

گراف تسلط کلمات دودویی

فرزاد شایسی^۱، سهیلا نصوری

گروه ریاضی، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۴/۶

چکیده: گراف تسلط کلمات دودویی، گرافی است جهت دار با مجموعه رئوس تمام کلمات دودویی به طول n که با نماد $\overline{\Gamma}_n$ نشان داده می شود، برای هر رأس دلخواه $w = w_1 w_2 \dots w_n$ قرار می دهیم $B_1(w) = \{1 \leq i \leq n \mid w_i = 1\}$ و دو رأس v و w را با پیکان جهت دار $v \rightarrow w$ به هم وصل می کنیم هرگاه داشته باشیم $B_1(w) \subseteq B_1(v)$. در این مقاله، به مطالعه و محاسبه برخی پارامترهای این گراف می پردازیم؛ به عنوان مثال، پس از محاسبه فاصله هر دو رأس و نیز انحراف از مرکز هر رأس، ثابت می شود که قطر گراف زمینه $\overline{\Gamma}_n$ برابر ۳ و شعاع آن برابر ۲ است. همچنین ثابت خواهد شد که این گراف دارای تعداد $(1 - 2^n) - 3^n$ یال است. در ادامه نشان خواهیم داد که عدد خوشه ای و عدد رنگی رأسی گراف تسلط کلمات دودویی با طول n هردو برابر $n - 1$ هستند. در دیگر نتایج، ثابت می شود که عدد رنگی یالی این گراف و ماکزیمم درجه رئوس آن مساوی $2^{n-1} - 2$ هستند. در پایان، عدد استقلال این گراف نیز به روش ترکیباتی محاسبه خواهد شد.

واژه های کلیدی: گراف تسلط، کلمات دودویی، قطر، کمر، شعاع، عدد رنگی، عدد استقلال.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۷R۹۹ و ۰۵C۳۳

۱- مقدمه

کدهای دودویی در محاسبات و ارتباطات راه دور برای انواع روش های رمزگذاری داده ها مانند تبدیل رشته های کاراکتر به رشته های بیتی مورد استفاده قرار می گیرند. هر عدد در مبنای ده قابل ترجمه به یک کلمه (رشته) دودویی است و برعکس. همچنین حروف الفبا نیز با استفاده از کدهای اسکی قابل تبدیل به کلمات دودویی هستند. البته لازم به ذکر است که تصاویر، کدهای نرم افزاری مانند متلب، ... نیز قابل تبدیل به کلمات دودویی هستند. تمام مواردی که ذکر شد

تأییدی بر این مطلب است که مجموعه کلمات دودویی دارای نقش اساسی و بنیادی در کامپیوتر هستند. دستگاه اعداد دودویی مدرن که پایه و اساس کد باینری است، برای بار اول در سال ۱۶۷۹ توسط گوتفرد لایبنیتس و در مقاله‌ای تحت عنوان «توضیح حساب دودویی» معرفی شد [۹].

از طرفی، می‌دانیم که شاخه نظریه گراف در ریاضیات ارتباطی قوی و اجتناب‌ناپذیر با کامپیوتر و نظریه کد دارد. از جمله مقالاتی که اخیراً در مورد کاربردهای گراف‌ها در کدگذاری انتشار یافته است، می‌توان به [۲، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۱] اشاره کرد. یکی از مهم‌ترین گراف‌هایی که به کلمات دودویی نسبت داده شده است، گراف مکعب n -بعدی است که رئوس آن تمام کلمات دودویی به طول n هستند و دو رأس باهم مجاورند هرگاه دقیقاً در یک رقم (بیت) باهم مختلف باشند. در این مقاله با نسبت دادن گرافی به نام «گراف تسلط» به کلمات دودویی سعی خواهیم کرد که ویژگی‌های این گراف را با استفاده از پارامترهای گرافی مورد بحث و مطالعه قرار دهیم.

