

## برآورد پارامتر قابلیت اعتماد $R = P(X > Y)$ در توزیع لیندلی توانی با استفاده از داده‌های رکورد بالایی

عباس پاک<sup>۱\*</sup>، علی اکبر جعفری<sup>\*\*</sup>، محمدرضا محمودی<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شهرکرد

<sup>\*\*</sup>گروه آمار، دانشگاه یزد

<sup>\*\*\*</sup>گروه آمار، دانشگاه فسا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۲/۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۱۴

**چکیده:** در ادبیات تحقیق، استنباط آماری برای پارامتر تنش-مقاومت  $R = P(X > Y)$  بسیار مورد توجه قرار گرفته است. اخیراً نیز برآورد پارامتر  $R$  در توزیع لیندلی توانی و بر اساس داده‌های کامل توسط قیطانی و همکاران [۸] انجام شده است؛ اما در عمل ممکن است با داده‌های رکوردی سروکار داشته باشیم که در آن‌ها تنها مشاهداتی که بزرگ‌تر از همه مشاهدات قبلی خود باشند، گزارش می‌شوند. در این مقاله، با فرض اینکه متغیرهای تصادفی تنش و مقاومت  $X$  و  $Y$  مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع لیندلی توانی هستند، به مسئله برآورد پارامتر قابلیت اعتماد  $R$  بر اساس داده‌های رکورد بالایی می‌پردازیم. ابتدا برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و همچنین فاصله اطمینان مجانبی را برای پارامتر  $R$  به دست می‌آوریم. همچنین، با در نظر گرفتن توابع زیان مربع خطا و لاینکس، برآوردگرهای بیز  $R$  را محاسبه خواهیم کرد. از آنجا که برآوردگرهای بیز فوق دارای فرم صریحی نیستند، از روش تقریب لیندلی و نیز روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی برای به دست آوردن تقریبی از برآوردهای بیز استفاده می‌کنیم. سپس به منظور مقایسه عملکرد روش‌های ارائه شده یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است. در انتها با استفاده از داده‌های واقعی، کاربردی از استنباط‌های انجام شده بر اساس داده‌های رکورد بالایی ارائه می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع لیندلی توانی، مدل تنش-مقاومت، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۵، ۶۲F۱۵، ۶۲N۰۵

## ۱- مقدمه

در مطالعات قابلیت اعتماد از توزیع‌های مختلف آماری برای مدل‌سازی داده‌های مربوط به طول عمر یا زمان بقای موجودات استفاده می‌شود. اخیراً توزیع لیندلی توانی با تابع چگالی احتمال

$$f(z, \gamma, \delta) = \frac{\gamma \delta^\gamma}{\delta + 1} (1 + z^\gamma)^{\gamma-1} e^{-\delta z^\gamma}, \quad z > 0, \quad \gamma, \delta > 0 \quad (1)$$

و تابع توزیع تجمعی

$$S(z, \gamma, \delta) = 1 - \left(1 + \frac{\delta}{\delta + 1} z^\gamma\right) e^{-\delta z^\gamma}, \quad z > 0, \quad \gamma, \delta > 0 \quad (2)$$

توسط قیطانی و همکاران [۴] به‌عنوان یک توزیع جدید برای آنالیز داده‌های طول عمر معرفی شده است. آن‌ها بسیاری از خواص این مدل را مطالعه کرده و کاربردهای آن را در مدل بندی داده‌های واقعی با توزیع‌های گاما و وایبل مقایسه کردند. در این مقاله، توزیع لیندلی توانی با پارامترهای  $\gamma$  و  $\delta$  را با  $PL(\gamma, \delta)$  نشان خواهیم داد.

در مباحث علم آمار، مقایسه بین کمیت‌ها و جامعه‌های مختلف همواره از جایگاه مهمی برخوردار بوده است. در حقیقت می‌توان گفت معرفی روش‌های مقایسه، بخش قابل توجهی از مباحث آماری را به خود اختصاص داده است. این موضوع در تحلیل بقا و به‌ویژه در نظریه قابلیت اعتماد از اهمیت بیشتری برخوردار بوده و روش‌های مقایسه‌ی متنوعی مورد مطالعه‌ی پژوهشگران قرار گرفته است. یک شکل از مقایسه بین دو متغیر که در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه بوده و به‌عنوان یک مدل احتمالی در مسائل مختلف استفاده شده است، مقدار پارامتر  $R = P(X > Y)$  است. این احتمال بیشتر به نام مدل تنش- مقاومت مشهور است. اگر متغیر  $X$  را مقاومت (مدت زمان دوام و طول عمر) یک سیستم در نظر بگیریم که در محیط مورد استفاده، تحت تنش تصادفی  $Y$  قرار دارد؛ در این صورت، مقدار  $R$  میزان قابلیت اعتماد سیستم مورد نظر را نشان خواهد داد. بر طبق این تعریف اگر تنش وارد بر سیستم از مقاومت سیستم بیشتر باشد، سیستم با شکست روبرو می‌شود و به‌عبارت دیگر سیستم تا زمانی با موفقیت به عملکرد خود ادامه می‌دهد که  $X > Y$  باشد، یعنی سیستم مقاومت لازم برای فائق آمدن بر تنشی که در معرض آن قرار گرفته را داشته باشد. استفاده از احتمال  $R$  در مقایسه‌ی طول عمر دو دستگاهی که از دو روش مختلف تولید شده‌اند، از کاربردهای مهم این معیار مقایسه است. همچنین به‌واسطه‌ی پیشرفت‌های اخیر در پزشکی، کاربردهای مختلفی از این مدل‌ها در حیطه‌ی پزشکی مخصوصاً آزمایش‌های بالینی (به‌عنوان نمونه مقایسه‌ی وضعیت بیمار در بازه‌های زمانی متفاوت) آغاز شده است. در ادبیات تحقیق، برآورد پارامتر  $R$  وقتی که توزیع متغیرهای تنش و مقاومت از مدل‌های مختلف آماری باشند، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. برای مطالعه بیشتر در این زمینه مراجع [۱، ۲، ۵، ۶، ۷] را ملاحظه نمایید.

اخیراً قیطانی و همکاران [۸] روش‌های استنباطی را برای پارامتر تنش-مقاومت  $R$  بر اساس توزیع لیندلی توانی و با استفاده از اطلاعات کامل همه واحدهای آزمایشی مورد مطالعه قرار داده‌اند؛ اما در برخی کاربردهای عملی ممکن است اطلاعات مربوط به همه واحدهای آزمایش در دسترس نبوده و فقط مشاهداتی که بزرگ‌تر (کوچک‌تر) از مشاهدات ماقبل خود هستند، گزارش شوند. این چنین داده‌هایی را مقادیر رکوردی گویند [۳]. اگر مشاهده‌ای بزرگ‌تر از همه‌ی مشاهدات قبلی باشد، رکورد بالایی و اگر مشاهده‌ای کوچک‌تر از همه‌ی مشاهدات قبلی باشد، رکورد پایینی نامیده می‌شود. در چنین آزمایش‌هایی داده‌های به دست آمده به‌طور قابل ملاحظه‌ای کوچک‌تر از حد نمونه کامل است که می‌تواند به صرفه‌جویی در آزمایش‌های پرهزینه کمک کند. همچنین در مطالعات هواشناسی، آب‌شناسی و رویدادهای ورزشی موقعیت‌هایی وجود دارند که فقط داده‌های رکوردی حفظ و ذخیره می‌شوند. در سال‌های اخیر برآورد پارامتر تنش-مقاومت  $R$  با استفاده از داده‌های رکوردی مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال اصغر زاده و همکاران [۹] به مسئله برآورد  $P(X > Y)$  برای توزیع نمایی تعمیم‌یافته با استفاده از داده‌های رکورد پایینی پرداختند. باکلیزی [۱۰] و وانگ و همکاران [۱۱] با در نظر گرفتن توزیع وایبل برای متغیرهای تنش و مقاومت، استنباط آماری پارامتر  $R$  را مورد بررسی قرار دادند. تاروردیزاده و احمدپور [۱۲] با استفاده از داده‌های رکورد بالایی، به برآورد پارامتر  $R$  در مدل دو پارامتری وان شکل پرداختند.

