

## ترکیبی کارا از روش‌های بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی و جداکننده گام زمانی برای حل عددی معادله گینزبورگ-لاندو در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی

علی حبیبی راد، اسماعیل حسام‌الدینی<sup>۱</sup>

گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۸/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۱۴

**چکیده:** در این مقاله، یک ترکیب کارا از روش جداسازی گام در زمان و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی، برای حل عددی معادله گینزبورگ-لاندو در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی ارائه می‌دهیم. از آنجاکه حل معادلات غیرخطی با روش‌های بر پایه فرم ضعیف کاری پیچیده و همراه با خطا است از روش جداسازی گام در زمان استفاده می‌کنیم. ایده اصلی روش جداسازی این است که مسئله اصلی را به دو زیر مسئله خطی و غیرخطی تبدیل می‌کند. زیر مسئله غیرخطی به صورت تحلیلی و قسمت خطی با استفاده از روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی در بعد مکانی و روش کرانک نیکلسون در بعد زمانی به صورت عددی حل می‌شود. در این مطالعه از درون‌یابی متحرک کریجینک به جای تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌کنیم. این کار باعث می‌شود که توابع شکل روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی دارای خاصیت دلتای کرونکر باشند و شرایط مرزی نیز به صورت مستقیم اعمال شوند. برای محک زدن کارایی و دقت روش چند مثال آورده و حل عددی با روش حاضر با جواب تحلیلی آن‌ها مقایسه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** معادله گینزبورگ-لاندو، روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی، روش جداسازی زمان، درون‌یابی متحرک کریجینک.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۶۵M۶۰، ۳۴A۴۵.

## ۱- مقدمه

معادله گینزبورگ-لاندو ۱ انواع مختلفی از پدیده‌های فیزیکی شامل انتشار غیرخطی موج، انتقال فاز، ابررسانایی و تراکم بوز-اینشتین ۲ را تشریح می‌کند. در این مقاله فرم زیر از این معادله مورد مطالعه قرار می‌گیرد [۱]

$$(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u + v(\mathbf{x})u + \gamma |u|^{\nu} u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad d = 2, 3, \quad (1)$$

که در آن  $i^{\nu} = -1$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\lambda$  و  $\gamma$  اعداد ثابتی هستند و داریم  $(\alpha + |\beta|) \neq 0$ . همچنین  $\Delta$  عملگر لاپلاسین است که در حالت دوبعدی به صورت  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  و در حالت سه‌بعدی به صورت  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  است. با توجه به اهمیت این معادله پاره‌ای روش‌های عددی بسیاری برای حل آن به کاررفته است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش عناصر متناهی [۲]، روش تفاضلات متناهی سه قطری [۳] روش متناوب جدا شده کرانک-نیکلسون-گالرکین [۴] و روش‌های بدون شبکه توابع پایه‌ای شعاعی [۵] اشاره کرد.

در سال‌های اخیر روش عناصر متناهی کارایی خود را در زمینه‌های مختلف محاسباتی نشان داده و به همین علت به عنوان یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مورد استفاده پژوهشگران و محققین قرار گرفته است. علی‌رغم موفقیت‌های زیادی که این روش در حل مسائل مختلف از خود نشان داده مواردی نیز هستند که این روش در آن‌ها با مشکلاتی همراه می‌شود. یکی از این موارد مسائلی است که هندسه مسئله در آن‌ها باید به نحوی در طی انجام مراحل حل تغییر کند. از جمله این مسائل می‌توان به بهینه‌سازی شکل، تغییر شکل‌های بزرگ و مسائل سطح آزاد اشاره کرد که اصلاح شبکه محاسباتی در هر مرحله لازم است. علت بروز چنین مشکلاتی به ارتباط بسیار نزدیک روش عناصر متناهی با المان بندی مسئله برمی‌گردد، در واقع المان‌های مورد استفاده باید در هر مرحله از فرایند حل مسئله تغییر هندسه را به نحو مقتضی دنبال کرده و در برخی موارد حتی لازم می‌شود که هندسه جدید مسئله تغییر کند و دوباره شبکه‌بندی شود.

طی دهه‌های اخیر برای برطرف کردن مشکلاتی که روش عناصر متناهی در حل بعضی از مسائل با آن‌ها روبه‌رو می‌شود، دسته جدیدی از روش‌های محاسباتی ارائه شده است که برخلاف روش عناصر متناهی، برای حل معادلات دیفرانسیل، به شبکه‌بندی ناحیه مسئله احتیاج ندارند. این

1- Ginzburg-Landau

2- Bose-Einstein

دسته از روش‌ها را روش‌های بدون المان یا روش‌های بدون شبکه ۱ می‌نامند. ابداع و شروع روش‌های بدون شبکه را می‌توان از آغاز روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۲</sup> (SPH) [۶ و ۷] دانست. در این‌گونه از روش‌ها، تنها از مجموعه‌ای از گره‌ها که در ناحیه مسئله توزیع شده، برای ساخت توابع تقریب، گسسته سازی و حل معادلات دیفرانسیل پارهای، استفاده می‌شود. به این ترتیب آرایش گره‌ها به صورت دلخواه ممکن بوده و مشکل به وجود آمدن المان‌های بدشکل به عنوان مثال در حل یک مسئله شامل تغییر شکل‌های بزرگ که در روش عناصر متناهی ممکن است پیش آید، با استفاده از این روش‌ها ایجاد نخواهد شد [۸].

مزایای روش‌های بدون شبکه باعث شده که در سال‌های اخیر توجه بسیاری از محققین در زمینه مکانیک محاسباتی به این دسته از روش‌ها جلب شود و تحقیقات گسترده‌ای در زمینه خواص و کاربردهای آن‌ها انجام گیرد. اولین نمونه از چنین روش‌هایی در سال ۱۹۷۷ معرفی شد [۹]. این روش‌ها نسبت به روش‌های عناصر متناهی دارای مزایایی مانند دقت بالاتر، آسان‌تر بودن شبیه‌سازی نواحی پیچیده و عدم اتلاف زمان برای ایجاد شبکه است.

یکی از روش‌های بدون شبکه روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی است. ایده اصلی این روش این است که فرم ضعیف معادله حاکم به یک زیر دامنه محلی خیلی کوچک از یک گره محدود می‌شود، به این معنی که فرم ضعیف در هر گره در دامنه کلی ( $\Omega$ ) واقع در یک زیر دامنه محلی محاسبه می‌شود (این زیر دامنه‌ها مجزا از هم نیستند و ممکن است اشتراک داشته باشند). این کار با استفاده از روش پتروف-گالرکین امکان‌پذیر است که در آن توابع تست و تابع تقریب (تقریب تابع حاکم) می‌توانند به طور مستقل انتخاب شوند. این روش توسط آتلوری و زو [۱۰، ۱۱]، آتلوری و شن [۱۲، ۱۳] و آتلوری [۱۴] پیشنهاد شد. آتلوری و زو [۱۰] برای تقریب معادله حاکم از تقریب حداقل مربعات متحرک ( $MLS^2$ ) استفاده کرده‌اند و توابع شکل را ساخته‌اند. در این تقریب در هر گره دلخواه  $x$  بر اساس گره‌های اطراف آن، یک زیر دامنه از دامنه کلی مسئله تعریف می‌شود که  $\Omega_x$  نامیده می‌شود، این زیر دامنه‌ها می‌توانند شکل‌های دلخواه داشته باشند [۱۰] (شکل‌هایی مانند مستطیل، مربع، استوانه، دایره و...). تابع حاکم  $u(x)$  در نقطه  $x$  در زیر دامنه مربوط به  $x$  ( $\Omega_x$ ) به شکل زیر تخمین زده می‌شود

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) u_j,$$

که در آن  $N$  تعداد گره‌های اطراف  $x$  است (و  $n$  تعداد کل گره‌ها) که در زیر دامنه مربوط به آن یعنی  $\Omega_x$  هستند  $\phi_j$  را تابع شکل مربوط به گره  $j$  ام می‌نامیم، توابع شکل حاضر دارای

- 
- 1- Meshless
  - 2- Smooth Particle Hydrodynamic
  - 3- Moving Least Squares

خاصیت دلتای کرونگر نیستند، بنابراین اعمال شرایط مرزی ضروری ۱ در این حالت آسان نیست. برای حل این مشکل در این مقاله از درون‌یابی متحرک کریجینگ ۲ به‌جای تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌کنیم. در روش بدون شبکه موضعی پتروف-گالرکین فرم ضعیف معادله حاکم در هر زیر دامنه ساخته می‌شود؛ بنابراین در این روش جهت ساختن توابع آزمایش درونیات و یا انتگرال‌گیری از شکل ضعیف، به هیچ‌گونه شبکه‌ای نیاز نیست و تمام انتگرال‌ها به راحتی بر روی زیر دامنه‌ها و مرزهایشان قابل محاسبه هستند.

از آنجاکه حل معادلات غیرخطی با روش‌هایی که مبتنی بر ساختن شکل ضعیف مسئله هستند همراه با خطا و پیچیدگی هستند برای از بین بردن این مشکلات از روش جداکننده گام در زمان استفاده می‌کنیم. اساس روش‌های جداکننده گام در زمان به این صورت است که مسئله اصلی به دو زیر مسئله تبدیل خواهد شد، سپس این زیر مسئله‌ها هر کدام به صورت جداگانه در گام‌های زمانی کوچک‌تر به صورت عددی یا تحلیلی حل می‌شوند [۱۵، ۱۶]. حل قسمت‌های غیرخطی یک معادله همواره با خطا و پیچیدگی روبه‌رو بوده است که در اینجا قسمت غیرخطی مسئله به صورت تحلیلی حل خواهد شد. شایان‌ذکر است که قسمت خطی مسئله در اینجا با استفاده از روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی به صورت عددی حل می‌شود.

