

یک روش کنترل کننده غیرخطی برای پایداری سازی دستگاه‌های دینامیکی آشوبناک مرتبه کسری

احمد رضا حقیقی^{۱*}، محمد پورمحمد آقابابا^{۲**}، نسیم اصغری^{۳***}، مجید روحی^{۴****}

* دانشکده علوم پایه، دانشگاه فنی حرفه‌ای، تهران، ایران

** دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی ارومیه

*** دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکزی، تهران، ایران

**** دانشکده آمار و اقتصاد، دانشگاه گوانگجو، چین

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۶/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۷/۱۴

چکیده: در این مقاله، یک روش کنترل کننده غیرخطی برای پایداری سازی دستگاه‌های مرتبه کسری آشوبناک طراحی گردیده است. ویژگی اصلی این تکنیک کنترل کننده همگرایی سریع به نقطه تعادل و مقاومت در برابر نامعینی‌های دستگاه است. روابط و نتایج تحلیلی موجود در این پژوهش بر اساس تعمیم قضیه پایداری لیاپونوف برای دستگاه‌های مرتبه کسری انجام پذیرفته است. پایداری و مقاومت بالا در مقابل اغتشاشات بیرونی و به کارگیری این روش برای اکثر دستگاه‌های مرتبه کسری آشوبناک، از دیگر خصوصیت‌های این روش است. شبیه‌سازی‌های عددی برای پایداری سازی دستگاه‌های آشوبناک نشان دهنده کارایی و کاربردپذیری این روش در مقابل روش‌های دیگر است. شایان ذکر است که روش کنترلی ارائه شده برای پایداری سازی کلاس گسترده‌ای از دستگاه‌های مرتبه کسری آشوبناک قابل به کارگیری است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه‌های مرتبه کسری، دستگاه‌های آشوبناک، کنترل کننده‌ی غیرخطی، پایداری سازی، قضیه پایداری لیاپونوف.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۳۷B۲۵, ۳۴H۱۵, ۳۴C۲۸, ۲۶A۳۳

۱- مقدمه

محاسبات کسری با قدمتی بیش از ۳۰۰ سال، تعمیمی از معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرال گیری مرتبه دلخواه (غیر صحیح) است و در دهه‌های اخیر مورد توجه ویژه‌ای از سوی علوم فیزیک و مهندسی قرار گرفته است [۱]. در واقع معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل خصوصیت غیرموضعی بودنشان در بسیاری از دامنه‌ها دقیق تر عمل می‌کنند. در حالی که معادلات دیفرانسیل معمولی، خاصیت موضعی دارند. خصوصیت غیرموضعی، بودن بدین معناست که، وضعیت بعدی دستگاه تنها به حالت کنونی آن بستگی ندارد، بلکه وضعیت‌های قبلی دستگاه از زمان شروع، نیز در رفتار آینده دستگاه تأثیرگذار است. علاوه بر این، مشتقات کسری روی دامنه‌های ناهموار (دامنه‌هایی که مشتق پذیر نیستند) نیز قابل تعریف هستند [۲]، به طوری که امروزه بسیاری از دستگاه‌ها در حوزه‌های میان‌رشته‌ای نظیر: مواد ویسکولاستیک (چسبناک)، دستگاه محور پروانه‌ای، دستگاه‌های ترموالکتریک، دستگاه‌های اقتصاد و سرمایه‌گذاری، مدارهای الکتریکی، دستگاه تنفسی انسان و دستگاه زیستی و باتری، به کمک مشتقات مرتبه کسری به گونه‌ای دقیق و منسجم شرح داده می‌شوند [۳].

در بسیاری از دستگاه‌های دیفرانسیلی مرتبه کسری، به دلیل حساسیت فراوان بر نقطه اولیه و خاصیت غیرخطی شدید و فراکتالی، رفتارهای آشوبی و غیرقابل پیش‌بینی مشاهده می‌گردد و این ویژگی‌ها سبب توجه محققان نسبت به مطالعه بر روی این دستگاه‌ها گردیده است تا برای کنترل و پایدارسازی این دستگاه‌ها راهکارهایی بیندیشند [۴].

در سال‌های اخیر، تکنیک‌ها و روش‌های فراوانی، با استفاده از حالت مرتبه کسری تئوری لیاپونوف، برای کنترل و همسازی دستگاه‌های مرتبه کسری طراحی و عملی شده‌اند. از جمله مهم‌ترین روش‌های بکار برده شده می‌توان به روش کنترل مود لغزشی [۵]، روش کنترل بهینه [۶]، روش کنترل تطبیقی [۷، ۸]، روش کنترل بازخورد غیرخطی [۹]، روش کنترل PID [۱۰] می‌باشند. برای مثال، رزمی‌نیا و بالنو، برای همسازی رفتار آشوبناک دستگاه‌های مرتبه کسری، از روش مود لغزشی استفاده کرده‌اند [۱۱]. در [۱۲]، برای کنترل دستگاه‌های مرتبه کسری، از شیوه‌ای موسوم به روش کنترل بهینه استفاده شده است. در [۱۳]، با استفاده از یک تکنیک کنترلی مود لغزشی، به مسئله پایدارسازی دستگاه‌های دینامیکی غیر صحیح پرداخته شده است. اما در هیچ‌کدام از مطالعات بیان شده در [۱۱]، [۱۲] و [۱۳]، اغتشاشات و نامعینی‌ها در نظر گرفته نشده‌اند و تنها حالت ساده‌ای از دستگاه مورد بررسی قرار گرفته است. آقابابا در [۱۴-۱۶]، پس از مطالعه رفتار آشوبناک در دستگاه‌های مرتبه کسری تکنیک‌های متنوعی برای کنترل زمان متناهی این دستگاه‌ها ارائه نموده است. در [۱۷] با استفاده از یک روش کنترل کننده‌ی فعال، دستگاه‌های مرتبه کسری آشوبناک متفاوت همسازی شده‌اند. نویسندگان [۱۸، ۱۹]، برای کنترل و همسازی کلاس خاصی از دستگاه‌های مرتبه کسری سه‌بعدی، روش کنترل مود لغزشی را پیشنهاد

نموده‌اند. در [۲۰]، با استفاده از یک روش کنترلی زمان متناهی، مسئله کنترل دستگاه‌های مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته است.