با توجه به اینکه تاکنون در متون تحقیق مسئله‌ی برآورد پارامتر  $R$  بر اساس داده‌های رکورد بالایی در توزیع لیندلی توانی در نظر گرفته نشده است، در این مقاله به این مهم می‌پردازیم. اهمیت کاربردی استنباط‌های ارائه شده در این مقاله، مقایسه دو فرایند رکوردی در مطالعات مختلف است. به‌عنوان مثال می‌توان از آن‌ها برای مقایسه شرایط محیطی مفرط در ماه‌های مختلف سال استفاده کرده و وجود یا عدم وجود اثرات فصلی قابل توجه را بررسی نمود. مثال دیگر می‌تواند مقایسه توانایی‌های ورزشی مردان و زنان با استفاده از داده‌های رکورد بالایی باشد. برای انجام استنباط‌ها در این مقاله فرض می‌کنیم که متغیرهای مقاومت و تنش به ترتیب دارای توزیع‌های لیندلی توانی  $PL(\gamma, \delta_1)$  و  $PL(\gamma, \delta_2)$  هستند. ابتدا در حالتی که هر سه پارامتر  $\gamma$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  نامعلوم باشند، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  را به دست آورده و از آن برای ساختن فاصله اطمینان مجانبی استفاده خواهیم کرد. سپس با در نظر گرفتن تابع زیان‌های مختلف، برآوردگرهای بیز پارامتر  $R$  معرفی می‌کنیم؛ اما با توجه به اینکه برآوردگرهای بیز فوق دارای فرم صریحی نیستند، از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی برای به دست آوردن تقریبی از برآوردگرهای بیزی و نیز ساختن ناحیه‌های اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین (HPD) استفاده می‌کنیم. سپس در حالتی که پارامتر مشترک  $\gamma$  معلوم باشد، برای یافتن تقریبی از برآوردگرهای بیز  $R$ ، از تقریب لیندلی استفاده خواهیم کرد. درنهایت به‌منظور ارائه کاربردی عملی از روش‌های

استنباطی ذکر شده در این مقاله، از مدل  $P(X > Y)$  برای مقایسه غلظت دی‌اکسید گوگرد در ماه‌های مختلف سال بر اساس داده‌های لانگ بیچ کالیفرنیا استفاده می‌کنیم. در این مقاله از نمادگذاری زیر برای رکوردها استفاده می‌شود: فرض کنید  $X_1, X_2, \dots$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی  $F(x; \theta)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x; \theta)$  باشند. اگر به ازای هر  $j > i$ ،  $X_j > X_i$  باشد، مشاهده  $X_j$  را یک رکورد بالایی گوئیم. در این صورت تابع چگالی احتمال توأم  $n$  رکورد بالایی برابر می‌شود با:

$$\mathfrak{J}(x; \theta) = f(x_n; \theta) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i; \theta)}{1 - F(x_i; \theta)}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad (3)$$

که در آن  $x = (x_1, \dots, x_n)$  بردار مقادیر  $n$  رکورد اول است [۱۳]. در ادامه، ابتدا ساختار تابع درست‌نمایی بر اساس داده‌های رکورد بالایی در بخش دوم ارائه می‌شود و با استفاده از آن، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و فاصله اطمینان جانبی  $R$  به دست می‌آید. سپس، برآوردیابی بیز پارامتر  $R$  تحت توابع زیان مربع خطا و لاینکس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و بیزی را در حالتی که پارامتر  $\gamma$  معلوم باشد، به دست می‌آوریم. در بخش چهارم، مطالعه شبیه‌سازی به‌منظور بررسی دقت عملکرد برآوردگرهای به دست آمده ارائه می‌شود و در پایان با استفاده از یک مثال عملی، روش‌های ارائه شده برای برآورد پارامتر  $R$  تشریح خواهند شد.

## ۲- برآورد پارامتر $R$ با فرض $\gamma$ نامعلوم

فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  به ترتیب دارای توزیع‌های لیندلی توانی  $PL(\gamma, \delta_1)$  و  $PL(\gamma, \delta_2)$  باشند. آنگاه با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲) پارامتر قابلیت اعتماد موردنظر برابر می‌شود با

$$R = P(X > Y) = \frac{\delta_2^\gamma}{\delta_2^\gamma + 1} \left( \frac{2\delta_1 + 1}{(\delta_1 + 1)(\delta_1 + \delta_2)^2} + \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} + \frac{2\delta_1}{(\delta_1 + 1)(\delta_1 + \delta_2)^3} \right), \quad (4)$$

(قیطانی و همکاران [۸] را ببینید). در ادامه این بخش برآورد پارامتر  $R$  را با استفاده از دو دیدگاه کلاسیک و بیزی به دست می‌آوریم.

## ۲-۱- برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R$

فرض کنید  $u = (u_1, \dots, u_n)$  بردار رکوردهای بالایی مشاهده شده از توزیع‌های  $PL(\gamma, \delta_1)$  و  $v = (v_1, \dots, v_k)$  بردار رکوردهای بالایی از توزیع  $PL(\gamma, \delta_2)$  باشند. در اینصورت، با استفاده از رابطه‌ی (۳)، تابع درست‌نمایی رکوردهای مشاهده شده برابر می‌شود با

$$L_0(\gamma, \delta_1, \delta_r; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma^{n+k} \left( \frac{\delta_1^r}{\delta_1 + 1} \right)^n \left( \frac{\delta_r^r}{\delta_r + 1} \right)^k e^{-\delta_1 u_n^\gamma - \delta_r v_k^\gamma} \quad (5)$$

$$\times \prod_{i=1}^n (1 + u_i^\gamma) u_i^{\gamma-1} \prod_{j=1}^k (1 + v_j^\gamma) v_j^{\gamma-1} \times \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma \right)^{-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma \right)^{-1}$$

و همچنین لگاریتم تابع درستنمایی (5) برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} L(\gamma, \delta_1, \delta_r; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \log L_0(\gamma, \delta_1, \delta_r; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= (n+k) \log \gamma + n \log \left( \frac{\delta_1^r}{\delta_1 + 1} \right) + k \log \left( \frac{\delta_r^r}{\delta_r + 1} \right) - \delta_1 u_n^\gamma - \delta_r v_k^\gamma \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \log(1 + u_i^\gamma) + (\gamma - 1) \log u_i \right\} + \sum_{j=1}^k \left\{ \log(1 + v_j^\gamma) + (\gamma - 1) \log v_j \right\} \quad (6) \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \log \left( 1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma \right) - \sum_{j=1}^{k-1} \log \left( 1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma \right). \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (6)، معادله‌های درستنمایی برای پارامترهای  $\gamma$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_r$  به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= \frac{n+k}{\gamma} - \delta_1 u_n^\gamma \log u_n - \delta_r v_k^\gamma \log v_k + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{u_i^\gamma \log u_i}{1 + u_i^\gamma} + \log u_i \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{v_j^\gamma \log v_j}{1 + v_j^\gamma} + \log v_j \right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{u_i^\gamma \log u_i}{\frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} + u_i^\gamma} \right\} + \sum_{j=1}^{k-1} \left\{ \frac{v_j^\gamma \log v_j}{\frac{\delta_r}{\delta_r + 1} + v_j^\gamma} \right\} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_1} = \frac{\gamma n}{\delta_1} - \frac{n}{\delta_1 + 1} - u_n^\gamma - \frac{1}{(\delta_1 + 1)^\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^\gamma}{1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_r} = \frac{\gamma k}{\delta_r} - \frac{k}{\delta_r + 1} - v_k^\gamma - \frac{1}{(\delta_r + 1)^\gamma} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_j^\gamma}{1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma} = 0. \quad (9)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود از سیستم معادلات فوق نمی‌توان جواب‌های صریحی برای  $\gamma$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_r$  به دست آورد و باید از روش‌های محاسبات عددی غیرخطی برای حل آن‌ها استفاده نمود. لذا در بخش‌های شبیه‌سازی و تحلیل داده، از ایده پاک و همکاران [۱۴] استفاده کرده و برای به دست آوردن مقادیر ماکسیمم درستنمایی تابع *nlnmb* در نرم‌افزار R را به کار خواهیم

گرفت. از این پس برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\gamma$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را به ترتیب با  $\hat{\delta}_1$ ،  $\hat{\delta}_2$  و  $\hat{\gamma}$  نمایش می‌دهیم. با در دست داشتن برآوردهای فوق و با استفاده از خاصیت پایایی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R \equiv R(\delta_1, \delta_2)$  برابر می‌شود با  $\hat{R} = R(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)$ .