در این مطالعه ابتدا روش درون‌یابی متحرک کریجینگ را شرح داده و سپس ترکیبی از روش‌های جداکننده گام در زمان و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی ارائه خواهد شد. همچنین برای آزمودن دقت و کارایی روش چند مثال عددی در بخش‌های بعدی ارائه خواهیم داد. خطای موجود بین حل تحلیلی و حل با روش حاضر و مرتبه همگرایی مکانی و زمانی برای هر مثال آورده و در انتها یک نتیجه کوتاه برای این روش استنتاج شده است.

## ۲- درون‌یابی متحرک کریجینگ

مشابه تقریب حداقل مربعات متحرک<sup>۳</sup> درون‌یابی کریجینگ تابع توزیع  $u(x)$  را در زیر دامنه  $\Omega_x$  (از دامنه کلی  $\Omega$ ) درون‌یابی می‌کند. برای ساختن توابع شکل روش بدون شبکه پتروف-گالرکین روند زیر را دنبال می‌کنیم. فرض کنیم دامنه کلی مسئله  $\Omega$  با تعداد مناسبی نقاط - که به صورت پراکنده توزیع شده‌اند- گسسته‌سازی شده است. برای به دست آوردن درونیاب تابع  $u$  در نقاط داده شده، چنانچه  $s$  یکی از این نقاط باشد و فقط  $N$  نقطه از این نقاط در همسایگی

- 
- 1- Essential boundary condition
  - 2- Moving Kriging interpolation
  - 3- Moving Least Square

مربوط به نقطه  $s$  یعنی  $\Omega_s$  باشند و بر مقدار  $u(s)$  تأثیرگذار باشند، درونیاب کریجینگ  $u^h(s)$  به صورت ترکیب خطی از توابع شکل به صورت زیر تعریف می شود [۱۷، ۱۸]:

$$u^h(s) = \sum_{j=1}^N \Phi_j(s) u_j = \Phi(s) \mathbf{u}, \quad s \in \Omega_s, \quad (2)$$

که در آن

$$\Phi(s) = \mathbf{p}^T(s) A + \mathbf{r}^T(s) B, \quad (3)$$

و نیز ماتریس های  $A$  و  $B$  به صورت زیر هستند [۱۹]

$$\begin{aligned} A &= (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1}, \\ B &= R^{-1} (I - PA), \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین  $I$  ماتریس همانی با بُعد  $N \times N$  است. ماتریس  $\mathbf{p}(s)$  به صورت زیر است

$$\mathbf{p}^T(s) = [p_1(s) \cdots p_m(s)], \quad (5)$$

در این فرمول هر کدام از  $p_l(\mathbf{x})$  ( $l=1, 2, \dots, m$ ) ها تابع پایه هستند. در حالت دوبعدی توابع چندجمله ای پایه ای خطی به صورت  $\mathbf{p}^T(s) = [1, x, y]$ ,  $m=3$ ، یا مربعی ۱ به شکل زیر هستند

$$\mathbf{p}^T(s) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], \quad m=6.$$

همچنین توابع چندجمله ای پایه ای درجه سه یا مکعبی به شکل زیر هستند

$$\mathbf{p}^T(s) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3], \quad m=10.$$

ماتریس  $P$  در معادلات (۴) در واقع تأثیر چندجمله ای های پایه ای بالا روی نقاطی است که در زیر دامنه  $\Omega_s$  وجود دارند و به صورت زیر است:

$$P = \begin{pmatrix} p_1(s_1) & \cdots & p_m(s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(s_N) & \cdots & p_m(s_N) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

به علاوه بردار  $\mathbf{r}(s)$  در معادله (۳) به صورت زیر است:

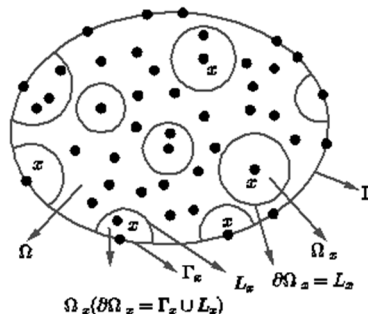
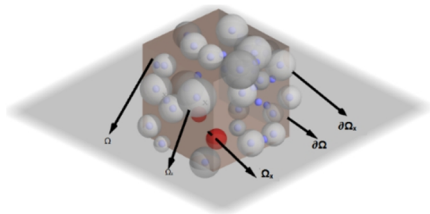
$$\mathbf{r}^T(s) = [\gamma(s, s_1) \quad \cdots \quad \gamma(s, s_N)], \quad (7)$$

که در آن تابع  $\gamma(s_k, s_j)$  تابع همبستگی ۱ بین جفت نقاط  $s_k$  و  $s_j$  است. توابع زیادی می‌توانند به‌عنوان تابع همبستگی به کار گرفته شوند [۲۰] که در اینجا از تابع وزن گوسی

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_j / c_j)^\nu] - \exp[-(r_j / c_j)^\nu]}{1 - \exp[-(r_j / c_j)^\nu]}, & 0 \leq d_j \leq r_j, \\ 0, & d_j \geq r_j \end{cases} \quad (۸)$$

استفاده می‌کنیم. در این معادله  $c_j, d_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  پارامتر کنترل شکل تابع وزن و  $r_j$  اندازه زیر دامنه است [۲۱]. ماتریس همبستگی  $R[\gamma(s_k, s_j)]_{N \times N}$  نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \begin{pmatrix} \gamma(s_1, s_1) & \cdots & \gamma(s_1, s_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma(s_N, s_1) & \cdots & \gamma(s_N, s_N) \end{pmatrix}, \quad (۹)$$



شکل (۱): دامنه‌های کلی مسئله در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی و زیر دامنه‌های انتخاب شده

که در واقع تأثیر تابع همبستگی معادله (۹) بر نقاط موجود در زیر دامنه  $\Omega_s$  است. با محاسبه  $R$  درون‌یابی کریجینگ تابع  $u$  در نقطه  $s$  را محاسبه می‌کنیم. مشتقات پاره‌ای تابع شکل  $\phi_k$  را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{cases} \phi_{k,x} = \frac{\partial \Phi_k(s)}{\partial x} = \sum_l^m \frac{\partial p_l(s)}{\partial x} A_{lk} + \sum_e^N \frac{\partial r_e(s)}{\partial x} B_{ek}, \\ \phi_{k,y} = \frac{\partial \Phi_k(s)}{\partial y} = \sum_l^m \frac{\partial p_l(s)}{\partial y} A_{lk} + \sum_e^N \frac{\partial r_e(s)}{\partial y} B_{ek}. \end{cases} \quad (۱۰)$$

برخلاف توابع شکل تقریب حداقل مربعات متحرک توابع شکل درون‌یابی کریجینگ دارای خاصیت دلتای کرونکر به صورت زیر هستند:

$$\phi_k(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & (k = j; k, j = 1, 2, \dots, N), \\ 0, & (k \neq j; k, j = 1, 2, \dots, N). \end{cases} \quad (11)$$

برای دیدن سایر ویژگی‌های روش درون‌یابی کریجینگ می‌توان به مراجع [۱۷-۱۹] رجوع کرد.

### ۳- ترکیب روش جداکننده گام در زمان و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی

در این بخش ترکیبی کارآمد از روش‌های جداکننده گام در زمان و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی به دست می‌آوریم. معادله گینزبورگ-لاندو را با شرط اولیه و شرایط مرزی مناسب (دیریکله، نویمان، ترکیبی) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u + v(\mathbf{x})u + \gamma |u|^2 u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

که در آن  $d = 2, 3$  دامنه مسئله و  $\partial\Omega$  مرز آن است. همچنین  $u$  تابع مشخصی است. فرض کنیم  $\tau = \frac{T}{Nt}$  گام زمانی باشد و  $t_n = n\tau$ ,  $(n = 0, 1, 2, \dots, Nt)$  همان‌طور که گفته شد اساس روش‌های جداکننده گام در زمان به این صورت است که مسئله به دو زیر مسئله تقسیم خواهد شد. در اینجا معادله (۱۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathcal{L} + \mathfrak{N}(u))u,$$

که در آن  $\mathcal{L} = \lambda \Delta$  و  $\mathfrak{N}(u) = (v(\mathbf{x}) + \gamma |u|^2)$  معادله هستند. برای حل معادله (۱۲) از گام زمانی  $t_n = n\tau$  تا  $t_{n+1} = (n+1)\tau$  دو زیر مسئله خطی و غیرخطی بالا را به صورت زیر حل می‌کنیم.

