

مدل مرتبه کسری سرمایه‌ش یک جسم نیمه نامتناهی با تابش

شاهرخ اسماعیلی^۱

گروه ریاضی، دانشگاه کردستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۸/۱۶

چکیده: در این مقاله مدل مرتبه کسری سرمایه‌ش یک جسم نیمه نامتناهی در اثر تابش معرفی می‌شود. در جسم نیمه نامتناهی مفروض، معادله گرما به همراه یک شرط اولیه و یک شرط مرزی مجانبی تشکیل تک معادله‌ای هم‌ارز می‌دهند که در آن مرتبه مشتق‌ها نصف شده است. این معادله و یک شرط مرزی که با انتقال تابشی گرما معرفی می‌شود، تشکیل مسئله‌ای مقدار اولیه می‌دهند که معادله دیفرانسیل آن معمولی، غیرخطی و مرتبه کسری است. جواب نیمه‌تحلیلی این مدل غیرخطی در زمان‌های کوچک و بزرگ به صورت مجانبی تعیین می‌شود. دو روش عددی تقریب گرونوالد-لتنیکوف و تقریب مونتس-لژاندر جواب‌های عددی مسئله را به دست می‌آورد.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل کسری، معادله گرما، جسم نیمه نامتناهی، انتقال تابشی گرما.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۴A۰۸، ۳۵K۰۵

۱- مقدمه

معادله‌های دیفرانسیل جزئی یکی از ابزارهای اصلی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی است. معادله پخش به همراه معادله موج و معادله لاپلاس، یکی از سه معادله دیفرانسیل جزئی بنیادی در ریاضی فیزیک است. معادله پخش که معادله گرما نیز نامیده می‌شود، سیر تکاملی چگالی کمیت‌هایی مانند گرما، غلظت شیمیایی و غیره را برحسب هر دو متغیر زمان و مکان توصیف می‌کند. معادله پخش را می‌توان به شکل کلی

$$\partial_t u = \nabla \cdot (\kappa \nabla u) + \psi, \quad (1)$$

در نظر گرفت که در آن ∇ عملگر گرادیان مختص‌های مکانی، $\kappa > 0$ ضریب رسانش پخش و معمولاً تابعی از متغیرهای مکانی و تابع ψ منبع گفته می‌شود. هرگاه معادله دیفرانسیل جزئی (۱) با یک شرط اولیه و دو شرط مرزی مناسب همراه شود، جواب u آن به‌طور یکتا مشخص خواهد شد. روش‌های مرسوم حل معادله پخش به‌طور گسترده در منابع ارائه شده‌اند [۱ و ۲].

در رویارویی با سه مرز هندسی متداول کره محدب، استوانه محدب و صفحه نامحدود، تقارن مفروض امکان کاهش از سه به یک تعداد مختص‌های مکانی موردنیاز برای توصیف انتقال از طریق محیط را فراهم می‌کند؛ بنابراین، متناظر با هر کدام از این سه هندسه، شاخصی را در نظر می‌گیریم: $G = 1$ برای کره محدب، $G = \frac{1}{p}$ برای استوانه محدب و $G = 0$ برای صفحه نامحدود. واژه «نیمه نامتناهی» که به‌طور معمول در هر سه حالت به کار می‌رود، به این معناست که محیط انتشار به‌طور نامحدود در یک جهت از مرز گسترش می‌یابد. در این سه هندسه، با ثابت گرفتن ضریب رسانش و صرف‌نظر از جمله منبع، معادله دیفرانسیل جزئی (۱) را می‌توان به‌صورت

$$\partial_t u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t) + \left(\frac{2\kappa G}{x \pm R} \right) \partial_x u(x, t), \quad (2)$$

بازنویسی کرد که در آن x مختص مکانی در جهت عمود بر مرز است و مبدأ آن روی مرز رویه قرار دارد. در حالتی که مختصات کروی یا استوانه‌ای باشد، کمیت R در معادله (۲)، شعاع انحنای رویه را نمایش می‌دهد و در حالت صفحه، R اهمیتی ندارد [۳]. انگیزه محدود کردن توجه به هندسه‌های نیمه‌بینهایت آن است که در این صورت محیط انتشار تنها یک مرز بااهمیت دارد و سایرین «در بینهایت» قرار دارند. در محیط‌هایی که ابعاد بینهایت کمتری دارند، وضعیت مشابهی برقرار است، به شرطی که دامنه زمانی به‌اندازه کافی محدود شده باشد.

شرایط اولیه و مرزی مناسب برای دستیابی به جوابی یکتا از معادله (۲) چگونه است؟ با توجه به آن که سیستم در آغاز در حالت تعادل است، بنابراین

$$u(x, t) = u_0. \quad t < 0. \quad x \geq 0. \quad (3)$$

در $t = 0$ ، از طریق فرایندهای نامشخصی که در مرز رخ می‌دهند، اختلالی در سیستم شروع می‌شود. در طول زمان موردبررسی، $[0, t_f]$ ، این اختلال در ناحیه‌های دورافتاده از $x = 0$ تأثیر نمی‌گذارد و رابطه زیر برقرار است

$$u(\infty, t) = u_0. \quad t < t_f. \quad (4)$$

بنابراین، مسئله انتقال گرما با معادله دیفرانسیل جزئی (۲)، شرط اولیه (۳) و شرط مجانبی (۴)

توصیف می‌شود. همان‌گونه که می‌دانیم این دو شرط برای تعیین جوابی یکتا از مسئله کافی نیستند و لازم است شرط دیگری وضع شود.

انتقال گرما به یکی از سه وجه رسانش، همرفت و تابش انجام می‌شود. هرگاه در جسمی گرادیان دما موجود باشد، گرما، از ناحیه پردما به ناحیه کم‌دما منتقل می‌شود. در این حالت گرما بر اثر رسانش انتقال می‌یابد و آهنگ انتقال گرما از واحد سطح A با گرادیان دما متناسب است. با در نظر گرفتن ثابت تناسب، $q = -kA\nabla T$ است که در آن q آهنگ انتقال گرما، ∇T گرادیان دما در جهت شارش گرما، $k > 0$ رسانندگی گرمایی ماده و علامت منفی برای برقراری اصل دوم ترمودینامیک است. این معادله را قانون فوریه می‌نامند [۴]. برای بیان اثر کلی همرفت، قانون نیوتن برای سرمایه‌ش به صورت $q = hA(T_w - T_\infty)$ برقرار است که در آن T_w دمای صفحه، T_∞ دمای شاره و h ضریب همرفت است [۴]. انتقال تابشی گرما مکانیسم متفاوتی دارد و آن انتشار انرژی الکترومغناطیسی است. برای بررسی این نوع انتقال انرژی، مفهوم تابشگر آرمانی یا جسم سیاه مطرح است. تابشی که از سطح صادر می‌شود از انرژی گرمایی زیر سطح ناشی می‌شود و تابشگر گرمایی آرمانی، با آهنگی متناسب با توان چهارم دمای مطلق جسم و در تناسب مستقیم با مساحت سطح آن، انرژی گسیل می‌دارد؛ بنابراین $q = \sigma AT^4$ موسوم به قانون استفان-بولتسمان برقرار است که در آن σ ثابت استفان-بولتسمان نام دارد [۴].