در ادامه از خاصیت نرمالیتی توزیع مجانبی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی [۱۵] استفاده کرده و فاصله اطمینان مجانبی را برای پارامتر  $R$  به دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا باید عناصر ماتریس اطلاع فیشر

$$I(\delta_1, \delta_2, \gamma) = - \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \delta_2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \gamma}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2 \partial \delta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2 \partial \gamma}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_1}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2}\right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

را محاسبه کنیم؛ اما با توجه به فرم تابع درست‌نمایی (۶)، محاسبه درایه‌های ماتریس فوق به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. بنابراین، ماتریس واریانس-کواریانس مشاهده شده برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی را به صورت

$$\hat{\Sigma} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2 \partial \delta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_2 \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}_{(\gamma=\hat{\gamma}, \delta_1=\hat{\delta}_1, \delta_2=\hat{\delta}_2)}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

به دست می‌آوریم، که درایه‌های آن به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \gamma^2} &= -\frac{n+k}{\gamma^2} - \delta_1 u_n^\gamma (\log u_n)^\gamma - \delta_2 v_k^\gamma (\log v_k)^\gamma + \sum_{i=1}^n (\log u_i)^\gamma u_i^\gamma \\ &+ \sum_{j=1}^k (\log v_j)^\gamma v_j^\gamma - \frac{\delta_1 + 1}{\delta_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\log u_i)^\gamma u_i^\gamma}{\left(\frac{\delta_1 + 1}{\delta_1} + u_i^\gamma\right)^\gamma} - \frac{\delta_2 + 1}{\delta_2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\log v_j)^\gamma v_j^\gamma}{\left(\frac{\delta_2 + 1}{\delta_2} + v_j^\gamma\right)^\gamma} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1^2} = -n \frac{\delta_1^\gamma + \gamma \delta_1 + \gamma}{\delta_1^\gamma (\delta_1 + 1)^\gamma} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma (\delta_1 + 1) + (\gamma \delta_1 + 1) u_i^\gamma}{((\delta_1 + 1)^\gamma + \delta_1 (\delta_1 + 1) u_i^\gamma)^\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_r^2} = -k \frac{\delta_r^\gamma + \gamma \delta_r + \gamma}{\delta_r^\gamma (\delta_r + 1)^\gamma} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\gamma (\delta_r + 1) + (\gamma \delta_r + 1) v_j^\gamma}{((\delta_r + 1)^\gamma + \delta_r (\delta_r + 1) v_j^\gamma)^\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \gamma} = -u_n^\gamma \log u_n - \frac{1}{(\delta_1 + 1)^\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^\gamma \log u_i}{\left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma\right)^\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \gamma \partial \delta_r} = \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_r \partial \gamma} = -v_k^\gamma \log v_k - \frac{1}{(\delta_r + 1)^\gamma} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{v_j^\gamma \log v_j}{\left(1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma\right)^\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \delta_1 \partial \delta_r} = \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_r \partial \delta_1} = 0.$$

محاسبه می‌شوند. اکنون با استفاده از خاصیت نرمالیتی توزیع مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی ([۷])، می‌توان گفت  $\hat{R}$  دارای توزیع نرمال تقریبی با میانگین  $R$  و واریانس

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial R}{\partial \delta_i} \frac{\partial R}{\partial \delta_j} \sigma_{ij}$$

(توجه کنید که  $\delta_r \equiv \gamma$ ). اکنون با استفاده از رابطه‌ی (۴)،

مشتقات جزئی  $R$  نسبت به پارامترها برابر می‌شود با

$$\frac{\partial R}{\partial \delta_1} = \frac{-\delta_1 \delta_r^\gamma [\delta_1^\gamma + \gamma \delta_1 (\delta_r + \gamma) + \delta_1 (\delta_r + \gamma) (\delta_r + \gamma) + \gamma (\delta_r^\gamma + \gamma \delta_r + \gamma)]}{(\delta_r + 1) (\delta_1 + 1)^\gamma (\delta_1 + \delta_r)^\gamma},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \delta_r} = \frac{\delta_1^\gamma \delta_r [\gamma + \delta_1^\gamma (\delta_r + \gamma) + \gamma \delta_1 (\delta_r + 1) (\delta_r + \gamma) + \delta_r (\delta_r^\gamma + \gamma \delta_r + \gamma)]}{(\delta_1 + 1) (\delta_r + 1)^\gamma (\delta_1 + \delta_r)^\gamma},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \delta_r} = \frac{\partial R}{\partial \gamma} = 0.$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی،  $(1-\alpha)100$  برای پارامتر قابلیت اعتماد  $R$  به صورت

$$R \in (\hat{R} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\sigma}_R^2})$$

است که در آن مقدار  $\hat{\sigma}_R^2$  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\hat{\sigma}_R^2 = \left\{ \sigma_{\delta_1} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta_1} \right)^2 + \sigma_{\delta_2} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta_2} \right)^2 + 2\sigma_{\delta_1\delta_2} \left( \frac{\partial R}{\partial \delta_1} \right) \left( \frac{\partial R}{\partial \delta_2} \right) \right\} \Big|_{(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)}$$

کران‌های محاسبه شده در فاصله اطمینان تقریبی فوق ممکن است به طور کامل در بازه (۱، ۰)

قرار نگیرند. برای رفع این مشکل می‌توان از تبدیل لگاریتمی به صورت  $h(R) = \log\left(\frac{R}{1-R}\right)$

استفاده کرد [۸]. در این صورت، فاصله اطمینان تقریبی  $(1-\alpha) \cdot 100$  برای پارامتر  $R$  به فرم

$$\left( \frac{e^L}{1+e^L}, \frac{e^U}{1+e^U} \right)$$

به دست می‌آید که در آن  $L$  و  $U$  از رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

$$\log\left(\frac{\hat{R}}{1-\hat{R}}\right) \pm z_{\alpha} \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2}}{\hat{R}(1-\hat{R})} \equiv (L, U)$$

## ۲-۲- برآورد بیزی

در روش استنباط بیزی، محقق نظرات ذهنی بر پایه تجربه و بینش خود را با اطلاعات حاصل از مشاهدات در دسترس ترکیب می‌نماید تا برآورد بیز پارامترهای موردنظر را به دست آورد. برای این منظور، پارامترهای مدل به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند که خود دارای توزیع‌های پیشین احتمال می‌باشند. سپس برای انجام تحلیل بیزی، معمولاً تابع زیان مربع خطا به صورت  $L_{SE}(\hat{g}(\theta), g(\theta)) = (\hat{g}(\theta) - g(\theta))^2$  در نظر گرفته می‌شود که در آن  $\hat{g}(\theta)$  برآوردی از تابع پارامتر  $g(\theta)$  است. برآوردگر بیز  $g(\theta)$  تحت تابع زیان مربع خطا برابر میانگین پسین این تابع خواهد بود که از این پس آن را با  $\hat{g}_{SE}(\theta)$  نمایش می‌دهیم.