ابتدا تعاریف و نمادهای مقدماتی مربوط به گراف را که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. گراف G از زوج مرتب $(V(G), E(G))$ تشکیل شده است. $V(G)$ یک مجموعه ناتهی است که آن را مجموعه رئوس می‌نامند و $E(G)$ مجموعه‌ای است از زوج‌های نامرتب از رئوس G که آن را مجموعه یال‌های گراف G می‌نامند. اگر شرط نامرتب بودن اعضای $E(G)$ را به زوج مرتب تبدیل کنیم، گراف جهت‌دار خواهد بود. برای سادگی یال $e = \{u, v\}$ را با نماد uv نشان خواهیم داد. در هر گراف $G = (V, E)$ تعداد اعضای مجموعه V را مرتبه G و تعداد اعضای E را اندازه G می‌نامیم. دو رأس u و v را مجاور گوئیم هرگاه رئوس انتهایی یک یال باشند. یک مسیر بین دو رأس u و v دنباله‌ای است از رئوس گراف به شکل $u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v$ که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، v_i با v_{i-1} مجاور است. مسیر n -رأسی با نماد P_n نشان داده می‌شود. همچنین اگر $u = v$ ، آنگاه مسیر را دور گویند و با نماد C_n نشان می‌دهند. مسیر هامیلتونی در گراف مسیری است که از تمام رئوس گراف و هرکدام دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند. گراف G را یک گراف همبند گویند هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر در یک گراف جهت‌دار، جهت‌ها را در نظر نگیریم گراف حاصل را گراف زمینه آن گراف جهت‌دار می‌نامند. در صورتی که گراف زمینه‌ی یک گراف جهت‌دار همبند باشد، آن را همبند ضعیف نامند. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v از گراف همبند G فاصله این دو رأس نامیده می‌شود و با نماد $d(u, v)$ نشان داده می‌شود. قطر گراف G به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$$

اگر $x \in V(G)$ ، آنگاه خروج از مرکز برای رأس x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e(x) = \max\{d(x, v) : v \in V(G)\}$$

و عدد

$$\min\{e(x) : x \in V(G)\} = \min \max\{d(x, v) : x, v \in V(G)\}$$

شعاع گراف G نامیده می‌شود و با نماد $rad(G)$ نشان داده می‌شود. کمر گراف G که با $girth(G)$ نشان داده می‌شود، طول کوتاه‌ترین دور در گراف است. درجه یک رأس در یک گراف عبارت است از تعداد یال‌هایی که از آن رأس می‌گذرد که همان رئوس مجاور با آن رأس است. درجه رأس v با نماد $deg(v)$ نشان داده می‌شود. در یک گراف جهت‌دار، تعداد یال‌های ورودی به یک رأس را درجه ورودی (d^- نماد درجه ودی) و تعداد یال‌های خروجی را درجه خروجی (d^+ نماد درجه خروجی) آن رأس می‌نامند. کمترین و بیشترین درجه رئوس گراف G را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نشان می‌دهند. گراف فاقد دور را جنگل و گراف همبند فاقد دور را درخت می‌نامند. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت مجموعه $S \subseteq V(G)$ را مجموعه مستقل گویند هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند و $S \subseteq V(G)$ را خوشه گویند هرگاه هر دو رأس از S مجاور باشند. مرتبه بزرگ‌ترین خوشه (زیرگراف کامل) در گراف G را عدد خوشه‌ای نامیده و با نماد $\omega(G)$ نشان داده می‌شود و عدد استقلال که با نماد $\omega(G)$ نشان داده می‌شود، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در گراف است. کمترین تعداد رنگ لازم برای رنگ‌آمیزی رئوس (یال‌ها) گراف G به طوری که هیچ دو رأس (یال) مجاور هم‌رنگ نباشند را عدد رنگی رأسی (یالی) گراف G می‌نامند و با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهند. در واقع رنگ‌آمیزی رأسی (یالی) گراف G تابعی است به شکل $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ به طوری که برای هر دو رأس (یال) غیرمجاور u و v داشته باشیم $f(u) \neq f(v)$. برای مطالعه بیشتر در مورد مفاهیم اولیه و تعاریف نظریه گراف می‌توان به [۱، ۱۲] مراجعه کرد.

