالت (s, k) و در هر دو روش برآورد کاهش می‌یابد.

جدول (۱): میانگین آریبی و میانگین مربع خطای (داخل پرانتز) برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (الف) و بیز (ب) $R_{s,k}$ به ازای $(s, k) = (1, 3)$ و مقادیر متفاوت (α, β)

روش برآورد	$n=m$	(۳، ۱/۵)	(۲/۵، ۱/۵)	(۲، ۱/۵)
الف	۱۰	-۰/۰۱۷۲۵(۰/۰۰۲۳۶۱)	-۰/۰۲۱۲۲(۰/۰۲۴۳۹)	-۰/۰۰۹۸۶(۰/۰۱۵۶۷)
	۲۰	-۰/۰۱۴۸۳(۰/۰۱۱۶۴)	-۰/۰۱۶۵۰(۰/۰۱۱۷۲)	-۰/۰۰۷۷۹(۰/۰۱۰۵۱)
	۳۰	-۰/۰۱۰۹۹(۰/۰۱۱۳۱)	-۰/۰۰۸۶۸(۰/۰۱۰۹۶)	-۰/۰۰۸۵۸(۰/۰۰۶۷۰)
	۴۰	-۰/۰۰۵۰۹(۰/۰۱۰۷۱)	-۰/۰۰۶۴۱(۰/۰۱۰۷۴)	-۰/۰۰۴۷۱(۰/۰۰۴۸۳)
ب	۱۰	۰/۰۱۰۴۷(۰/۰۱۴۰۱)	-۰/۰۱۹۲۹(۰/۰۱۴۸۸)	-۰/۰۲۰۷۶(۰/۰۲۲۵۹)
	۲۰	۰/۰۰۵۱۹(۰/۰۱۱۴۸)	-۰/۰۱۵۲۴(۰/۰۱۱۵۵)	-۰/۰۱۲۳۹(۰/۰۱۲۶۷)
	۳۰	۰/۰۰۴۵۷(۰/۰۰۷۵۵)	-۰/۰۰۱۴۶(۰/۰۰۷۳۹)	-۰/۰۱۱۴۶(۰/۰۱۱۷۹)
	۴۰	۰/۰۰۳۹۲(۰/۰۰۵۶۳)	-۰/۰۰۱۰۴(۰/۰۰۵۳۷)	-۰/۰۰۵۳۵(۰/۰۱۰۸۶)

جدول (۲): ادامه جدول ۱

روش برآورد	$n=m$	(۱/۵، ۱/۵)	(۱/۵، ۲)	(۱/۵، ۳)	(۱/۵، ۲)
الف	۱۰	-۰/۰۱۴۱۵(۰/۰۱۵۷۵)	-۰/۰۱۲۷۱(۰/۰۱۴۱۷)	-۰/۰۱۰۵(۰/۰۰۹۱)	-۰/۰۰۴۶(۰/۰۰۶۹)
	۲۰	-۰/۰۰۸۴۹(۰/۰۰۹۰۵)	-۰/۰۰۴۰۵(۰/۰۰۶۳۶)	-۰/۰۰۳۹(۰/۰۰۴۳)	-۰/۰۰۰۶(۰/۰۰۲۷)
	۳۰	-۰/۰۰۶۹۲(۰/۰۰۵۵۷)	-۰/۰۰۳۱۹(۰/۰۰۳۶۷)	-۰/۰۰۱۶(۰/۰۰۲۶)	-۰/۰۰۰۵(۰/۰۰۱۸)
	۴۰	-۰/۰۰۳۵۲(۰/۰۰۳۹۹)	-۰/۰۰۲۹۵(۰/۰۰۳۰۶)	-۰/۰۰۱۵(۰/۰۰۱۹)	-۰/۰۰۰۴(۰/۰۰۱۴)
ب	۱۰	-۰/۰۴۴۳۱(۰/۰۱۹۳۲)	-۰/۰۶۲۵۲(۰/۰۱۴۳۲)	-۰/۰۶۹۰(۰/۰۱۲۱)	-۰/۰۷۱۷(۰/۰۱۷۱)
	۲۰	-۰/۰۲۹۳۶(۰/۰۱۴۶۷)	-۰/۰۳۶۰۵(۰/۰۱۳۶۱)	-۰/۰۴۰۹(۰/۰۱۱۵)	-۰/۰۴۰۳(۰/۰۱۶۳)
	۳۰	-۰/۰۲۴۵۱(۰/۰۱۳۰۹)	-۰/۰۲۶۹۴(۰/۰۱۲۷۴)	-۰/۰۳۴۲(۰/۰۱۰۱)	-۰/۰۲۹۹(۰/۰۱۳۲)
	۴۰	-۰/۰۱۸۶۴(۰/۰۱۲۱۱)	-۰/۰۲۴۱۷(۰/۰۱۱۲۷)	-۰/۰۲۸۲(۰/۰۰۲۸)	-۰/۰۲۵۳(۰/۰۱۲۲)

جدول (۳): میانگین اربیی و میانگین مربع خطای (داخل پیرانتز) برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (الف) و بیز (ب) $R_{s,k}$ به ازای $(s, k) = (2, 4)$ و مقادیر متفاوت (α, β)

روش برآورد	$n=m$	(۳، ۱/۵)	(۲/۵، ۱/۵)	(۲، ۱/۵)	(۱/۵، ۱/۵)
الف	۱۰	-۰/۰۱۲۶۹(۰/۰۰۹۶۴)	-۰/۰۱۲۰۷(۰/۰۱۱۸۱)	-۰/۰۰۸۸۹(۰/۰۲۴۴۱)	-۰/۰۰۴۳۴(۰/۰۲۴۰۵)
	۲۰	-۰/۰۰۹۱۵(۰/۰۰۸۹۰)	-۰/۰۱۰۲۷(۰/۰۰۹۸۳)	-۰/۰۰۵۲۷(۰/۰۱۱۳۶)	-۰/۰۰۱۹۵(۰/۰۱۰۸۴)
	۳۰	-۰/۰۰۴۷۷(۰/۰۰۵۹۸)	-۰/۰۰۴۶۱(۰/۰۰۶۴۸)	-۰/۰۰۳۸۸(۰/۰۰۷۲۶)	-۰/۰۰۰۶۷(۰/۰۰۶۷۶)
	۴۰	-۰/۰۰۴۶۴(۰/۰۰۴۱۵)	-۰/۰۰۰۱۶(۰/۰۰۴۷۱)	-۰/۰۰۰۱۰(۰/۰۰۴۸۱)	-۰/۰۰۰۳۶(۰/۰۰۵۳۲)
ب	۱۰	-۰/۲۳۲۸۹(۰/۰۱۳۳۵)	-۰/۲۷۷۴۴(۰/۰۲۶۵۳)	-۰/۳۳۹۲۲(۰/۰۳۰۰۶)	-۰/۴۳۳(۰/۰۲۵۶)
	۲۰	-۰/۲۲۵۹۰(۰/۰۰۹۵۹)	-۰/۲۷۰۸۵(۰/۰۱۱۴۲)	-۰/۳۳۰۴۴(۰/۰۱۳۲۴)	-۰/۴۱۶(۰/۰۱۷۴)
	۳۰	-۰/۲۱۷۹۹(۰/۰۰۶۰۵)	-۰/۲۶۹۱۲(۰/۰۰۶۹۷)	-۰/۳۲۵۷۹(۰/۰۰۸۷۳)	-۰/۴۱۲(۰/۰۱۱۲۱)
	۴۰	-۰/۲۰۱۹۵(۰/۰۰۲۹۲)	-۰/۲۶۲۷۰(۰/۰۰۲۸۷)	-۰/۳۱۶۵۵(۰/۰۰۳۸۵)	-۰/۳۴۲(۰/۰۰۴۹)

جدول (۴): ادامه جدول ۳

روش برآورد	$n=m$	(۱/۵، ۰۲)	(۱/۵، ۰۲/۵)	(۱/۵، ۰۳)
الف	۱۰	-۰/۰۰۵۴(۰/۰۲۱۹۵)	-۰/۰۰۰۵۱(۰/۰۱۹۱۸)	-۰/۰۰۶۷۴(۰/۰۱۲۷۵)
	۲۰	-۰/۰۰۴۹(۰/۰۱۰۱۹)	-۰/۰۰۰۴۸(۰/۰۰۸۳۸)	-۰/۰۰۲۸۹(۰/۰۰۷۱۱)
	۳۰	-۰/۰۰۰۵۲(۰/۰۰۶۰۹)	-۰/۰۰۰۲۹(۰/۰۰۵۷۲)	-۰/۰۰۰۲۵۹(۰/۰۰۴۵۶)
	۴۰	-۰/۰۰۰۳۲(۰/۰۰۴۷۴)	-۰/۰۰۰۱۶(۰/۰۰۴۳۹)	-۰/۰۰۰۱۵(۰/۰۰۳۴۰)
ب	۱۰	-۰/۵۳۲۸۲(۰/۰۳۱۳۶)	-۰/۶۰۹۰۴(۰/۰۹۶۰۹)	-۰/۶۷۳۵۴(۰/۰۴۸۹۷)
	۲۰	-۰/۵۱۲۱۸(۰/۰۲۵۰۸)	-۰/۶۰۳۳۷(۰/۰۲۰۰۵)	-۰/۶۶۰۲۵(۰/۰۳۵۸۶)
	۳۰	-۰/۵۰۹۴۹(۰/۰۱۵۴۴)	-۰/۵۹۵۸۶(۰/۰۱۷۹۱)	-۰/۵۶۶۸۷(۰/۰۲۳۰۷)
	۴۰	-۰/۴۱۱۰۹(۰/۰۰۸۰۱)	-۰/۵۸۷۰۷(۰/۰۱۱۰۶)	-۰/۵۱۱۲۴(۰/۰۱۳۴۲)

۴-۲- داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد $R_{s,k}$ استفاده می‌شود. این داده‌ها که در بدر و پرست [۲۴] گزارش شده است، مربوط به مقاومت اندازه‌گیری شده الیاف کربن، در طول‌های ۲۰ میلی‌متری (مجموعه داده‌های اول) و ۱۰ میلی‌متری (مجموعه داده‌های دوم) بر اثر فشار وارده بر آن‌ها به خاطر کشش آن‌ها است. از این داده‌ها برای مقایسه روش‌های مختلف برآورد قابلیت اعتماد در توزیع بور نوع ده توسط ركب و کاندو [۲۵] و برای برآورد قابلیت اعتماد در توزیع وایبول توسط کاندو و گوپتا [۲۶] استفاده شده است. هر دو مجموعه

داده‌ها در جدول ۵ آورده شده است. قبل از تحلیل داده‌ها ابتدا با استفاده از آماره آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف نشان داده می‌شود که توزیع گومپرتز به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود؛ بنابراین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای شکل و مقیاس توزیع گومپرتز و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه در جدول ۶ آورده شده‌اند.