ابتدا قسمت غیرخطی مسئله را در زمان  $t_{n+\frac{1}{4}} = (n + \frac{1}{4})\tau$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{N}(u)u, \quad t = (n + \frac{1}{4})\tau,$$

که این یک معادله دیفرانسیل معمولی است و همان‌طور که گفتیم این زیر مسئله را به صورت تحلیلی حل می‌کنیم که به شکل زیر است:

$$u = u(\mathbf{x}, t_n) \times \begin{cases} \exp\left[\frac{i}{\beta}(v(\mathbf{x}) + \gamma |u(\mathbf{x}, t_n)|^\tau) \frac{\tau}{\gamma}\right], & \alpha = 0, \\ \sqrt{U(u, \mathbf{x}, t)} \exp\left[\frac{i\beta}{\alpha} \ln U(u, \mathbf{x}, t)\right], & \alpha \neq 0, \end{cases}$$

در این معادله

$$U(u, \mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \mu \gamma \frac{\tau}{\gamma} |u(\mathbf{x}, t_n)|^\tau}, & v(\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{v(\mathbf{x})}{\left[-\gamma |u(\mathbf{x}, t_n)|^\tau + (v(\mathbf{x}) + \gamma |u(\mathbf{x}, t_n)|^\tau) \exp\left[-\mu \frac{\tau}{\gamma} v(\mathbf{x})\right]\right]}, & v(\mathbf{x}) \neq 0, \end{cases}$$

همچنین  $\mu = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ . در این مرحله خطایی مرتکب نمی‌شویم زیرا این قسمت به صورت تحلیلی حل می‌شود؛ و در ضمن حل آن پیچیدگی ندارد. برای حل زیر مسئله خطی  $(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$  بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی استفاده می‌کنیم. روش بدون شبکه پتروف-گالرکین را برای حل قسمت خطی شرح می‌دهیم. قسمت خطی معادله گینزبورگ-لانندو به شکل زیر است:

$$(\alpha - i\beta) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u. \quad (13)$$

فرض کنیم در دامنه مسئله  $\Omega$ ، نقاط  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  به صورت پراکنده انتخاب شده باشند. اطراف هر گره زیر دامنه‌هایی به شکل دلخواه رسم می‌کنیم. این زیر دامنه‌ها باهم همپوشانی دارند و تمام دامنه را می‌پوشانند، برای سادگی زیر دامنه‌ها را در حالت دوبعدی به شکل دایره و در حالت سه‌بعدی به شکل کره در نظر می‌گیریم. ایده اصلی روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی این است که فرم ضعیف معادله در زیر دامنه‌ها ساخته می‌شود و در همه دامنه کلی مسئله ساخته نمی‌شود بنابراین برای هر گره  $\mathbf{x}_k$  فرم ضعیف معادله (۱۳) به شکل زیر ساخته می‌شود. طرفین معادله را در تابع تست  $\omega(\mathbf{x})$  ضرب کرده و بر زیر دامنه مربوط به  $\mathbf{x}_k$  یعنی  $\Omega_{\mathbf{x}_k}$  انتگرال می‌گیریم، بنابراین داریم

$$(\alpha - i\beta) \int_{\Omega_{\mathbf{x}_k}} \frac{\partial u}{\partial t} \omega(\mathbf{x}) d\Omega = \lambda \int_{\Omega_{\mathbf{x}_k}} \Delta u \omega(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (14)$$



با استفاده از روش انتگرال گیری جز به جز به فرمول زیر می‌رسیم:

$$(\alpha - i\beta) \int_{\Omega_{x_k}} \frac{\partial u}{\partial t} \omega(\mathbf{x}) d\Omega = \lambda \int_{\Omega_{x_k}} \nabla(\nabla u \omega(\mathbf{x})) d\Omega - \lambda \int_{\Omega_{x_k}} (\nabla u \nabla \omega(\mathbf{x})) d\Omega, \quad (15)$$

که در آن  $\nabla u$  گرادیان تابع  $u$  است و در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی به ترتیب به راحتی  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  و  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  است. همچنین تابع تست  $\omega(\mathbf{x})$  را در اینجا تابع هوی سایید به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_{x_k} \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_{x_k} \end{cases}$$

با قرار دادن تابع هوی سایید در معادله (15) و استفاده از قضیه دیورژانس به فرمول زیر می‌رسیم:

$$(\alpha - i\beta) \int_{\Omega_{x_k}} \frac{\partial u}{\partial t} \omega(\mathbf{x}) d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_{x_k}} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma, \quad (16)$$

که در آن  $\partial\Omega_{x_k}$  مرز زیر دامنه  $\Omega_{x_k}$  و  $\mathbf{n}$  بردار یکه نرمال برونسو است که در حالت دوبعدی به صورت  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y)$  و در حالت سه‌بعدی به صورت  $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$  است. توجه شود که مرز زیر دامنه یعنی  $\partial\Omega_{x_k}$  از دو قسمت به صورت  $\partial\Omega_{x_k} = \Gamma_{x_k} \cup I_{x_k}$  تشکیل شده است که در آن  $I_{x_k}$  قسمتی از مرز زیر دامنه است که با مرز کلی دامنه یعنی  $\Gamma$  اشتراک ندارد و  $\Gamma_{x_k} = \partial\Omega_{x_k} \cap \Gamma$  بنابراین معادله (16) به صورت زیر درمی‌آید.

$$(\alpha - i\beta) \int_{\Omega_{x_k}} \frac{\partial u}{\partial t} \omega(\mathbf{x}) d\Omega = \lambda \int_{I_{x_k}} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_{x_k}} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma. \quad (17)$$

با جایگذاری درون‌یابی متحرک کریجینگ  $u = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) u_j$  در معادله (17) و تکرار این روش برای همه نقاط به فرم ماتریسی زیر می‌رسیم:

$$(\alpha - i\beta) C \frac{\partial u}{\partial t} = K u, \quad (18)$$

که در آن

$$C_{kj} = \int_{\Omega_{x_k}} \phi_j d\Omega, \quad K_{kj} = \lambda \int_{I_{x_k}} \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_{x_k}} \nabla \phi_j \cdot \mathbf{n} d\Gamma.$$

با جایگذاری تقریب‌های تفاضلات متناهی زیر (در واقع روش کرانک-نیکلسون در گام زمانی)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad u = \frac{u^{n+1} + u^n}{2},$$

در معادله (۱۸) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$(C - \xi K)u^{n+1} = (C + \xi K)u^n, \quad (۱۹)$$

که در آن  $\xi = \frac{\tau}{2(\alpha - i\beta)}$  و در نتیجه گسسته سازی زمانی و مکانی معادله کامل می‌شود. اکنون الگوریتم را به اختصار بیان می‌کنیم. فرض کنیم می‌خواهیم از گام  $t_n$  به گام  $t_{n+1}$  معادله را حل کنیم، در این صورت

$$\begin{aligned} u^* &= \exp\left(\frac{\tau}{\gamma} \mathcal{L}(u^n)\right)u^n, \\ u^{**} &= \exp(\tau \mathcal{L})u^*, \\ u^{n+1} &= \exp\left(\frac{\tau}{\gamma} \mathcal{L}(u^{**})\right)u^{**}. \end{aligned}$$

برای اجرای برنامه فوق از شرط اولیه  $u^0$  استفاده می‌کنیم و  $u^*$  را به صورت تحلیلی به دست می‌آوریم و سپس  $u^{**}$  را در نیم گام زمانی محاسبه می‌کنیم و در انتها  $u^1$  را به صورت تحلیلی حساب می‌کنیم و این عمل را تا گام پایانی  $Nt$  ادامه می‌دهیم. شایان ذکر است که شرایط مرزی اگر از نوع دیریکله باشند به صورت زیر اعمال می‌شوند. فرض کنید  $I$  یک نقطه مرزی باشد چون توابع شکل دارای خاصیت دلتای کرونکر هستند، بنابراین خواهیم داشت

$$u(\mathbf{x}_I) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}_I)u_j = \phi_I(\mathbf{x}_I)u_I = 1 \cdot u_I = u_I.$$

اگر شرایط مرزی از نوع نویمان یا ترکیبی باشند برای اعمال آن‌ها از فرمول (۱۰) استفاده می‌کنیم. در بخش بعد برای آزمودن دقت و سهولت اعمال شرایط مرزی چند مثال می‌آوریم.

### مثال‌های عددی

در این بخش برای آزمودن روش چند مثال عددی آورده می‌شود. در این مثال‌ها نرم بینهایت خطای موجود بین جواب تحلیلی و جواب مسئله با روش حاضر گزارش می‌شود فرمول محاسبه این خطا به صورت زیر است:

$$\mathcal{E} = \left\| u^{exact} - u^{numerical} \right\|_{\infty},$$

که در آن  $u^{exact}$  و  $u^{numerical}$  به ترتیب جواب عددی با روش حاضر و جواب تحلیلی می باشند. محاسبه انتگرالها در این روش با روش انتگرال گیری عددی گوس انجام می شود. برای محاسبه انتگرال های روی مرز از  $\lambda$  نقطه گوسی و همچنین برای محاسبه انتگرال های درون زیردامنه ها در حالت دوبعدی از  $\lambda \times \lambda$  و در حالت سه بعدی از  $\lambda \times \lambda \times \lambda$  نقطه گوسی استفاده می کنیم. همچنین ثابت های مورد استفاده در تابع همبستگی (۸) به صورت  $r_j = 4d_j$ ،  $d_j = \frac{h}{\gamma}$  و  $c_j = 4r_j$  می باشند. به صورت  $h = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_i \in \Omega_s} \|x - x_i\|$  تعریف می شود که در حالت انتخاب منظم و یکنواخت نقاط همان طول گام در جهت یکی از محورهای مختصات است. در تمام مثال ها مرتبه همگرایی زمانی با استفاده از فرمول

$$c_1 - \text{order} = \log\left(\frac{E_1}{E_\gamma}\right) / \log\left(\frac{\tau_1}{\tau_\gamma}\right),$$

محاسبه می شود [۲۲]. در این رابطه  $E_1$  و  $E_\gamma$  به ترتیب خطاهای وابسته به گام های زمانی  $\tau_1$  و  $\tau_\gamma$  می باشند. همچنین مرتبه همگرایی مکانی از رابطه

$$c_\gamma - \text{order} = \log\left(\frac{E_1}{E_\gamma}\right) / \log\left(\frac{h_1}{h_\gamma}\right),$$

محاسبه می شود [۲۲]. در این رابطه  $E_1$  و  $E_\gamma$  به ترتیب خطاهای وابسته به گام های مکانی (فاصله بین نقاط در حالتی که نقاط یکنواخت انتخاب می باشند)  $h_1$  و  $h_\gamma$  می باشند.