در این مقاله، نخست معادله (۲) و شرایط (۳)-(۴)، به صورت تک‌معادله دیفرانسیل جزئی هم‌ارزی که مرتبه مشتق‌ها نصف شده است، نوشته می‌شود. اهمیت این تک‌معادله در آن است که تنها با معلوم بودن u روی مرز، دستوری برای تعیین شارش گرمایی به‌دست می‌آید. سپس، دستور انتقال تابشی گرما به‌عنوان یک شرط مرزی به کار گرفته می‌شود تا مدل مسئله به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه کسری کاهش یابد. اگرچه قانون فوریه و استفان-بولتسمان از قوانین فیزیک با مشتق‌های مرتبه صحیح تبعیت می‌کند، اما با توجه به کشف مواد جدید مانند فرامواد و ساختارهای مصنوعی تولید شده در آزمایشگاه، گمان می‌رود که این تعمیم به حالت مشتق‌های کسری برای این مواد کاربرد داشته باشد.

بر این اساس، ترتیب ارائه مطالب به این صورت است: در بخش دوم، حسابان کسری شامل معرفی انتگرال و مشتق مرتبه کسری در حد نیاز مدل مسئله خواهد آمد. در بخش سوم، مدل سرمایه‌ش جسم نیمه نامتناهی با تابش معرفی می‌شود. در بخش چهارم، با ابزار حسابان کسری معادله دیفرانسیلی به‌دست می‌آید که آهنگ انتقال گرما در دیواره جسم نیمه نامتناهی را توصیف می‌کند و در مدل‌بندی مسئله نقش اساسی دارد. در بخش پنجم، با سری‌های توانی جواب‌های مجانبی مدل در دو حالت $t \ll 1$ و $t \gg 1$ تعیین می‌شود. دو روش عددی از دو خانواده تفاضل متناهی و هم‌مکانی طیفی برای حل عددی مدل موضوع بخش ششم است. سرانجام، در بخش

پایانی یک مثال عددی با پارامترهای متنوع مطرح می‌شود.

۲- حسابان کسری

حسابان کسری حوزه‌ای در آنالیز ریاضی است که به بررسی و کاربرد انتگرال‌ها و مشتق‌های از مرتبه دلخواه می‌پردازد. برای مدت‌ها، مشتق‌های مرتبه صحیح ابزاری پیشرو برای توصیف سیستم‌های دینامیکی بوده‌اند. با این حال، پژوهش‌های اخیر نشان می‌دهد مدل‌هایی که فقط مبتنی بر مشتق‌های مرتبه صحیح هستند برای مدل کردن پدیده‌هایی با ماهیت مختلط و پیچیده کافی نیستند. به همین دلیل، بر مبنای مسائل فیزیکی و ریاضی عملگرهای دیفرانسیل مرتبه کسری (غیر صحیح) معرفی شده‌اند [۷-۵].

تعریف ۱. فرض کنیم $\nu > 0$. عملگر J^ν روی فضای تابعی $L[0, b]$ به شکل

$$J^\nu f(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq b.$$

را عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه ν می‌گویند. برای حالت خاص $\nu = 0$ فرض می‌شود $J^0 = I$ عملگر همانی است.

تعریف ۲. فرض کنیم $\nu > 0$ حقیقی و $m = [\nu]$. عملگرهای D_t^ν و D_*^ν که به صورت

$$D_t^\nu f(t) := D^m J_*^{m-\nu} f(t), \quad D_*^\nu f(t) := J_*^{m-\nu} D^m f(t).$$

تعریف می‌شوند به ترتیب، عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه ν و عملگر مشتق کسری کاپوتو مرتبه ν نامیده می‌شوند. برای حالت خاص $\nu = 0$ ، هر دو عملگر همانی هستند. همچنین، در حالتی که $\nu = m$ صحیح باشد این دو عملگر همان مشتق معمولی مرتبه صحیح یعنی D^m هستند.

تعریف عملگر مشتق کسری کاپوتو محدودتر از عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل است زیرا در مشتق کسری کاپوتو لازم است تابع f و مشتق‌های آن تا مرتبه $m-1$ مطلقاً پیوسته باشند. در هر حال، اگر $T_{m-1}[f](t)$ چندجمله‌ای تیلر درجه $m-1$ تابع f در $t = 0$ باشد، آنگاه رابطه زیر میان مشتق کسری کاپوتو و مشتق کسری ریمان-لیوویل برقرار است

$$D_*^\nu f(t) = D_t^\nu [f(t) - T_{m-1}[f](t)]. \quad (5)$$

رابطه (۵) را می‌توان تعریف دیگری برای عملگر مشتق کسری کاپوتو مرتبه ν در نظر گرفت. به این ترتیب، اگر مقدار تابع و مشتق‌های آن تا مرتبه $m-1$ در $t = 0$ برابر صفر باشند، آنگاه

$T_{m-1}[f](t) = 0$ و در نتیجه $D_t^\nu f(t) = D_*^\nu f(t)$. برای مثال، اگر $\nu > 0$ و $\gamma > -1$ ، آنگاه می‌توان نشان داد که

$$J_t^\nu t^\gamma = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma+\nu)} t^{\gamma+\nu}. \quad (6)$$

$$D_t^\nu t^\gamma = D_*^\nu t^\gamma = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\nu)} t^{\gamma-\nu}. \quad (7)$$

به‌طور خاص

$$D_t^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad D_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = 0.$$

در این مقاله برای نمایش مشتق کسری نسبت به t تابعی تک متغیره مانند $y(t)$ از نماد معمول $D_t^\nu y$ استفاده می‌کنیم. همچنین، برای نمایش مشتق کسری نسبت به t تابعی دومتغیره مانند $u(x, t)$ نماد مشتق جزئی $\partial_t^\nu u$ را به کار می‌بریم. برای بررسی جامع روش‌های حل عددی معادله‌های دیفرانسیل کسری می‌توان به [۸] مراجعه کرد. به‌طور خاص، حل عددی معادله دیفرانسیل پخش زمان-کسری در [۱۰] بررسی شده است. شایان ذکر است که استفاده از مشتق‌های کسری در محاسبه رفتار شار گرما بر پایه معلوم بودن رفتار دما، برای نخستین بار در [۳] مطرح شده است.