جدول (۵): مجموعه داده‌های اول و دوم

مشاهدات	مجموعه داده‌ها										
	۱/۹۵۸	۱/۹۴۴	۱/۸۶۵	۱/۸۶۱	۱/۸۰۳	۱/۷۰۰	۱/۵۵۲	۱/۴۷۹	۱/۳۱۴	۱/۳۱۲	
اول	۱/۲۲۴	۱/۱۷۹	۲/۱۴۰	۲/۰۹۸	۲/۰۶۳	۲/۰۵۵	۲/۰۲۱	۲/۰۰۶	۱/۹۷۷	۱/۹۶۶	
	۲/۴۲۶	۲/۳۸۲	۲/۳۸۲	۲/۳۵۹	۲/۳۰۱	۲/۲۷۴	۲/۲۷۲	۲/۲۷۰	۲/۲۵۳	۲/۲۴۰	
	۲/۵۷۰	۲/۵۵۶	۲/۵۵۴	۲/۵۳۵	۲/۵۱۴	۲/۵۱۱	۲/۴۹۰	۲/۴۷۸	۲/۴۳۵	۲/۴۳۴	
	۲/۷۷۳	۲/۷۷۰	۲/۷۲۶	۲/۶۹۷	۲/۶۴۸	۲/۶۴۸	۲/۶۴۲	۲/۶۳۳	۲/۶۲۹	۲/۵۸۶	
	۳/۰۸۴	۳/۰۶۷	۳/۰۱۲	۲/۹۵۴	۲/۸۸۰	۲/۸۴۸	۲/۸۲۱	۲/۸۱۸	۲/۸۰۹	۲/۸۰۰	
	۳/۵۸۵	۳/۵۸۵	۳/۴۳۳	۳/۲۳۳	۳/۱۲۸	۳/۰۹۶	۳/۰۹۰				
دوم	۳/۸۵۲	۲/۳۹۷	۲/۳۹۶	۲/۳۶۱	۲/۳۵۰	۲/۲۵۷	۲/۲۲۸	۲/۲۰۳	۲/۱۳۲	۱/۹۰۱	
	۳/۸۷۱	۲/۶۱۴	۲/۵۷۵	۲/۵۳۲	۲/۵۲۵	۲/۵۲۲	۲/۵۱۸	۲/۴۷۴	۲/۴۵۴	۲/۴۴۵	
	۳/۸۸۶	۲/۹۱۷	۲/۸۵۶	۲/۷۴۰	۲/۷۳۸	۲/۶۷۵	۲/۶۵۹	۲/۶۲۴	۲/۶۱۸	۲/۶۱۶	
	۳/۹۷۱	۳/۱۴۵	۳/۱۳۹	۳/۱۲۵	۳/۰۳۰	۲/۹۹۶	۲/۹۷۷	۲/۹۳۷	۲/۹۳۷	۲/۹۲۸	
	۳/۰۲۴	۳/۳۴۶	۳/۳۳۲	۳/۲۹۴	۳/۲۷۲	۳/۲۶۴	۳/۲۴۳	۳/۲۳۵	۳/۲۲۳	۳/۲۲۰	
	۴/۳۵۵	۳/۶۲۸	۳/۵۶۲	۳/۵۵۴	۳/۵۳۷	۳/۵۰۱	۳/۴۹۳	۳/۴۳۵	۳/۴۰۸	۳/۳۷۷	
	۵/۰۲۰	۵/۳۹۵									

جدول (۶): برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع گومپرتز به همراه {خطای استاندارد آن‌ها}

و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه برای مجموعه‌های اول و دوم

مقدار p	آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (مقیاس، شکل)	مجموعه داده‌ها
۰/۷۰۴۳	۰/۰۸۴۷	(۰/۰۰۸۳۶۳، ۲/۰۴۲۴۵) {۰/۰۰۳۹۳، ۰/۱۸۵۴۱}	اول
۰/۱۷۵۴	۰/۱۳۷۹	(۰/۰۱۲۵۵۹، ۱/۳۹۸۹۲۳) {۰/۰۰۵۱۶، ۰/۱۲۸۰۳}	دوم

با توجه مقادیر آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه، واضح است که توزیع گومپرتز به خوبی به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود؛ اما با توجه به مقادیر برآورد پارامتر مقیاس برای مجموعه داده‌های اول و دوم که به ترتیب $۲/۰۴۲۴۵$ و $۱/۳۹۸۹۲۳$ هستند، فرض تساوی مقیاس‌ها معقول به نظر نمی‌رسد؛ بنابراین برای رسیدن به این هدف، پیشنهاد می‌شود که هر مجموعه داده در برآورد پارامتر مقیاس آن‌ها ضرب شود و مجموعه داده‌های تبدیل‌یافته به‌عنوان داده‌های واقعی در نظر گرفته شوند. جدول ۷ شامل برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای شکل و مقیاس توزیع گومپرتز و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه برای مجموعه داده‌های تبدیل‌یافته است.

جدول (۷): برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع گومپرتز به همراه {خطای استاندارد آن‌ها} و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه برای مجموعه داده‌های تبدیل‌یافته

مقدار p	آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (مقیاس، شکل)	مجموعه داده‌ها
$۰/۷۰۴۳$	$۰/۰۸۴۷$	$(۰/۰۰۴۰۹۴, ۰/۹۹۹۹۹۹۷)$ $\{۰/۰۰۱۹۲, ۰/۰۹۰۹۱\}$	اول
$۰/۱۷۵۴$	$۰/۱۳۷۹$	$(۰/۰۰۸۹۷۷, ۱)$ $\{۰/۰۰۳۶۹, ۰/۰۹۱۵۴\}$	دوم

با توجه به برآورد پارامتر مقیاس تحت داده‌های تبدیل‌یافته در جدول ۷، فرض تساوی مقیاس‌ها معقول به نظر می‌رسد. اکنون با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته فرض تساوی مقیاس‌ها یعنی فرض $H_0: \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ در مقابل $H_1: \lambda_1 \neq \lambda_2$ در سطح پنج درصد آزمون می‌شود. اگر Θ_0 فضای پارامتری تحت فرض H_0 و Θ_1 فضای پارامتری تحت فرض H_1 باشد، مقدار عددی آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته به صورت

$$\Lambda = -2[\log \sup_{\lambda \in \Theta_1} L(\lambda) - \log \sup_{\lambda \in \Theta_0} L(\lambda)] = ۰/۳۱۸۲$$

به دست آورده می‌شود که p -value متناظر با آن برابر $۰/۵۷۲۷$ است، بنابراین فرض تساوی مقیاس‌ها پذیرفته می‌شود. به کمک این مجموعه داده‌های تبدیل‌یافته، به ازای $(\alpha, \beta) = (۱/۵, ۲/۵)$ ، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ در حالت‌های $(s, k) = (۱, ۳)$ و $(s, k) = (۲, ۴)$ به ترتیب $۰/۸۶۸۵۱$ و $۰/۷۵۲۴۸$ به دست می‌آید. همچنین با فرض $b_1 = ۲$ و $b_2 = ۳$ ، برآورد بیز $R_{s,k}$ در حالت‌های $(s, k) = (۱, ۳)$ و $(s, k) = (۲, ۴)$ به ترتیب $۰/۶۵۷۴۲۹$ و $۰/۵۶۴۳۲$ به دست آورده می‌شود. با توجه به مقادیر، نتیجه گرفته می‌شود، کارایی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ در هر دو حالت (s, k) از برآورد بیز آن بیشتر است.

همچنین به دلیل بزرگ‌تر بودن مقدار عددی $R_{s,k}$ در حالت $(s, k) = (1, 3)$ نسبت به حالت $(s, k) = (2, 4)$ در هر دو روش برآورد، نتیجه گرفته می‌شود کارایی سیستم سه مؤلفه‌ای حداقل با یک مؤلفه فعال بیشتر از کارایی سیستم چهار مؤلفه‌ای با حداقل دو مؤلفه فعال است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآورد قابلیت اعتماد در یک مدل تنش-مقاومت چند مؤلفه‌ای، وقتی که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع‌های گومپرتز با پارامتر شکل متفاوت و پارامتر مقیاس یکسان هستند، تحت روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی به دست آورده شد. به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو و با محاسبه میانگین اریبی و میانگین مربع خطای برآوردگرها، نشان داده شد که تحت شرط $v \geq \frac{3}{4}$ ، کارایی روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی از برآورد بیز بیشتر است. همچنین به کمک دو مجموعه داده‌های واقعی نشان داده شد که کارایی سیستم سه مؤلفه‌ای با حداقل یک مؤلفه فعال بهتر از سیستم چهار مؤلفه‌ای با حداقل دو مؤلفه فعال است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله نهایت تشکر را از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله دارند.

منابع

- [1] Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on the New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society American*, **115**, 513-580.
- [2] Pakdaman, Z. and Ahmadi, J. (2017). Point estimation of the stress-strength reliability parameter for parallel system with independent and non-identical components, *Communications in Statistics- Simulation and Computation*, to appear. Doi: 10.1080/03610918.2017.1309426.
- [3] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R. A. (1974). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **69**, 966-970.
- [4] Enis, P. and Geisser, S. (1971). Estimation of the probability that $Y < X$, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **66**, 162-168.
- [5] Downtown, F. (1973). The estimation of $P(Y < X)$ in the normal case, *Technometrics*, **15**, 551-558.

- [6] Awad, M. and Gharraf, K. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in Burr case: A comparative study, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, 389-403.
- [7] Nandi, S.B. and Aich, A.B. (1994). A note on estimation of $P(X > Y)$ for some distributions useful in life-testing, *IAPQR Transactions*, **19**(1), 35-44.
- [8] Raqab, M.Z. and Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34**(2), 465-483.
- [9] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2006). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**(2), 270-280.
- [10] Raqab, M.Z., Madi, M.T. and Kundu, D. (2008). Estimation of $P(Y < X)$ for the 3-parameter generalized exponential distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**(18), 2854-2864.
- [11] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *Statistics and Operations Research Transactions*, **35**(2), 103-124.
- [12] Lio, Y.L. and Tsai, T. R. (2012). Estimation of $\delta = P(X > Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples, *Journal of Applied Statistics*, **39**(2), 465-483.
- [13] Al-Mutairi, D.K., Ghitany, M.E. and Kundu, D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**(8), 1443-1463.
- [14] Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Aboukhamseen, S.M. (2015). Estimation of the reliability of a Stress-strength system from power indley distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.
- [15] Pandey, M. and Borhan, U.M.d. (1985). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model following Burr distribution, *Proceedings of the First Asian congress on Quality and Reliability, New Delhi, India*, 307-312.
- [16] Rao, G.S. and Kantam, R. R. L. (2010). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model: log-logistic distribution, *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **3**(2), 75-84.
- [17] Rao, G.S. (2012a). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on generalized exponential distribution, *Colombian Journal of Statistics*, **35**(1), 67-76.