۲- مفهوم گراف تسلط و فاصله‌های رئوس در آن

در این بخش، به بررسی برخی از ویژگی‌های گراف که با فاصله رئوس گراف در ارتباط هستند، می‌پردازیم. در این مقاله، مجموعه تمام کلمات دودویی به طول n را با نماد \mathcal{S}_n نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر داریم:

$$\mathcal{S}_n = \{w_1 w_2 \dots w_n : w_i \in \{0, 1\}\};$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{S}_n^* = \mathcal{S}_n - \{0^n, 1^n, \dots, 011\dots 1\}.$$

برای هر کلمه دودویی $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ، قرار می‌دهیم:

$$B_1(W) = \{i : 1 \leq i \leq n, w_i = 1\};$$

$$B_0(W) = \{i : 1 \leq i \leq n, w_i = 0\}.$$

واضح است که $|B_1(W)|$ همان وزن کلمه w است که در کدگذاری با نماد $wt(w)$ نیز نشان داده می‌شود. فرض کنید $v = v_1 v_2 \dots v_n$ و $u = u_1 u_2 \dots u_n$ دو کلمه دودویی باشند. در این صورت، گوییم u بر v مسلط است هرگاه $B_1(v) \subseteq B_1(u)$. حال، شرایط ارائه مفهوم گراف تسلط فراهم شده است.

تعریف ۱: گراف جهت‌دار تسلط کلمات دودویی به طول n که آن را با نماد $\overline{\Gamma}_n$ نشان می‌دهیم، گرافی است با مجموعه رؤس $V(\overline{\Gamma}_n) = \mathcal{G}_n^*$ و دو کلمه v و w را با پیکان جهت‌دار $v \rightarrow w$ به همدیگر وصل می‌کنیم هرگاه $B_1(w) \subseteq B_1(v)$. همچنین گراف زمینه $\overline{\Gamma}_n$ را با نماد Γ_n نشان می‌دهیم.

قبل از بررسی خواص گراف معرفی شده، توضیحاتی را در مورد دلایل لزوم تعریف چنین گرافی ارائه می‌دهیم.

یک رشته دودویی از مجموعه چند کلمه دودویی تشکیل شده است؛ بنابراین هر کد دودویی یک رشته دودویی است. ارتباط تنگاتنگی بین کلمات، رشته‌ها و کدهای دودویی از یک طرف و گراف‌ها از طرف دیگر وجود دارد. بخش عمده‌ای از این ارتباطات را می‌توان در [۸] مشاهده کرد. از جمله سؤالات اساسی که در علوم کامپیوتر و در مورد ارتباط گراف‌ها و کلمات (دودویی) مطرح می‌شود، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- آیا نمایش گرافی برای کلمات و رشته‌های دودویی وجود دارد؟
- ۲- چگونه می‌توان گراف‌های دارای نمایش برحسب کلمات دودویی را رده‌بندی کرد؟ چه تعداد از این گراف‌ها وجود دارند؟
- ۳- پارامترهای گرافی در گراف‌های نسبت داده شده به کلمات و کدهای دودویی چه نقشی در ساختن کدهای دودویی و بهینه کردن آن‌ها دارد؟

در راستای جواب سؤال اول، گراف‌های زیادی به رشته‌های دودویی نسبت داده شده‌اند که از آن جمله می‌توان به گراف مکعب، درختان ریشه‌دار و دیاگرام‌های هاش^۱ اشاره کرد. در مورد سؤال دوم لازم است اشاره شود که نمایش‌های متنوعی برای گراف‌ها برحسب رشته‌های دودویی وجود دارد. به‌عنوان مثال اگر هر سطر ماتریس مجاورت گراف را به‌عنوان یک کلمه دودویی در نظر

بگیریم آنگاه کلمات ظاهر شده در سطرهای این ماتریس می‌تواند به‌عنوان یک نمایش دودویی برای گراف‌ها در نظر گرفته شود. این مسئله در مورد گراف‌های خاصی مانند گراف‌های دوبخشی، گراف‌های آستانه‌ای و ... بررسی شده است. البته در مورد گراف‌های آستانه‌ای ثابت شده است که یک تناظر دوسویی بین گراف‌های آستانه‌ای و کلمات دودویی به طول یک واحد بیشتر از تعداد رئوس وجود دارد. هر مواردی که اشاره شد، نشان می‌دهد که نسبت دادن گراف به کلمات دودویی می‌تواند از اهمیت زیادی برخوردار باشد؛ اما دلیل دیگر تعریف و مطالعه گراف تسلط کلمات دودویی در این مقاله در راستای جواب به سؤال سوم است. برای روشن‌تر شدن موضوع ابتدا یادآور می‌شویم که گراف‌های نسبت داده شده به کدهای (خطی) دودویی اهمیت بیشتری دارد و طبیعی است که برای شروع به کد بدیهی شامل تمام کلمات دودویی گراف نسبت داده شود. گراف مکعب یک مورد از این گراف‌هاست؛ در این گراف دو رأس u و v مجاورند هرگاه دقیقاً در یک بیت (رقم) باهم متفاوت باشند یا به‌عبارت‌دیگر