۳- مدل مسئله

در تجزیه و تحلیل مسائل انتقال گرما از ویژگی‌های گوناگون ماده موسوم به ویژگی‌های ترموفیزیکی استفاده می‌شود. این ویژگی‌های به دودسته انتقالی و ترمودینامیکی تقسیم می‌شوند. ویژگی‌های انتقالی شامل ضرایب آهنگ پخش، مانند ضریب رسانندگی گرمایی λ برای انتقال گرما است. ویژگی‌های ترمودینامیکی به حالت تعادل یک سیستم مربوط می‌شود. چگالی ρ و گرمای ویژه c دو نمونه از این ویژگی‌های هستند که به‌طور گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل ترمودینامیکی به کار می‌روند. ضرایب λ ، ρ و c در حالت کلی تابع‌هایی از دمای $T = T(x, t)$ هستند که به کمک آن‌ها رسانش گرمایی نامانا با معادله فوریه به‌صورت زیر توصیف می‌شود [۳]:

$$\partial_t(c(T)\rho(T)T(x, t)) = \partial_x(\lambda(T)\partial_x T(x, t)). \quad (8)$$

به‌طور کلی تابع‌های λ ، ρ و c را با ثابت‌هایی تقریب می‌زنند و مسئله رسانش گرمایی یک‌بعدی

برای یک جسم نیمه نامتناهی را به صورت زیر در نظر می گیرند

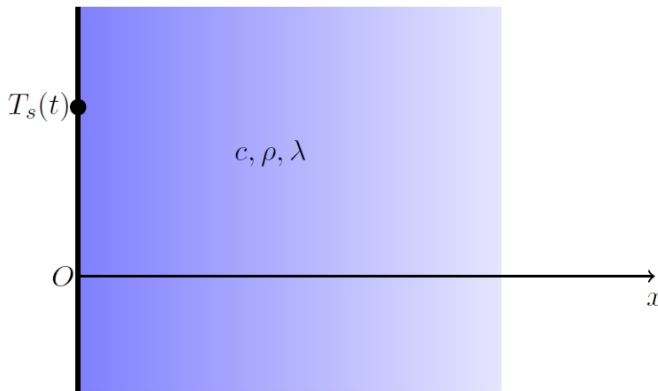
$$c\rho\partial_t T(x,t) = \lambda\partial_x^2 T(x,t); \quad (t > 0; \quad 0 < x < \infty), \quad (9)$$

$$T(x,0) = T_0. \quad (10)$$

$$T(0,t) = T_s(t), \quad (11)$$

$$T(\infty,t) = T_0. \quad (12)$$

در اینجا $T_s(t)$ دمای سطح و قانونی برای تغییر دما در $x = 0$ است. تابع $T_s(t)$ غیرکاهشی است و رشد آن در حد تابعی توانی است. در معادله (۹) کمیت $\kappa = \lambda / (\rho c)$ ضریب پخش گرمایی ماده نامیده می شود. هر چه مقدار κ بزرگ تر باشد، گرما سریع تر در ماده پخش می شود. یکای ضریب پخش گرمایی κ مترمربع بر ثانیه است. شکل ۱ را ببینید.



شکل (۱): یک جسم نیمه نامتناهی

در مسئله (۹)–(۱۲) آهنگ انتقال گرما به صورت $q(x,t) = \lambda\partial_x T(x,t)$ تعریف می شود. همچنین، شار گرمای سطحی $q_s(t)$ با تعیین گرادیان دما در $x = 0$ به دست می آید.

$$q_s(t) = \lambda\partial_x T(x,t)\Big|_{x=0}. \quad (13)$$

مسئله مقدار اولیه-مرزی (۹)–(۱۲) را با تعویض متغیر $\tau = \kappa t$ و در نظر گرفتن فرایند سرمایش یک جسم نیمه بینهایت در اثر تابش می توان به صورت زیر بازنویسی کرد [۵ و ۱۰]:

$$\begin{aligned} \partial_\tau T(x, \tau) &= \partial_x^\nu T(x, \tau); \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < \infty), \\ \partial_x T|_{x=0} &= \alpha T_s^*, \quad T(x, 0) = T(\infty, \tau) = T_s. \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن $\alpha = \sigma / \lambda$. در این مسئله تعیین دمای سطحی $T(0, \tau) = T_s(\tau)$ با $\tau > 0$ جالب توجه است.

۴- آهنگ انتقال گرما

مسئله انتقال گرمای نمونه زیر روی نیم‌صفحه راست را در نظر می‌گیریم که شامل یک معادله دیفرانسیل جزئی، یک شرط اولیه و یک شرط مرزی در بینهایت است:

$$\partial_t T(x, t) = \kappa \partial_x^\nu T(x, t); \quad (t > 0; \quad 0 < x < \infty), \quad (15)$$

$$T(x, 0) = T_s. \quad (16)$$

$$T(\infty, t) = T_s. \quad (17)$$

در این بخش نشان داده می‌شود که مسئله (۱۵)–(۱۷) با تک‌معادله زیر قابل توصیف است

$$\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} T(x, t) = -\sqrt{\kappa} \partial_x T(x, t). \quad (18)$$

این معادله در مطالعه انتقال گرما اهمیت دارد و این کاهش نسبی پیچیدگی به مزیت‌هایی منجر می‌شود. در واقع، معادله پخش (۱۵) نسبت به زمان از مرتبه یک و نسبت به مکان از مرتبه دو است، در حالی که معادله (۱۸) نسبت به زمان از مرتبه نیم و نسبت به مکان از مرتبه یک است! این کاهش مرتبه با آمیختن شرط اولیه (۱۶) و شرط مجانبی (۱۷) انجام می‌شود طوری که معادله (۱۸)، با داشتن تنها یک شرط مرزی که در $x = 0$ اعمال شده باشد، یک مسئله مقدار مرزی کامل را نمایش خواهد داد. همان‌گونه که در مسئله (۱۴) آمده است، این شرط مرزی به کمک آهنگ انتقال تابشی گرما تعیین خواهد شد.