- [18] Rao, G.S. (2012b). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on Rayleigh distribution, *ProbStat Forum*, **5**, 150-161.
- [19] Rao, G.S., Aslam, M. and Aril, O. H. (2017). Estimation of reliability in multicomponent stress- strength model based on exponentiated Weibull distribution, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **46**(15), 7495-7502.
- [20] Castellares, F. and Lemonte, A.J. (2014). A New Generalization Weibull Distribution Generated by Gamma Random Variables, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **10**, 1-9.
- [21] Ward, M. (1934). The representation of Stirling's numbers and Stirling's polynomials as sums of factorial, *American Journal of Mathematics*, **56**, 87-95.
- [22] Rao, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*, Wiley Eastern Limited, India.
- [23] Lindley, D.V. (1980). *Approximate Bayes Method*, Trab Estad 3, 281-288.
- [24] Badar, M.G. and Priest, A.M. (1982). Statistical aspects of fiber and bundle strength in hybrid composites. In: Hayashi, T., Kawata, K., Umekawa, S. (Eds.), *Progress in Science and Engineering Composites*, ICCM-IV, Tokyo, 1129-1136.
- [25] Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **34**(2), 465- 483.
- [26] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2006). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distributions, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**(2), 270-280.

پیوست ۱

با توجه به بخش ۲-۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$ در حالت متفاوت بودن پارامترهای مقیاس که با نماد $\hat{R}_{s,k}^{ML}$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\hat{R}_{s,k}^{ML} = \hat{v} e^{\hat{\eta}} \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{i} \binom{\hat{\delta}(j+1)-1}{r} \frac{\left(-\frac{\hat{\beta}}{\hat{\eta}}\right)^j \left(\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}}\right)^r}{j!} \text{Beta}(i, k-i+q+r+1)$$

است که در آن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\eta}, \hat{v})$ ، $(\alpha, \beta, \lambda, \eta, v)$ است. همچنین به کمک رابطه (λ) و با در نظر گرفتن $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (\alpha, \beta, \lambda, \eta)$ و

$$u = ve^{\frac{\beta}{\eta}} \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{k}{i} \binom{\delta(j+1)-1}{r} \frac{\left(-\frac{\beta}{\eta}\right)^j \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^r \rho_q(r)}{j!} \text{Beta}(i, k-i+q+r+1)$$

برآورد بییزی $R_{s,k}$ در این حالت که با نماد $\tilde{R}_{s,k}^B$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tilde{R}_{s,k}^B = \left[u + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} (u_{ij} + \nu u_i \rho_j) \sigma_{ij} + \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} L_{ijk} \sigma_{ij} \sigma_{kl} u_l \right]_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\eta})}$$

Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model Based on Gompertz Distribution

Shahram Yaghoobzadeh Shahrastani

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran

Abstract

In this research article, we estimate the multicomponent stress–strength reliability of a system when strength and stress variates are drawn from an exponentiated Weibull distribution with different shape parameters α and β , and common scale parameter λ , respectively. The reliability is estimated using the best single observation percentile method and maximum likelihood method of estimation when samples drawn from strength and stress distributions. The reliability estimators are compared asymptotically. The small sample comparison of the reliability estimates is made through Monte Carlo simulation. Using real data sets we illustrate the procedure.

Keywords: Stress–Strength, Reliability, Maximum likelihood estimation, Best single observation percentile estimation, Mean square error, Confidence intervals, Gompertz distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F15, 62G05, 62N05..

تحلیل داده‌های فضایی-زمانی: مطالعه موردی داده‌های میانگین سرعت باد روزانه استان زنجان

علی شهناز*، علی محمدیان مصمم**^۱ و محمد حسن بهزادی*

*گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

**گروه آمار، دانشگاه زنجان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۶/۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۳/۱۳

چکیده: در این مقاله، ابتدا مبانی نظری مدل‌سازی نیمه‌طیفی بررسی و به توصیف چند خاصیت از مدل‌های نیمه‌طیفی اخیر پرداخته می‌شود. سپس یک روش برای برآورد تابع کوواریانس فضایی-زمانی در حالت نیمه‌طیفی پیشنهاد شده است. به منظور ارزیابی عملکرد مدل‌های نیمه-طیفی ارائه‌شده، دو شبیه‌سازی انجام و در هر کدام از آن‌ها روش برآورد پیشنهادی با سایر روش‌ها مقایسه شده است. روش موردنظر عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها به‌خصوص برای مجموعه مشاهدات بزرگ دارد. سرانجام برای تحلیل داده‌های واقعی مربوط به متوسط روزانه سرعت باد در استان زنجان از روش پیشنهادی استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: کوواریانس فضایی-زمانی، مدل فضایی-زمانی، مدل نیمه‌طیفی، درست‌نمایی وایتل.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲M۱۵، ۶۲M۳۰

۱- مقدمه

در آمار کلاسیک معمولاً داده‌ها ناهمبسته فرض می‌شوند ولی در عمل موارد زیادی وجود دارند که این فرض ناهمبستگی نقض شده است. به‌عنوان مثال در سری‌های زمانی [۱] مشاهدات دارای نوعی همبستگی از طریق زمان رخداد آن‌ها هستند. همچنین در علوم مربوط به زمین آمار [۲]، محیط‌زیست، هواشناسی، همه‌گیرشناسی و اقیانوس‌شناسی ملاحظه می‌شود که داده‌ها دارای

نوعی همبستگی از نظر موقعیت مشاهدات هستند. به چنین داده‌هایی که همبستگی آن‌ها ناشی از موقعیت جغرافیایی است، داده‌های فضایی^۱ گفته می‌شود [۳].

داده‌هایی که هم از نظر موقعیت فضایی و هم از نظر زمانی وابسته باشند، داده‌های فضایی - زمانی^۲ نامیده می‌شوند. برای تحلیل سری‌های زمانی و داده‌های فضایی معمولاً دو استراتژی وجود دارد: یکی تحلیل سری‌های زمانی و داده‌های فضایی در قلمرو مشاهدات و دیگری تحلیل سری‌های زمانی و داده‌های فضایی در قلمرو فرکانس. در دو دهه اخیر مطالعات زیادی برای تعیین ساختار همبستگی، مدل‌بندی و تحلیل داده‌ها انجام شده است. تحلیل این‌گونه داده‌ها به روش اول مستلزم تعیین ساختار همبستگی به ترتیب، زمانی، فضایی و فضایی-زمانی از طریق تابع کوواریانس آن‌ها است. این تابع نقش بسزایی در پیش‌گویی موقعیت‌های فضایی یا زمانی فاقد مشاهده دارد. تحلیل داده‌ها به روش دوم مستلزم تعیین تابع چگالی طیفی زمانی، فضایی و فضایی-زمانی است. توابع کوواریانس و توابع چگالی طیفی زمانی و فضایی محض بسیار زیادی در متون آماری وجود دارند [۴،۲] ولی برای ساخت توابع کوواریانس فضایی-زمانی مطالعات علمی کمتری انجام گرفته است. یکی از ویژگی‌های مهم تابع کوواریانس، ویژگی معین مثبت^۳ است و تابعی که چنین شرطی را داشته باشد، تابع کوواریانس معتبر نامیده می‌شود.

ساخت توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر تا حدودی امری مشکل و در طی چند سال گذشته یکی از موضوعات علمی آمارشناسان دنیا بوده است. به این منظور برخی فرض‌های ساده کننده نظیر، مانایی^۴، همسانگردی^۵، کاملاً متقارن^۶ و تفکیک‌پذیری^۷ مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴]. یکی از روش‌ها برای ساخت توابع کوواریانس فضایی-زمانی معتبر استفاده از نمایش طیفی^۸ تابع کوواریانس است که بر اساس قضیه بوخنر [۵] تعیین می‌شود. این قضیه به‌درستی تحلیل در قلمرو مشاهدات را به تحلیل در قلمرو فرکانس مرتبط می‌سازد. بوخنر نشان داد که یک تابع پیوسته، معین مثبت است اگر و تنها اگر تبدیل فوریه‌ی یک اندازه نامنفی متناهی باشد. از آنجاکه توابع کوواریانس فضایی-زمانی هر میدان تصادفی مانای مرتبه دوم، موجود و معین مثبت است، براساس قضیه بوخنر رده توابع کوواریانس فضایی-زمانی مانا روی $R^d \times R$ معادل رده تبدیل

۱-Spatial Data

۲-Spatio-Temporal Data

۳-Positive Definite

۴-Stationary

۵-Isotropic

۶-Completely Symmetric

۷-Separable

۸-Spectral Representation

فوری‌ی اندازه‌های نامنفی و متناهی روی $R^d \times R$ است، لذا با توجه به این قضیه، نمایش طیفی تابع کوواریانس بر اساس تابع چگالی طیفی عبارت است از:

$$K(s, t) = \iint g(\lambda, \omega) \exp\{is'\lambda + it\omega\} d\lambda d\omega, \quad (s, t) \in R^d \times R, \quad (1)$$

که در آن s و t به ترتیب تأخیرهای فضایی و زمانی و همچنین $\lambda \in R^d$ و $\omega \in R$ فرکانس‌های فضایی و زمانی هستند و نماد " ' " نشانگر ترانهاده یک بردار است؛ بنابراین، با اختیار کردن تابع چگالی طیفی $g(\lambda, \omega)$ می‌توان یک تابع کوواریانس فضایی- زمانی معتبر بنا نهاد.

در تحلیل داده‌های فضایی- زمانی علاوه بر تحلیل در قلمرو مشاهدات و قلمرو فرکانس می‌توان قلمرو جدیدی در مابین این دو تعریف کرد که به اصطلاح نیمه‌طیفی^۱ نامیده می‌شود. از مهم‌ترین مزایای این روش استفاده از انتگرال صرفاً فضایی به جای انتگرال چندگانه فضایی- زمانی در رابطه (۱) است. کرسی و هوانگ [۶] با فرض انتگرال‌پذیری تابع کوواریانس و به کارگیری قضیه بوخنر، روشی برای ساخت کوواریانس‌های تفکیک‌ناپذیر مانا ارائه کردند که روش آنان محدود به رده‌ای از توابع می‌شود که انتگرال d -گانه تبدیل فوری [۷] آن‌ها به صورت تحلیلی قابل حل باشد. گنیتینگ [۸] برای غلبه بر انتگرال صرفاً فضایی فوق با استفاده از توابع کاملاً یکنوا و برنشتاین رده‌ای از مدل‌های کوواریانس فضایی- زمانی تفکیک‌ناپذیر ارائه کرد. علیرغم سادگی بسیار زیاد روش گنیتینگ، تابع کوواریانس حاصل یک تابع کوواریانس کاملاً متقارن است. علاوه بر آن کنت و همکاران [۹] نشان دادند که تابع کوواریانس ارائه‌شده توسط گنیتینگ دارای مشکل گودی^۲ هست، به این معنی که به‌ازای برخی مقادیر تأخیر فضایی، تابع کوواریانس زمانی مربوطه به صورت یکنوا نزولی نیست. امیدی و محمدزاده [۱۰]، [۲۸] با استفاده از توابع مفصل برای حل مشکل گودی راهکاری ارائه نموده‌اند. هورل و استاین [۱۱] با استفاده از نمایش نیمه‌طیفی تابع کوواریانس فضایی- زمانی مدل‌های گاوسی فضایی- زمانی جدیدی را ارائه کرده‌اند.