$$B_1(u) \subseteq B_1(v)$$

یا

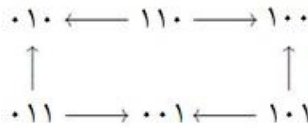
$$B_1(v) \subseteq B_1(u).$$

در دیگرام‌های هاش نیز خواص مشابهی وجود دارند. در «گراف تسلط کلمات دودویی» بال‌ها بر اساس خاصیت مهم بالا در نظر گرفته شده‌اند. در ضمن زیرگراف القایی از این گراف روی کلمات یک کد خطی (دودویی) می‌تواند اهمیت به مراتب بیشتری داشته باشد. این زیرگراف‌ها در بهینه کردن کدهای خطی با استفاده از نمایش گرافی آن‌ها کاربرد دارند. به‌عنوان مثال، کران‌های مهم «کره چینی»، «گیلبرت-ورشامو»، «همینگ» و ... در کدگذاری با استفاده از این زیرگراف‌ها از گراف تسلط کلمات دودویی قابل‌بررسی هستند. علاوه‌براین می‌توان به دنبال یافتن یک روش کدگشایی جدید با استفاده از تکنیک‌های نظریه گراف بود. کدهای دودویی که از گراف مکعب و گراف‌های مشابه و گراف‌های خطی آن‌ها به دست می‌آیند نیز دارای اهمیت ویژه‌ای هستند؛ به‌عنوان یک مثال از این کدها می‌توان به [۳] اشاره کرد. در واقع، این گراف حالت خاصی از کد معروف همینگ است؛ بنابراین کد دودویی متناظر با گراف خطی «گراف تسلط کلمات دودویی» نیز دارای اهمیت است.

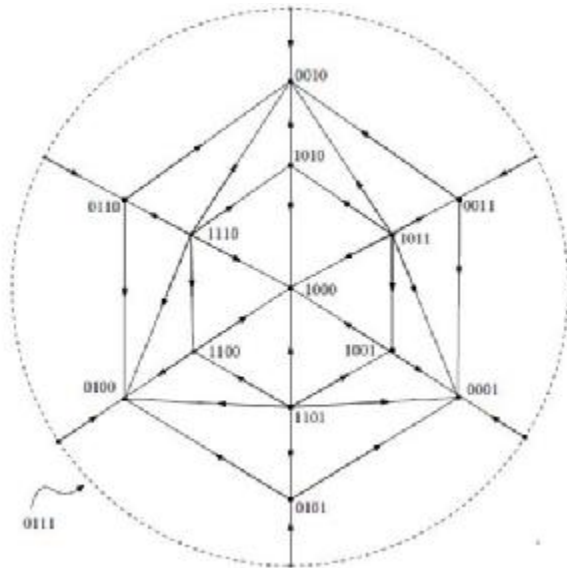
نکته ۲: با توجه به تعریف گراف جهت‌دار $\overrightarrow{\Gamma}_n$ ، به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر $x \rightarrow y$ و $x \rightarrow z$ ، آنگاه $y \rightarrow z$.

مثال ۳: با توجه به تعریف فوق واضح است که گراف Γ_\vee همان مکمل گراف K_\vee است که رئوس آن ۰۱ و ۱۰ می‌باشند، گراف $\overline{\Gamma}_\vee$ که گراف زمینه آن همان دور C_\vee است و گراف $\overline{\Gamma}_\wedge$

به شکل زیر می‌باشند:



شکل (۱): گراف $\overline{\Gamma}_3$



شکل (۲): گراف $\overline{\Gamma}_3$

در قضیه بعدی نشان خواهیم داد که گراف تسلط $\overline{\Gamma}_n$ همبند است.

قضیه ۴: برای هر $n \geq 2$ ، گراف $\overline{\Gamma}_n$ همبند ضعیف است؛ علاوه بر این $\text{diam}(\Gamma_n) \leq 5$.

اثبات: فرض کنید $u = u_1 u_2 \dots u_n$ و $v = v_1 v_2 \dots v_n$ دو رأس دلخواه غیرمجاور از گراف Γ_n باشند. فاصله u و v را در سه حالت محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: $u_n = v_n = 0$. در این حالت مسیر زیر بین دو رأس u و v وجود دارد. در این حالت داریم $v \rightarrow 11 \dots 10 \rightarrow u$. لذا $d(u, v) \leq 2$.