**مثال ۱:** در این مثال معادله گینز بورگ-لاندو را به صورت

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu(\mathbf{x})u + (1 - 2\pi^2) |u|^2 u, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

در نظر می گیریم که در آن  $\nu(\mathbf{x}) = (1 - \pi^2)(1 - \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y)$  و جواب تحلیلی مسئله به شکل  $u(x, y, t) = e^{-it} \cos \pi x \cos \pi y$  است [۲۳]. در این حالت شرط اولیه و شرایط مرزی دیریکله ای را از جواب تحلیلی مسئله استخراج می کنیم.

در جدول ۱ نرم بینهایت خطای موجود بین جواب های تحلیلی و جواب با روش حاضر برای قسمت های حقیقی و موهومی گزارش شده است. این محاسبات در دامنه  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  برای  $11 \times 11$  نقطه یکنواخت در زمان های متفاوت انجام شده اند. با استفاده از نتایج این جدول ملاحظه می شود که روش حاضر در زمان های بالا کارایی زیادی برای حل عددی این معادله دارد.

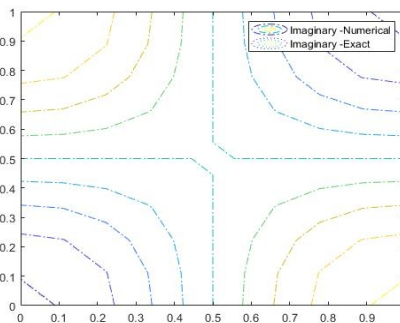
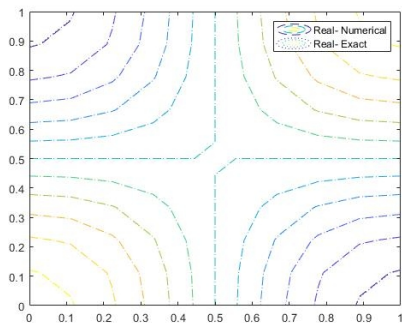
جدول (۱): نُرم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در زمان‌های متفاوت با گام زمانی  $\tau = 0/0001$

زمان	ε-حقیقی	ε-موهومی
0/5	1/1220(-4)	16418(-4)
1/0	7/8749(-4)	1/1134(-4)
2/0	8/5216(-4)	1/2709(-4)
5/0	8/9860(-4)	1/2103(-4)
7/0	1/2574(-4)	1/1790(-3)
10/0	9/2173(-4)	1/1162(-3)

در جدول ۲ نُرم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در دامنه‌های متفاوت آورده شده است. در اینجا زمان نهایی  $t = 1/0$  و گام زمانی  $\tau = 0/0001$  است. با توجه به این محاسبات روش حاضر برای دامنه‌های بزرگ نیز کارایی خوبی دارد.

جدول (۲): نُرم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در دامنه‌های متفاوت برای مثال ۱

Ω دامنه	تعداد نقاط	ε-حقیقی	ε-موهومی
$[0, 1] \times [0, 1]$	11×11	1/1220(-4)	1/1648(-4)
$[0, 2] \times [0, 2]$	22×22	2/3461(-3)	4/4087(-3)
$[0, 3] \times [0, 3]$	33×33	1/7954(-3)	1/4854(-3)
$[0, 4] \times [0, 4]$	44×44	9/8025(-3)	1/9929(-3)
$[0, 6] \times [0, 6]$	66×66	9/7209(-3)	4/7247(-3)



**شکل (۲):** مقایسه خطوط کانتور حل های عددی و تحلیلی برای قسمت های حقیقی (راست) موهومی (چپ) در مثال ۱

در شکل ۲ خطوط کانتور قسمت حقیقی (چپ) و قسمت موهومی (راست) رسم شده اند. در این شکل دامنه مسئله  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  و  $10 \times 10$  نقطه یکنواخت در دامنه فرض شده است. زمان نهایی  $t = 1$  و گام زمانی  $\tau = 0.0001$  است. با توجه به این شکل حل عددی حاضر دارای تقریب خوبی از جواب دقیق است.

**جدول (۳):** محاسبه مرتبه همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۱

مرتبه همگرایی مکانی	$\varepsilon$	گام مکانی (تعداد گره ها)	مرتبه همگرایی زمانی	$\varepsilon$	گام زمانی
-	$1/2456(-3)$	$0/1(11 \times 11)$	-	$1/2456(-3)$	$\tau$
$0/8223$	$7/0443(-4)$	$0/05(21 \times 21)$	$1/1137$	$5/7561(-4)$	$\tau/2$
$0/8218$	$3/9852(-4)$	$0/025(41 \times 41)$	$0/9289$	$3/0235(-4)$	$\tau/4$
$1/1090$	$1/8476(-4)$	$0/0125(81 \times 81)$	$0/9375$	$1/5787(-4)$	$\tau/8$

در جدول ۳ مرتبه های همگرایی مکانی و زمانی برای روش حاضر محاسبه شده اند. ستون اول (از سمت راست) نشان دهنده گام زمانی و  $\tau = 0.0001$  است. ستون دوم خطای موجود بین جواب های عددی و تحلیلی را - که با استفاده از فرمول (۲۰) محاسبه می شود - نشان می دهد، محاسبات این ستون در دامنه مستطیل شکل  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  با  $11 \times 11$  نقطه یکنواخت انجام شده اند. در ستون سوم مرتبه همگرایی زمانی روش با استفاده از ستون های اول و دوم و فرمول (۲۱) گزارش شده است. در ستون های چهارم، پنجم و ششم برای محاسبه مرتبه همگرایی مکانی از فرمول های (۲۰) و (۲۱) استفاده کردیم و  $\tau = 0.0001$  است. با توجه به این جدول روش حاضر تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است. با توجه به جدول های ۱، ۲ و ۳ و شکل ۲ روش حاضر دارای کارایی و دقت بالا برای حل این مثال است.

**مثال ۲:** معادله (۱) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

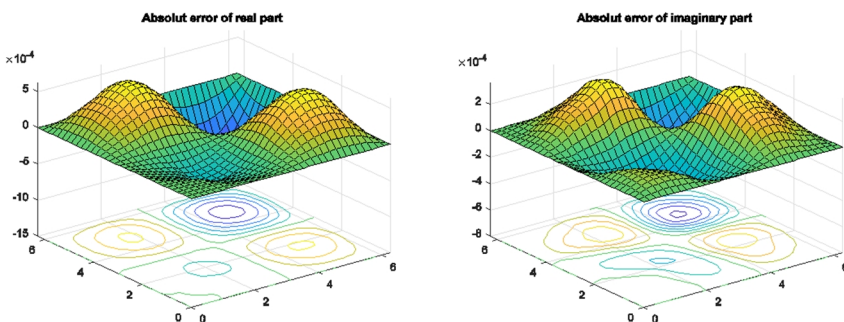
$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta(u_{xx} + u_{yy}) = (1 - \sin^2(x) \sin^2(y))u + |u|^2 u, \quad (x, y) \in \Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$

در اینجا جواب تحلیلی مسئله به صورت [۲۴]  $u(x, y, t) = e^{-it} \sin(x) \sin(y)$  است. شرط اولیه را از جواب تحلیلی استخراج می کنیم. شرایط مرزی دیریکله در تمام مرزهای دامنه صفر هستند.

در جدول ۴ نرْم بینهایت خطا میان روش عددی و تحلیلی برای حل این مثال آورده شده است. برای حل این مثال در زمان‌های متفاوت  $21 \times 21$  نقطه به‌طور منظم در دامنه مسئله  $\Omega$  در نظر گرفته شده است. با توجه به نتایج این جدول ترکیب روش بدون شبکه پتروف-گالرکین و جداسازی گام در زمان برای حل این مثال در زمان‌های بالا موفقیت‌آمیز است.

جدول (۴): نرْم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در مثال ۲ در گام زمانی  $\tau = 0.001$

زمان	$\varepsilon$ -حقیقی	$\varepsilon$ -موهومی
۱/۰	۹/۸۶۱۸(-۵)	۵/۶۳۰۷(-۵)
۲/۰	۱/۳۳۷۳(-۴)	۱/۳۶۷۱(-۴)
۷/۰	۸/۴۳۰۸(-۴)	۵/۳۴۱۶(-۴)
۱۰/۰	۱/۱۹۷۳(-۳)	۱/۵۵۵۴(-۳)



شکل (۳): خطای مطلق بین جواب تحلیلی و جواب عددی با روش حاضر برای مثال ۲

شکل ۳ نمودار خطای مطلق روش حاضر با روش تحلیلی را در حالت  $t=1$  برای مثال ۲ نشان می‌دهد. این شکل مربوط به سطر اول جدول ۴ است.