در این مقاله چند مدل نیمه‌طیفی معرفی و از بین آن‌ها بهترین مدل برای برازش به داده‌های میانگین سرعت باد روزانه استان زنجان انتخاب و با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی چند متغیره وایتل، پارامترهای مدل انتخابی برآورد شده‌اند. در بخش دوم، مبانی نظری مدل‌های نیمه‌طیفی به همراه مثال‌هایی از آن‌ها آورده شده است. در بخش سوم به معرفی چند روش برای برآورد پارامترها پرداخته و سرانجام در بخش چهارم، مطالعه شبیه‌سازی برای مدل‌های تفکیک- پذیر و تفکیک‌ناپذیر به همراه تحلیل داده‌های واقعی انجام شده است.

۲- مدل‌های نیمه‌طیفی

نمایش نیمه‌طیفی تابع کواریانس $K(s, t)$ را می‌توان با انتخاب ترتیب انتگرال‌گیری نسبت به ω یا λ به صورت نیمه‌طیفی زمانی یا نیمه‌طیفی فضایی بدست آورد. در این مقاله نمایش نیمه‌طیفی در زمان به صورت زیر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

$$K(s, t) = \int_R H(s, \omega) \exp(i t \omega) d\omega,$$

که در آن:

$$H(s, \omega) = f(\omega) \mathbb{C}(s\delta(\omega)) \exp(i\theta(\omega)\phi's), \quad (2)$$

که در آن f تابع چگالی طیفی صرفاً زمانی، \mathbb{C} تابع همبستگی معتبر در R^d با یک تابع چگالی طیفی، δ تابعی زوج و مثبت که نشان‌دهنده اثر تعامل فضایی-زمانی، $\theta(\cdot)$ تابعی حقیقی و فرد و ϕ برداریکه در R^d است [۱۲].

۲-۱- چند خاصیت از مدل‌های نیمه‌طیفی

مدل معرفی شده در رابطه (۲) در حالت کلی نامتقارن است. در این مقاله ابتدا حالت فضایی-زمانی کاملاً متقارن این مدل یعنی حالتی که $\theta(\omega) = 0$ در نظر گرفته می‌شود. با این فرض، مدل نیمه‌طیفی رابطه (۲) به صورت $f(\omega) \mathbb{C}(s\delta(\omega))$ است. هورل و استاین [۱۱] نشان دادند که بسیاری از خواص مدل‌سازی $K(s, t)$ مستقل از θ یا ϕ حفظ می‌شود. خاصیت تعامل فضایی-زمانی با استفاده از δ تعیین می‌شود. لازم به ذکر است وقتی δ مقدار ثابت باشد توابع کواریانس حاشیه‌ای فضایی و زمانی مستقل از هم تعیین می‌شوند. در این حالت $K(s, t)$ متناسب با حاصل ضرب توابع کواریانس فضایی و زمانی است یعنی

$$K(s, t) \propto K(s, \circ) K(\circ, t)$$

این مدل‌ها را مدل‌های تفکیک‌پذیر [۱۳] گویند که به دلیل عدم تطابق با واقعیت داده‌ها، مورد انتقاد هستند.

همان طوری که در بخش بعد مشاهده خواهد شد در مدل‌های نیمه‌طیفی در تابع کواریانس گودی ظاهر می‌شود [۹]، به این معنی که اگر فرض کنیم s_{here} نشان‌دهنده موقعیت جاری و t_{now} نیز زمان جاری باشد و همبستگی $Z(s_{here}, t_{now})$ را با مقدار فرایند در یک همسایگی از موقعیت s_{there} در دو زمان ممکن $t_{yesterday}$ و t_{now} در نظر گرفته شود، در این حالت

همبستگی با $Z(s_{there}, t_{yesterday})$ یا معادل آن با $Z(s_{there}, t_{tomorrow})$ ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از همبستگی با $Z(s_{there}, t_{now})$ باشد.

استاین [۱۴] شرط زیر را برای تابع چگالی طیفی فضایی-زمانی g ، به عنوان یکی از شرایط مطلوب برای توابع کاملاً طیفی، ذکر کرده است. با برقراری این شرط، خاصیت غربالگری^۱ [۱۵] در این مدل‌ها تضمین می‌شود.

$$\lim_{(\lambda, \omega) \rightarrow \infty} \sup_{(u, v) < R} \left| \frac{g(\lambda + v, \omega + u)}{g(\lambda, \omega)} - 1 \right| = 0, \quad (3)$$

که در آن R می‌تواند هر مقدار متناهی باشد. لازم به ذکر است که مدل نیمه‌طیفی رابطه (۲) در حالت کلی در شرط (۳) صدق نمی‌کند. فرض کنید h چگالی طیفی تابع کوواریانس فضایی \mathbb{C} باشد پس نمایش کاملاً طیفی مدل استاین [۱۲] به صورت زیر است [۱۶]:

$$K(s, t) = \iint_{R^d} f(\omega) \delta(\omega)^{-d} h \left(\frac{\lambda - \theta(\omega) \phi}{\delta(\omega)} \right) \exp(is' \lambda + it \omega) d\lambda d\omega.$$

در حالتی که $g(\lambda, \omega)$ یک تابع چگالی طیفی کاملاً متقارن در نظر گرفته شود خواهیم داشت:

$$g(\lambda, \omega) = f(\omega) \delta(\omega)^{-d} h \left(\frac{\lambda}{\delta(\omega)} \right). \quad (4)$$

بنابراین نمایش کلی g را می‌توان به صورت $g(\lambda - \theta(\omega) \phi, \omega)$ نوشت. در قضیه ۱ شرایط لازم برای اینکه $g(\lambda, \omega)$ یا $g(\lambda - \theta(\omega) \phi, \omega)$ در شرط (۳) صدق کند بیان شده است.

قضیه ۱ [۱۱]: فرض کنید $g(\lambda, \omega)$ تابع چگالی طیفی تابع کوواریانس فضایی-زمانی $K(s, t)$ باشد که در آن λ فرکانس فضایی و ω فرکانس زمانی است.

الف) فرض کنید $\theta(\cdot)$ به صورت موضعی کران‌دار^۲ باشد. چگالی طیفی $g(\lambda, \omega)$ در (۳) صدق می‌کند اگر و فقط اگر $g(\lambda - \theta(\omega) \phi, \omega)$ در (۳) صدق کند.

۱-Screening Effect

۲-Locally Bounded

ب) فرض کنید $g(\lambda, \omega)$ اکیداً مثبت باشد و در (۳) صدق کند. اگر $g(\lambda - \theta(\omega)\phi, \omega)$ در (۳) صدق کند، آنگاه باید $\theta(\omega)$ به صورت موضعی کران دار باشد.

در واقع چون استراتژی‌های ساخت مدل اغلب با مدل‌های کاملاً متقارن شروع می‌شوند، به کمک این قضیه، استراتژی ساخت مدل را می‌توان به مدل‌های نامتقارن تعمیم داد. حال با این ذهنیت از قضیه (۱) بر روی مدل‌های نیمه‌طیفی کاملاً متقارن تمرکز خواهد شد.

هورل و استاین [۱۱] نشان دادند برای اینکه $g(\lambda, \omega)$ در شرط (۳) صدق کند باید طیف h و تابع δ به صورت

$$h\left(\frac{\lambda}{\delta(\omega)}\right) = H(\lambda, \omega)\delta(\omega)^d / f(\omega),$$

قابل تجزیه باشند که در آن H در شرط (۳) صدق می‌کند.

بنابراین نمایش ساده‌تری به صورت $g(\lambda, \omega) = p(\omega)q(\lambda, \omega)$ را می‌توان برای g در نظر گرفت. در ادامه شرایطی را که p و q باید داشته باشند تا g در شرط (۳) صدق کند ذکر خواهد شد.

محدودیت ۱: فرض کنید نمایش طیفی تابع کوواریانس K شکلی به صورت

$$g(\lambda, \omega) = p(\omega)q(\lambda, \omega)$$

داشته باشد در این صورت دو گزاره زیر برای چگالی‌های طیفی که به صورت فوق پارامتری شده‌اند برقرار هستند:

الف) اگر g و q در شرط (۳) صدق کنند آنگاه باید p نسبت به ω ثابت باشد.

ب) اگر g در شرط (۳) صدق کند، آنگاه برای هر نقطه ثابت ω_0 که $p(\omega_0)$ متناهی و مثبت باشد، طیف حاشیه‌ای $g_{\omega_0}^*(\lambda) = g(\lambda, \omega_0)$ باید در شرط (۳) صدق کند.

پیامد این محدودیت این است که برای تعیین مدل‌هایی که در شرط (۳) صدق می‌کنند، تابع δ را نمی‌توان مستقل از f و C در نظر گرفت.

محدودیت ۲: فرض کنید $g(\lambda, \omega) = p(\omega)q(\lambda/\delta(\omega))$ که در آن $p(\omega)$ برای تمام $|\omega|$ های به اندازه کافی بزرگ مثبت و متناهی است، q یک تابع انتگرال‌پذیر، پیوسته و نامنفی و $\delta(\omega)$ زوج با حد خوش‌تعریف وقتی که $|\omega| \rightarrow \infty$ اگر g در (۳) صدق کند آنگاه

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \delta(\omega) = \infty$$

محدودیت‌های (۱) و (۲) شکل δ و h را تعیین می‌کنند.

۲-۲- رده‌ای از مدل‌های نیمه‌طیفی

در این بخش در قالب چند مثال، نمونه‌هایی از مدل‌های نیمه‌طیفی کاملاً متقارن معرفی می‌شوند.

مثال ۱- مدل تفکیک‌پذیر کرسی و هوانگ [۶] با تابع کوواریانس حاشیه‌ای نمایی

فرض کنید $f(\omega) = \gamma a \sigma^\gamma (a^\gamma + \omega^\gamma)^{-1}$ تابع چگالی طیفی زمانی باشد که تابع کوواریانس فضایی آن به صورت $\delta(\omega) = 1, C(s\delta(\omega)) = \exp\{-b\|s\|\}$ همچنین بردار پارامترها به صورت $\theta = (a, b, \sigma^\gamma)'$ در نظر گرفته شود که در آن $a \geq 0$ پارامتر مقیاس زمان^۱، $b \geq 0$ پارامتر مقیاس فضا^۲ و σ^γ واریانس میدان تصادفی (ازاره) است. در این صورت مدل نیمه‌طیفی متناظر با آن به صورت

$$H(s, \omega) = f(\omega) C(s\delta(\omega)) = \gamma a \sigma^\gamma (a^\gamma + \omega^\gamma)^{-1} \exp\{-b\|s\|\} \quad (5)$$

خواهد بود و تابع کوواریانس فضایی- زمانی مربوطه به صورت

$$K(s, t) = \sigma^\gamma \exp(-a|t| - b\|s\|)$$

است. با استفاده از رابطه (۴) تابع چگالی طیفی فضایی- زمانی به صورت

$$g(\lambda, \omega) = \sigma^\gamma \left(\frac{\gamma a}{a^\gamma + \omega^\gamma} \right) \left(\frac{\gamma b}{b^\gamma + \|\lambda\|^\gamma} \right),$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که در این حالت $\delta(\omega)$ ثابت، تابع کوواریانس و همچنین تابع چگالی طیفی تفکیک‌پذیر و $H(s, \omega)$ تابعی حقیقی مقدار است.