ولی در مقالات [۱۵-۲۱] با وجود در نظر گرفتن نامعینی‌ها و اغتشاشات، حالتی از قضیه لیاپونوف استفاده شده است که پایداری آن برای دستگاه‌های مرتبه کسری سؤال برانگیز است.

با توجه به مطالب بیان شده، در این مقاله ابتدا با استفاده از قضیه پایداری بیان شده در [۲۱]، یک روش کنترلی فعال برای کنترل و پایداری دستگاه‌های مرتبه کسری غیرخطی نامعین غیر خودگردان ارائه می‌گردد، به طوری که برای اثبات نتایج تحلیلی از حالت مرتبه کسری قضیه لیاپونوف با رویکرد توزیع فرکانس دستگاه‌های مرتبه کسری بهره‌گیری شده است. قضیه لیاپونوف با رویکرد توزیع فرکانس یکی از جدیدترین بیان‌ها برای قضیه پایداری لیاپونوف در حالت مرتبه کسری است. علاوه بر این، نامعینی‌ها و اغتشاشات دستگاه، که در عمل نیز وجود دارند، در طراحی این کنترل‌کننده در نظر گرفته شده‌اند. سپس شبیه‌سازی‌های عددی برای پایداری دستگاه‌های پرکاربرد که در صنعت و زندگی ما نقش بسزایی دارند، صورت پذیرفته است که بیانگر کاربردپذیر بودن روش طراحی شده در عمل است. علاوه بر این‌ها، نتایج حاصل از این مقاله با یک روش کنترل مود لغزشی مقایسه گشته است که آن هم به نوعی تأیید کننده‌ی کارایی بهتر روش مورد نظر است.

این مقاله بدین صورت ادامه می‌یابد که: در فصل دوم، ابتدا به بیان مفاهیمی پایه‌ای پیرامون مشتق و انتگرال مرتبه کسری و قضایایی در مورد پایداری آن پرداخته می‌شود. همچنین، این فصل با بیان صورت مسئله ادامه می‌یابد. سپس در فصل سوم، طراحی و اثبات یک روش کنترلی مقاوم برای کنترل و پایداری دستگاه‌های مرتبه کسری غیر خودگردان ارائه می‌گردد. در فصل چهارم، برای تأکید بر عملی بودن روش ارائه شده، شبیه‌سازی‌های عددی ارائه شده است. در انتها و در فصل پنجم، مقاله با نتیجه‌گیری و بحث‌های مربوطه به پایان می‌رسد.

۲- مفاهیم پایه‌ای و بیان مسئله

در این بخش، ابتدا تعاریف و قضایایی پیرامون مشتق کسری و ویژگی‌ها آن بیان می‌شوند و سپس دستگاه مورد نظر تشریح می‌گردد.

۲-۱- محاسبات کسری

تعریف ۱. انتگرال مرتبه کسری ریمن-لیوویل برای تابع $f(t)$ ، از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۲]:

$${}_t I_t^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (۱)$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است.

تعریف ۲. مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل برای تابع $f(t)$ ، از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۲]:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \quad (۲)$$

که در آن $m \in R^+$ و $m-1 < \alpha < m$ یک عدد صحیح است.

تعریف ۳. برای تابع $f(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ، مشتق مرتبه کسری کاپوتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۲]:

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= D^{-(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-m+\alpha}} d\tau \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن $m \in R^+$ و $m-1 < \alpha < m$ نزدیک‌ترین عدد صحیح به α می‌باشد.

شایان ذکر است که، مشتق کاپوتو را در این مقاله بکار خواهیم گرفت و ${}^c D^\alpha$ بیانگر مشتق مرتبه کسری کاپوتو می‌باشد.

تعریف ۴. کانولوشن دو تابع f و g به صورت $f * g$ نوشته می‌شود. این تعریف به صورت انتگرال حاصل ضرب دو تابع که یکی از آن‌ها نسبت به محور عمودی مختصات برعکس شده و به صورت

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۵. فرض کنید که $h(t)$ پاسخ ضربه‌ی یک دستگاه خطی باشد. آنگاه نمایش توزیع (یا تابع فرکانس وزنی) برای تابع $h(t)$ را $\mu(\omega)$ می‌نامیم و به شکل زیر بیان می‌گردد [۲۱]:

$$h(t) = \int_0^{\infty} \mu(\omega) e^{-\omega t} d\omega \quad (۴)$$

تبصره ۱. برای انتگرال مرتبه کسری ${}_t I_t^\alpha f(t)$ ، می‌توانیم رابطه (۱) را به صورت [۲۱]:

$${}_t I_t^\alpha f(t) = h(t) * f(t) \quad (۵)$$

نیز بیان کنیم که در آن $*$ عملگر کانولوشن و $h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ می‌باشند. همچنین، $\mu(\omega)$ به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \omega^{-\alpha} \quad (۶)$$

قضیه ۱. معادله دیفرانسیل مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۱]:

$${}^c D^\alpha X = f(X, t) \quad (۷)$$

این دستگاه را می‌توان به صورت

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + f(X, t) \\ X(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega. \end{cases} \quad (۸)$$

بازنویسی کرد که در آن $\mu(\omega)$ در رابطه (۶) تعریف شده است.

برای مشاهده جزئیات بیشتر و درک چرایی این قضیه، می‌توان به مرجع [۲۱] مراجعه نمود.

لم ۱. فرض کنیم که $w_1 = \int_0^\infty \mu(\omega) \omega z^\gamma(\omega, t) d\omega$ و $w_\gamma = a x^\gamma$ باشد. در این صورت

$$w = w_1 + w_\gamma$$

معین مثبت است، اگر و تنها اگر $a > 0$ باشد [۲۱].

برای مشاهده جزئیات بیشتر و درک چرایی این لم، می‌توان به مرجع [۲۱] مراجعه نمود.