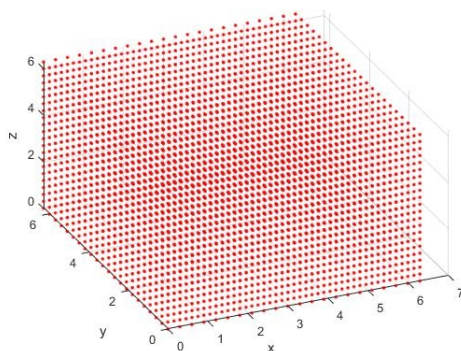
جدول (۵): محاسبه مرتبه همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۲

گام زمانی	$\varepsilon$	مرتبه همگرایی مکانی (تعداد گره‌ها)	مرتبه همگرایی زمانی	$\varepsilon$	مرتبه همگرایی مکانی
$\tau$	۵/۴۹۳۴(-۴)	-	$\pi/5 (11 \times 11)$	۳/۳۵۱۸(-۴)	-
$\tau/2$	۲/۳۸۳۷(-۴)	۱/۲۰۴۶	$\pi/10 (21 \times 21)$	۹/۸۶۱۸(-۵)	۱/۷۶۵۰
$\tau/4$	۱/۱۸۹۸(-۴)	۱/۰۰۲۵	$\pi/20 (41 \times 41)$	۴/۰۶۸۳(-۵)	۱/۲۷۷۴
$\tau/8$	۵/۰۲۵۶(-۵)	۱/۲۴۳۰	$\pi/40 (81 \times 81)$	۱/۹۸۳۵(-۵)	۱/۰۳۶۴

جدول ۵ محاسبات مربوط به مرتبه‌های زمانی و مکانی را مانند مثال ۱ برای این مثال نشان می‌دهد. این مرتبه‌ها به ترتیب در ستون‌های سوم و ششم (از سمت راست) گزارش شده‌اند. باید متذکر شویم که در ستون اول  $\tau = 0/001$  و تعداد نقاط در دامنه این مثال  $(\Omega)$  به صورت  $11 \times 11$  نقطه یکنواخت می‌باشند. همچنین در محاسبه مرتبه مکانی  $\tau = 0/0001$  است. با توجه به این جدول روش تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است. نتایج شکل ۳ و جدول‌های ۴ و ۵ حاکی از مناسب بودن روش حاضر برای حل عددی این مثال است.

مثال ۳: در این مثال معادله (۱) در حالت سه‌بعدی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + 0/5(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = (1 - \sin^2(x) \sin^2(y) \sin^2(z))u + |u|^2 u.$$



شکل (۴): دامنه مسئله  $\Omega_p$  با  $22 \times 22 \times 22$  نقطه یکنواخت.

دامنه مسئله یک مکعب مستطیل به صورت  $\Omega_p = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  است که در شکل ۴ نمایش داده شده است. جواب تحلیلی این مثال به صورت زیر است [۲۴]

$$u(x, y, z, t) = e^{-\delta i t / \tau} \sin(x) \sin(y) \sin(z).$$

همچنین شرایط مرزی در صفحات مرزی دامنه  $\Omega_p$  همگی صفر هستند. در شکل ۴ دامنه مسئله با نقاط انتخاب شده در آن نشان داده شده است.

جدول (۶): نرم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در مثال ۳

تعداد نقاط	$\epsilon$ -حقیقی	$\epsilon$ -موهومی
$11 \times 11 \times 11$	$2/9183(-2)$	$2/0737(-2)$
$22 \times 22 \times 22$	$1/4232(-4)$	$3/3124(-3)$
$33 \times 33 \times 33$	$7/1254(-5)$	$8/9108(-4)$

در جدول ۶ نرْم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی مسئله بین جواب‌های تحلیلی و جواب عددی با روش حاضر گزارش شده است. ستون اول جدول تعداد نقاط مورد استفاده در حل عددی این مثال را نشان می‌دهد که با توجه به خطاهای گزارش شده با زیاد شدن تعداد نقاط خطا کاهش می‌یابد. در این محاسبات زمان نهایی  $t=1$  و گام زمانی  $\tau=0/001$  در نظر گرفته شده است.

جدول ۷ بیانگر نرْم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در زمان‌های متفاوت است. با توجه به این جدول روش حاضر دارای دقت بالا در زمان‌های متفاوت در حالت سه‌بعدی است.

جدول (۷): نرْم بینهایت خطا برای قسمت‌های حقیقی و موهومی در مثال ۳

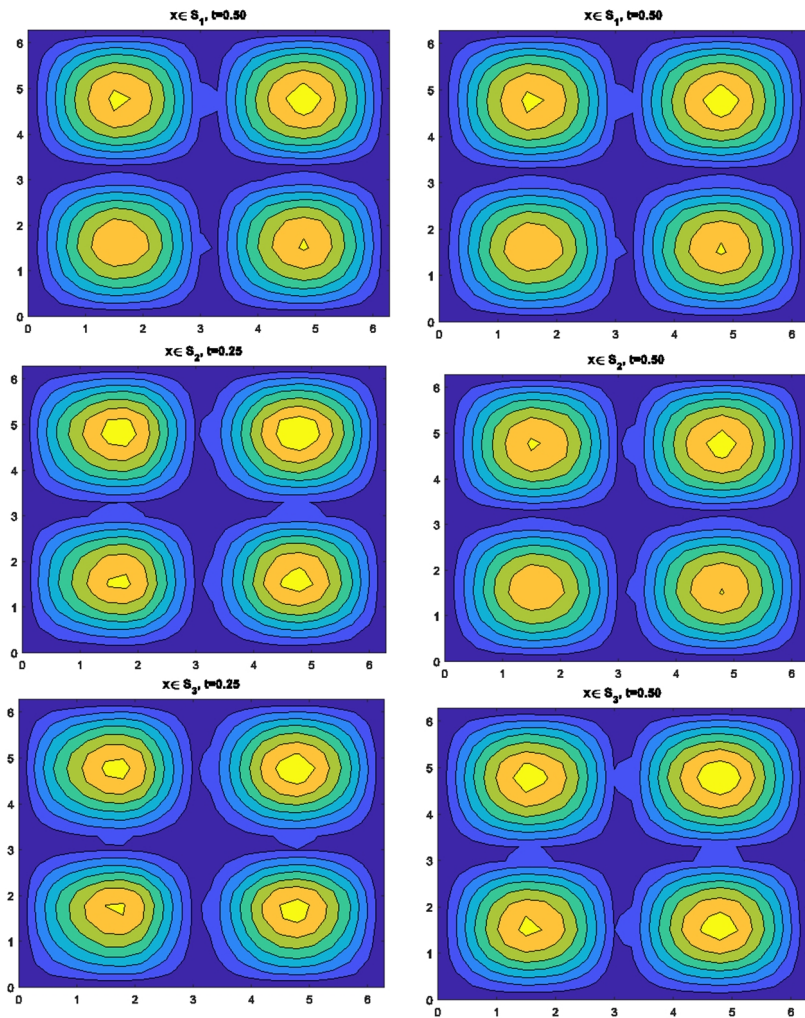
زمان	$\varepsilon$ - حقیقی	$\varepsilon$ - موهومی
۰/۲۵	۲/۵۰۸۶(-۴)	۹/۳۷۶۲(-۴)
۰/۵۰	۷/۹۴۰۱(-۴)	۱/۶۰۷۹(-۳)
۱/۰۰	۱/۴۲۳۲(-۴)	۳/۳۱۲۴(-۳)

در جدول ۸ مرتبه همگرایی زمانی و مکانی برای مثال ۳ گزارش شده است. در ستون اول  $\tau=0/001$  و محاسبات برای  $11 \times 11 \times 11$  نقطه یکنواخت انجام شده است. همچنین در ستون چهارم  $\tau=0/001$  است. با توجه به این جدول روش تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است. با توجه به جدول‌های ۶، ۷ و ۸ و شکل ۵ روش حاضر برای حل این مثال کارایی و دقت خوبی دارد.

جدول (۸): محاسبه مرتبه همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۳

گام زمانی	$\varepsilon$	مرتبه همگرایی زمانی	گام مکانی (تعداد گره‌ها)	$\varepsilon$	مرتبه همگرایی مکانی
$\tau$	۶/۰۹۴۸(-۳)	-	$\pi/5 (11 \times 11 \times 11)$	۶/۰۹۴۸(-۳)	-
$\tau/2$	۳/۶۴۷۴(-۳)	۰/۷۴۰۴	$\pi/10 (21 \times 21 \times 21)$	۳/۷۱۱۹(-۳)	۰/۷۱۵۴
$\tau/4$	۱/۶۹۴۰(-۳)	۱/۱۰۶۴	$\pi/20 (31 \times 31 \times 31)$	۲/۳۸۸۴(-۳)	۱/۰۷۷۱





شکل (۵): خطوط کانتور قدرمطلق خطای بین جواب تحلیلی و جواب عددی در صفحات  $S_1$ ،  $S_2$  و  $S_3$  برای مثال ۳

مثال ۴: در این مثال معادله (۱) را به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{\nu} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu i |u|^\nu u, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

با شرط اولیه  $u(x, y, 0) = e^{\nu i(x+y)} \operatorname{sech}(x+y)$  و جواب تحلیلی [۲۵]

$$u(x, y, t) = e^{i[\tau(x+y) - 3t]} \operatorname{sech}(x + y - 4t),$$

در نظر می‌گیریم. مانند مثال‌های قبلی شرایط مرزی دیریکه را از جواب تحلیلی در مرزهای دامنه به دست می‌آوریم. ابتدا دامنه مسئله را به صورت مستطیل  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  در نظر می‌گیریم. در زیر مقادیر جواب به دست آمده با روش حاضر را برای برخی نقاط گزارش می‌کنیم.