مثال ۲- مدل تفکیک‌پذیر کرسی و هوانگ [۶] با توابع کوواریانس حاشیه‌ای مربع نمایی فضایی و نمایی زمانی

^۱-Time Scale Parameter

^۲-Space Scale Parameter

فرض کنید $f(\omega) = \gamma a \sigma^\gamma (a^\gamma + \omega^\gamma)^{-1}$ تابع چگالی طیفی زمانی باشد که تابع کوواریانس فضایی آن به صورت $\delta(\omega) = 1, \mathbb{C}(s\delta(\omega)) = \exp\{-b\|s\|^\gamma\}$ همچنین بردار پارامترها به صورت $\theta = (a, b, \sigma^\gamma)'$ در نظر گرفته شود که در آن $a \geq 0$ پارامتر مقیاس زمان، $b \geq 0$ پارامتر مقیاس فضا و σ^γ واریانس میدان تصادفی (ازاره) است. در این صورت مدل نیمه‌طیفی متناظر با آن به فرم

$$H(s, \omega) = f(\omega) \mathbb{C}(s\delta(\omega)) = \gamma a \sigma^\gamma (a^\gamma + \omega^\gamma)^{-1} \exp\{-b\|s\|^\gamma\}$$

خواهد بود و تابع کوواریانس فضایی-زمانی مربوطه به صورت

$$K(s, t) = \sigma^\gamma \exp(-a|t| - b\|s\|^\gamma)$$

است. با استفاده از رابطه (۴) تابع چگالی طیفی فضایی-زمانی به صورت

$$g(\lambda, \omega) = \frac{\gamma a \sigma^\gamma \sqrt{\pi}}{b(a^\gamma + \omega^\gamma)} \exp\left(-\frac{\|\lambda\|^\gamma}{\gamma b^\gamma}\right).$$

خواهد بود. لازم به ذکر است که در این حالت نیز $\delta(\omega)$ ثابت، تابع کوواریانس و همچنین تابع چگالی طیفی تفکیک‌پذیر و $H(s, \omega)$ تابعی حقیقی مقدار است.

مثال ۳- مدل تفکیک‌ناپذیر کاملاً متقارن گنتینگ [۸]

فرض کنید

$$H(s, \omega) = \frac{\sigma^\gamma}{(b\|s\|)^\alpha + 1} \times \frac{\gamma a \left((b\|s\|)^\alpha + 1 \right)^{-\beta/\gamma}}{a^\gamma \left((b\|s\|)^\alpha + 1 \right)^{-\beta} + \omega^\gamma}, \quad (۶)$$

که در آن بردار پارامترها $\theta = (a, b, \alpha, \beta, \sigma^\gamma)'$ ، $a \geq 0$ پارامتر مقیاس زمان، $b \geq 0$ پارامتر مقیاس فضا، σ^γ واریانس میدان تصادفی (ازاره)، α پارامتر همواری^۱ در بازه $[0, 2]$ و β پارامتر تعامل^۲ فضایی-زمانی است. در این صورت تابع کوواریانس فضایی-زمانی متناظر با آن به صورت

^۱-Parameter Smoothness

^۲-Separability Parameter

$$K(\mathbf{s}, t) = \frac{\sigma^\tau}{(b\|\mathbf{s}\|)^\alpha + 1} \times \exp\left(\frac{-a|t|}{\left((b\|\mathbf{s}\|)^\alpha + 1\right)^{\beta/\tau}}\right).$$

خواهد بود. متأسفانه در این حالت نمایش بسته‌ای برای $g(\lambda, \omega)$ وجود ندارد و همچنین نمی‌توان آن را به صورت مدل استاین یعنی $f(\omega)\mathbb{C}(\mathbf{s}\delta(\omega))$ نشان داد و لذا محاسبات به صورت عددی انجام می‌شود.

مثال ۴- مدل تفکیک‌ناپذیر کاملاً متقارن هورل و استاین [۱۱]

فرض کنید $h(\lambda) = \phi(\alpha^\tau + \|\lambda\|^\tau)^{-(v+d/\tau+1/\tau)}$ چگالی طیفی ماترن با پارامتر همواری $v + \frac{1}{\tau} > 0$ ، پارامتر دامنه وارون $\alpha > 0$ و پارامتر مقیاس $\phi > 0$ باشد. برای یک f مفروض به‌منظور اطمینان از عدم نقض محدودیت ذکر شده، $\delta(\omega)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\delta(\omega) = f(\omega)^{-\frac{1}{\tau} \frac{1}{v+1/\tau}}, \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در (۴) خواهیم داشت:

$$g(\lambda, \omega) = \phi \left(\alpha^\tau f(\omega)^{-\frac{1}{v+1/\tau}} + \|\lambda\|^\tau \right)^{-(v+d/\tau+1/\tau)}. \quad (8)$$

اگر f به صورت $f \sim c_f \omega^{-k}$ در نظر گرفته شود برای بعضی از مقادیر $k > 1$ و c_f که یک مقدار ثابت مثبت وابسته به f است، آنگاه $g(\lambda, \omega)$ تعریف شده به صورت فوق، رده‌ای از مدل‌ها را توصیف می‌کند که در شرط (۳) صدق می‌کنند. نمایش نیمه‌طیفی رابطه (۸) با جایگذاری تابع کوواریانس ماترن در رابطه (۲) به صورت

$$H(\mathbf{s}, \omega) = f(\omega)\mathbb{C}(\mathbf{s}\delta(\omega)) = f(\omega) \frac{\phi \pi^{d/\tau}}{\tau^{v-1/\tau} \Gamma(v+(d+1)/\tau) \alpha^\tau v^{v+1}} \times \left(\alpha \|\mathbf{s}\| f(\omega)^{-1/\tau \frac{1}{v+1/\tau}} \right)^{v+1/\tau} K_{v+1/\tau} \left(\alpha \|\mathbf{s}\| f(\omega)^{-1/\tau \frac{1}{v+1/\tau}} \right), \quad (9)$$

حاصل می‌شود که در آن $K_{v+1/2}$ تابع بسل مرتبه دوم است. اگر مقادیری که به ω بستگی ندارند در ϕ خلاصه کنیم، با فرض $\mathcal{M}_{v+1/2}(s) = \|s\|^{v+1/2} K_{v+1/2}(\|s\|)$ رابطه (۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(s, \omega) = f(\omega) \mathbb{C}(s\delta(\omega)) = \phi f(\omega) \mathcal{M}_{v+1/2} \left(\alpha \|s\| f(\omega)^{-1/2} \frac{1}{v+1/2} \right). \quad (10)$$

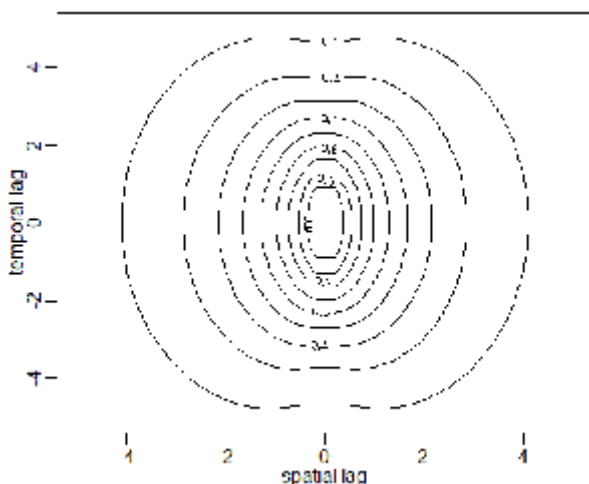
مثال ۵- ماترن زمانی هورل و استاین [۱۱]

فرض کنید $f(\omega) = (\beta^2 + \omega^2)^{-(k+1/2)}$ چگالی طیفی ماترن یک بعدی باشد که برای سادگی، پارامتر مقیاس برابر یک فرض شده است. با جایگذاری آن در (۷) و (۸) نمایش طیفی و نیمه‌طیفی به صورت زیر خواهد بود:

$$g(\lambda, \omega) = \phi \left(\alpha^2 (\beta^2 + \omega^2)^{(k+1/2)/(v+1/2)} + \|\lambda\|^2 \right)^{-(v+d/2+1/2)}.$$

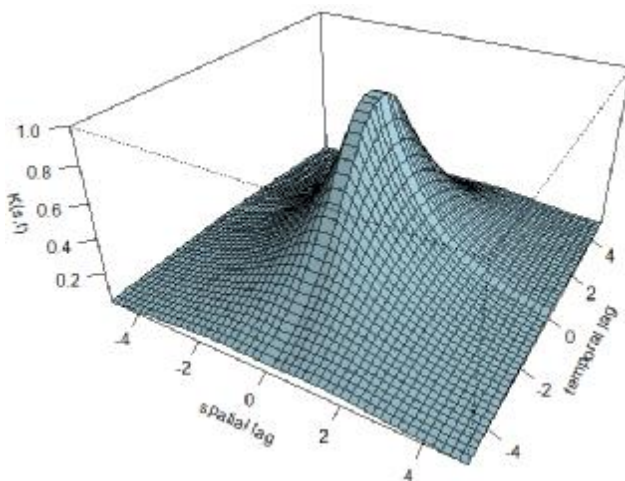
$$f(\omega) \mathbb{C}(s\delta(\omega)) = \phi (\beta^2 + \omega^2)^{-(k+1/2)} \mathcal{M}_{v+1/2} \left(\alpha \|s\| (\beta^2 + \omega^2)^{1/2} \frac{k+1/2}{v+1/2} \right). \quad (11)$$

در شکل ۱ نمودار تراز تابع کوواریانس مثال فوق به ازای $\beta = 1, k = 2, \alpha = 0.5, v = \frac{1}{8}$ و در شکل ۲ نمودار تابع کوواریانس فضایی-زمانی رسم شده است.



شکل (۱): نمودار تراز مربوط به تابع کوواریانس مثال ۵

همان طوری که ملاحظه می‌شود خاصیت گودی در شکل ۱ دیده می‌شود. گرچه گودی دیده شده در این شکل کاملاً از تعریف کنت و همکاران [۹] پیروی نمی‌کند. تعریف وسیع‌تری از گودی می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت: گودی زمانی مشاهده می‌شود که نمودار تراز تابع کوواریانس محدب نباشد و به طور تجربی زمانی ظاهر می‌شود که اختلاف زیادی بین مقادیر K و V ($V < K$) وجود داشته باشد. آزمایش‌های عددی نشان می‌دهد وقتی که K و V به هم نزدیک هستند یا برای مقادیر V بزرگ‌تر از K ، گودی کم می‌شود. از آنجایی که شکل‌های نیمه-طیفی در فضا می‌توانند شبیه به رابطه (۱۱) تعریف شوند، مدل‌هایی بدون ظاهر شدن گودی با درجه همواری انعطاف‌پذیر در فضا و زمان می‌توان تعریف کرد [۱۰].



شکل (۲): نمودار تابع کوواریانس مربوط به مثال ۵

لازم به ذکر است به منظور بهبود مدل‌های استفاده شده همانند گنتینگ [۸] و استاین [۱۲] به هر پنج مدل مورد مطالعه یک اثر قطعه‌ای فضایی^۱ اضافه شده است. بنابراین نمایش نیمه‌طیفی مدل‌های مورد بحث به صورت

$$f(\omega) \left[C(s\delta(\omega)) + \eta^2 \mathbb{I}_{s=0} \right],$$

خواهد بود که در آن $\mathbb{I}_{S=0}$ تابع نشانگر و $\eta^2 \geq 0$ اثر قطعه‌ای است.