در اینجا لازم است به این نکته اشاره کنیم که تابع زیان مربع خطا جریمه یکسانی را برای کم‌برآوردی و بیش‌برآوردی برآوردگرها در نظر می‌گیرد که در برخی کاربردهای عملی نامناسب است. مثلاً در محاسبه مشخصه‌های قابلیت اعتماد، مسئله بیش برآوردی بسیار خطرناک‌تر از کم‌برآوردی است. یکی از مهم‌ترین توابع زیانی که این محدودیت را اصلاح می‌کند، تابع زیان لاینکس است که به صورت

$$L_{LE}(g(\theta), \hat{g}(\theta)) = \exp[v(\hat{g}(\theta) - g(\theta))] - v(\hat{g}(\theta) - g(\theta)) - 1, \quad v \neq 0, \quad (12)$$

تعریف می‌شود. برآوردگر بیز  $g(\theta)$  تحت این تابع زیان برابر می‌شود با

$$\hat{g}_{LE}(\theta) = -\frac{1}{v} \log(E_{\theta}[\exp(-vg(\theta)) | data]). \quad (13)$$



در ادامه این بخش، با استفاده از توابع زیان مربع خطا و لاینکس برآوردگرهای بیز پارامتر  $R$  را به دست می‌آوریم. در ابتدا فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی  $\delta_1$ ،  $\delta_2$  و  $\gamma$  مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع پیشین گاما به صورت زیر باشند:

$$\begin{cases} \pi_1(\delta_1) \propto \delta_1^{a_1-1} e^{-\delta_1 b_1} \\ \pi_2(\delta_2) \propto \delta_2^{a_2-1} e^{-\delta_2 b_2} \\ \pi_\gamma(\delta) \propto \gamma^{a_\gamma-1} e^{-\gamma b_\gamma} \end{cases}, \quad a_i, b_i > 0, i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

با استفاده از (۵) و (۱۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \pi(\delta_1, \delta_2, \gamma; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\propto \delta_1^{\tau n + a_1 - 1} \delta_2^{\tau k + a_2 - 1} \gamma^{n+k+a_\gamma-1} \left(\frac{1}{\delta_1+1}\right)^n \left(\frac{1}{\delta_2+1}\right)^k \\ &\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_1+1} u_i^\gamma\right)^{-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_2+1} v_j^\gamma\right)^{-1} \\ &e^{-\delta_1(b_1 + u_n^\gamma) - \delta_2(b_2 + v_k^\gamma) - \gamma b_\gamma} \prod_{i=1}^n (1 + u_i^\gamma) u_i^{\gamma-1} \prod_{j=1}^k (1 + v_j^\gamma) v_j^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

اکنون، تابع چگالی پسین توأم  $\delta_1$ ،  $\delta_2$  و  $\gamma$  برابر می‌شود با

$$\pi^*(\delta_1, \delta_2, \gamma | \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{C} \pi(\delta_1, \delta_2, \gamma; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (16)$$

که در آن  $C = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\delta_1, \delta_2, \gamma; \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\delta_1 d\delta_2 d\gamma$ ؛ بنابراین، برآوردگرهای بیز  $R$  تحت زیان‌های مربع خطا و لاینکس به ترتیب برابر می‌شوند با

$$\hat{R}_{SE} = E(R | \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{C} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty R \pi(\delta_1, \delta_2, \gamma; \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\delta_1 d\delta_2 d\gamma \quad (17)$$

و

$$\hat{R}_{LE} = -\frac{1}{v} \log(E[\exp(-vR) | \mathbf{u}, \mathbf{v}]) \quad (18)$$

که در آن  $E[\exp(-vR) | \mathbf{u}, \mathbf{v}] = \frac{1}{C} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-vR) \pi(\delta_1, \delta_2, \gamma; \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\delta_1 d\delta_2 d\gamma$  همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به دست آوردن برآوردگرهای بیز فوق مستلزم محاسبه نسبت دو انتگرال بسیار پیچیده است. لذا طبق روابط (۱۷) و (۱۸) فرم ساده‌ای برای برآوردگرهای بیز

خواهیم داشت. در ادامه برای به دست آوردن تقریبی از برآوردگرهای بیز و ساختن ناحیه‌های اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین از روش نمونه‌گیری گیبز استفاده می‌کنیم. با استفاده از رابطه (۱۵)، چگالی‌های پسین شرطی برای  $\delta_1$ ،  $\delta_r$  و  $\gamma$  به‌صورت زیر هستند:

$$\pi_1^*(\delta_1 | \gamma, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \propto \text{Gamma}(\alpha n + a_1, b_1 + u_n^\gamma) (\delta_1 + 1)^{-n} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma)^{-1}, \quad (19)$$

$$\pi_r^*(\delta_r | \gamma, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \propto \text{Gamma}(\alpha k + a_r, b_r + v_k^\gamma) (\delta_r + 1)^{-k} \prod_{j=1}^{k-1} (1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma)^{-1}, \quad (20)$$

$$\pi_\gamma^*(\gamma | \delta_1, \delta_r, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \propto \text{Gamma}(n + k + a_\gamma, b_\gamma) e^{-\delta_1 u_n^\gamma - \delta_r v_k^\gamma} \prod_{i=1}^n (1 + u_i^\gamma) u_i^{\gamma-1} \prod_{j=1}^k (1 + v_j^\gamma) v_j^{\gamma-1} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^\gamma)^{-1} \prod_{j=1}^{k-1} (1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^\gamma)^{-1}. \quad (21)$$

توجه کنید که هیچ‌کدام از توزیع‌های شرطی فوق به فرم یک توزیع شناخته شده نیستند و بنابراین نمونه‌گیری از آن‌ها به‌صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست. ژلمان و همکاران [۱۶] نشان داده‌اند که اگر یک چگالی پسین تقریباً متقارن و تک‌مدی باشد، می‌توان آن را با توزیع نرمال تقریب زد. در اینجا برای بررسی توزیع‌های پسین  $\delta_1$ ،  $\delta_r$  و  $\gamma$ ، نمودار توزیع‌های شرطی داده شده در (۱۹)–(۲۱) را با ازای مقادیر مختلف پارامترها در شکل ۱ نمایش داده‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع‌های شرطی فوق تقریباً شبیه توزیع نرمال می‌باشند؛ بنابراین، برای تولید نمونه از آن‌ها، از الگوریتم متروپلیس-هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال استفاده می‌کنیم.

الگوریتم نمونه‌گیری گیبز:

الف) مقادیر اولیه  $(\gamma^0, \delta_1^0, \delta_r^0)$  را برای پارامترها در نظر گرفته و قرار دهید  $I = 1$ .

ب) با در نظر گرفتن توزیع پیشنهادی نرمال  $N(\delta_1^{I-1}, \sigma_1^2)$  و با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار  $\delta_1^I$  را از  $\pi_1^*(\delta_1 | \gamma^{I-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  به‌صورت زیر تولید کنید:

- قرار دهید  $\mu = \delta_1^{I-1}$ .
- با استفاده از توزیع نرمال  $q(\delta_1) \equiv N(\delta_1^{I-1}, \sigma_1^2)$  مقدار  $\tau$  را تولید کنید.
- قرار دهید  $p(\mu, \tau) = \min\{\pi_1^*(\tau)q(\mu)/\pi_1^*(\mu)q(\tau)\}$ .
- مقدار  $\tau$  با احتمال  $p(\mu, \tau)$  پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت مقدار  $\mu$  پذیرفته می‌شود.

(ج) با در نظر گرفتن توزیع نرمال  $q(\delta_v) \equiv N(\delta_v^{I-1}, \sigma_v^2)$  و با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار  $\delta_v^I$  را از  $\pi_v^*(\delta_v | \gamma^{I-1}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  تولید کنید.

(د) با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار  $\gamma^I$  را از توزیع  $\pi_v^*(\gamma | \delta_v^I, \delta_v^I, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  و با استفاده از توزیع نرمال  $q(\gamma) \equiv N(\gamma^{I-1}, \sigma_\gamma^2)$  تولید کنید.

(ه) مقدار  $R^I$  را از رابطه (۴) محاسبه کرده و قرار دهید  $I = I + 1$ .