حالت دوم: $u_n = v_n = 1$. در این حالت رأس $1 \dots 1$ همسایه مشترک دو رأس u و v است

و لذا $d(u, v) \leq 2$.

حالت سوم: $u_n \neq v_n$ در این حالت بدون کاسته شدن از کلیت حکم می‌توان فرض کرد که $u_n = 0$ و $v_n = 1$. در این صورت مسیر زیر در گراف $\overline{\Gamma}_n$ وجود دارد:

$$u \leftarrow 100010 \rightarrow 100000 \leftarrow 1000001 \rightarrow 000001 \leftarrow v.$$

بنابراین $d(u, v) \leq 5$. لذا در هر حالت Γ_n گرافی همبند است و $\text{diam}(\Gamma_n) \leq 5$.

در مورد کمر گراف Γ_n ، واضح است که در حالت $n = 3$ ، $\Gamma_n = C_6$ و لذا $\text{girth}(\Gamma_n) = 6$. همچنین اگر $n \geq 4$ ، آنگاه Γ_n شامل مثلث است زیرا رئوس $u = 1110 \dots 0$ ، $v = 1100 \dots 0$ و $w = 1000 \dots 0$ دوه‌دو مجاور هستند؛ بنابراین

$$\text{girth}(\Gamma_n) = \begin{cases} \infty & n \leq 2 \\ 6 & n = 3 \\ 3 & n \geq 4 \end{cases}.$$

تبصره ۵: قضیه قبلی نشان می‌دهد که $\text{diam}(\Gamma_n) \leq 5$ ، در ادامه نشان خواهیم داد که در واقع، $\text{diam}(\Gamma_n) \leq 3$.

نتیجه ۶: گراف Γ_n جنگل (درخت) است اگر و تنها اگر $n \leq 2$.

در ادامه این بخش فاصله هر دو رأس دلخواه در گراف تسلط را محاسبه خواهیم کرد و با استفاده از آن شعاع و قطر گراف را می‌یابیم. ابتدا نمادهایی را برای رئوس این گراف معرفی می‌کنیم. چنانچه گراف Γ_n همبند باشد، $n \geq 3$ و هر رأس گراف Γ_n متعلق به یکی از مجموعه رئوس زیر است:

الف) رئوس:

$$a = 1100 \dots 0, b = 1000 \dots 0, c = 0100 \dots 0,$$

$$d = 101 \dots 1, e = 011 \dots 1, f = 001 \dots 1$$

ب) رئوس به شکل $10u, 01u, 11u, 00u$ که در آن $u \in \zeta_{n-2}^*$.

لم ۷: فرض کنید $n \geq 3$ عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت، در مورد فاصله دو رأس در گراف Γ_n داریم:

$$d(a, f) = d(c, d) = d(b, e) = 3,$$

در غیر این صورت، فاصله هر دو رأس غیرمجاور برابر ۲ است.

اثبات: می‌دانیم مسیر زیر بین دو رأس a و f وجود دارد:

$$a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow f$$

لذا چون a و f مجاور نیستند، پس $2 \leq d(a, f) \leq 3$.

نشان می‌دهیم $d(a, f) \neq 2$. به برهان خلف، فرض کنید $d(a, f) = 2$. در این صورت a و f دارای همسایه مشترکی مانند $W = W_1 W_2 \dots W_n$ هستند و بنا به نکته ۲، یکی از مسیرهای جهت‌دار زیر وجود دارد:

$$a \rightarrow w \leftarrow f \quad \text{یا} \quad a \leftarrow w \rightarrow f$$

وجود هر کدام از این مسیرها نتیجه می‌دهد که $W = 11\dots 1$ یا $W = 00\dots 0$ و این تناقض است؛ بنابراین $d(a, f) = 3$. با اثبات مشابهی می‌توان نشان داد که $d(c, d) = d(b, e) = 3$. حال فرض کنید x, y دو رأس غیرمجاور باشند به طوری که

$$\{x, y\} \notin \{\{a, f\}, \{b, e\}, \{c, d\}\}.$$

در این صورت، به سادگی می‌توان نشان داد که x, y دارای همسایه مشترک هستند و لذا $d(x, y) = 2$. ■

با توجه به لم قبلی، می‌توان جدول زیر را در مورد فاصله‌های رئوس در گراف Γ_n (برای $n \geq 3$) تنظیم کرد.