۲-۲- بیان مسئله

دستگاه زیر از دستگاه‌های معادلات مرتبه کسری غیر خودگردان نامعین را در نظر بگیرید:

$${}^c D^\alpha X = F(X, t) + \Delta F(X, t) + d(t) - U(t) \quad (۹)$$

که در آن $\alpha \in (0, 1)$ مرتبه دیفرانسیل کسری دستگاه است و $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ یک بردار از متغیرهای حالت دستگاه می‌باشند. همچنین توابع برداری $F(X, t) = [f_1(X, t), f_2(X, t), \dots, f_n(X, t)]^T$ توابع برداری غیرخطی هستند که در ناحیه $R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ تعریف می‌شوند. علاوه بر این، نامعینی‌های دستگاه نیز به صورت $\Delta F(X, t) = [\Delta f_1(X, t), \Delta f_2(X, t), \dots, \Delta f_n(X, t)]^T$ و اغتشاشات خارجی دستگاه به صورت $d(t) = [d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)]^T \in R^n$ هستند و در نهایت ورودی کنترلی می‌باشد. $U = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \in R^n$

فرض ۱. چون مسیرهای دستگاه‌های مرتبه کسری ناخودگردان و بخصوص سیستم‌های آشوبناک کران دارند، لذا نامعینی‌ها و اغتشاشات بیرونی دستگاه یعنی $\Delta f_i(X, t)$ و $d_i(t)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ نیز کران دار فرض می‌شوند. بنابراین عددهای ثابت و مثبت ثابت δ_i و β_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ وجود دارند به طوری که

$$|\Delta f_i(X, t)| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

و

$$|d_i(t)| < \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

از روابط (۱۰) و (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت

$$|\Delta f_i(X, t)| + |d_i(t)| < \delta_i + \beta_i < \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

که در آن $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ عددهای ثابت و مثبت می‌باشد.

فرض ۲. حالت‌های دستگاه موردنظر، اندازه‌پذیر و در دسترس فرض می‌شوند. علاوه بر این دستگاه موردنظر فاقد تأخیر در نظر گرفته می‌شود.

۳- طراحی کنترل کننده مقاوم غیرخطی

دستگاه مرتبه کسری ناخودگردان (۹) را در نظر بگیرید. برای این دستگاه سیگنال کنترلی زیر را پیشنهاد می‌نماییم:

$$U = \lambda \xi \text{ sign}(X) + \rho + F(X, t), \quad (13)$$

که در آن $\|X\| = q$ و همچنین λ و q به ترتیب بردارهای ستونی و سطری n تایی از اعداد مثبت هستند و ρ یک بردار ستونی از اعداد متناهی است که مؤلفه‌های آن به صورت $\rho = \max\{\rho_i\}, i=1,2,\dots,n$ می‌باشند. بعلاوه

$$\text{sign}(X) = [\text{sign}(x_1), \text{sign}(x_2), \dots, \text{sign}(x_n)]^T$$

که در آن $\text{sign}(x)$ همان تابع علامت می‌باشد.

قضیه ۲. دستگاه مرتبه کسری ناخودگردان (۹) را در نظر بگیرید. اگر این دستگاه به وسیله سیگنال کنترلی ارائه شده در رابطه (۱۳) کنترل شود، آنگاه مسیرهای دستگاه همگی به نقطه تعادل (نقطه صفر) همگرا خواهند بود.

اثبات. دستگاه (۹) را در نظر بگیرید، بنابر قضیه ۱ می‌توان این دستگاه را به شکل

$$\begin{cases} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} = -\omega z(\omega, t) + F(X, t) + \Delta F(X, t) + d(t) - U(t) \\ X(t) = \int_0^{\infty} \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega. \end{cases} \quad (14)$$

نمایش داد که در آن

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \omega^{-\alpha} \quad (15)$$

اکنون بایستی تابع لیاپونوفی تعریف کنیم که اولاً معین مثبت بوده و ثانیاً مشتق آن نسبت به t ، معین منفی باشد. در اینجا دو تابع تعریف می‌کنیم، ابتدا $v(\omega, t)$ و سپس به وسیله آن تابع لیاپونوف اصلی یعنی $V(t)$ را معرفی می‌نماییم. لذا ابتدا تعریف می‌کنیم:

$$v(\omega, t) = \frac{z^T(\omega, t)}{\gamma} \quad (16)$$

چون $v(\omega, t)$ برحسب (ω, t) تعریف شده است، لذا با مشتق‌گیری از این تابع نسبت به $z(\omega, t)$ ، برای این تابع داریم: $\frac{\partial v(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} = z(\omega, t)$ و با توجه به رابطه‌ی (۱۴) و با کمک کنترل‌کننده‌ی (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\omega, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v(\omega, t)}{\partial z(\omega, t)} \frac{\partial z(\omega, t)}{\partial t} \\ &= z(\omega, t) [-\omega z(\omega, t) + F(X, t) + \underbrace{\Delta F(X, t) + d(t)}_{< \rho} - U] \end{aligned}$$

که با ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\omega, t)}{\partial t} &< z(\omega, t) [-\omega z(\omega, t) + F(X, t) + \rho - U] \\ &< z(\omega, t) [-\omega z(\omega, t) + F(X, t) + \rho - \lambda \xi \operatorname{sign}(X) - \rho - F(X, t)] \\ &< z(\omega, t) [-\omega z(\omega, t) - \lambda \xi \operatorname{sign}(X)] \\ &= -\omega z^2(\omega, t) - \lambda \xi \operatorname{sign}(X) z(\omega, t) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial v(\omega, t)}{\partial t} < -\omega z^2(\omega, t) - \lambda \xi \operatorname{sign}(X) z(\omega, t) \quad (۱۷)$$

اکنون به معرفی تابع لیاپونوف اصلی می‌پردازیم، این تابع لیاپونوف به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$V(t) = \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) v(\omega, t) d\omega \quad (۱۸)$$

با استفاده از تعریف $v(\omega, t)$ در رابطه‌ی (۱۶) داریم:

$$V(t) = \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) z^2(\omega, t) d\omega \quad (۱۹)$$