فرض کنید برای $x > 0$ جوابی از معادله (۱۵) موجود باشد که به‌طور پیوسته وقتی $x \rightarrow 0^+$ به $T_s(t)$ میل کند، یعنی $T(0, t) = T_s(t)$ ، در این صورت با جایگذاری $x = 0$ در (۱۸) داریم

$$\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} T_s(t) = -\sqrt{\kappa} \partial_x T(x, t)|_{x=0}.$$

با استفاده از رابطه (۱۳) شار گرمای سطحی $q_s(t)$ به صورت

$$q_s(t) = -\sqrt{c\rho\lambda} \partial_{*t}^{\frac{1}{2}} T_s(t). \quad (19)$$

به دست می‌آید. اهمیت رابطه (۱۹) در این است که بدون تعیین $T(x, t)$ و تنها با معلوم بودن $T_s(t)$ ، دستوری برای تعیین شارش گرمایی به دست می‌آید. همچنین، با معلوم بودن $q_s(t)$ ، با استفاده از عملگر انتگرال کسری، $T_s(t)$ محاسبه می‌شود.

اکنون با تعویض متغیر $r = x / \sqrt{\kappa}$ و فرض $u(r, t) = T(x, t) - T_0$ مسئله (۱۵)–(۱۷) به صورت

$$\partial_t u(r, t) = \partial_r^2 u(r, t); \quad (t > 0; \quad 0 < r < \infty), \quad (20)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad (21)$$

$$u(\infty, t) = 0. \quad (22)$$

بازنویسی می‌شود. تک معادله هم‌ارز با این مسئله به صورت

$$\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} u(r, t) = -\partial_r u(r, t), \quad (23)$$

است که در ادامه به روش نمادی بابنکو و روش تبدیل لاپلاس از مسئله (۲۰)–(۲۲) به دست می‌آید. شایان ذکر است که با توجه به تعویض متغیرهای انجام شده، به آسانی می‌توان (۱۸) را از (۲۳) به دست آورد.

۴-۱ روش نمادی بابنکو

روش نخست به یوری ایوانوویچ بابنکو استاد شیمی کاربردی دانشگاه صنعتی سن پترزبورگ منسوب است و برای حل انواع گوناگونی از معادله‌های دیفرانسیل و انتگرال کسری به کار می‌رود [۱۰]. روش نمادی بابنکو به روش تبدیل لاپلاس نزدیک است، با وجود این، اغلب لازم است جواب‌های صوری به دست آمده راستی‌آزمایی شوند که البته کار ساده‌ای نیست [۵]. در این روش معادله دیفرانسیل پخش (۲۰) به صورت نمادی زیر بازنویسی می‌شود

$$(\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} - \partial_r)(\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} + \partial_r)u(r, t) = 0. \quad (24)$$

با ضرب عملگرها در (۲۴)، به شرطی که $\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} \partial_r u = \partial_r \partial_{*t}^{\frac{1}{2}} u$ ، می‌توان به معادله (۲۰) دست یافت. اکنون معادله‌ای را در نظر می‌گیریم که با عملگر پراپرتز دوم در (۲۴) تشکیل می‌شود:

$$(\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} + \partial_r)u(r, t) = 0. \quad (25)$$

اگر تابعی در پوچی عملگر $\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} + \partial_r$ باشد، آنگاه اثر عملگر $\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} - \partial_r$ در (۲۴) بر این نتیجه نیز صفر خواهد بود؛ بنابراین، اگر جوابی برای معادله (۲۵) به دست آید که در شرایط (۲۱)–(۲۲) صدق کند، آنگاه جوابی برای مسئله اصلی تعیین شده است. به این ترتیب، با استفاده از شرط مرزی (۲۲) می‌توان دریافت که جواب‌های میرای معادله اصلی (۲۰)، همان جواب‌های معادله (۲۵) هستند. چون معادله (۲۵) همان معادله (۲۳) است، پس روش نمادی باینکو کارش را انجام داد!

ممکن است پرسش شود که: چرا معادله کمکی (۲۵) با عامل سمت راست (۲۴) ارائه شد و نه عامل سمت چپ؟ دلیل اصلی انجام این کار آن است که عامل سمت راست جوابی را به دست می‌آورد که هنگام $r \rightarrow \infty$ نزولی است، در حالی که جواب عامل سمت چپ صعودی است و $(\partial_r u)_{r=\infty}$ مثبت خواهد بود، پس بنا به دلایل فیزیکی بایستی کنار گذاشته شود. شایان ذکر است که اگر نیم‌صفحه چپ در نظر گرفته شود، $-\infty < r < 0$ ، آنگاه لازم است معادله کمکی با عامل سمت چپ ارائه شود و نه عامل سمت راست.

روش نمادی باینکو را برای ابعاد بالاتر از یک نیز می‌توان به کار گرفت [۱۰]. برای مثال، در معادله گرمای دو بعدی که $T = T(x, y, t)$ ، آهنگ انتقال گرما در جهت x و روی مرز در حالت بدون بعد چنین است

$$q_s(y, t) = -\partial_x T|_{x=0} = -\sqrt{\partial_t - \partial_x^2} T_s(y, t).$$

۴-۲ روش تبدیل لاپلاس

یکی از ابزارهای حل معادله‌های دیفرانسیل خطی تبدیل لاپلاس است که برای تابع $f(t)$ از مرتبه‌نمایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt.$$

برای مشتق‌های مرتبه صحیح وضعیت ساده است و تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه n به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n \mathcal{L}\{f(t); s\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \quad (26)$$

برای مشتق‌های کسری اوضاع متفاوت است. دستورهای کلی را می‌توان در فصل ۴ کتاب [۵] یافت. مقادیر حدی مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل در کران پایینی $t = 0$ تعبیر فیزیکی مشخصی ندارند، از این رو به‌کارگیری تبدیل لاپلاس این نوع مشتق کسری با محدودیت‌هایی همراه است. از سوی دیگر، مرتبه مشتق کسری استفاده شده در این مقاله $\alpha = \frac{1}{2}$ است؛ بنابراین، معرفی تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتوی مرتبه نیم به صورت

$$\mathcal{L}\{D_*^{\frac{1}{2}} f(t); s\} = s^{-\frac{1}{2}} \mathcal{L}\{f(t); s\} - f(0). \quad (27)$$