(و) مراحل ب تا ه را  $M$  بار تکرار کرده و  $R^I$ ،  $I = 1, \dots, M$  را به دست آورید. اکنون با استفاده از نمونه‌های تصادفی تولید شده توسط الگوریتم گیبز، برآوردهای بیز پارامتر  $R$  تحت توابع زبان مربع خطا و لاینکس به ترتیب برابر می‌شوند با

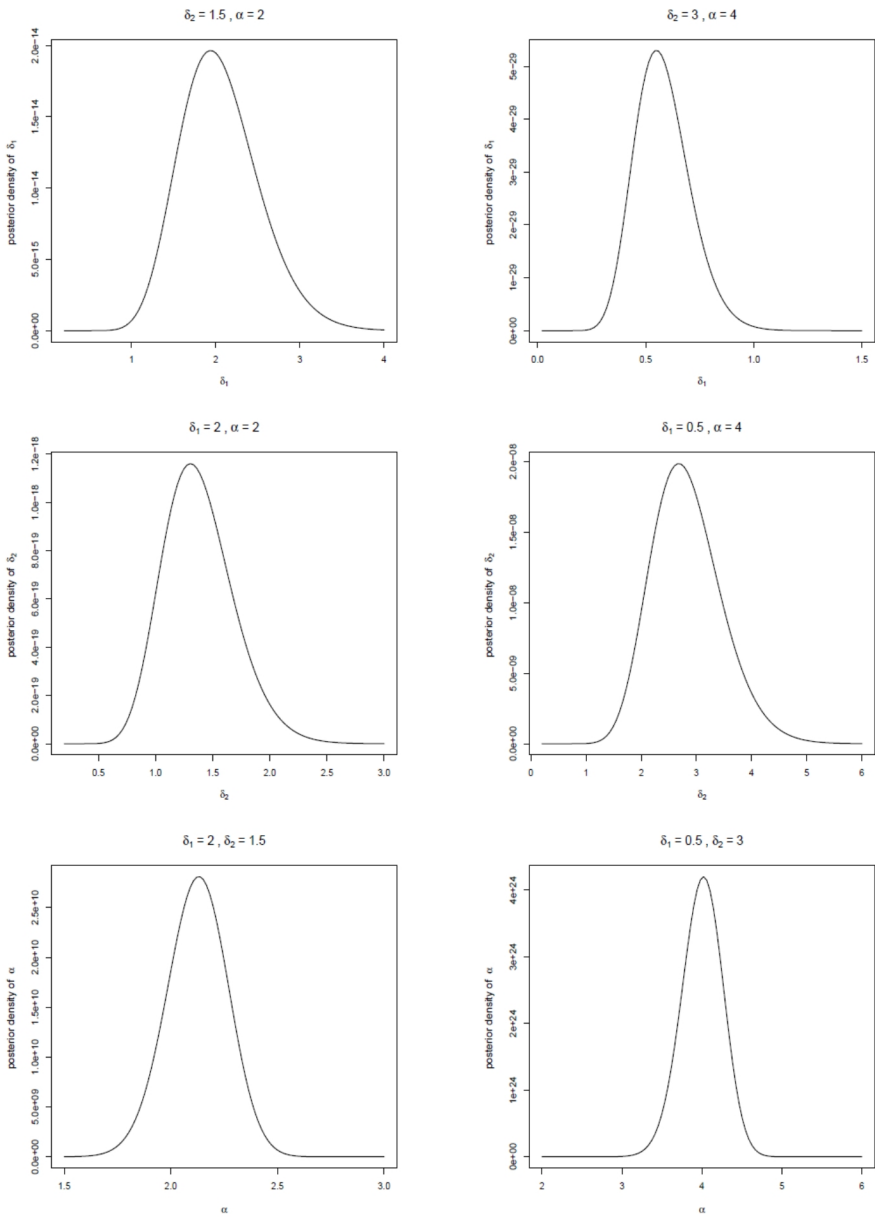
$$\tilde{R}_{SE} = \frac{1}{M} \sum_{I=1}^M R^I \quad (۳۲)$$

و

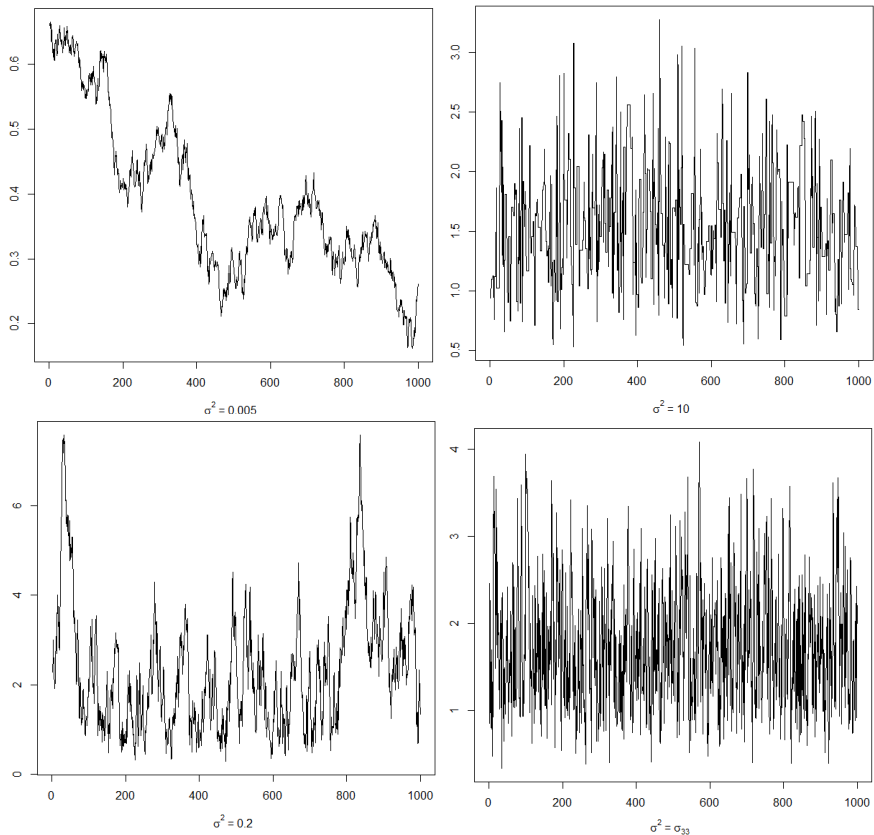
$$\tilde{R}_{LE} = -\frac{1}{v} \log \left( \frac{1}{M} \sum_{I=1}^M e^{-vR^I} \right). \quad (۳۳)$$

همچنین، فرض کنید  $R^{(1)} < \dots < R^{(M)}$  مقادیر مرتب شده  $R^I$ ،  $I = 1, \dots, M$  باشند. در این صورت با استفاده از ایده چن و شاوو [۱۷]، ناحیه‌های اعتبار برای پارامتر  $R$  به فرم  $(R^{(\alpha M)}, R^{(M)})$ ،  $\dots$ ،  $(R^{(1-\alpha M)}, R^{(1)})$  هستند. از بین این نواحی اعتبار، ناحیه‌ای که دارای کمترین طول باشد به‌عنوان ناحیه اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین برای  $R$  انتخاب می‌شود.

توجه کنید که برای اجرای الگوریتم فوق چند نکته باید به‌دقت مورد بررسی قرار گیرند. ابتدا انتخاب مقادیر اولیه برای شروع الگوریتم است که می‌توان از برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی به دست آمده در قسمت قبل برای آن‌ها استفاده کرد [۱۸]. البته باید اشاره کنیم که معمولاً نمونه‌هایی که در تکرارهای اولیه الگوریتم تولید می‌شوند، کاندیداهای مناسبی از توزیع پسین مورد نظر نمی‌باشند. لذا در عمل، تعدادی از نقاط اولیه تولید شده از زنجیره نمونه‌ها کنار گذاشته می‌شوند که به آن‌ها مشاهدات سوخته<sup>۱</sup> گویند.



شکل (۱): نمودار توزیع‌های شرطی  $\delta_1$ ،  $\delta_2$  و  $\gamma$  ( $\alpha \equiv \gamma$ ).