به‌وضوح از (۱۹) نتیجه می‌شود که $V > 0$. اکنون بایستی نشان دهیم که $\frac{dV}{dt} < 0$. لذا:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) \frac{\partial v(\omega, t)}{\partial t} d\omega \\ &< \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) [-\omega z^2(\omega, t) - \lambda \xi \operatorname{sign}(X) z(\omega, t)] d\omega \\ &< - \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) \omega z^2(\omega, t) d\omega - \lambda \xi \operatorname{sign}(X) \int_{\circ}^{\infty} \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega \end{aligned}$$

و چون $X = \int_0^{\infty} \mu(\omega) z(\omega, t) d\omega$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &< - \int_0^{\infty} \mu(\omega) \omega z^{\top}(\omega, t) d\omega - \lambda q \|X\| \|X\| \\ &= - \int_0^{\infty} \mu(\omega) \omega z^{\top}(\omega, t) d\omega - \lambda q \|X\|^2 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{dV}{dt} < - \left(\int_0^{\infty} \mu(\omega) \omega z^{\top}(\omega, t) d\omega + \lambda q \|X\|^2 \right)$$

اکنون با توجه به قضیه ۱ نتیجه می‌گیریم که هرگاه $\lambda q > 0$ باشد، آنگاه $\frac{dV}{dt} < 0$ که این

شرط در تعریف کنترل‌کننده قید شده است. لذا

$$\frac{dV}{dt} < - \left(\int_0^{\infty} \mu(\omega) \omega z^{\top}(\omega, t) d\omega + \lambda q \|X\|^2 \right) < 0 \quad (۲۰)$$

در نتیجه شرایط پایداری در تئوری پایداری لیاپونوف فراهم شده است و لذا دستگاه به‌طور مجانبی پایدار خواهد بود و این چنین اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

تذکر ۱: برای طراحی کنترل‌کننده (۱۳)، چند مورد مدنظر قرار گرفته شده است که از جمله مهم‌ترین آن‌ها، صدق کردن در شرایط پایداری لیاپونوف و عدم پیچیدگی بوده است. در واقع سیگنال کنترلی (۱۳) طوری طراحی شده است که هم در شرایط لیاپونوف صدق کند و هم در به‌کارگیری و شبیه‌سازی به راحتی مورد استفاده قرار گیرد.

تذکر ۲: طبق قضیه پایداری لیاپونوف برای دستگاه‌های مرتبه کسری که در [۲۱] بیان شده است، $V(0)$ باید برابر با صفر باشد. و بنابر تعریف $V(t)$ ، در رابطه (۱۸) خواهیم دید که با استفاده از تعریف $X(t)$ در رابطه (۱۴)، $V(0) = 0$ به دست خواهد آمد.

تذکر ۳: یکی از مشکلات موجود در استفاده از تابع $sign(X)$ در روش‌های کنترلی، پدیده چترینگ است در واقع، این پدیده نوسانات ناخواسته‌ای است که در اطراف کنترل‌کننده رخ می‌دهد و معمولاً در هنگام استفاده از روش کنترلی اتفاق می‌افتد. در اینجا برای جلوگیری از

چترینگ، بجای تابع $sign(x)$ از تابع $\tanh(x)$ استفاده می‌گردد. یعنی کنترل کننده‌ی (۱۳) را به شکل

$$U = \lambda \xi \tanh(X) + \rho + F(X, t), \quad (21)$$

بازنویسی می‌کنیم. این تغییر همان‌طور که در [۲۳] بیان شده است یکی از روش‌های معمول برای از بین بردن چترینگ ورودی کنترلی می‌باشد و بر کلیت مسئله تأثیری ندارد.

۴- شبیه‌سازی عددی

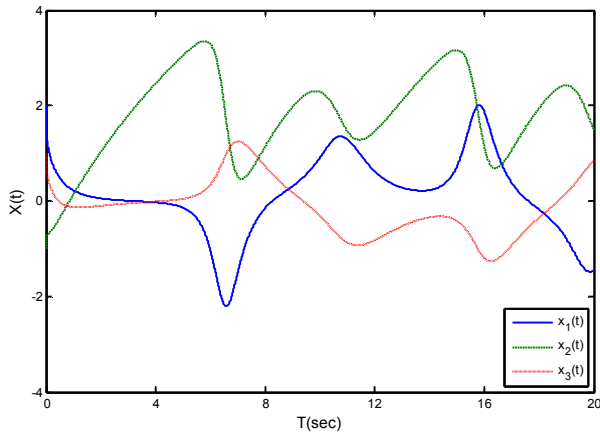
در این بخش با ارائه چند مثال عددی صحت و درستی روش پیشنهادی را در عمل، نشان می‌دهیم. به‌طوری‌که دستگاه‌های آشوبناک مرتبه کسری ناخودگردان اقتصادی در حالت سه‌بعدی و دستگاه فوق آشوب مرتبه کسری ناخودگردان چهار باله در حالت چهاربعدی، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. برای شبیه‌سازی‌های عددی، از تعمیم الگوریتم آدامز- بشفورث- مولتون که توسط شهبازی اصل و جاویدی در [۲۴] ارائه گردید، در محیط نرم‌افزاری MATLAB با گام زمانی ۰/۰۰۱ استفاده شده است.

۴-۱- کنترل دستگاه مرتبه کسری اقتصادی

در این قسمت تأثیر کنترل کننده‌ی (۲۱) را روی دستگاه اقتصادی و مالی معروف به دستگاه مرتبه کسری، بررسی می‌گردد.