جدول (۱): فاصله رئوس در گراف Γ_n

رئوس	a	B	c	d	e	f	۱۰u	۰۱u	۱۱u	۰۰u
a	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۲	۲	۱	۲
b	۱	۰	۲	۱	۳	۲	۱	۲	۱	۲
c	۱	۲	۰	۳	۱	۲	۲	۱	۱	۲
d	۲	۱	۳	۰	۲	۱	۱	۲	۱	۲
e	۲	۳	۱	۲	۰	۱	۲	۱	۲	۱
f	۳	۲	۲	۱	۱	۰	۲	۲	۲	۱
۱۰u	۲	۱	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۱	۱
۰۱u	۲	۲	۱	۲	۱	۲	۲	۰	۱	۱
۱۱u	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۰	۱
۰۰u	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۰
خروج از مرکز	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۲	۲	۲	۲

با توجه به جدول ۱، نتیجه مفید زیر را می‌توان نوشت.

نتیجه ۸: برای هر عدد صحیح $n \geq 3$ داریم:

$$\text{rad}(\Gamma_n) = 2. \quad \text{diam}(\Gamma_n) = 3;$$

۳- تعداد یال‌ها در گراف Γ_n

در این بخش اندازه (تعداد یال‌های) گراف تسلط کلمات دودویی محاسبه خواهد شد.

قضیه ۹: تعداد یال‌ها در گراف Γ_n به صورت زیر است:

$$|E(\Gamma_n)| = 3^n - 3(3^n - 1) \quad (۱)$$

اثبات: می‌دانیم که در گراف جهت‌دار $\overrightarrow{\Gamma_n}$ یال $u \rightarrow v$ وجود دارد هرگاه $B_1(v) \subseteq B_1(u)$. لذا تعداد یال‌های جهت‌دار از رأس u به رؤس دیگر برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیر بدیهی $B_1(u)$. به‌طور مشابه تعداد یال‌های جهت‌دار از رؤس گراف به رأس ثابت u برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیر بدیهی $B_0(u)$. این بدین معنی است که درجه خروجی و درجه ورودی رأس u به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$d^+(u) = 2^{|B_1(u)|} - 2;$$

$$d^-(u) = 2^{|B_0(u)|} - 2.$$

از طرفی می‌دانیم که درجه رأس u مجموع درجات خروجی و ورودی است. لذا

$$d(u) = d^+(u) + d^-(u) = 2^{|B_1(u)|} + 2^{|B_0(u)|} - 4.$$

چون $|B_0(u)| = n - |B_1(u)|$ پس داریم:

$$d(u) = 2^{|B_1(u)|} + 2^{n-|B_1(u)|} - 4.$$

با توجه به اینکه تعداد یال‌ها در هر گرافی، نصف مجموع درجات آن گراف است داریم:

$$\begin{aligned} |E(\Gamma_n)| &= \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathcal{C}_n^*} \text{deg}(u) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathcal{C}_n^*} [2^{|B_1(u)|} + 2^{n-|B_1(u)|} - 4] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} [2^i + 2^{n-i} - 4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} 2^i 1^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} 1^{n-i} 2^i - 4 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[3^n + 3^n - 4 \times 2^n - 2 - 2 \times 2^n - 4(-2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[2 \times 3^n - 6 \times 2^n + 6 \right] \\
 &= 3^n - 3(2^n - 1).
 \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که به ازای هر عدد حقیقی x کف و سقف این عدد را به ترتیب با $\lfloor x \rfloor$ و $\lceil x \rceil$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۱۰: از اثبات قضیه قبلی نتیجه می‌شود که در گراف Γ_n داریم:

$$\Delta(\Gamma_n) = 2^{n-1} - 2;$$

$$\delta(\Gamma_n) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 4.$$

۴- اعداد رنگی و استقلال در گراف Γ_n

در این بخش به محاسبه اعداد رنگی رأسی و یالی و نیز عدد استقلال گراف تسلط می‌پردازیم.