شکل (۲): نمودار اثر نمونه‌های تولید شده برای پارامتر  $\delta_1$

نکته دوم، مشکل خودهمبستگی نمونه‌های تولید شده‌ی زنجیره است. در صورت وجود خودهمبستگی قوی بین نمونه‌ها، برآوردهای به دست آمده برای پارامترها رضایت‌بخش نخواهند بود. لذا برای کاهش خودهمبستگی، از هرچند نمونه تولید شده فقط یکی را ذخیره می‌کنند (با توجه به میزان خودهمبستگی از هر ۵ تا یکی، از هر ۱۰ تا یکی یا از هر ۵۰ نمونه یکی ذخیره می‌شود) و به آن رقیق کردن<sup>۱</sup> زنجیره نمونه‌ها گویند. یکی دیگر از نکات مهم در اجرای الگوریتم متروپلیس-هستینگز، انتخاب مقدار واریانس توزیع پیشنهادی نرمال است. برای این منظور می‌توان از واریانس‌های داده شده در ماتریس واریانس-کواریانس (رابطه ۱۱) استفاده کرد [۱۹]. روش دیگر که توسط ولی‌اللهی و همکاران [۲۰] نیز استفاده شده است، امتحان کردن مقادیر مختلف برای به دست آوردن مقداری از واریانس است که منجر به همگرایی بهتر زنجیره‌های

تولید شده گردد. ما در اینجا مقادارهای مختلفی را برای واریانس توزیع نرمال امتحان کرده و نمودار اثر نمونه‌های تولید شده برای  $\delta_1$  را در شکل ۲ رسم کرده‌ایم. همان‌طور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود مقدار  $\sigma_{11}$  (که از ماتریس واریانس-کواریانس در رابطه (۱۱) به دست آمده بود)، انتخاب مناسب‌تری برای واریانس توزیع پیشنهادی نرمال است. (جهت مختصرتر شدن مقاله، نمودار اثر برای نمونه‌های تولید شده از  $\delta_1$  و  $\gamma$  در اینجا گزارش نشده‌اند. برای این دو پارامتر نیز به ترتیب مقادیر  $\sigma_{22}$  و  $\sigma_{33}$  همگرایی بهتری را نتیجه دادند).

برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده در الگوریتم، نمودارهای اثر و یا معیارهای عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بخش تحلیل داده‌های واقعی، نمودار اثر نمونه‌های تولید شده ارائه و تفسیر شده است. همچنین در مطالعه شبیه‌سازی از معیار عددی تخمین فاکتور کاهش می‌باشد که توسط ژلمان و همکاران [۱۵] پیشنهاد شده است، برای بررسی همگرایی الگوریتم استفاده کرده‌ایم. این معیار با استفاده از رابطه  $\sqrt{\text{Var}(\Delta)/W}$  محاسبه می‌شود که در آن  $\Delta$  برآورد پارامتر موردنظر است و  $\text{Var}(\Delta) = (M-1)W/K + Z/K$  که در آن  $Z$  و  $W$  به ترتیب واریانس‌های بین نمونه‌ای و درون نمونه‌ای هستند و  $K$  تعداد تکرارهای هر زنجیره است. در صورتی که مقدار محاسبه شده معیار کاهش می‌باشد برای پارامتر موردنظر کمتر از ۱/۱ باشد، نشان‌دهنده همگرایی نمونه‌های تولید شده است.

### ۳- برآورد پارامتر $R$ با فرض $\gamma$ معلوم

در این بخش، با فرض اینکه پارامتر مشترک  $\gamma$  معلوم و برابر  $\gamma_0$  است، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و بیز  $R$  را به دست می‌آوریم. توجه کنید که طبق رابطه (۴)، مقدار  $R$  مستقل از پارامتر  $\gamma$  است.

با قرار دادن  $\gamma = \gamma_0$  در رابطه (۵)، تابع درست‌نمایی برای پارامترهای  $\delta_1$  و  $\delta_2$  برابر می‌شود با

$$L_O(\delta_1, \delta_2, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \propto \left( \frac{\delta_1^r}{\delta_1 + 1} \right)^n \left( \frac{\delta_2^r}{\delta_2 + 1} \right)^k e^{-\delta_1 u_n^{\gamma_0} - \delta_2 v_k^{\gamma_0}} \times \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^{\gamma_0} \right)^{-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left( 1 + \frac{\delta_2}{\delta_2 + 1} v_j^{\gamma_0} \right)^{-1}. \quad (24)$$

برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی  $\delta_1$  و  $\delta_2$  که از این پسان‌ها را با  $\hat{\delta}_1^M$  و  $\hat{\delta}_2^M$  نمایش می‌دهیم، مقادیری هستند که تابع فوق را ماکسیمم کنند. با جایگذاری  $\hat{\delta}_1^M$  و  $\hat{\delta}_2^M$  در رابطه (۴) برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر  $R$  به صورت  $\hat{R}^M = R(\hat{\delta}_1^M, \hat{\delta}_2^M)$  به دست می‌آید. از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۱۵)، چگالی پسین توأم  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را می‌توان به فرم

$$\pi(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \propto \delta_1^{\tau n + a_1 - 1} \delta_r^{\tau k + a_r - 1} e^{-n \log(\delta_1 + 1) - k \log(\delta_r + 1) - \delta_1 (b_1 + u_n^{\gamma_0}) - \delta_r (b_r + v_k^{\gamma_0})} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^{\gamma_0}} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^{\gamma_0}}. \quad (25)$$

نوشت. با جایگذاری تابع فوق در رابطه‌های (۱۷) و (۱۸)، به راحتی می‌توان دید که هیچ کدام از برآوردگرهای بیز  $R$  فرم ساده‌ای ندارند؛ بنابراین، برای محاسبه تقریبی از برآورد بیز، از روش تقریب لیندلی استفاده می‌کنیم [۲۱].

فرض کنید  $g(\delta_1, \delta_r)$  تابعی از پارامترهای موردنظر باشد. در این صورت، برآوردگر بیز  $g$  تحت تابع زیان مربع خطا برابر می‌شود با

$$E(g(\delta_1, \delta_r) | \gamma_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty g(\delta_1, \delta_r) \pi(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\delta_1 d\delta_r}{\int_0^\infty \int_0^\infty \pi(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) d\delta_1 d\delta_r} \\ = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty g(\delta_1, \delta_r) \exp(\ell(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \eta(\delta_1, \delta_r)) d\delta_1 d\delta_r}{\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(\ell(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \eta(\delta_1, \delta_r)) d\delta_1 d\delta_r} \quad (26)$$

که در آن  $\ell(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \log \pi_1(\delta_1; a_1, b_1) + \log \pi_r(\delta_r; a_r, b_r)$  و  $\eta(\delta_1, \delta_r) = \log \pi(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v})$  لگاریتم درست‌نمایی  $\delta_1$  و  $\delta_r$  است که با استفاده از (۲۴) برابر می‌شود با

$$\ell(\delta_1, \delta_r, \gamma_0; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = n \log\left(\frac{\delta_1^\tau}{\delta_1 + 1}\right) + k \log\left(\frac{\delta_r^\tau}{\delta_r + 1}\right) - \delta_1 u_n^{\gamma_0} - \delta_r v_k^{\gamma_0} \\ - \sum_{i=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{\delta_1}{\delta_1 + 1} u_i^{\gamma_0}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \log\left(1 + \frac{\delta_r}{\delta_r + 1} v_j^{\gamma_0}\right). \quad (27)$$

مطابق با روش لیندلی، برآورد بیز  $g(\delta_1, \delta_2)$  را می‌توان به صورت

$$E(g(\delta_1, \delta_r) | \gamma_0, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \approx g(\delta_1, \delta_r) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} g_{ij} \tau_{ij} + \sum_{i=1}^{\tau} \eta_i W_i + 12 \sum_{i=1}^{\tau} \ell_{iii} \tau_{ii} W_i + \\ + \frac{1}{\tau} [\ell_{11\tau} (\tau \tau_{1\tau} W_1 + \tau_{11} W_\tau) + \ell_{1\tau\tau} (\tau_{\tau\tau} W_1 + \tau \tau_{1\tau} W_\tau)] \quad (28)$$