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1 = x_3 + (x_2 - a)x_1, \\ {}^c D^\alpha x_2 = 1 - b x_2 - x_1^2, \\ {}^c D^\alpha x_3 = -x_1 - c x_3, \end{cases} \quad (22)$$

این دستگاه اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط چن [۲۵]، برای تشریح دستگاه اقتصادی در حال اجرا، پیشنهاد شد. سه متغیر حالت x_1 ، x_2 و x_3 به ترتیب نمایانگر نرخ سود، میزان سرمایه مورد نیاز و شاخص قیمت‌ها می‌باشند. همچنین عدد ثابت a میزان صرفه‌جویی، عدد ثابت b مقدار هر سرمایه‌گذاری و عدد ثابت c میزان انعطاف عرضه و تقاضا در بازارهای جهانی را نشان می‌دهند. به‌سادگی درمی‌یابیم که این عددهای ثابت همگی غیر منفی هستند. این دستگاه برای $0/1 \leq \alpha \leq 1$ و دستگاه برای $a=1$ ، دستگاه برای $b=0/1$ و $c=1$ رفتارهای آشوبناک از خود نشان می‌دهد. شکل (۱) رفتار آشوبناک این دستگاه را به‌خوبی نشان می‌دهد.



شکل (۱): آشوب در مسیره‌های حالت دستگاہ اقتصادی

از طرفی، واضح است که به ازای نقاط اولیه‌ی $X_1(0) = 0, X_2(0) = 0, X_3(0) = 0$ جواب به صورت $[D^\alpha X_1(0), D^\alpha X_2(0), D^\alpha X_3(0)]^T = [0, 1, 0]^T$ خواهد بود. این یعنی نقطه تعادل دستگاہ نقطه صفر نیست. برای حل این مشکل از تبدیل خطی $(y \rightarrow y + 10)$ استفاده می‌کنیم که در نتیجه آن، دستگاہ (۲۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha X_1 = X_3 + (X_2 - 9)X_1, \\ {}^c D^\alpha X_2 = -0.1X_2 - X_1^2, \\ {}^c D^\alpha X_3 = -X_1 - cX_3, \end{cases} \quad (23)$$

واضح است که نقطه تعادل دستگاہ (۲۳) مبدأ مختصات یعنی نقطه صفر می‌باشد.

اکنون دستگاہ مرتبه کسری آفین ناخودگردان اقتصادی را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha X_1 = X_3 + (X_2 + 9)X_1 + \Delta f_1(X, t) + d_1(t) - u_1 \\ {}^c D^\alpha X_2 = -0.1X_2 - X_1^2 + \Delta f_2(X, t) + d_2(t) - u_2 \\ {}^c D^\alpha X_3 = -X_1 - X_3 + \Delta f_3(X, t) + d_3(t) - u_3 \end{cases} \quad (24)$$

در دستگاه فوق $\alpha = 0/91$ انتخاب شده است. علاوه بر این نامعینی‌ها و اغتشاشات خارجی دستگاه را به صورت زیر معرفی کرده‌ایم:

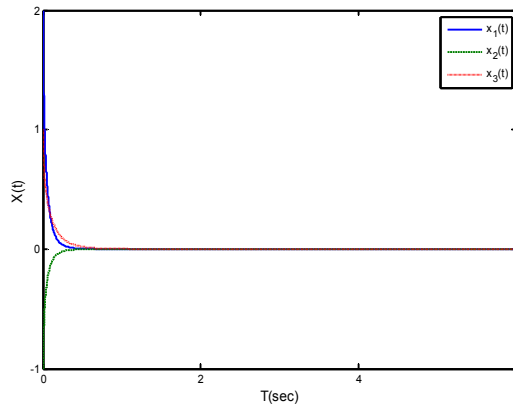
$$\Delta f_1(X, t) + d_1(t) = 0/1 \sin(t)x_1 + 0/1 \cos(3t)$$

$$\Delta f_2(X, t) + d_2(t) = 0/2 \sin(3t)x_2 - 0/15 \sin(t)$$

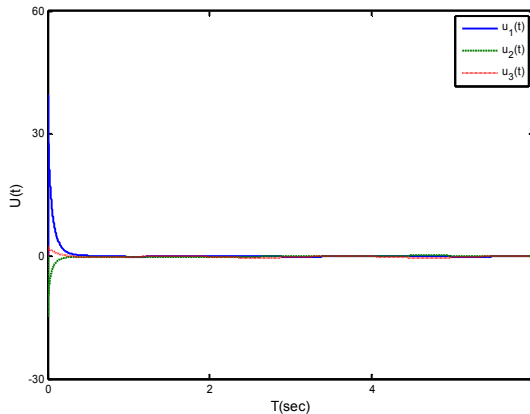
$$\Delta f_3(X, t) + d_3(t) = -0/15 \cos(2t)x_3 - 0/2 \sin(3t)$$

برای به کارگیری کنترل کننده‌ی پیشنهادی برای کنترل دستگاه آشوبناک ناخودگردان آفین اقتصادی (۲۴)، پارامترهای کنترل کننده را به صورت $\rho = [0/35, 0/35, 0/35]^T$ ، $\lambda = [4, 4, 3]^T$ و $q = [3, 3, 2]$ انتخاب می‌کنیم. نقطه اولیه برای کنترل کننده صفر در نظر گرفته می‌شود، یعنی $u_i = 0$ ، $i = 1, 2, 3$ ، علاوه بر این نقاط اولیه، $x_1(0) = 2$ ، $x_2(0) = -1$ و $x_3(0) = 1$ انتخاب شده‌اند.

شکل ۲ مسیرهای حالت این دستگاه را پس از اعمال کنترل کننده‌ی پیشنهادی، در طی زمان نشان می‌دهد. واضح است که همه متغیرهای حالت دستگاه مورد نظر به نقطه تعادل همگرا شده‌اند و این یعنی دستگاه پایدار شده است.



شکل (۲): مسیرهای حالت دستگاه اقتصادی (۲۴) پس از اعمال کنترل کننده‌ی (۲۱)



شکل (۳): رفتار کنترل کننده‌ی (۲۱) در طی زمان

شکل ۳ نیز به نمایش رفتار کنترل کننده (۲۱) در طی زمان اختصاص دارد. ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های کنترل کننده نیز در مدت زمانی بسیار کوتاه به صفر همگرا شده‌اند. لذا کنترل کننده انرژی کمی خواهد کرد. در نتیجه روش پیشنهادی سازگار و در عمل قابل بکارگیری می‌باشد.