جدول ۹ حل تحلیلی و حل عددی با روش حاضر برای این مثال را برای تعدادی از نقاط تا پنج رقم اعشار نشان می‌دهد. در اینجا از  $11 \times 11$  نقطه یکنواخت در دامنه مسئله استفاده شده است. همچنین  $t = 0.5$  و  $\tau = 0.01$  است. با توجه به این جدول حل عددی دارای تقریب خوبی از جواب تحلیلی در این نقاط است.

جدول (۹): نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی با روش حاضر برای برخی نقاط

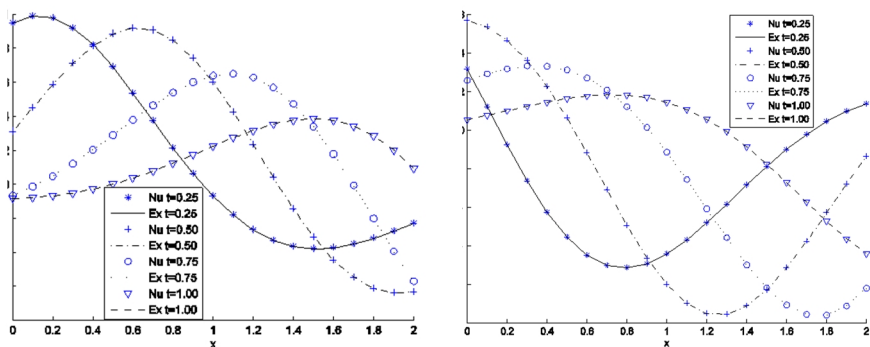
نقطه	حل عددی	حل تحلیلی
(0.1, 0.1)	0.14590 - 0.28665i	0.14597 - 0.28679i
(0.2, 0.2)	0.29653 - 0.24945i	0.29674 - 0.24994i
(0.3, 0.3)	0.44383 - 0.13656i	0.44416 - 0.13739i
(0.4, 0.4)	0.54924 + 0.56097i	0.54953 + 0.55137i
(0.5, 0.5)	0.56867 + 0.31143i	0.56872 + 0.31069i
(0.6, 0.6)	0.46501 + 0.31143i	0.46478 + 0.58569i
(0.7, 0.7)	0.22603 + 0.81275i	0.22567 + 0.58569i
(0.8, 0.8)	-0.11894 + 0.81275i	-0.11918 + 0.91730i
(0.9, 0.9)	-0.49491 + 0.84622i	-0.49491 + 0.84623i
(1.0, 1.0)	-0.80120 + 0.59839i	-0.80114 + 0.59847i

جدول (۱۰): نرم بینهایت خطا برای مثال ۴ در دامنه‌های متفاوت و زمان  $t = 1.0$

دامنه $\Omega$	تعداد نقاط	$\varepsilon$ - حقیقی	$\varepsilon$ - موهومی
$[0, 1] \times [0, 1]$	$11 \times 11$	$1/2787(-4)$	$4/9817(-5)$
$[0, 2] \times [0, 2]$	$22 \times 22$	$1/1676(-4)$	$1/153(-4)$
$[0, 3] \times [0, 3]$	$33 \times 33$	$4/7735(-4)$	$2/0781(-4)$
$[0, 4] \times [0, 4]$	$44 \times 44$	$2/8826(-4)$	$3/3658(-4)$
$[0, 6] \times [0, 6]$	$66 \times 66$	$2/0057(-4)$	$2/5717(-4)$

جدول ۱۰ نرم بینهایت خطای موجود بین روش عددی حاضر و جواب تحلیلی را در دامنه‌های بزرگ‌تر برای این مثال نشان می‌دهد. همچنین ستون دوم این جدول تعداد نقاط انتخاب شده در هر دامنه است. با توجه به نتایج این جدول روش حاضر در دامنه‌های بزرگ‌تر نیز کارایی خوبی برای حل این مثال دارد.

در شکل ۶ حل عددی و حل تحلیلی مثال برای نقاطی با طول  $X=1$  در زمان‌های متفاوتی آورده شده است. شکل سمت چپ قسمت حقیقی و سمت راست قسمت موهومی را نشان می‌دهد. اینجا دامنه مسئله  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$  است و  $22 \times 22$  نقطه یکنواخت برای حل عددی آن استفاده شده است.



شکل (۶): حل تحلیلی و عددی در نقاطی با طول  $X=1$ ، قسمت حقیقی (چپ) و قسمت موهومی (راست) برای مثال ۴

جدول (۱۱): محاسبه مرتبه همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۴

مرتبه همگرایی مکانی	$\epsilon$	گام مکانی (تعداد گره‌ها)	مرتبه همگرایی مکانی	$\epsilon$	گام زمانی
-	۹/۱۶۳۰(-۴)	۰/۱(۱۱×۱۱)	-	۹/۱۶۳۰(-۴)	$\tau$
۱/۱۸۶۰	۴/۰۲۷۴(-۴)	۰/۰۵(۲۱×۲۱)	۰/۹۷۷۱	۴/۶۵۴۹(-۴)	$\tau/2$
۱/۰۴۱۰	۱/۹۵۷۳(-۴)	۰/۰۲۵(۴۱×۴۱)	۱/۰۱۶۳	۲/۳۰۱۳(-۴)	$\tau/4$
۱/۰۸۲۰	۹/۲۴۶۰(-۵)	۰/۰۱۲۵(۸۱×۸۱)	۰/۹۰۸۴	۱/۲۲۶۱(-۴)	$\tau/8$

در جدول ۱۱ مرتبه‌های همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۴ آورده شده‌اند. برای محاسبه مرتبه همگرایی زمانی از  $11 \times 11$  نقطه منظم و به‌طور یکنواخت در دامنه

در اینجا زمان نهایی  $t=1$  و  $\tau=0/001$  است. با توجه به این جدول روش تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است. با توجه به جدول‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ و شکل ۶ ترکیب روش‌های بدون شبکه پتروف گالرکین موضعی و جداسازی گام در زمان برای حل این مثال کارا بوده و دقت بالایی دارد.

در جدول ۱۱ مرتبه‌های همگرایی زمانی و مکانی روش حاضر برای مثال ۴ آورده شده‌اند. برای محاسبه مرتبه همگرایی زمانی از  $11 \times 11$  نقطه منظم و به‌طور یکنواخت در دامنه  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  استفاده شده است. در اینجا زمان نهایی  $t=1$  و  $\tau=0/001$  است. با توجه به این جدول روش تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است. با توجه به جدول‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ و شکل ۶ ترکیب روش‌های بدون شبکه پتروف گالرکین موضعی و جداسازی گام در زمان برای حل این مثال کارا بوده و دقت بالایی دارد.

**مثال ۵:** در این مثال معادله (۱) را به‌صورت  $i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + v(x)u + |u|^2 u$ ، با شرط اولیه  $u(x, y, 0) = x^2 - y^2 + i(1 + xy)$ ، در نظر می‌گیریم. در اینجا چهار نوع دامنه متفاوت برای انجام محاسبات انتخاب شده است. جواب تحلیلی این مثال به‌صورت زیر است [۲۳].

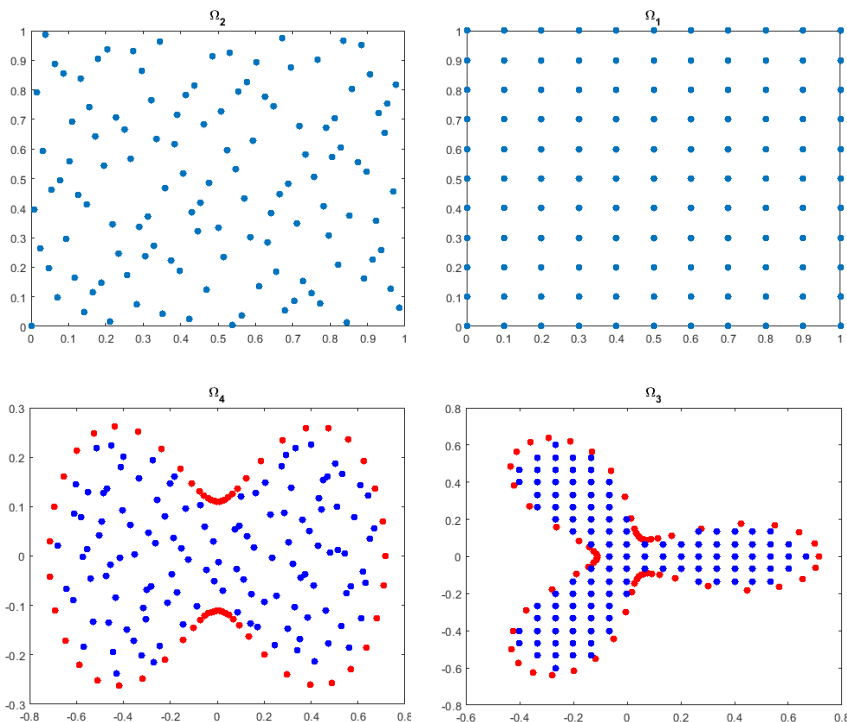
$$u(x, y, t) = (x^2 - y^2) e^{-t} + i(1 + xy),$$