برای اهداف این مقاله کافی خواهد بود. اکنون از دو طرف معادله (۲۰) تبدیل لاپلاس می‌گیریم. با استفاده از دستور (۲۶) برای $n = 1$ و $n = 2$ ، همچنین شرط اولیه همگن در (۲۱)، با فرض $U(r, s) := \mathcal{L}\{u(r, t); s\}$ نتیجه چنین است

$$sU(r, s) = \partial_r^2 U(r, s). \quad (28)$$

شرط مرزی مجانبی (۲۲) نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$U(\infty, 0) = 0. \quad (29)$$

معادله دیفرانسیل معمولی (۲۸) و شرط مجانبی (۲۹) که میرایی جواب در ∞ است، جواب مسئله (۲۸)–(۲۹) را به صورت زیر پیشنهاد می‌کند

$$U(r, s) = P(s) \exp(-r\sqrt{s}), \quad (30)$$

که در آن $P(s)$ همچنان مجهول و به شرط مرزی در $x = 0$ وابسته است؛ شرطی شبیه (۱۱) که اکنون در دسترس نیست! با مشتق‌گیری از (۳۰) نسبت به r خواهیم داشت

$$\partial_r U(r, s) = -P(s)\sqrt{s} \exp(-r\sqrt{s}).$$

از این رابطه و معادله (۳۰) مجهول $P(s)$ قابل حذف است و داریم

$$\partial_r U(r, s) = -\sqrt{s}U(r, s).$$

تبدیل لاپلاس وارون را به کار می‌گیریم. با توجه به دستور (۲۷) و شرط اولیه همگن (۲۱) نتیجه چنین است

$$\partial_r u(r, t) = -\partial_{*t}^{\frac{1}{2}} u(r, t),$$

و این همان تک‌معادله (۲۳) است.

۵- جواب مجانبی مدل: روش حل نیمه‌تحلیلی

در بخش ۴ دستوری کلی برای تعیین $\partial_x T(x, \tau)$ برحسب مشتق کسری $T(x, \tau)$ نسبت به τ به‌دست آمد که برای مسئله (۱۴) نتیجه چنین است:

$$D_\tau^{-1} [T_s(\tau) - T_0] = -\alpha T_s^\tau(\tau).$$

چون عملگر J^ν وارون چپ عملگر D_τ^ν است، این معادله را می‌توان به‌صورت

$$T_s(\tau) = T_0 - \alpha J_s^{-1} T_s^\tau(\tau). \tag{31}$$

بازنویسی کرد. روش سری توانی روشی متداول در حل معادله‌های دیفرانسیل و انتگرال است. ایده این روش جستجوی جواب معادله به‌صورت یک سری توانی است. گاهی تعیین دستوری کلی برای ضرایب بسط امکان‌پذیر است و گاهی با رابطه‌ای بازگشتی این کار انجام می‌شود [۵]. فرض کنیم جواب معادله (۳۱) به‌صورت سری توانی زیر باشد

$$T_s(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n. \tag{32}$$

این یک فرض منطقی است زیرا با جایگذاری این سری توانی در سمت راست (۳۱)، یک سری توانی به شکل (۳۲) تولید می‌شود. با جایگذاری این سری در معادله (۳۱) داریم

$$c_0 + c_1 \sqrt{\tau} + c_2 \tau + c_3 \tau \sqrt{\tau} + \dots = T_0 - \alpha J_s^{-1} (c_0 + c_1 \sqrt{\tau} + c_2 \tau + c_3 \tau \sqrt{\tau} + \dots)^\tau.$$

به کمک دستور (۶) و برابر قرار دادن ضرایب $\tau^{\frac{n}{\tau}}$ در دو طرف نتیجه می‌شود

$$c_0 = T_0.$$

$$c_1 = -\alpha c_0^\tau \Gamma(1) / \Gamma(\frac{3}{\tau}) = -\frac{\tau}{\sqrt{\pi}} (\alpha T_0^\tau) T_0,$$

$$c_2 = -\alpha c_1^\tau c_0 \Gamma(\frac{3}{\tau}) / \Gamma(2) = \tau (\alpha T_0^\tau)^\tau T_0.$$

$$c_3 = -\alpha (c_2^\tau c_1 + c_1^\tau c_2) \Gamma(2) / \Gamma(\frac{5}{\tau}) = -\frac{\tau^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau}{3} + \frac{1}{\pi} \right) (\alpha T_0^\tau)^\tau T_0.$$

بنابراین جواب مسئله چنین است

$$\frac{T_s(\tau)}{T_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\alpha T_0^\tau)\sqrt{\tau} + \frac{4}{3}(\alpha T_0^\tau)\tau - \frac{32}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\pi}\right)(\alpha T_0^\tau)\tau\sqrt{\tau} + \dots \quad (33)$$

تعیین بازه همگرایی این سری توانی که در آن ضرایب به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند، مشکل است. با وجود این، محاسبات نشان می‌دهد برای مقادیر کوچک τ می‌توان از این سری استفاده کرد. جواب به شکل سری (۳۳) برای مقادیر بزرگ τ همگرا نیست و در محاسباتی که مقادیر τ به اندازه کافی بزرگ باشد، نامناسب است. جواب دقیق (۳۳) را می‌توان به صورت

$$\Theta_s = f(\sqrt{z}), \quad f(0) = 1. \quad \Theta_s = T_s / T_0. \quad z = (\alpha T_0^\tau)\tau,$$

بازنویسی کرد. که در آن تابع f بر حسب شناسه \sqrt{z} در همسایگی $z = 0$ تابعی تحلیلی است و $\Theta_s(0) = 1$. برای سادگی کار در تعیین جوابی مجانبی با z بزرگ، معادله (۳۱) متناظر را به صورت بدون بعد ($\alpha = 1$) زیر می‌نویسیم

$$\Theta_s(z) = 1 - J_0^{-1}\Theta_s^f(z). \quad (34)$$

به مفهوم فیزیکی مسئله، روشن است که اگر $z \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\Theta_s \rightarrow 0$ ؛ بنابراین، اگر سمت چپ معادله (۳۴) را برابر صفر قرار دهیم، خواهیم داشت

$$J_0^{-1}\Theta_s^f(z) \approx 1 \Rightarrow \Theta_s^f(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \Rightarrow \Theta_s(z) \approx (\pi z)^{-\frac{1}{2}}. \quad z \rightarrow \infty. \quad (35)$$