قضیه ۱۱: برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\omega(\Gamma_n) = \chi(\Gamma_n) = n - 1.$$

اثبات: فرض کنید $C = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ یک خوشه در Γ_n باشد. در این صورت، طبق تمرین ۴۴، ۲، ۷ از [۱۲] و بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که مسیر زیر یک مسیر هامیلتونی جهت‌دار است:

$$u_1 \leftarrow u_2 \leftarrow \dots \leftarrow u_t;$$

بنابراین

$$B_1(u_1) \subseteq \dots \subseteq B_1(u_t)$$

یک زنجیر از زیرمجموعه‌های غیر تهی و سره از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ است؛ بنابراین $t \leq n - 1$. این نشان می‌دهد که $\omega(\Gamma_n) \leq n - 1$. از طرفی می‌دانیم که مجموعه

$$C' = \{100\dots0, 1100\dots0, \dots, 11\dots10\}$$

یک خوشه $n-1$ عضوی در گراف Γ_n است. در نتیجه $\omega(\Gamma_n) = n-1$.

از لم قبلی می‌توان عدد رنگی گراف Γ_n را به دست آورد، در واقع کافی است تعریف کنیم:

$$f: \mathcal{C}_n^* \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$f(u) = |B_1(u)|.$$

در این صورت واضح است که f یک رنگ‌آمیزی رأسی سره از گراف Γ_n است و لذا $\chi(\Gamma_n) \leq n-1$ از طرفی داریم

$$\chi(\Gamma_n) \geq \omega(\Gamma_n) \geq n-1.$$

بنابراین $\chi(\Gamma_n) = n-1$. ■

لم ۱۲: فرض کنید G یک گراف ساده است که برای هر رأس u از درجه ماکسیمم یال $\{u, v\}$ وجود دارد به طوری که

$$\Delta(G) - d(v) + 2$$

بیشتر از تعداد رئوس با درجه ماکسیمم باشد. در این صورت

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

اثبات: رجوع شود به نتیجه ۴,۵ از [۱۲]. ■

قضیه ۱۳: برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$\chi'(\Gamma_n) = \Delta(\Gamma_n) = 2^{n-1} - 2.$$

اثبات: با توجه به رابطه (۱) می‌دانیم که رأس u در گراف Γ_n دارای درجه ماکسیمم است اگر و تنها اگر $|B_1(u)| = n-1$ یا $|B_0(u)| = n-1$ ؛ بنابراین تعداد رئوس با درجه ماکسیمم در گراف Γ_n برابر است با $2n$. حال فرض کنید u یک رأس با درجه ماکسیمم در گراف Γ_n باشد. در این صورت طبق لم ۱۲ باید نشان دهیم رأس v مجاور با u وجود دارد به طوری که

$$\deg(u) - \deg(v) + 2 > 2n$$

بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $|B_1(u)| = n-1$ و $u = 11\dots 10$.

قرار دهید $v = 11\dots 100\dots 0$ که در آن تعداد یک‌ها برابر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و لذا تعداد صفرها برابر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

خواهد بود. حال داریم:

$$\begin{aligned} \deg(u) - \deg(v) + 2 &= 2^{n-1} - 2 - \left(2^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{2}} - 4\right) + 2 \\ &= 2^{n-1} + 4 - 2^{\frac{n}{2}} - 2^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

عبارت اخیر برای $n \geq 6$ از تعداد رئوس با درجه ماکسیمم یعنی $2n$ بیشتر است؛ بنابراین طبق لم ۱۲ برای $n \geq 6$ داریم:

$$\chi'(\Gamma_n) = \Delta(\Gamma_n).$$

همچنین برای $n \leq 5$ به صورت مستقیم می توان بررسی کرد که $\chi'(\Gamma_n) = \Delta(\Gamma_n)$ است. ■
قبل از بیان قضیه بعدی یادآور می شویم که خانواده Υ از زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی را پادزنجیر گویند هرگاه به ازای هر دو مجموعه A و B از خانواده Υ نه A زیرمجموعه B باشد و نه B زیرمجموعه A . قبل از محاسبه عدد استقلال گراف تسلط لازم است قضیه زیر را بیان کنیم.