تقریب زد، که در آن  $g_{\tau\tau} = \partial^2 g / \partial \delta_\tau^2$ ،  $g_{\delta_1} = \partial^2 g / \partial \delta_1^2$ ،  $g_\tau = \partial g / \partial \delta_\tau$ ،  $g_{\delta_1} = \partial g / \partial \delta_1$ ،  $g_{\tau\delta_1} = \partial^2 g / \partial \delta_1 \partial \delta_\tau$ ،  $W_r = \sum_j g_{\tau\tau} \tau_{ij}$  و  $\tau_{ij}$  درایه‌ی  $(i, j)$  ام معکوس ماتریس  $g(\delta_1, \delta_\tau)$  است. با محاسبه رابطه (۲۸) به ازای برآوردهای  $\hat{\delta}_1^M$  و  $\hat{\delta}_\tau^M$  تقریبی از برآورد بیز  $g(\delta_1, \delta_\tau)$  به دست می‌آید. در مسئله موردنظر ما، کمیت‌های موردنیاز برای محاسبه (۲۸) به فرم

$$l_{11} = \left. \frac{\partial^2 l(\delta_1, \delta_\tau)}{\partial \delta_1^2} \right|_{\hat{\delta}_1^M} = -n \frac{(\hat{\delta}_1^M)^\tau + \epsilon \hat{\delta}_1^M + \tau}{(\hat{\delta}_1^M)^\tau (\hat{\delta}_1^M + 1)^\tau} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\tau (\hat{\delta}_1^M + 1) + (\tau \hat{\delta}_1^M + 1) u_i^{\gamma_0}}{((\hat{\delta}_1^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_1^M (\hat{\delta}_1^M + 1) u_i^{\gamma_0})^\tau},$$

$$l_{\tau\tau} = \left. \frac{\partial^2 l(\delta_1, \delta_\tau)}{\partial \delta_\tau^2} \right|_{\hat{\delta}_\tau^M} = -k \frac{(\hat{\delta}_\tau^M)^\tau + \epsilon \hat{\delta}_\tau^M + \tau}{(\hat{\delta}_\tau^M)^\tau (\hat{\delta}_\tau^M + 1)^\tau} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\tau (\hat{\delta}_\tau^M + 1) + (\tau \hat{\delta}_\tau^M + 1) v_j^{\gamma_0}}{((\hat{\delta}_\tau^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_\tau^M (\hat{\delta}_\tau^M + 1) v_j^{\gamma_0})^\tau},$$

$$l_{111} = \left. \frac{\partial^3 l(\delta_1, \delta_\tau)}{\partial \delta_1^3} \right|_{\hat{\delta}_1^M} = -n \left[ \frac{\tau \hat{\delta}_1^M + \epsilon}{(\hat{\delta}_1^M)^\tau (\hat{\delta}_1^M + 1)^\tau} - \frac{(\epsilon \hat{\delta}_1^M + \tau)((\hat{\delta}_1^M)^\tau + \epsilon \hat{\delta}_1^M + \tau)}{((\hat{\delta}_1^M)^\tau + \hat{\delta}_1^M)^\tau} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\tau(1 + u_i^{\gamma_0})}{((\hat{\delta}_1^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_1^M (\hat{\delta}_1^M + 1) u_i^{\gamma_0})^\tau} - \tau \frac{(\tau (\hat{\delta}_1^M + 1) + (\tau \hat{\delta}_1^M + 1) u_i^{\gamma_0})^\tau}{((\hat{\delta}_1^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_1^M (\hat{\delta}_1^M + 1) u_i^{\gamma_0})^\tau} \right],$$

$$l_{\tau\tau\tau} = \left. \frac{\partial^3 l(\delta_1, \delta_\tau)}{\partial \delta_\tau^3} \right|_{\hat{\delta}_\tau^M} = -k \left[ \frac{\tau \hat{\delta}_\tau^M + \epsilon}{(\hat{\delta}_\tau^M)^\tau (\hat{\delta}_\tau^M + 1)^\tau} - \frac{(\epsilon \hat{\delta}_\tau^M + \tau)((\hat{\delta}_\tau^M)^\tau + \epsilon \hat{\delta}_\tau^M + \tau)}{((\hat{\delta}_\tau^M)^\tau + \hat{\delta}_\tau^M)^\tau} \right]$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \left[ \frac{\tau(1 + v_j^{\gamma_0})}{((\hat{\delta}_\tau^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_\tau^M (\hat{\delta}_\tau^M + 1) v_j^{\gamma_0})^\tau} - \tau \frac{(\tau (\hat{\delta}_\tau^M + 1) + (\tau \hat{\delta}_\tau^M + 1) v_j^{\gamma_0})^\tau}{((\hat{\delta}_\tau^M + 1)^\tau + \hat{\delta}_\tau^M (\hat{\delta}_\tau^M + 1) v_j^{\gamma_0})^\tau} \right],$$

$$l_{1\tau} = l_{\tau 1} = l_{11\tau} = l_{1\tau\tau} = 0, \quad \eta_1 = \frac{a_1 - 1}{\hat{\gamma}} - b_1, \quad \eta_\tau = \frac{a_\tau - 1}{\hat{\delta}} - b_\tau.$$

می‌باشند. اکنون برای به دست آوردن تقریبی از برآورد بیز  $R$  تحت تابع زیان مربع خطا قرار می‌دهیم  $g(\delta_1, \delta_\tau) = R$ . آنگاه با استفاده از رابطه (۲۸) داریم:

$$\hat{R}_{SE} \approx \hat{R}^M + \frac{1}{\tau} (R_{11} \tau_{11} + R_{\tau\tau} \tau_{\tau\tau}) + R_\tau \tau_{11} \eta_1 + R_\tau \tau_{\tau\tau} \eta_\tau + \frac{1}{\tau} (l_{111} \tau_{11} W_1 + l_{\tau\tau\tau} \tau_{\tau\tau} W_\tau) \quad (29)$$

که در آن  $R_\tau = \partial R / \partial \delta_\tau$ ،  $R_{11} = \partial^2 R / \partial \delta_1^2$  و



$$R_{11} = -\frac{4\delta_1^r \delta_r^r + 6\delta_1^r \delta_r^r (\delta_r + 3) + 2\delta_1^r \delta_r^r (\delta_r + 2)(\delta_r + 6) + 2\delta_1^r (\delta_r^r + 3\delta_r + 3)}{(\delta_r + 1)(\delta_1 + 1)^r (\delta_1 + \delta_r)^r} \\ - R_1 \frac{2(\delta_r + 1)(\delta_1 + 1)(\delta_1 + \delta_r)^r (3\delta_1 + \delta_r + 2)}{(\delta_r + 1)(\delta_1 + 1)^r (\delta_1 + \delta_r)^r},$$

$$R_{rr} = \frac{6\delta_1^r + \delta_1^r (2\delta_r + 2) + 2\delta_1^r (3\delta_r^r + 8\delta_r + 3) + \delta_1^r (4\delta_r^r + 18\delta_r^r + 24\delta_r)}{(\delta_1 + 1)(\delta_r + 1)^r (\delta_1 + \delta_r)^r} \\ - R_r \frac{2(\delta_1 + 1)(\delta_r + 1)(\delta_1 + \delta_r)^r (\delta_1 + 3\delta_r + 2)}{(\delta_1 + 1)(\delta_r + 1)^r (\delta_1 + \delta_r)^r}.$$

برای به دست آوردن تقریب برآورد بیز  $R$  تحت زیان لاینکس قرار می دهیم  $g(\delta_1, \delta_r) = e^{-vR}$ . در این صورت داریم:

$$\hat{R}_{LE} \approx -\frac{1}{v} \log \left\{ e^{-v\hat{R}} + \frac{1}{v} (g_{11}\tau_{11} + g_{rr}\tau_{rr}) + W_1\eta_1 + W_r\eta_r + \frac{1}{v} (\ell_{111}\tau_{11}W_1 + \ell_{rrr}\tau_{rr}W_r) \right\} \quad (30)$$

که در آن  $W_r = g_r\tau_{rr}$ ،  $W_1 = g_1\tau_{11}$ ،  $g_{rr} = -ve^{-vR} R_r$ ،  $g_{11} = -ve^{-vR} R_1$ ،  $g_r = -ve^{-vR} R_r$  و  $g_1 = -ve^{-vR} R_1$ .