۳- روش‌های برآورد پارامترها

در این بخش به معرفی چند روش برای برازش مدل‌های ارائه‌شده در بخش قبل پرداخته و سپس مدل‌های پیشنهادی در بخش قبل به داده‌های میانگین روزانه سرعت باد استان زنجان برازش شده است. چهار روش مختلف ماکسیمم درست‌نمایی (ML)، درست‌نمایی ترکیبی (CL)، حداقل مربعات وزنی (WLS) و درست‌نمایی وایتل^۱ (WL) برای مدل‌های معرفی شده به کار رفته است. برای برآورد پارامترها وقتی که توزیع مشاهدات معلوم است از روش درست‌نمایی ماکسیمم، استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال اگر میدان تصادفی از توزیع گاوسی [۱۷] پیروی کند می‌توان از روش درست‌نمایی ماکزیمم برای برآورد تغییرنگار و هم تغییر نگارها استفاده کرد.

فرض کنید $\mathbf{Z} = (Z(s_1, t_1), \dots, Z(s_n, t_n))'$ ، n مشاهده از میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Σ باشد. در این صورت لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت

$$l(\boldsymbol{\theta}) \propto -\log |\Sigma(\boldsymbol{\theta})| - \mathbf{Z}'\Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathbf{Z},$$

است که در آن $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \text{Var}(\mathbf{Z})$ به $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ وابسته است. برای یک میدان تصادفی گاوسی با یک تابع کوواریانس پارامتری، برای محاسبه دقیق درست‌نمایی به محاسبه معکوس و دترمینان ماتریس کوواریانس نیاز است. هنگامی که تعداد مشاهدات زیاد است این ارزیابی مشکل خواهد بود. این واقعیت انگیزه اصلی تحقیق برای دست یافتن به تقریب درست‌نمایی است که نیاز به محاسبات کمتری داشته باشد.

در مواردی که توزیع مشاهدات معلوم نیست، برای برآورد پارامترهای مدل می‌توان از روش کم‌ترین توان‌های دوم وزنی [۱۸] استفاده کرد. در این روش فقط از عناصر روی قطر ماتریس کوواریانس Σ استفاده می‌شود و بیشترین وزن به فاصله‌های نزدیک و وزن‌های کم به فاصله‌های دور اختصاص داده می‌شوند. در این روش $\boldsymbol{\theta}$ به نحوی انتخاب می‌شود که رابطه زیر مینیمم شود [۴].

$$WLS(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^L \sum_{u=1}^U |N(h(l); u)| \left\{ \frac{\hat{\gamma}(h(l); u)}{\hat{\gamma}(h(l); u | \boldsymbol{\theta})} - 1 \right\}^2,$$

که در آن، $N(h(l); u) \equiv \{(i, j, t, t') : s_i - s_j \in Tol(h(l)); |t - t'| = u\}$ مجموعه زوج موقعیت‌هایی است که در فاصله (h, u) از یکدیگر قرار دارند. در اینجا $Tol(h(l))$ ناحیه تحمل^۱ اطراف $h(l)$ است. روش درست‌نمایی ترکیبی به‌طور کلی یک روش شبه درست‌نمایی است که از توزیع حاشیه‌ای یا شرطی با بعد کمتری ساخته شده است. ایده اصلی درست‌نمایی ترکیبی در ابتدا توسط بسیج [۱۹] برای مدل‌سازی داده‌های فضایی ارائه گردید و بعداً توسط لیندسی [۲۰] به‌عنوان درست‌نمایی ترکیبی معرفی شد. در مواردی که برآورد و استنباط برای پارامترها و مدل‌های شبه پارامتری که ارزیابی توابع درست‌نمایی آن‌ها با توجه به ساختار پیچیده داده‌ها دشوار است، محبوبیت این روش بیشتر است. دو روش برای ساخت تابع درست‌نمایی ترکیبی مطرح است: روش درست‌نمایی حاشیه‌ای ترکیبی و روش درست‌نمایی شرطی ترکیبی. طبق تعریف لیندسی تابع درست‌نمایی ترکیبی به‌صورت

$$CL(\theta, z) = \prod_{i=1}^K L_k(\theta, z),$$

است که در آن $L_k(\theta, z), k=1, \dots, K$ توابع درست‌نمایی حاشیه‌ای یا شرطی هستند.

درست‌نمایی وایتل [۲۱] یک تقریب برای درست‌نمایی سری‌های زمانی گاوسی مانا است. در یک مدل سری‌زمانی گاوسی مانا، تابع درست‌نمایی (به‌طور معمول گاوسی) توسط پارامترهای میانگین و کوواریانس مربوط به مدل تعیین می‌شود و با وجود تعداد زیاد مشاهدات ممکن است ماتریس کوواریانس بسیار بزرگ و محاسبات در عمل پرهزینه شود؛ بنابراین با توجه به مانایی، ماتریس کوواریانس دارای یک ساختار نسبتاً ساده می‌شود که با استفاده از یک تقریب، محاسبات به‌طور قابل توجهی ساده خواهد شد. تابع درست‌نمایی وایتل چند متغیره به‌صورت

$$L(\theta) = \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \log |F(\omega_k, \theta)| + \text{tr} \left(F(\omega_k, \theta)^{-1} I(\omega_k) \right) \right\}, \quad (12)$$

است که در آن F و I به ترتیب ماتریس‌های طیفی و دوره نگار تجربی هستند.

۴- نتایج عددی

در این بخش یک مطالعه شبیه‌سازی با هدف ارزیابی عملکرد روش نیمه‌طیفی با توجه به مدل‌های کوواریانس فضایی - زمانی تفکیک‌پذیر و تفکیک‌ناپذیر انجام شده است. در هر کدام از آن‌ها روش پیشنهادی با چهار روش برآورد CL، ML، WLS و MWL و با تعداد مختلفی مشاهده مورد

مقایسه قرار خواهد گرفت و سرانجام روش انتخاب شده برای داده‌های میانگین سرعت باد روزانه استان زنجان به کار گرفته است. تعداد مشاهدات به گونه‌ای انتخاب شده که محاسبات مربوط به ماکسیمم درست‌نمایی به سادگی انجام شود. روش‌ها برحسب میانگین مجذور خطاها (MSE) با ۱۰۰۰ تکرار از میدان تصادفی گاوسی $Z(s; t)$ با میانگین صفر و واریانس یک که در آن $t \in \{1, \dots, T\}$ با $T = 60, 90$ و $S_1 \in [0, 10]$ و $S_2 \in [0, 10]$ با $n = 10, 20$ و همچنین سرعت انجام محاسبات در یک تکرار مقایسه شده‌اند.

۴-۱- شبیه‌سازی با مدل تفکیک‌پذیر

ابتدا مدل تفکیک‌پذیر با تابع کوواریانس حاشیه‌ای نمایی مثال ۱ در نظر گرفته شده و نتایج برآزش بر اساس ۱۰۰۰ تکرار در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول (۱): مقایسه MSE در داده‌های شبیه‌سازی شده برای مدل تفکیک‌پذیر مثال ۱

$n = 20$		$n = 10$		روش برآورد	پارامترها
$T = 90$	$T = 60$	$T = 90$	$T = 60$		
MSE	MSE	MSE	MSE		
۰/۰۰۸	۰/۰۱۰	۰/۰۴۰	۰/۰۴۵	CL	اثر قطعه‌ای
۰۴e-۳	۰/۰۰۶	۰/۰۱۱	۰/۰۱۸	ML	
۰/۰۵۰	۰/۱۰۰	۰/۱۲۴	۰/۱۴۰	WLS	
۰/۰۰۱	۰/۰۱۰	۰/۰۲۵	۰/۰۳۲	MWL	
۰/۰۰۱	۰/۰۱۰	۰/۰۶۱	۰/۰۶۴	CL	مقیاس فضایی
۰۴e-۱	۰/۰۰۳	۰/۰۱۲	۰/۰۶۰	ML	
۰/۱۰۴	۰/۱۱۸	۰/۱۳۶	۰/۴۱۰	WLS	
۰/۰۰۷	۰/۰۵۷	۰/۰۵۳	۰/۰۶۴	MWL	
۰/۰۲۰	۰/۰۳۲	۰/۰۴۱	۰/۰۴۶	CL	مقیاس زمانی
۰/۰۷	۰/۰۱۶	۰/۰۲۵	۰/۰۳۶	ML	
۰/۰۷۴	۰/۱۹۷	۰/۱۴۳	۰/۱۸۵	WLS	
۰/۰۰۵	۰/۰۲۹	۰/۰۳۷	۰/۰۴۶	MWL	
۰/۰۰۴	۰/۰۱۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۴	CL	اِزاره
۰۴e-۶	۰/۰۰۹	۰/۰۱۹	۰/۰۱۵	ML	
۰/۰۸۴	۰/۱۰۰	۰/۱۴۰	۰/۱۳۸	WLS	
۰/۰۲۰	۰/۰۱۰	۰/۰۲۱	۰/۰۲۴	MWL	

همان طوری که از جدول ۱ ملاحظه می‌شود MSE روش ML طبق انتظار کمترین مقدار و روش برآورد MWL نسبت به CL و WLS از نظر MSE بهتر عمل می‌کند. لازم به ذکر است که با افزایش n و یا T ، MSE برآوردها به‌کندی کاهش می‌یابد.

برای مدل تفکیک‌پذیر با تابع کوواریانس حاشیه‌ای نمایی مثال ۱ زمان لازم برای یک تکرار روش‌های CL، ML، WLS و MWL برحسب تعداد زمان و مکان متفاوت اندازه‌گیری و نتایج در جدول ۲ آمده است. همان طوری که از جدول ۲ ملاحظه می‌شود به‌جز در مورد روش WLS که به دلیل دقت کمتر آماری موردنظر ما نیست، کارایی زمانی روش MWL به‌ویژه در ابعاد بالای تعداد مشاهدات نسبت به روش‌های CL و ML به‌مراتب بهتر است.