گزاره ۱۴: فرض کنید Υ خانواده ای از زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی باشد. در این

$$\text{صورت، اگر } \Upsilon \text{ یک پادزنجیر باشد، آنگاه } |\Upsilon| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

اثبات: رجوع شود به قضیه ۵,۸ از [۷]. ■

قضیه ۱۵: عدد استقلال گراف Γ_n عبارت است از:

$$\alpha(\Gamma_n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

اثبات: ابتدا توجه داریم که دو رأس u و v در Γ_n غیرمجاورند اگر و تنها اگر داشته باشیم $B_1(u) \not\subset B_1(v)$ و $B_1(v) \not\subset B_1(u)$ ؛ بنابراین زیرمجموعه Ω از رئوس Γ_n یک مجموعه مستقل است اگر و تنها اگر مجموعه $\Upsilon = \{B_1(u) : u \in \Omega\}$ یک پادزنجیر از زیرمجموعه های مجموعه n عضوی $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد. لذا طبق گزاره ۱۴ داریم:

$$|\Upsilon| = |\Omega| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

از آنجایی که خانواده زیرمجموعه‌های $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ - عضوی از مجموعه n - عضوی $\{1, 2, \dots, n\}$ پادزنجیر است، پس مجموعه متناظر آن یعنی مجموعه

$$\Omega^* = \left\{ u \in V(\Gamma_n) : |B_1(u)| = wt(u) = \begin{pmatrix} n \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{pmatrix} \right\}$$

یک مجموعه مستقل ماکسیمم در Γ_n است؛ بنابراین حکم برقرار است. ■

تشکر و قدردانی

ما نویسندگان این مقاله لازم می‌دانیم که از داوران محترم به خاطر پیشنهادات مفید آن‌ها در راستای بهبود نگارش مقاله مراتب سپاس و تشکر خود را اعلام نماییم.

منابع

- [1] Beineke, L.W. and Wilson, B.J. (1978), *Selected Topics in Graph Theory*, Academic Press Inc., London.
- [2] Farzan, A. and Ian Munro, J. (2013), Succident encoding of arbitrary graphs, *Theoretical Computer Science*, **513**, 38-52.
- [3] Fish, W., Key, J.D., and Mwambene, E. (2010), Binary codes from the line graph of the n-cube, *Journal of Symbolic Computation*, **45**, 800-812.
- [4] Foucaud, F., Gravier, J., Naserasr, R., Parreau, A. and Valecov, P. (2013), Identifying codes in line graphs, *Journal of Graph Theory*, **73**(4), 425-448.
- [5] Gadouleau, M. (2018), On the possible values of the entropy of undirected graphs, *Journal of Graph Theory*, **88**(2), 302-311.
- [6] Grady, A. and Poznanovic, S. (2018), Graphical Mahonian statistics on words. *The electronic journal of combinatorics*, **25**(1), #P1.1.
- [7] Jukna, S. (2001), *External combinatorics with applications in computer science*, Texts in theoretical computer science, Springer.
- [8] Kitaev, S., Lozin, V. (2015), *Words and Graphs*, Springer Cham Heidelberg New York.
- [9] Leibniz, G. (1703), *Explication de l'Arithmétique Binaire* (Explanation of Binary Arithmetic). *Mathematical Writings VII*, Gerhardt, 223.

-
- [10] Millo, J. -V. and Simone, R. de (2012), Periodic scheduling of marked graphs using balanced binary words, *Theoretical Computer Science*, **458**, 113-130.
- [11] Rawlings, D. (1981), The r-major index, *J. Combin. Theory Ser. A*, **31**(2), 175-183.
- [12] West, D.B. (2001), *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River.

Dominance Graph of Binary Words

Farzad Shaveisi, Soheila Nasouri

Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract: The dominance graph of the binary words, which is denoted by $\overrightarrow{\Gamma}_n$, is a directed graph whose vertex set is the set of all binary words of length n . Setting $B_1(w) = \{1 \leq i \leq n | w_i = 1\}$, for every vertex $w_1 w_2 \dots w_n$, we join two vertices v and w by an arc if $B_1(w)$ is contained in $B_1(v)$. In this paper, we study and calculate some parameters of this graph. For example, after computing the distance of every two vertices and the eccentricity of any vertex, it is proved that the diameter and the radius of the underlying graph of $\overrightarrow{\Gamma}_n$ equals 3 and 2, respectively. Also, it is proved that this graph has $3^n - 3(2^n - 1)$ edges. Then we prove that both of the clique number and the chromatic number of the dominance graph of binary words of length n are $n-1$. Among other results, it is shown that the edge chromatic number and the maximum degree of vertices are equal to $2^{n-1} - 2$. Finally, by a combinatorial method, the independence number of this graph is determined.

Keywords: Dominance graph, Binary words, Diameter, Girth, Radius, Chromatic number, Independence number.

Mathematics Subject Classification (2010): 97R99, 05C33.