جواب (۳۵) را در سمت چپ معادله (۳۴) قرار می‌دهیم، جمله بعدی در بسط مجانبی با $z^{-\frac{1}{2}}$ متناسب است. اگر به همین شکل فرایند را ادامه دهیم می‌توان دریافت که جواب مسئله (۳۴) به شکل یک سری توانی از $z^{-\frac{1}{2}}$ است، یعنی

$$\Theta_s(z) \approx \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-\frac{n}{2}}.$$

ضرایب d_n در این بسط را می‌توان پس از جایگذاری آن در (۳۴) به روش معمول برابر قرار دادن ضرایب $z^{-\frac{n}{2}}$ در دو طرف محاسبه کرد. به طور خلاصه، برای مقادیر بزرگ z بسط مجانبی

$$\Theta_s(z) \approx \pi^{-\frac{1}{\lambda}} z^{-\frac{1}{\lambda}} - \frac{\pi^{\frac{1}{\lambda}} \Gamma(\frac{\nu}{\lambda})}{\Gamma(\frac{3}{\lambda})} z^{-\frac{1}{\lambda}} - \frac{\pi^{\frac{1}{\lambda}} \Gamma(\frac{\nu}{\lambda})}{\Gamma(\frac{3}{\lambda})} \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{\lambda})}{\Gamma(\frac{1}{\lambda})} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{\nu}{\lambda})}{\Gamma(\frac{3}{\lambda})} \right] z^{-\frac{2}{\lambda}} - \dots \quad (36)$$

به دست می‌آید. با در نظر گرفتن جمله‌های نخست این دو بسط می‌توان جواب‌های مجانبی را در حالت τ کوچک و τ بزرگ به دست آورد. برای نمونه، در بخش نتایج عددی از هر کدام دو جمله انتخاب شده است.

۶- روش‌های حل عددی مدل

مسئله (۱۴) را در نظر می‌گیریم. با توجه به معادله (۱۸) نتیجه می‌شود

$$\partial_x T \Big|_{x=0} = \partial_t^\nu [T_0 - T_s(t)] = \alpha T_s^\nu(t).$$

با فرض $y(t) = T_0 - T_s(t)$ ، مسئله (۱۴) به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری بازنویسی می‌شود:

$$D_t^\nu y(t) - \alpha (u_0 - y(t))^\nu = 0, \quad t > 0, \quad (37)$$

$$y(0) = 0. \quad (38)$$

در این بخش دو روش عددی برای حل این مسئله ارائه می‌شود. این دو روش، تقریب گرونوالد-لتنیکوف و تقریب مونتس-لژاندر هستند. تقریب گرونوالد-لتنیکوف که روش ضمنی اویلر نیز نامیده می‌شود، روشی تفاضل متناهی با پارامتر طول گام h است. برعکس، تقریب مونتس-لژاندر یک روش هم‌مکانی طیفی با پارامتر n است. شایان ذکر است که در مسئله (۳۷)–(۳۸) به دلیل همگن بودن شرط اولیه، مشتق ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو یکسان می‌باشند.

۶-۱ تقریب گرونوالد-لتنیکوف

فرض کنید h طول گام زمانی، $t_m = mh$ و $y(t_m) = y_m$ باشد. تقریب گرونوالد-لتنیکوف برای مشتق کسری ریمان-لیوویل چنین است

$$D_t^\nu y(t) \approx h^{-\nu} \sum_{k=0}^{\lfloor t/h \rfloor} (-1)^k \binom{\nu}{k} y(t - kh).$$

بنابراین

$$D_t^\nu y(t_m) \approx h^{-\nu} \sum_{k=0}^m w_k^{(\nu)} y_{m-k},$$

که در آن با فرض $w_0^{(\nu)} = 1$ ، وزن‌های $w_k^{(\nu)}$ با دستور بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند [۶]:

$$w_k^{(\nu)} = \left(1 - \frac{1+\nu}{k}\right) w_{k-1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

تقریب گرونوالد-لتینیکوف برای معادله دیفرانسیل مرتبه کسری (۳۷) در $t = t_m$ چنین است

$$h^{-\frac{1}{\nu}} \sum_{k=0}^m w_k^{(\frac{1}{\nu})} y_{m-k} - \alpha(u_0 - y_m)^\dagger = 0.$$

به‌طور معادل، با در نظر گرفتن شرط اولیه (۳۸) الگوریتم حل عددی به‌صورت

$$y_0 = 0, \quad y_m = h^{\frac{1}{\nu}} \alpha (u_0 - y_m)^\dagger - \sum_{j=1}^m w_j^{(\frac{1}{\nu})} y_{m-j}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

توصیف می‌شود. با توجه به این که در گام m مقادیر y_1, y_2, \dots, y_{m-1} معلوم‌اند، بنابراین، معادله غیرخطی (۳۹) تنها یک مجهول دارد و با یک روش عددی مناسب حل می‌شود [۱۱].

۶-۲ تقریب با چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر

در ادامه روش هم‌مکانی طیفی را برای حل مسئله مقدار اولیه (۳۷)–(۳۸) به کار می‌بریم. جواب معادله‌های دیفرانسیل مرتبه کسری شامل توان‌های کسری است و تقریب‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌های جبری کلاسیک اغلب، منجر به نتایج خوبی نخواهد شد، زیرا این‌گونه پایه‌ها به‌اندازه کافی توانایی تطابق با توان‌های کسری را ندارند. یک گزینه خوب برای این کار چندجمله‌ای‌های متعامد مونتس-لژاندر است. چندجمله‌ای‌های مونتس-نخستین بار در [۱۲] برای حل معادله‌های دیفرانسیل مرتبه کسری به کار گرفته شده‌اند. ایده اصلی در این روش تقریب جواب با یک مجموع متناهی به‌صورت

$$y(t) \approx y_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(t), \quad (40)$$

است. که در آن حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های مونتس موسوم به مونتس-لژاندر هستند و در [۱۲] تعریف شده‌اند. چندجمله‌ای‌های مونتس-لژاندر برای $t \in [0, T]$ به‌صورت

$$L_n(t) := \sum_{k=0}^n c_{nk} \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{k}{\nu}}, \quad c_{nk} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{\nu=0}^{n-1} (k + \nu + 1) \quad (41)$$