جدول (۲): زمان لازم (برحسب ثانیه) برای تکرار روش‌های CL، ML، WLS و MWL

در مدل تفکیک‌پذیر برحسب تعداد زمان و مکان متفاوت $n = 10, 20$ و $T = 60, 90$

MWL	WLS	ML	CL	n	T
۳/۳۷	۰/۳۱	۲۶۳/۸۵	۳۴/۹۱	۱۰	۶۰
۳/۹۷	۰/۶۹	۳۰۴/۸۰	۷۲/۰۸	۱۰	۹۰
۱۴/۸۶	۱/۰۸	۹۸۳/۵۲	۱۰۱/۲۸	۲۰	۶۰
۱۵/۵۳	۲/۶۴	۳۱۰۳/۹۲	۲۳۶/۶۸	۲۰	۹۰

۴-۲- شبیه‌سازی با مدل تفکیک‌ناپذیر

در ادامه یک مدل کاملاً متقارن تفکیک‌ناپذیر استفاده شده است. کاملاً متقارن بودن معادل این شرط است که $H(s, \omega)$ حقیقی مقدار است. در این شبیه‌سازی از تابع کوواریانس کاملاً متقارن تفکیک‌ناپذیر مثال ۳ استفاده خواهد شد. در این شبیه‌سازی پارامترهای تعامل فضایی - زمانی و همواری فضایی مقادیر ثابت $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج برازش بر اساس ۱۰۰۰ تکرار در جدول ۳ آمده است؛ مانند مثال قبل با افزایش n و یا T ، MSE برآوردها به‌کندی کاهش می‌یابد. با توجه به مقادیر MSE در جدول‌های ۱ و ۳، بهترین روش برای برآورد پارامترهای مدل، روش ML و پس‌از آن روش MWL مناسب است. همان طوری که قبلاً ذکر شد در حالتی که تعداد مشاهدات بزرگ است، روش ML دشوار و به‌صرفه نیست، بنابراین در این مقاله برای برآورد پارامترهای مدل برازش شده به داده‌های واقعی از روش MWL استفاده خواهد شد.

برای مدل تفکیک‌ناپذیر مثال ۳ با $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5$ زمان لازم برای یک تکرار روش‌های CL، ML، WLS و MWL برحسب تعداد زمان و مکان متفاوت اندازه‌گیری و نتایج در جدول ۴ آمده است. همان طوری که از جدول ۴ ملاحظه می‌شود در این حالت نیز به‌جز روش WLS که

به دلیل دقت کمتر آماری موردنظر ما نیست، کارایی زمانی روش MWL به‌ویژه در ابعاد بالای تعداد مشاهدات نسبت به روش‌های CL و ML بهتر است.

جدول (۳): مقایسه MSE در داده‌های شبیه‌سازی شده برای مدل تفکیک‌ناپذیر مثال ۳ با $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5$

$n=20$		$n=10$		روش برآورد	پارامترها
$T=90$	$T=60$	$T=90$	$T=60$		
MSE	MSE	MSE	MSE		
0.041	0.229	0.414	0.591	CL	اثر قطعه‌ای
0.005	0.107	0.253	0.468	ML	
0.131	0.362	0.638	0.741	WLS	
0.012	0.156	0.312	0.573	MWL	
0.043	0.167	0.289	0.289	CL	مقیاس فضایی
0.003	0.056	0.120	0.238	ML	
0.114	0.201	0.418	0.426	WLS	
0.012	0.143	0.217	0.254	MWL	
0.015	0.136	0.265	0.384	CL	مقیاس زمانی
0.009	0.087	0.251	0.328	ML	
0.261	0.325	0.593	0.587	WLS	
0.063	0.104	0.285	0.332	MWL	
0.008	0.074	0.127	0.193	CL	آزاره
0.001	0.008	0.068	0.152	ML	
0.116	0.181	0.242	0.361	WLS	
0.012	0.054	0.102	0.161	MWL	

جدول (۴): زمان لازم (برحسب ثانیه) برای تکرار روش‌های CL، ML، WLS و MWL در مدل تفکیک‌ناپذیر برحسب تعداد زمان و مکان متفاوت $n=10, 20$ و $T=60, 90$

MWL	WLS	ML	CL	n	T
-----	-----	----	----	---	---

۱۰/۸۸	۰/۳۶	۵۷/۶۴	۱۶/۷۹	۱۰	۶۰
۳۲/۹۸	۰/۸۰	۸۷/۷۰	۵۴/۵۰	۱۰	۹۰
۳۸/۸۸	۱/۲۲	۱۶۶/۵۶	۹۳/۴۴	۲۰	۶۰
۱۰۴/۹۲	۲/۹۴	۶۶۳/۵۸	۳۷۲/۱۱	۲۰	۹۰

۴-۳- تحلیل داده‌های واقعی

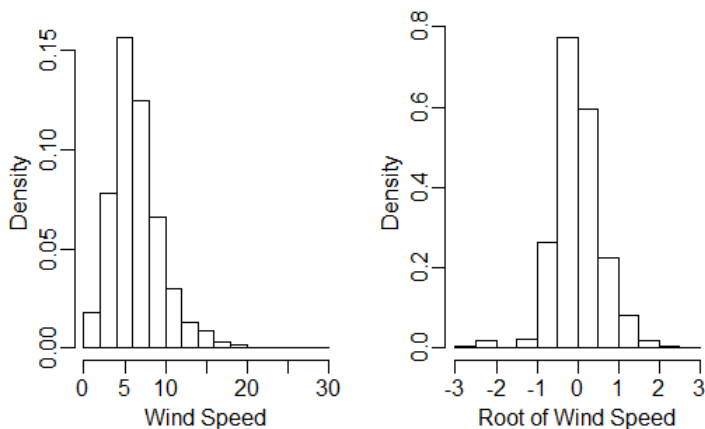
داده‌های موردبررسی، مقادیر میانگین سرعت باد روزانه برحسب متر بر ثانیه در ۸ ایستگاه هواشناسی استان زنجان مربوط به سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۱۷ است که توسط اداره هواشناسی استان زنجان اندازه‌گیری و ثبت شده‌اند. به دلیل وفور داده‌های گم‌شده در ایستگاه‌های مختلف، تنها از داده‌های ۵ ایستگاه که به‌طور کامل اطلاعات مربوط به سرعت باد طی سال‌های یاد شده را دارند، استفاده شده است. جدول ۵ طول و عرض جغرافیایی ایستگاه‌های موردنظر را نشان می‌دهد که در آن طول و عرض جغرافیایی هر ایستگاه برحسب درجه، دقیقه و ثانیه، ارتفاع از سطح دریا برحسب متر، میانگین و انحراف معیار سرعت باد در هر ایستگاه برحسب متر بر ثانیه ثبت شده است.

جدول (۵): شماره، نام و موقعیت جغرافیایی ایستگاه‌ها

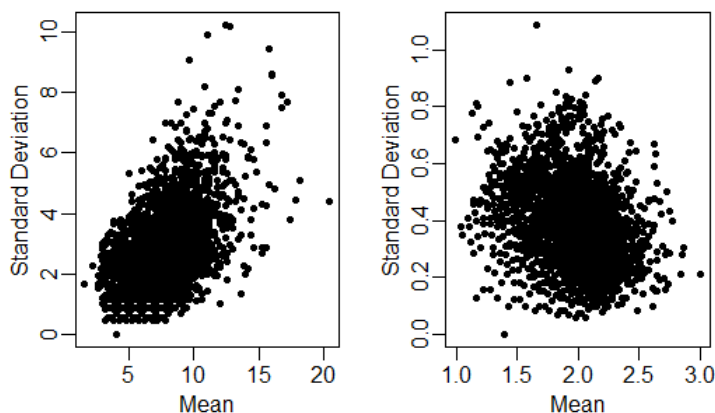
شماره	نام ایستگاه	طول و عرض جغرافیایی		ارتفاع از سطح دریا	میانگین سرعت باد	انحراف معیار سرعت باد
		عرض	طول			
۱	ماه‌نشان	۳۶d۴۴'N	۴۷d۴۱'E	۱۳۵۰	۶/۳۲۱	۲/۳۶۸
۲	زنجان	۳۶d۳۹' N	۴۸d۳۱' E	۱۶۶۳	۶/۷۴۸	۲/۸۱۳
۳	خرم دره	۳۶d۱۱' N	۴۹d۱۲' E	۱۵۷۵	۷/۳۳	۲/۸۱۸
۴	خدابنده	۳۶d۰۸' N	۴۸d۳۵' E	۱۹۹۷	۸/۷۰۲	۳/۷۳۰
۵	ابهر	۳۶d۵۶' N	۴۸d۵۶' E	۱۵۴۰	۵/۶۸۱	۳/۰۱۹

برای تحلیل فضایی- زمانی داده‌ها نخست تحلیل کاوشگرانه مشاهدات از نظر نرمال بودن، مانایی و همگنی در واریانس انجام می‌شود. نمودار بافت نگار داده‌ها در شکل ۳ سمت چپ، نشان‌دهنده عدم تقارن و انحراف از نرمال بودن توزیع داده‌ها است. به‌منظور نرمال‌سازی داده‌ها از دو تبدیل ریشه دوم و لگاریتم استفاده شده است؛ اما تبدیل ریشه دوم داده‌ها که نمودار آن در شکل ۳ سمت راست رسم شده، موجب تقارن و به‌طور تقریبی نرمال شدن توزیع داده‌ها شده است. همچنین باید فرض همگنی واریانس روی فضا و زمان برای داده‌های اصلی بررسی شود. ساهو و

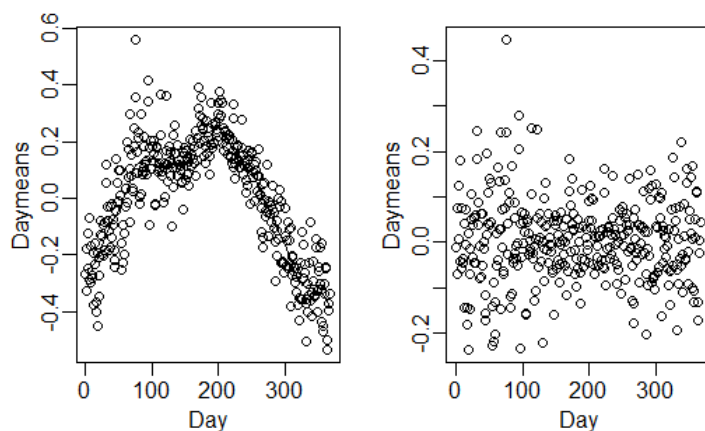
همکاران [۲۲] و هوانگ و همکاران [۲۳] برای بررسی فرض همگنی واریانس در داده‌های فضایی-زمانی از نمودار انحراف استاندارد نمونه در مقابل میانگین نمونه استفاده کردند. با رسم این نمودار برای متوسط‌های زمانی در شکل ۴ سمت چپ، وجود روند و انحراف از فرض همگنی واریانس مشاهده می‌شود که خوشبختانه این روند و ناهمگنی در واریانس با به‌کاربردن تبدیل ریشه دوم داده‌های اصلی، همان‌طوری که در شکل ۴ سمت راست، ملاحظه می‌شود حذف شده است. همچنین همان‌طوری که در شکل ۵ سمت راست، ملاحظه می‌شود در داده‌های اصلی روند فصلی وجود دارد که این روند فصلی به کمک روش برازش رگرسیون ناپارامتری با استفاده از تابع Lowess در R حذف شده است. این تابع محاسبات هموارسازی Lowess را با استفاده از رگرسیون چندجمله‌ای وزنی موضعی انجام می‌دهد [۲۴]. شکل ۵ سمت چپ، به‌وضوح حذف این اثر فصلی را نشان می‌دهد. نهایتاً مدل فضایی-زمانی ارائه‌شده روی باقیمانده‌های حاصل از حذف روند انجام گرفته است.