شرایط مرزی در حالتی که دامنه به شکل مستطیل هست  $(\Omega_1)$  به‌صورت

$$\begin{cases} u(1, x, t) = (1 - y^2) e^{-t} + (1 + y), \\ \frac{\partial u(x, 1, t)}{\partial x} = 2x e^{-t} + i, \\ u(0, x, t) = -y^2 e^{-t} + i, \\ \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial x} = 2x e^{-t}, \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. در حالتی که دامنه نامنظم هست شرایط مرزی را دیریکله در نظر می‌گیریم که با استفاده از جواب تحلیلی روی نقاط مرزی به‌راحتی قابل‌بیان است. در اینجا تابع پتانسیل  $v(x)$  به‌صورت زیر است

$$v(x, y, t) = -(x^2 - y^2)^2 e^{-2t} - (1 + xy) - \frac{i e^{-t} (x^2 - y^2)^2 [e^{-t} (x^2 - y^2)^2 - i(1 + xy)]}{e^{-t} (x^2 - y^2) + (1 + xy)}.$$



شکل (۷): دامنه‌های منظم و نامنظم استفاده شده در مثال ۵

جدول (۱۲): محاسبه مرتبه همگرایی مکانی و زمانی روش حاضر برای مثال ۵

مرتبه همگرایی مکانی	$\varepsilon$	گام مکانی (تعداد گره‌ها)	مرتبه همگرایی زمانی	$\varepsilon$	گام زمانی
-	۴/۳۶۱۳(-۵)	۰/۱(۱۱×۱۱)	-	۴/۳۶۱۳(-۵)	$\tau$
۰/۶۱۴۲	۲/۸۴۹۲(-۵)	۰/۰۵(۲۱×۲۱)	۱/۰۰۰۴	۲/۱۸۰۱(-۵)	$\tau/۲$
۱/۲۶۴۱	۱/۱۸۷۱(-۵)	۰/۰۲۵(۴۱×۴۱)	۱/۰۰۰۴	۱/۰۸۹۹(-۵)	$\tau/۴$
۱/۱۳۱۷	۵/۴۱۷۷(-۶)	۰/۰۱۲۵(۸۱×۸۱)	۰/۹۹۹۴	۵/۴۵۰۹(-۶)	$\tau/۸$

در جدول ۱۲ مرتبه همگرایی مکانی و زمانی برای روش حاضر گزارش شده است، در این جدول در ستون اول  $\tau = ۰/۰۰۰۱$  و محاسبات سه ستون اول بر روی دامنه  $\Omega_1$  (شکل ۷ را ببینید) با تعداد نقاط  $۱۱ \times ۱۱$  انجام شده است. همچنین در این جدول زمان نهایی  $t = ۱/۰$  است. ستون

سوم مرتبه همگرایی زمانی را نشان می‌دهد. ستون چهارم گام مکانی را برای محاسبه مرتبه همگرایی مکانی نشان می‌دهد، همچنین در محاسبات ستون‌های چهارم تا ششم (محاسبه مرتبه همگرایی مکانی)  $\tau = 0/0001$  است. با توجه به این جدول نتیجه می‌گیریم روش حاضر تقریباً از مرتبه  $o(h)$  مکانی و  $o(\tau)$  زمانی است.

جدول ۱۳ محاسبات مربوط به مثال ۵ را نشان می‌دهد. این جدول در واقع نرم بینهایت خطا در قسمت‌های حقیقی ( $\varepsilon$ -حقیقی) و موهومی ( $\varepsilon$ -موهومی) بین حل تحلیلی و روش حاضر را در دامنه‌های متفاوت (شکل ۷ را ببینید) نشان می‌دهد. در اینجا  $\tau = 0/0001$  است. ستون اول زمان نهایی و ستون‌های دوم و سوم محاسبات مربوط به خطا را در دامنه  $\Omega_p$  نشان می‌دهند در این دامنه نقاط به صورت نامنظم و پراکنده انتخاب شده‌اند. با توجه به این ستون‌ها روش حاضر دارای دقت خوبی در انتخاب نامنظم نقاط است. دو ستون بعدی محاسبات را در دامنه  $\Omega_p$  نشان می‌دهند، فرم قطبی مرز این دامنه (نقاط قرمز رنگ در شکل ۷) نیز به شکل زیر است

$$r = 0/5 \sqrt{\cos(\vartheta\theta) + \sqrt{1 - \sin(\vartheta\theta)}}.$$

**جدول (۱۳):** نرم بینهایت خطا برای مثال ۵ در دامنه‌های متفاوت و زمان  $t = 1/0$

زمان	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_p$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_p$ )	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_p$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_p$ )	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_f$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_f$ )
۰/۵	۲/۹۵۳۶(-۵)	۱/۱۱۶۰(-۵)	۱/۵۵۳۵(-۵)	۵/۶۷۲۹(-۷)	۱/۵۵۳۳(-۵)	۱/۵۴۹۳(-۷)
۱/۰	۴/۹۲۴۰(-۵)	۲/۷۱۷۸(-۵)	۹/۴۲۱۴(-۶)	۱/۰۴۴۹(-۶)	۹/۴۲۱۴(-۶)	۴/۷۶۳۰(-۷)
۳/۰	۷/۶۸۲۴(-۴)	۴/۱۳۲۹(-۴)	۱/۵۰۹۹(-۵)	۱/۱۸۴۰(-۵)	۸/۶۹۳۳(-۶)	۷/۰۴۷۴(-۶)
۵/۰	۳/۴۴۰۸(-۲)	۱/۷۹۰۴(-۲)	۲/۲۳۹۲(-۴)	۱/۶۸۵۴(-۴)	۸/۴۰۲۷(-۵)	۷/۳۰۵۰(-۵)

قابل ذکر است که در این دامنه نقاط به صورت منظم انتخاب شده‌اند، در اینجا ۶۳ نقطه روی مرز و ۱۱۶ نقطه درون دامنه  $\Omega_p$  انتخاب کرده‌ایم. با توجه به این دو ستون روش حاضر دارای کارایی بالایی روی دامنه‌های نامنظم است. دو ستون آخر نرم بینهایت خطا را برای مثال ۵ روی دامنه  $\Omega_f$  نشان می‌دهند. فرم قطبی مرز این دامنه (نقاط قرمز رنگ در شکل ۷) نیز به شکل زیر است

$$r = 0/5 \sqrt{\cos(\vartheta\theta) + \sqrt{1 - \sin(\vartheta\theta)}}.$$

تعداد نقاط روی مرز و درون دامنه  $\Omega_p$  به ترتیب ۶۳ و ۱۲۵ است. دقت شود که در این دامنه نقاط به صورت پراکنده و نامنظم انتخاب شده‌اند. با توجه به دو ستون آخر این جدول، روش حاضر دارای دقت خوبی برای مثال ۵ روی این دامنه است. برای مقایسه روش با روش‌های موجود و

کارایی درون‌یابی متحرک کریجینگ (بحث شده در بالا) محاسبات جدول ۱۳ را با جایگزین کردن تقریب حداقل مربعات متحرک به‌جای درون‌یابی متحرک کریجینگ روی دامنه‌های  $\Omega_7$  ،  $\Omega_6$  و  $\Omega_4$  انجام می‌دهیم و در جدول زیر نتایج را گزارش می‌دهیم.

با مقایسه جدول‌های ۱۳ و ۱۴ نتیجه می‌شود که روش حاضر دارای تقریب بهتری از جواب تحلیلی برای این مثال نسبت به حالتی است که از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌کنیم.

**جدول (۱۴):** نرم بینهایت خطا برای مثال ۵ در دامنه‌های متفاوت و زمان  $t = 1/0$  با تقریب حداقل مربعات متحرک

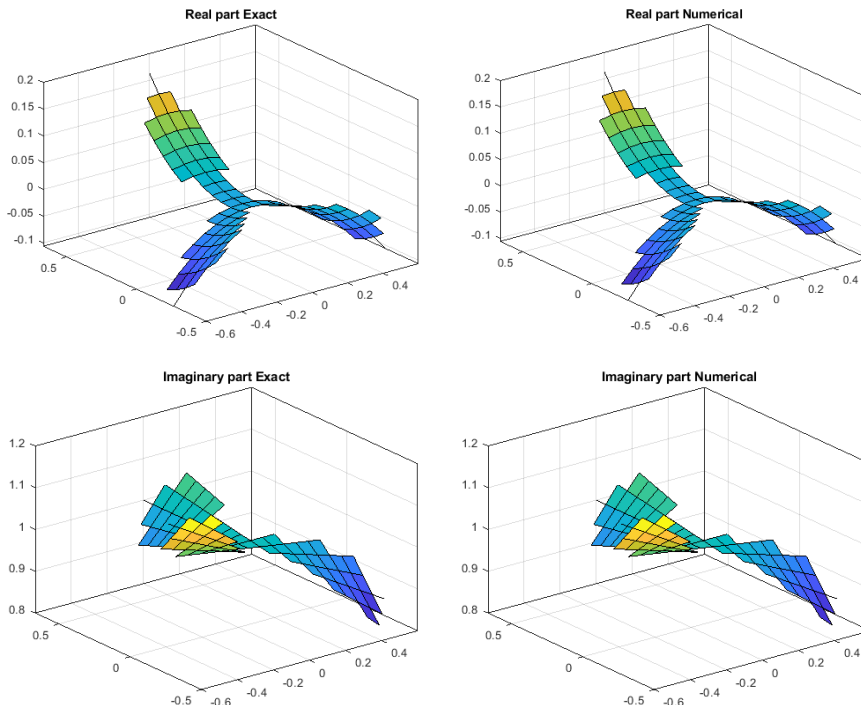
زمان	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_7$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_7$ )	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_6$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_6$ )	$\varepsilon$ -حقیقی ( $\Omega_4$ )	$\varepsilon$ -موهومی ( $\Omega_4$ )
۰/۵	۴/۶۴۵۳(-۵)	۳/۶۲۱۷(-۵)	۱/۵۵۳۹(-۵)	۱/۵۳۹۰(-۶)	۱/۵۵۳۵(-۵)	۱/۵۸۲۵(-۷)
۱/۰	۲/۱۳۴۰(-۴)	۱/۰۴۵۸(-۴)	۱/۰۵۱۸(-۵)	۵/۵۹۵۱(-۶)	۹/۴۱۵۹(-۵)	۵/۹۶۵۸(-۶)
۳/۰	۱/۱۷۲۶(-۳)	۶/۶۵۳۰(-۴)	۱/۰۰۸۷(-۴)	۸/۳۶۸۷(-۵)	۵/۸۰۴۰(-۵)	۹/۶۸۹۵(-۵)
۵/۰	۶/۳۵۲۳(-۲)	۲/۷۰۱۷(-۲)	۱/۱۴۰۴(-۳)	۹/۱۳۷۶(-۴)	۷/۶۳۵۶(-۴)	۸/۶۴۸۱(-۵)

در شکل ۸ نمودار حل عددی و تحلیلی برای مثال ۵ رسم شده‌اند. قسمت‌های حقیقی دو شکل بالا و دو شکل پایین مربوط به قسمت‌های موهومی هستند. در اینجا  $t = 1/0$  و  $\tau = 0/0001$  است. با توجه به این شکل روش حاضر دارای دقت بالایی برای حل این مثال است. با توجه به جدول‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ و شکل ۸ روش حاضر دارای کارایی و دقت بالایی روی دامنه‌های نامنظم است. همچنین دارای دقت بیشتری نسبت به روش تقریب حداقل مربعات متحرک است.

### نتیجه

در این مقاله به بررسی روش بدون شبکه کارآمدی برای حل معادله گینزبورگ-لاندو در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی پرداختیم. از آنجاکه حل معادلات غیرخطی بر پایه فرم ضعیف از جمله روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی کار پیچیده‌ای است، ابتدا از روش جداکننده گام در زمان استفاده کرده و جواب قسمت غیرخطی را به‌صورت دقیق محاسبه کردیم. سپس برای قسمت خطی از روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی استفاده نمودیم. برای ساختن توابع شکل روش بدون شبکه پتروف-گالرکین موضعی از درون‌یابی متحرک کریجینگ به‌جای تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده کردیم. این کار باعث شد تا توابع شکل خاصیت دلتای کرونکر پیدا کنند و بنابراین اعمال شرایط مرزی به سهولت و به‌صورت مستقیم صورت گیرد. برای آزمودن روش چند مثال در حالت‌های دوبعدی و سه‌بعدی آوردیم. همچنین در یکی از مثال‌ها دامنه‌ها را به‌صورت نامنظم با نقاط پراکنده در نظر گرفتیم. نتایج روش حاضر را با حالتی که از روش تقریب

حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود، مقایسه نموده و نتایج حاکی از موفقیت‌آمیز بودن روش حاضر برای حل عددی معادله گینز بورگ-لاندو است.



شکل (۸): حل عددی (دو شکل سمت راست) و تحلیلی (دو شکل سمت چپ) برای مثال ۵ روی دامنه  $(\Omega_3)$

### منابع

- [1] Weinan, E. (1994). Dynamics of vortices in Ginzburg-Landau theories with applications to superconductivity. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 77(4), 383-404.
- [2] Chen, Z. (1997). Mixed finite element methods for a dynamical Ginzburg-Landau model in superconductivity. *Numerische Mathematik*, 76(3), 323-353.



- 
- [3] Xu, Q., and Chang, Q. (2011). Difference methods for computing the Ginzburg-Landau equation in two dimensions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **27**(3), 507-528.
- [4] Mu, M., and Huang, Y. (1998). An alternating Crank-Nicolson method for decoupling the Ginzburg-Landau equations. *SIAM journal on numerical analysis*, **35**(5), 1740-1761.
- [5] Shokri, A., and Dehghan, M. (2012). A meshless method using radial basis functions for the numerical solution of two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **84**(4), 333.
- [6] Liu G R. *Mesh free methods: moving beyond the finite element method*. CRC press, 2002.
- [7] Gingold, R. A., and Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, **181**(3), 375-389.
- [8] Li, Hua., and Shantanu, S. Mulay. *Meshless methods and their numerical properties*. CRC press, 2013.
- [9] Dai, K. Y., Liu, G. R., Lim, K. M., and Gu, Y. T. (2003). Comparison between the radial point interpolation and the Kriging interpolation used in meshfree methods. *Computational Mechanics*, **32**(1-2), 60-70.
- [10] Atluri, S. N. and Tulong, Zhu. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics." *Computational mechanics*, **22**(2), 117-127.
- [11] Atluri, S. N., and Zhu, T. L. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation. *Computer Modeling and Simulation in Engineering*, **3**, 187-196.
- [12] Shen, S. N. A. S. (2002). The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **3**(1), 11-51.
- [13] Atluri, Satya N., and S. Shen. (2002). "The meshless method." *Tech. Sci. Press, Forsyth*.
- [14] Atluri, S. N. (2004). *The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretizations* (Vol. 677). Forsyth: Tech Science Press.
- [15] Degond, P., Jin, S., and Tang, M. (2008). On the time splitting spectral method for the complex Ginzburg-Landau equation in the large time and space scale limit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **30**(5), 2466-2487.

- [16] Taleei, A., and Dehghan, M. (2014). Time-splitting pseudo-spectral domain decomposition method for the soliton solutions of the one-and multi-dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Computer Physics Communications*, **185**(6), 1515-1528.
- [17] Gu, L. (2003). Moving kriging interpolation and element free Galerkin method. *International journal for numerical methods in engineering*, **56**(1), 1-11.
- [18] Chen, L., and Liew, K. M. (2011). A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient heat conduction problems. *Computational Mechanics*, **47**(4), 455-467.
- [19] Dai, B., Zheng, B., Liang, Q., and Wang, L. (2013). Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov-Galerkin method. *Applied Mathematics and Computation*, **219**(19), 10044-10052.
- [20] Wang, J. G., & Liu, G. R. (2000). Radial point interpolation method for elastoplastic problems. In *ICSSD 2000: 1 st Structural Conference on Structural Stability and Dynamics* (pp. 703-708).
- [21] Abbasbandy, S., and Shirzadi, A. (2011). MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*, **61**(2), 170-180.
- [22] Mohebbi, A., and Dehghan, M. (2009). The use of compact boundary value method for the solution of two-dimensional Schrödinger equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **225**(1), 124-134.
- [23] Dehghan, M., and Mirzaei, D. (2008). The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional non-linear Schrödinger equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **32**(9), 747-756.
- [24] Xu, Y., and Zhang, L. (2012). Alternating direction implicit method for solving two-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation. *Computer Physics Communications*, **183**(5), 1082-1093.
- [25] Wang, H. (2010). An efficient Chebyshev-Tau spectral method for Ginzburg-Landau Schrödinger equation. *Computer Physics Communications*, **181**(2), 325-340.

## An Efficient Combination of Split-step in Time and the Meshless Local Petrov-Galerkin Methods for Solving the Ginzburg-Landau Equation in Two and Three Dimensions

Ali Habibirad, Esmail Hesameddini

Department of Applied Mathematics, Shiraz University of Technology,  
Shiraz, Iran

Received: March 5 2019

Accepted for publication: November 7 2019

Corresponding author: [hesameddini@sutech.ac.ir](mailto:hesameddini@sutech.ac.ir)

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

**Abstract:** In this paper, an efficient combination of the time-splitting and meshless local Petrov-Galerkin method for the numerical solution of Ginzburg-Landau equation in two and three dimensions is presented. The main idea of splitting scheme is separating the original equation in time into two parts, linear and nonlinear. Since, solving the nonlinear part based on the weak form is complicated and contains error, the split-step in time will be used. We solve the nonlinear part analytically and linear part numerically by the meshless local Petrov-Galerkin method in space variables and the Crank-Nicolson method in time. Hence, the moving Kriging interpolation is used instead of moving least squares. Therefore, the shape functions of the meshless local Petrov-Galerkin method have the Kronecker's delta property and the boundary conditions can be implemented directly and easily. Several examples for two and three dimensions are presented and the results are compared with their analytical solutions to demonstrate the validity and capability of this method.

**Keywords:** Ginzburg-Landau equation, Meshless local Petrov-Galerkin method, Time splitting scheme, moving Kriging interpolation.

**Mathematics Subject Classifications (2010):** 34A45, 65M60.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).