نمایش داده می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[0, T]$ نسبت به تابع وزن $w(x) \equiv 1$ متعامدند. چندجمله‌ای‌های مونتمس-لژاندر را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های ژاکوبی نوشت. درواقع، بنا بر قضیه ۳-۱ در [۱۲] داریم

$$L_n(t) = P_n^{(0,1)}(\sqrt{t/T} - 1). \quad (42)$$

به این ترتیب، برای مقدار یابی $L_n(t)$ می‌توان از رابطه بازگشتی سه‌گانه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی استفاده کرد. همچنین، مشتق مرتبه $\nu = \frac{1}{4}$ این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان (به‌طور دقیق) با یک کوادراتور گاوسی به‌صورت زیر محاسبه کرد

$$D_*^{\frac{1}{4}} L_n(t) = \frac{\nu + n}{\sqrt{\pi T}} \sum_{k=1}^{[n/\nu]} w_k P_{n-1}^{(0,\nu)}(\sqrt{t/T} x_k - 1), \quad (43)$$

که در آن وزن‌های w_k و گره‌های x_k در حد دقت ماشین با الگوریتم چیبیشف و گلوب-والش محاسبه می‌شوند [۱۲]. در جدول ۱ مرجع [۱۳] گره‌ها و وزن‌های کوادراتور گاوسی (۴۳) برای $T = 1$ و $n = 10$ داده شده است.

برای به‌دست آوردن ضرایب مجهول a_k در جواب تقریبی (۴۰) بایستی جواب $y_n(t)$ در نقاط هم‌مکانی مناسب τ_j ، در معادله دیفرانسیل کسری (۳۷) صدق کند. به‌عبارت‌دیگر، مانده وزنی در این نقاط صفر شود.

$$D_*^{\frac{1}{4}} y_n(\tau_j) - \alpha(u_0 - y_n(\tau_j))^{\frac{1}{4}} = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (44)$$

نقاط هم‌مکانی τ_j را به‌صورت $\tau_j = t_j^{\frac{1}{4}}$ در نظر می‌گیریم که در آن نقاط چیبیشف-گاوس-لوباتو متناظر با بازه $[0, T]$ هستند:

$$t_j = \frac{T}{\nu} (1 - \cos(\pi j / n)), \quad j = 0, \dots, n.$$

با در نظر گرفتن شرط اولیه همگن (۳۸)، $n + 1$ معادله جبری به‌صورت زیر ساخته می‌شود

$$g_0(a_0, \dots, a_n) := \sum_{k=0}^n a_k L_k(0) - y_0 = 0, \quad (45)$$

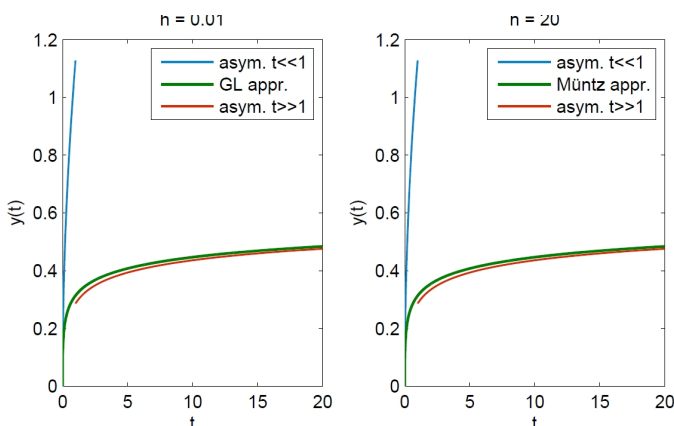
$$g_j(a_0, \dots, a_n) := \sum_{k=0}^n a_k D_*^{\frac{1}{4}} L_k(\tau_j) - \alpha(u_0 - \sum_{k=0}^n a_k L_k(\tau_j))^{\frac{1}{4}} = 0. \quad (46)$$

معادله‌های (۴۵)–(۴۶) تشکیل یک دستگاه شامل $n + 1$ معادله جبری و $n + 1$ مجهول اسکالر می‌دهند که البته غیرخطی است و برای حل آن می‌توان از دستورهای شناخته شده مانند fsolve در متلب استفاده کرد.

۷- نتایج عددی

پیاده‌سازی دو روش عددی در نرم‌افزار عددی متلب انجام شده است. همچنین، از یک بسته نرم‌افزاری در ممتیکا برای محاسبه گره‌ها و وزن‌های کوادراتور عددی استفاده شده است [۱۴].

فرض کنید در مسئله مقدار اولیه (۳۷)–(۳۸) پارامترها به صورت $\alpha = 1$ و $u_0 = 1$ باشند. جواب‌های مجانبی در دو حالت $t \ll 1$ و $t \gg 1$ به همراه جواب عددی مدل با تقریب گرونوالد-لتنیکوف (۳۹) و $h = 0.01$ در تصویر سمت چپ شکل ۲ و جواب عددی مدل با تقریب مونتس-لژاندر (۴۰) و $n = 20$ در تصویر سمت راست شکل ۲ رسم شده‌اند. در هر دو حالت جواب عددی با جواب‌های مجانبی در محدوده ذکر شده همخوانی دارد.



شکل (۲): تقریب گرونوالد-لتنیکوف و تقریب مونتس-لژاندر به همراه جواب‌های مجانبی مدل.

با مشاهده شکل ۲ ممکن است درصد مقایسه دو روش برآییم. به طور کلی، مقایسه روش‌های تفاضل متناهی و روش‌های طیفی چندان مرسوم نیست. تقریب گرونوالد-لتنیکوف با وجود مرتبه دقت پایین، $O(h)$ ، به لحاظ نظری همگرا است. از سوی دیگر، تقریب مونتس-لژاندر تحت شرایطی دقت طیفی $O(C^n)$ دارد که در آن $0 < C < 1$. به این ترتیب، مقایسه این دو روش منصفانه نیست! نتایج دو روش عددی برای مقادیر نمونه $y(T/2)$ و $y(T)$ در جدول ۱ برای $T = 1$ و در جدول ۲ برای $T = 20$ ، با مقادیر متنوعی از پارامترها آمده است. در این جدول‌ها مشاهده می‌شود که در تقریب گرونوالد-لتنیکوف با کوچک شدن h ، ارقام درست در حد دو رقم

باقی می‌مانند، درحالی‌که در تقریب مونتس-لژاندر با بزرگ شدن n ، ارقام درست بیشتر می‌شوند. علاوه بر تقریب جواب، در این جدول‌ها زمان اجرای دو روش برای محاسبه تقریب $y(T)$ گزارش شده است. زمان‌بری بیشتر در تقریب مونتس-لژاندر مربوط به حل دستگاه غیرخطی (۴۵)–(۴۶) با `fsolve` است.