شکل (۳): هیستوگرام داده‌های اصلی و ریشه دوم داده‌ها



شکل (۴): نمودار انحراف معیار نمونه در مقابل میانگین نمونه قبل (شکل سمت چپ) و بعد از تبدیل ریشه دوم (شکل سمت راست) داده‌ها



شکل (۵): حذف روند فصلی در داده‌ها

برازش مدل‌های معرفی شده در بخش قبل به داده‌ها می‌تواند با محاسبه تابع کوواریانس از طریق حل عددی انتگرال رابطه (۲) انجام شود و یا اینکه به داده‌ها به‌عنوان سری‌زمانی چند متغیره نگاه کرد و روش‌های طیفی را به کار برد. در این مقاله از برازش‌های طیفی استفاده و در روش طیفی برای برآورد پارامترها از درست‌نمایی چند متغیره وایتل استفاده شده است. مدل‌های معرفی شده در بخش قبل در زمان و فضا پیوسته هستند، درحالی‌که روش درست‌نمایی وایتل برای

سری‌های زمانی گسسته به کار برده می‌شود. به منظور رفع این مشکل تصحیح هم‌اثربازی^۱ زیر به کار رفته و برای مدل پیوسته $f(\omega)C(s\delta(\omega))$ از تقریب

$$\sum_{j=-m}^m f(\omega + 2j\pi)C(s\delta(\omega + 2j\pi)) \quad , -\pi < \omega < \pi \quad , m = 50$$

استفاده شده است. نتایج برازش مدل‌های ذکر شده به داده‌ها و مقادیر لگاریتم درست‌نمایی وایتل و همچنین تقریبی از معیار اطلاع آکائیک (AIC) برای هر یک از این مدل‌ها در جدول ۶ ثبت شده است. هر چند که معیار اطلاع آکائیک یکی از کاربردی‌ترین ابزارهای انتخاب مدل است، ولی تحقیقات کمتری در مورد کارایی این ابزار در مدل‌سازی فضایی و فضایی-زمانی انجام شده است. هوتینگ و همکاران [۲۵] و همچنین گاش و لی [۲۶] تأثیر همبستگی فضایی روی انتخاب مدل توسط معیار AIC را در آمار فضایی مورد بررسی قرار داده‌اند و نتایج شبیه‌سازی آن‌ها نشان داد که معیار AIC با در نظر گرفتن همبستگی فضایی بهتر از حالتی است که ساختار فضایی در نظر گرفته نشده است. از طرفی آن‌ها نشان داده‌اند که اگر اندازه نمونه بزرگ باشد، معیار AIC پیشنهادی آن‌ها تقریباً برابر معیار AIC در حالتی که داده‌ها مستقل هستند است. علاوه بر این هوانگ و همکاران [۲۷] نشان دادند که AIC هنوز هم می‌تواند معیار مناسبی برای انتخاب مدل بین مدل‌های فضایی-زمانی باشد. در این مقاله نیز به پیروی از مقالات [۲۵]-[۲۷] به دلیل اینکه مجموع نمونه‌های فضایی و زمانی بسیار بزرگ است، برای سادگی از AIC بدون در نظر گرفتن همبستگی داده‌ها استفاده شده است و تعداد پارامترهای مؤثر تقریباً برابر تعداد پارامترهای مدل در نظر گرفته شده‌اند.

جدول (۶): مقایسه درست‌نمایی وایتل در مدل‌های برازش شده به داده‌های باد استان زنجان

مدل	مقدار ماکسیمم	اختلاف با مدل	تعداد پارامترها	AIC
مثال ۱	۲۵۵۲۵/۲	۷۰۰۴۵/۷	۴	-۵۱۰۴۲/۴
مثال ۲	۲۵۵۴۹/۸	۷۰۰۲۱/۱	۴	-۵۱۰۹۱/۶
مثال ۳	۹۵۵۷۰/۹	۰	۶	-۱۹۱۱۲۹/۸
مثال ۴	۶۰۱۴۴/۲۵	۳۵۴۲۶/۷	۵	-۱۲۰۲۷۸/۵
مثال ۵	۳۳۰۴۹	۶۲۵۲۱/۹	۴	-۶۶۰۹۰

با مقایسه مقادیر لگاریتم درست‌نمایی وایتل چند متغیره و معیار اطلاع آکائیک (AIC) در جدول ۶ نتیجه می‌شود که در بین پنج مدل استفاده شده، مدل مربوط به مثال ۳، برازنده‌ترین مدل برای داده‌های باد استان زنجان بوده است.

با در نظر گرفتن اثر قطعه‌ای، مدل نیمه‌طیفی مثال ۳ به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$H(\mathbf{s}, \omega) = \begin{cases} \eta^{\tau} \sigma^{\tau} \times \frac{\tau a}{a^{\tau} + \omega^{\tau}} & \|\mathbf{s}\| = 0 \\ \frac{\sigma^{\tau}}{(b \|\mathbf{s}\|)^{\alpha} + 1} \times \frac{\tau a \left((b \|\mathbf{s}\|)^{\alpha} + 1 \right)^{-\beta/\tau}}{a^{\tau} \left((b \|\mathbf{s}\|)^{\alpha} + 1 \right)^{-\beta} + \omega^{\tau}} & \|\mathbf{s}\| \neq 0 \end{cases}$$

با استفاده از تابع درست‌نمایی وایتل چند متغیره در رابطه (۱۲) برای برآورد پارامترهای

$$H(\mathbf{s}, \omega) \text{ یعنی } \theta = (\eta^{\tau}, \sigma^{\tau}, a, b, \alpha, \beta)'$$

$$\hat{\eta} = 0/029, \hat{\sigma}^{\tau} = 0/267, \hat{a} = 0/0012, \hat{b} = 1/121, \hat{\alpha} = 1/13, \hat{\beta} = 1/57$$

و مقدار لگاریتم درست‌نمایی وایتل مربوطه $MWL(\theta) = 95570/9$ بدست آمده است.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل نیمه‌طیفی داده‌های فضایی - زمانی توسط مدل‌های نیمه‌طیفی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور مقایسه عملکرد روش نیمه‌طیفی با روش‌های کلاسیک با توجه به مدل‌های کوواریانس فضایی - زمانی تفکیک‌پذیر و تفکیک‌ناپذیر انجام شد. برای این منظور از چهار روش برآوردیابی ماکسیمم درست‌نمایی، درست‌نمایی ترکیبی، حداقل مربعات وزنی و روش نیمه‌طیفی استفاده و روش‌ها بر اساس میانگین مجذور خطاها با ۱۰۰۰ تکرار از میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس یک مقایسه شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی گویای عملکرد بهتر روش نیمه‌طیفی نسبت به دیگر روش‌ها هم از نظر محاسباتی و هم از نظر آماری است. در پایان نیز تحلیل نیمه‌طیفی داده‌های میانگین سرعت باد روزانه استان زنجان به عنوان کاربردی از مدل پیشنهادی ارائه شد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از زحمات سردبیر و همچنین از داوران محترم به خاطر پیشنهادات سازنده‌شان که زمینه ارائه هرچه بهتر مقاله را فراهم آوردند، کمال تشکر را دارند.

منابع

- [1] Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2017). *Time Series Analysis and its Applications with R Examples*. 4th ed., Springer Texts in Statistics, Springer, Cham.
- [2] Chilès, J.P. and Delfner, P. (2012). *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. 2nd ed., Wiley, New York.
- [3] Cressie, N. and Wikle, C.K. (2013). *Statistics for spatio-temporal data*, John Wiley and Sons.
- [4] Cressie, N. (1993). *Statistics for spatial data*, New York: John Willey and Sons.
- [5] Bochner, S. (1955). *Harmonic analysis and the theory of probability*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles.
- [6] Cressie, N. and Huang, H.C. (1999). Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **94**, 1330-1340.
- [7] Kammler, D.W. (2007). *A first course in Fourier analysis*. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- [8] Gneiting, T. (2002). Nonseparable stationary covariance functions for space-time data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **97**, 590-600.
- [9] Kent, J.T., Mohammadzadeh, M. and Mosammam, A.M. (2011). The dimple in Gneiting's spatial-temporal covariance model. *Biometrika*, **98**, 489-494.
- [10] Omid, M. and Mohammadzadeh, M. (2015). A New Method to Build Spatio-Temporal Covariance Functions: *Analysis of Ozone Data*. *Statistical Papers*, **57**, 689-703.
- [11] Horrell, M.T. and Stein, M.L. (2017). Half-spectral space-time covariance models. *Spat. Stat.*, **19**, 90-100.
- [12] Stein, M.L. (2005). Statistical methods for regular monitoring data. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, **67**, 667-687
- [13] Rodr'iguez-Iturbe, I. and Meji'a, J.M. (1974). The design of rainfall networks in time and space. *Water Resources Research*, **10**, 713-728.

- [14] Stein, M.L. (2011). When does the screening effect not hold?. *Ann. Statist.*, **39**, 2795-2819
- [15] Journel, A.G. and Huijbregts, C.J. (1978). *Mining geostatistics*. Academic press.
- [16] Mosammam, A.M. and Kent, J.T. (2016). Estimation and testing for covariance-spectral spatial-temporal models. *Environ. Ecol. Stat.*, **23**, 43-64.
- [17] Mardia, K.V. and Marshall, R.J. (1984). Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, **71**, 135-146.
- [18] Cressie, N. (1985). Fitting variogram models by weighted least squares. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, **17**, 563-586.
- [19] Besag, J. (1974). Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems with discussion. *Journal of the Royal Statistical Society*, no. Series B, 192-236.
- [20] Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, **41**, 434-449.
- [21] Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, **41**, 434-449.
- [22] Sahu, S.K.G., Gelfand, A.E., Holland, D.M. and Mardia, K. (2006). Spatio-Temporal modeling of fine particulate matter. *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics*, **11**, 61-86.
- [23] Huang, H.C., Martinez, F., Mateu, J and Montes, F. (2007). Model comparison and selection for stationary space-time models. *Computational statistics and data analysis*, **51**, 4577-4596.
- [24] Cleveland, W.S. (1981). LOWESS: A program for smoothing scatterplots by robust locally weighted regression. *The American Statistician* **35**, **54**
- [25] Hoeting, J.A., Davis, R. A., Merton, A. A., & Thompson, S. E. (2006). Model selection for geostatistical models. *Ecological Applications*, **16**(1), 87-98.
- [26] Lee, H., and Ghosh, S.K. (2009). Performance of information criteria for spatial models. *Journal of statistical computation and simulation*, **79**(1), 93-106.
- [27] Huang, H.C., Martinez, F., Mateu, J., and Montes, F. (2007). Model comparison and selection for stationary space-time models. *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**(9), 4577-4596.

[۲۸] امید، مهدی، محمدزاده، محسن (۱۳۹۲). تعیین ساختار همبستگی داده‌های فضایی با توابع مفصل، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، ۳، شماره ۳، صص ۷۹۷-۸۰۸.

Analysis of Spatial-Temporal Data: The Case Study of Zanjan Daily Mean Wind Speed Data

Ali Shahnavaz*, Ali Mohammad Mosammam** and Mohammad Hassan Behzadi*

*Department of Statistics. Science and Research Branch. Islamic Azad University. Tehran. Iran

**Department of Statistics. University of Zanjan. Zanjan. Iran

Abstract

In this paper, we first study the theory of the spatial-temporal half spectral modelling and describe some properties of recently proposed half spectral models. Next, we propose an estimation method for the estimation of spatial-