در ادامه این مثال، قصد داریم تا روش خود را یک روش کنترل کننده‌ی حالت لغزشی، مقایسه نماییم. در [۲۶] یک روش کنترل کننده‌ی حالت لغزشی، صرفاً برای دستگاه مرتبه کسری اقتصادی، توسط دادرس و مؤمنی طراحی شده است.

سپس ین و همکارانش در [۲۷]، با تعمیم روش آن‌ها، یک روش سطح لغزشی برای کنترل و پایدارسازی دستگاه‌های مرتبه کسری ناخودگردان پیشنهاد کردند که شامل روش پیشنهاد شده در [۲۶] می‌باشد. این روش به صورت زیر ارائه شده است:

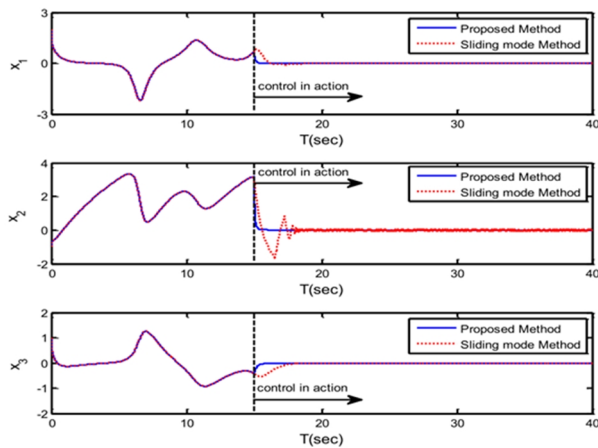
$$S(t) = D^{\alpha-1} y(t) + \int_0^t (x^T(\tau) + K y(\tau)) d\tau \quad (۲۵)$$

$$u(t) = (b - K) y - 1 + K_r \text{sign}(S) \quad (۲۶)$$

که در آن $S(t)$ سطح لغزشی، $u(t)$ سیگنال کنترلی می‌باشند. همچنین b ، K و K_r اعداد ثابت دلخواه هستند. با انتخاب $\alpha = 0.91$ به عنوان مرتبه دیفرانسیل دستگاه و قرار دادن $b = 0.1$

، $K=1$ و $K_r=-3$ روش کنترلی حالت لغزشی (۲۶) را بکار می‌گیریم. همچنین برای نمایش هرچه بهتر این مقایسه، کنترل کننده‌ها از ثانیه‌ی پانزدهم وارد عمل می‌شوند.

در شکل ۴، مقایسه بین دو روش را نشان داده می‌شود. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، شکل‌های خط مُمتد سریع‌تر از شکل‌های نقطه‌چین به نقطه تعادل همگرا می‌شوند. علاوه بر این، با دقت بیشتر در شکل ۴، می‌بینیم که متغیر حالت x_1 با اعمال کنترل کننده حالت لغزشی، دارای نوسان و نویز می‌باشد و این چترینگ ایجاد شده ممکن است در دراز مدت مشکلاتی برای دستگاه به وجود بیاورد و پایداری دستگاه از بین برود. درحالی‌که روش پیشنهادی ارائه شده بدون هیچ‌گونه نوسان یا نویز، پایدارسازی را انجام داده است.



شکل (۴): مقایسه مسیرهای حالت با اعمال دو روش کنترل کننده سطح

لغزشی (۲۵) و قانون کنترل کننده‌ی (۲۶)

۴-۲- کنترل دستگاه مرتبه کسری چهار باله

این مثال به بررسی مسئله‌ی کنترل و پایدارسازی دستگاه مرتبه کسری فوق آشوبناک چهار باله اختصاص دارد. در [۲۸] یک دستگاه فوق آشوبناک ۴ بعدی موسوم به دستگاه مرتبه کسری چهار باله به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1 = \lambda x_1 + x_2 x_3 + x_4 \\ {}^c D^\alpha x_2 = -\varphi x_2 + x_1 x_3 \\ {}^c D^\alpha x_3 = x_1 x_2 - \varphi x_3 + x_1 x_4 \\ {}^c D^\alpha x_4 = -x_2 \end{cases} \quad (27)$$

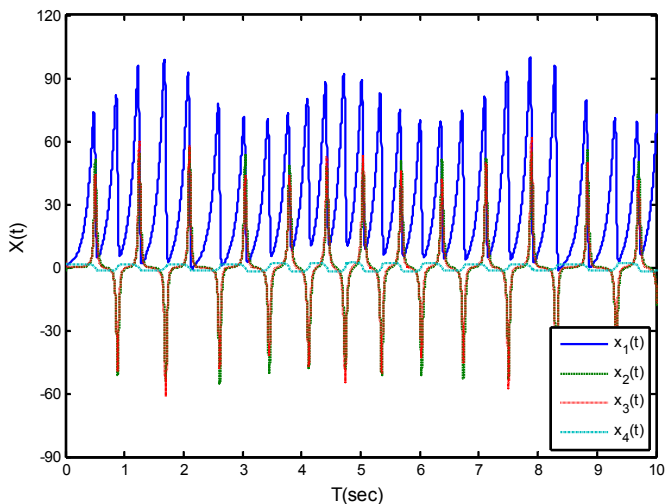
شکل ۵ رفتار فوق آشوبناک این دستگاه را به ازای $\alpha = 0.95$ به خوبی نشان می‌دهند. دستگاه مرتبه کسری ناخودگردان آفین فوق آشوبناک چهار باله، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha x_1 = \lambda x_1 + x_2 x_3 + x_4 + \Delta f_1(X, t) + d_1(t) - u_1 \\ {}^c D^\alpha x_2 = -\varphi x_2 + x_1 x_3 + \Delta f_2(X, t) + d_2(t) - u_2 \\ {}^c D^\alpha x_3 = x_1 x_2 - \varphi x_3 + x_1 x_4 + \Delta f_3(X, t) + d_3(t) - u_3 \\ {}^c D^\alpha x_4 = -x_2 + \Delta f_4(X, t) + d_4(t) - u_4 \end{cases} \quad (28)$$

که در آن $i = 1, 2, 3, 4$, $\Delta f_i(X, t) + d_i(t)$ نامعینی‌ها و اغتشاشات خارجی دستگاه هستند که به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