جدول (۱): تقریب‌های به‌دست‌آمده و زمان اجرا برای دو روش عددی برای $T = 1$

مونتس-لژاندر تقریب				گرونوالد-لتنیکوف تقریب			
$t(s)$	$y(1)$	$y(0/5)$	n	$t(s)$	$y(1)$	$y(0/5)$	h
۰/۵۲	۰/۳۱۳۳۸۴۸۵	۰/۲۷۲۶۳۲۹۵	۱۰	۰/۰۰۲	۰/۳۱۹۹۲۸	۰/۲۸۶۶۲۳	۰/۱
۲/۴	۰/۳۱۳۴۲۹۳۷	۰/۲۷۲۶۳۸۴۶	۲۰	۰/۰۰۵	۰/۳۱۶۲۶۲	۰/۲۷۷۸۷۳	۰/۰۵
۸/۰	۰/۳۱۳۴۲۹۳۸	۰/۲۷۲۶۳۸۴۶	۳۰	۰/۰۰۶	۰/۳۱۳۹۳۰	۰/۲۷۳۵۴۳	۰/۰۱

جدول (۲): تقریب‌های به‌دست‌آمده و زمان اجرا برای دو روش عددی برای $T = 20$

مونتس-لژاندر تقریب				گرونوالد-لتنیکوف تقریب			
$t(s)$	$y(20)$	$y(10)$	n	$t(s)$	$y(20)$	$y(10)$	h
۰/۶۰	۰/۴۸۰۷۰۶	۰/۴۴۶۴۵۲	۱۰	۰/۰۰۷	۰/۴۸۴۷۹۶	۰/۴۴۷۴۹۵	۰/۱
۲/۶۵	۰/۴۸۴۳۸۹	۰/۴۴۶۷۹۸	۲۰	۰/۰۱۰	۰/۴۸۴۶۰۶	۰/۴۴۷۱۱۰	۰/۰۵
۹/۰۰	۰/۴۸۴۴۷۷	۰/۴۴۶۷۹۳	۳۰	۰/۰۵۰	۰/۴۸۴۴۷۷	۰/۴۴۶۸۵۱	۰/۰۱

۸- نتیجه‌گیری

یک مدل ریاضی شامل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه کسری با شرط اولیه همگن بررسی شد. این مدل سرمایه‌ش یک جسم نیمه نامتناهی با تابش را توصیف می‌کند. به‌دست آوردن جواب دقیق مسئله و حل تحلیلی مدل آسان نیست، بنابراین، جواب‌های مجانبی و جواب‌های عددی به‌دست آمد. در جواب مجانبی متغیر زمان نقش مهمی دارد طوری که بسط مجانبی محاسبه شده برای زمان‌های کوچک و زمان‌های بزرگ متفاوت است. روش‌های تقریبی نیز از دودسته متفاوت انتخاب شدند: (۱) تقریب گرونوالد-لتنیکوف که یک روش تفاضل متناهی با همگرایی نظری تضمین شده است؛ (۲) تقریب مونتس-لژاندر که یک روش هم‌مکانی طیفی با همگرایی نمایی است. بر اساس آزمایش‌های عددی می‌توان نتیجه گرفت که اگرچه سرعت اجرای روش نخست بیشتر است، باوجوداین، دقت روش دوم بیشتر است و این همان داستان همیشگی در آنالیز عددی است که در اغلب روش‌ها سرعت و دقت را نمی‌توان یکجا داشت.

منابع

- [1] Evans, L.C. (2010). *Partial Differential Equations*, Providence: AMS.
- [2] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, Oxford: Clarendon Press.
- [3] Oldham, K.B. and Spanier, J. (1972). *A general solution of the diffusion equation for semi-infinite geometries*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **39**, 655–669.
- [4] Holman, J.P. (2009). *Heat Transfer*, New York: McGraw-Hill Education.
- [5] Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, San Diego, CA: Academic Press.
- [6] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. and Trujillo, J.J. (2016). *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*, Singapore: World Scientific.
- [7] Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Berlin: Springer.
- [8] Karniadakis, G.E. (Ed.) (2019). *Numerical Methods*, Volume 3 of Handbook of Fractional Calculus with Applications, Berlin: De Gruyter.
- [9] Tripathi, N.K. Das, S. Ong, S.H. Hossein, J. and Al Qurashi, M. (2016). *Solution of higher order nonlinear time-fractional reaction diffusion equation*, *Entropy*, **18**, 329.
- [10] Babenko, Y.I. (1986). *Heat and Mass Transfer: The Method of Calculation for the Heat and Diffusion Flows (in Russian)*, Leningrad: Khimiya.
- [11] Garrappa, R. (2018). *Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial*, *Mathematics*, **6**, 16.
- [12] Esmaeili, S. Shamsi, M. and Luchko, Y. (2011). *Numerical solution of fractional differential equations with a collocation method based on Müntz polynomials*, *Computers and Mathematics with Applications*, **62**, 918–929.
- [13] Esmaeili, S. (2017). *Numerical Solution of Gas Solution in a Fluid: Fractional Derivative Model*, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, **8** (4), 425-437.
- [14] Cvetković, A.S. and Milovanović, G.V. (2004). *The Mathematica Package "OrthogonalPolynomials"*, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, **19**, 17–36.

Fractional-order Model for Cooling of a Semi-infinite Body by Radiation

Shahrokh Esmaeili

Department of Mathematics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

Received: March 14 2019

Accepted for publication: November 7 2019

Corresponding author: sh.esmaeili@uok.ac.ir

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract: In this paper, the fractional-order model for cooling of a semi-infinite body by radiation is considered. In the supposed semi-infinite body, the equation of heat along with an initial condition and an asymptotic boundary condition form an equivalent equation in which the order of derivatives is halved. This equation and a boundary condition introduced by the radiation heat transfer give rise to an initial value problem, whose differential equation is nonlinear and fractional order. The semi-analytical solution to this nonlinear model was determined asymptotically at small and large times. Moreover, two numerical methods including Grünwald-Letnikov approximation and Müntz-Legendre approximation yield numerical solutions to the problem.

Keywords: Fractional differential equation, Heat equation, Semi-infinite body, Radiation heat transfer.

Mathematics Subject Classification (2010): 35K05, 34A08.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).