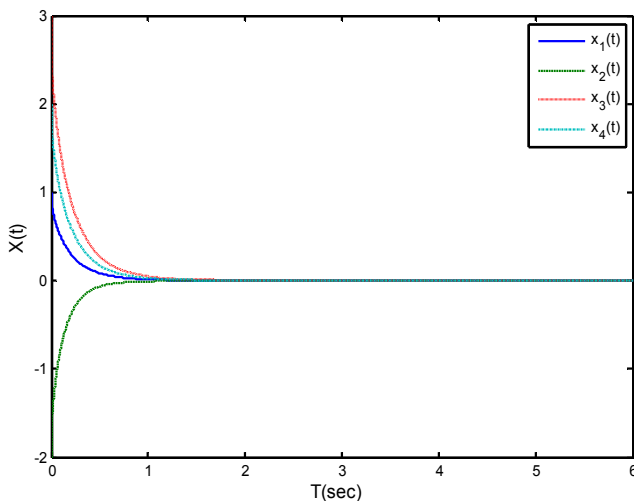
$$\begin{cases} \Delta f_1(X, t) + d_1(t) = 0.2 \sin(\Delta t) x_4 + 0.25 \cos(3t) \\ \Delta f_2(X, t) + d_2(t) = 0.3 \cos(2t) x_1 x_3 - 0.15 \cos(t) \\ \Delta f_3(X, t) + d_3(t) = -0.25 \sin(4t) x_3 + 0.2 \sin(3t) \\ \Delta f_4(X, t) + d_4(t) = 0.25 \sin(t) x_4 + 0.15 \cos(4t) \end{cases}$$

همچنین نقاط اولیه، $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$, $x_3(0) = 3$ و $x_4(0) = 2$ انتخاب شده‌اند و برای به کارگیری کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، در کنترل دستگاه آشوبناک (28)، پارامترهای کنترل‌کننده را به صورت $\lambda = [1/3, 2, 1/3, 1/3]^T$ و $q = [3, 3, 3, 3]$ و $\rho = [0.45, 0.45, 0.45, 0.45]^T$ و همچنین $u_i(0) = 0$ انتخاب می‌کنیم.



شکل (۵): رفتار فوق آشوبناک مسیره‌های حالت دستگاه مرتبه کسری چهار باله

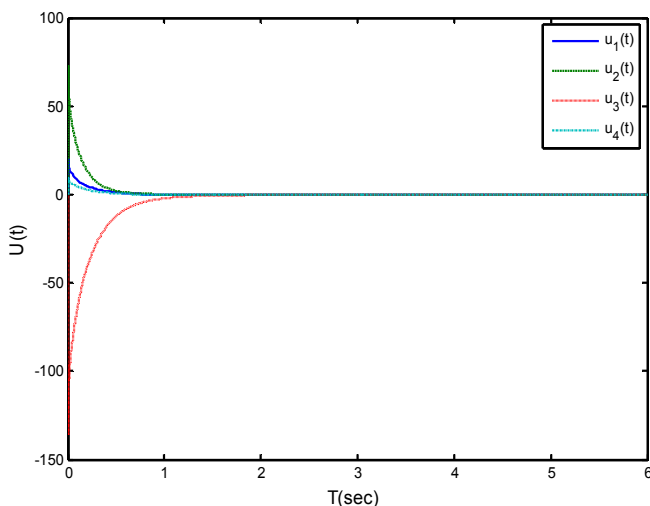
شکل ۶ مسیره‌های حالت دستگاه مرتبه کسری فوق آشوبناک چهار باله (۲۸) را پس از اعمال روش کنترلی (۲۱) نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌گردد، مسیره‌های حالت دستگاه مرتبه کسری (۲۸)، پس از اعمال روش کنترلی (۲۱)، در زمانی بسیار کوتاه به نقطه تعادل که همان مبدأ مختصات، که همان مبدأ مختصات است، همگرا شده‌اند.



شکل (۴): مسیره‌های حالت دستگاه مرتبه کسری (۲۸)، پس از اعمال قانون کنترل کننده‌ی (۲۱)

رفتار کنترل‌کننده‌ی (۲۱) که برای کنترل و پایدارسازی دستگاه مرتبه کسری فوق آشوبناک (۲۸) بکار رفته، در شکل ۷ شبیه‌سازی شده است. به‌طور واضح می‌توان در شکل ۷ مشاهده کرد که قانون کنترلی (۲۱) وقتی برای کنترل و پایدارسازی دستگاه مرتبه کسری فوق آشوبناک ناخودگردان (۲۸) اعمال شود، در مدتی بسیار کوتاه به صفر می‌رسد.

با مشاهده شبیه‌سازی‌های انجام شده در شکل‌های ۶ و ۷، می‌توان نتیجه گرفت که روش کنترلی طراحی شده‌ی (۲۱) برای کنترل و پایدارسازی دستگاه مرتبه کسری فوق آشوبناک ناخودگردان چهار باله، بسیار مناسب و تأثیرگذار عمل خواهد کرد.



شکل (۵): رفتار کنترل‌کننده (۲۱) در گذر زمان، اعمال شده برای دستگاه مرتبه کسری (۲۸)

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک روش کنترل‌کننده غیرخطی برای پایدارسازی کلاس گسترده‌ای از دستگاه‌های مرتبه کسری آشوبناک غیر خودگردان ارائه شده است. روابط و نتایج تحلیلی موجود در این مقاله بر اساس تعمیم قضیه پایداری لیاپونوف برای دستگاه‌های مرتبه کسری و تابع توزیع وزنی، انجام پذیرفته است. پایداری و مقاومت بالا در مقابل اغتشاشات و نامعینی‌های دستگاه و همگرایی سریع به نقطه تعادل از خصوصیت‌های اصلی این روش می‌باشد. علاوه بر این مثال‌های عددی برای پایدارسازی دستگاه‌های آشوبناک نشان‌دهنده کارایی و کاربردپذیری این روش در عمل می‌باشد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله، از سردبیر و داوران محترم که با ارائه نظرات و پیشنهادهای خود باعث بهبود این مقاله شده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایند.

منابع

- [1] Li, C. and Deng, W. (2007). Remarks on fractional derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 777-784.
- [2] Petras, I. (2011). *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*: Springer Berlin Heidelberg.
- [3] Aghababa, M.P. (2012). Robust stabilization and synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a novel fractional sliding mode controller, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 2670-2681.
- [4] Yin, C., Dadras, S., Zhong, S. and Chen, Y. (2013). Control of a novel class of fractional-order chaotic systems via adaptive sliding mode control approach, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 2469-2483.
- [5] Aghababa, M.P. (2017). Stabilization of a class of fractional-order chaotic systems using a non-smooth control methodology, *Nonlinear Dynamics*, **89**, 1357-1370
- [6] Nemati, A. and Yousefi, S.A. (2016). Numerical Method for Solving Fractional Optimal Control Problems Using Ritz Method, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **11**, 051015.
- [7] Roohi, M., Aghababa, M.P. and Haghghi, A.R. (2015). Switching adaptive controllers to control fractional-order complex systems with unknown structure and input nonlinearities, *Complexity*, **21**, 211-223.
- [8] Aghababa, M.P., Haghghi, A.R. and Roohi, M. (2015). Stabilisation of unknown fractional-order chaotic systems: an adaptive switching control strategy with application to power systems, *IET Generation, Transmission & Distribution*, **9**, 1883-1893.
- [9] Haghghi, A.R., Aghababa, M.P. and Roohi, M. (2014). Robust stabilization of a class of three-dimensional uncertain fractional-order non-autonomous systems, *International Journal of Industrial Mathematics*, **6**, 133-139.
- [10] Moafi, M., Marzband, M., Savaghebi, M. and Guerrero, J.M. (2016). Energy management system based on fuzzy fractional order PID controller for transient stability improvement in microgrids with energy storage, *International Transactions on Electrical Energy Systems*, **26**, 2087-2106.

-
- [11] Razminia, A. and Baleanu, D. (2013). Complete synchronization of commensurate fractional order chaotic systems using sliding mode control, *Mechatronics*, **23**, 873-879.
- [12] Matinfar, M. and Saeidy, M. (2014). A new analytical method for solving a class of nonlinear optimal control problems, *Optimal Control Applications and Methods*, **35**, 286-302.
- [13] Mobayen, S. (2015). A Novel Global Sliding Mode Control Based on Exponential Reaching Law for a Class of Underactuated Systems With External Disturbances, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **11**, 021011.
- [14] Aghababa, M.P. and Borjkhani M. (2014). Chaotic fractional-order model for muscular blood vessel and its control via fractional control scheme, *Complexity*, **20**, 37-46.
- [15] Aghababa, M.P. (2015). Fractional modeling and control of a complex nonlinear energy supply-demand system, *Complexity*, **20**, 74-86.
- [16] Aghababa, M.P. (2014). Chaotic behavior in fractional-order horizontal platform systems and its suppression using a fractional finite-time control strategy, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **28**, 1875-1880.
- [17] Bhalekar, S. and Daftardar-Gejji, V. (2010). Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **15**, 3536-3546.
- [18] Chen, Y., Wei, Y., Zhong, H. and Wang, Y. (2016). Sliding mode control with a second-order switching law for a class of nonlinear fractional order systems, *Nonlinear Dynamics*, **85**, 633-643.
- [19] Yin, C., Cheng, Y., Chen, Y., Stark, B. and Zhong, S. (2015). Adaptive fractional-order switching-type control method design for 3D fractional-order nonlinear systems, *Nonlinear Dynamics*, **82**, 39-52.
- [20] Binazadeh, T. (2016). Finite-Time Tracker Design for Uncertain Nonlinear Fractional-Order Systems, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **11**, 041028.
- [21] Trigeassou, J.C., Maamri, N., Sabatier, J. and Oustaloup, A. (2011). A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations, *Signal Processing*, **91**, 437-445.
- [22] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*: Elsevier Science.

-
- [23] Weitzner, H. and Zaslavsky, G. (2003). Some applications of fractional equations, *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, **8**, 273-281.
- [24] Asl, M.S. and Javidi, M. (2017). An improved PC scheme for nonlinear fractional differential equations: Error and stability analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **324**, 101-117.
- [25] Chen, W.C. (2008). Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **36**, 1305-1314.
- [26] Dadras, S. and Momeni, H.R. (2010), Control of a fractional-order economical system via sliding mode, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **389**, 2434-2442.
- [27] Yin, C., Zhong, S. and Chen, W. (2012). Design of sliding mode controller for a class of fractional-order chaotic systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 356-366.
- [28] Dadras, S., Momeni, H., Qi, G., and Wang, Z. (2012). Four-wing hyperchaotic attractor generated from a new 4D system with one equilibrium and its fractional-order form, *Nonlinear Dynamics*, **67**, 1161-1173.

A Nonlinear Control Scheme for Stabilization of Fractional Order Dynamical Chaotic Systems

Ahmad Reza Haghighi^{*}, Mohammad Pourmahmood Aghababa^{**}, Nasim Asghary^{***}, Majid Roohi^{****}

^{*}Faculty of Basic Sciences, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran,

^{**}Faculty of Electrical and Computer Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran,

^{***}Faculty of Basic Sciences, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran,

^{****}School of Economics and Statistics, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China,

Received: August 23 2018

Accepted for publication: October 6 2019

Corresponding author: arhaghighi@tvu.ac.ir

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

This paper studies the usual stochastic, star and convex transform orders of both series and parallel systems comprising heterogeneous (and dependent) components. Sufficient conditions are established for the star ordering between the lifetimes of series and parallel systems consisting of dependent components having multiple-outlier Lomax model. We also prove that, without any restriction on the Archimedean copula and the parameters, the lifetime of a parallel or series system with dependent heterogeneous components is smaller than that with dependent homogeneous components in the sense of the convex transform order.

Keywords: Archimedean copula, Stochastic orders, Lomax distribution, Series systems, Parallel systems, Majorization order.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).