#### ۴- محاسبات عددی

##### ۴-۱- مطالعه شبیه سازی

در بخش های قبل با استفاده از دیدگاه های کلاسیک و بیز، برآوردگرهای مختلفی را برای پارامتر قابلیت اعتماد  $R$  به دست آوردیم. در این بخش، برای بررسی رفتار این برآوردگرها مطالعه شبیه سازی انجام می شود. در این مطالعه عملکرد برآوردگرها بر اساس میانگین اربیبی (AB) و نیز میانگین مربعات خطای مقادیر (MSE) مقایسه می شوند. برای محاسبه میانگین مربعات خطای برآوردهای بیز پارامتر  $R$  تحت تابع زیان های مربع خطا و لاینکس به ترتیب از روابط زیر استفاده شده است:

$$MSE_{\hat{R}_{SE}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \hat{R}_{SE_j} - R_j \right)^2, \\ MSE_{\hat{R}_{LE}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \exp[v(\hat{R}_{LE_j} - R_j)] - v(\hat{R}_{LE_j} - R_j) - 1 \right),$$

که در آن  $N$  تعداد تکرارهای شبیه‌سازی است. علاوه بر این فواصل اطمینان و اعتبار به دست آمده برای  $R$  بر اساس میانگین طول ( $AL$ ) و درصد پوشش فاصله‌ها ( $CP$ ) مقایسه خواهند شد. ابتدا برای حالتی که پارامترهای  $\delta_1$ ،  $\delta_2$  و  $\gamma$  نامعلوم باشند، سه مجموعه از مقادیر برای پارامترها به صورت  $(\gamma, \delta_1, \delta_2) = (2, 2, 1/5), (2, 1, 1), (2, 0, 5, 1/5)$  در نظر گرفته و مقادیر رکورد بالایی را از توزیع‌های  $PL(\gamma, \delta_1)$  و  $PL(\gamma, \delta_2)$  تولید می‌کنیم. در متون تحقیق برای تولید مقادیر رکورد دو روش پیشنهاد شده است. روش اول تولید رکوردها با استفاده از تبدیل معکوس است که توسط آرنولد و همکاران [۱۳] ارائه شده است و روش دوم تولید مقادیر رکورد به‌طور مستقیم از توزیع موردنظر است که توسط نادر و کیزیلاسلان [۱۹] ذکر شده است. ما در اینجا از روش دوم استفاده کرده‌ایم. برای این منظور ابتدا یک نمونه تصادفی از توزیع لیندلی توانی تولید کرده و آن را به‌عنوان اولین مقدار رکورد ثبت می‌کنیم. سپس تولید نمونه از توزیع ادامه می‌یابد تا زمانی که دومین مقدار رکورد بالایی ثبت شود و این کار ادامه می‌یابد تا نمونه  $n$  تایی از رکوردها به دست آید. با استفاده از این رکوردها، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  محاسبه شده و میانگین آریبی برآوردها و میانگین مربعات خطای برآوردهای حاصل از ۱۰۰۰۰ بار تکرار این روند در جدول ۱ گزارش شده‌اند. همچنین فاصله اطمینان مجانبی ۹۵ درصد برای  $R$  به دست آمده و میانگین طول و درصد پوشش آن‌ها در جدول ۱ ثبت شده است. برای ارزیابی برآوردهای بیز، دو مجموعه مختلف از پیشین‌ها را به صورت  $a_i = 1, b_i = 2, i = 1, 2, 3$  (پیشین I) و  $a_i = 3, b_i = 1, i = 1, 2, 3$  (پیشین II) در نظر گرفته و با استفاده از الگوریتم گیبز برآوردهای بیز را تحت تابع زیان‌های مربع خطا و لاینکس به دست آوردیم. برای این منظور زنجیره‌های مارکوف به حجم ۷۵۰۰۰ تولید کرده و برای حذف اثر نقاط آغازین، تعداد ۲۵۰۰۰ نمونه اولیه را حذف می‌کنیم. برای کاهش همبستگی بین نمونه‌های تولید شده نیز از هر ۵ نمونه فقط یکی را ذخیره کرده‌ایم. همچنین برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده از معیار تخمین فاکتور کاهش‌ی مقیاس استفاده کرده‌ایم. مقادیر محاسبه شده کاهش مقیاس برای پارامتر  $R$  کمتر از ۱/۱ بودند که نشان‌دهنده همگرایی نمونه‌های تولید شده است. با استفاده از نمونه‌های حاصل، برآوردهای بیز به دست آمده و میانگین مربعات و میانگین مربعات خطای برآوردها در جدول‌های ۲ و ۳ گزارش شده‌اند. همچنین میانگین طول و درصد پوشش نواحی اعتبار به دست آمده نیز در این دو جدول گزارش شده‌اند.

با توجه به جدول‌های ۱ الی ۳ یافته‌های زیر به دست می‌آیند:

- با افزایش حجم نمونه، میانگین مربعات خطای برآوردهای به دست آمده کاهش می‌یابند.
- میانگین مربعات خطای برآوردهای بیز پارامتر  $R$  کوچک‌تر از برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی بوده‌اند.

- عملکرد برآوردهای بیز  $R$  تحت تابع زیان لاینکس با توجه به مقادیر  $V$  متفاوت بوده است. در حالتی که  $v = -0.5$ ، میانگین مربعات خطای برآوردها کوچکتر از سایر موارد بوده است. همچنین برای مقادیر  $v = -0.5, 1$ ، عملکرد برآوردهای بیز تحت تابع زیان لاینکس بهتر از زیان مربع خطا بوده است.

جدول (۱): برآورد ماکسیمم درستنمایی و فاصله اطمینان مجانبی  $R$

برآورد ماکسیمم درستنمایی				$(n, k)$	$(\gamma, \delta_1, \delta_2)$
CP	AL	MSE	AB		
0/8689	0/5122	0/0498	0/0213	(4,4)	(2, 2, 1/5)
0/8711	0/4687	0/0424	0/0117	(6,6)	
0/8935	0/3823	0/0242	0/0164	(10,10)	
0/9164	0/3078	0/0176	0/0136	(15,15)	
0/8231	0/5294	0/0676	0/0046	(4,4)	(1, 1, 2)
0/8762	0/4694	0/0475	0/0055	(6,6)	
0/9027	0/3960	0/0310	0/0170	(10,10)	
0/9145	0/3237	0/0216	0/0091	(15,15)	
0/8493	0/3550	0/0268	-0/0235	(4,4)	(2, 0.5, 1/5)
0/8819	0/2873	0/0172	-0/0297	(6,6)	
0/9023	0/2509	0/0124	-0/0194	(10,10)	
0/9088	0/2365	0/0097	-0/0152	(15,15)	

- در اکثر موارد، میانگین خطای برآوردها، میانگین مربعات خطای برآوردها و نیز میانگین طول نواحی اعتبار بر پایه‌ی پیشین II نسبت به پیشین I کوچکتر هستند.
- میانگین طول فاصله اطمینان مجانبی تا حدودی کمتر از میانگین طول ناحیه‌های اعتبار است. با افزایش حجم نمونه طول فواصل اطمینان و اعتبار کاهش پیدا کرده‌اند. همچنین درصد پوشش فاصله اطمینان مجانبی کمتر از ۹۵ بوده است، اما درصد پوشش ناحیه‌های اعتبار به سطح از پیش تعیین شده ۹۵ درصد نزدیک هستند.

جدول (۲): برآوردهای بیز و ناحیه‌های اعتبار برای پارامتر  $R$ ،  $(a_i = 1, b_i = 2, i = 1, 2, 3)$

ناحیه اعتبار	$\hat{R}_{LE}$			$\hat{R}_{SE}$	$(n, k)$	$(\gamma, \delta_1, \delta_2)$
	$v = 1/5$	$v = 1$	$v = -0/5$			
	۰/۶۰۸۴	۰/۰۱۴۴	۰/۰۲۱۰	۰/۰۴۱۳	۰/۰۳۴۵	(۴،۴) (۲، ۰/۲، ۱/۵)
	۰/۹۲۱۵	۰/۰۲۲۰	۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۲۴	۰/۰۱۸۷	
	۰/۵۲۴۷	۰/۰۱۲۱	۰/۰۱۹۰	۰/۰۳۴۰	۰/۰۲۹۰	(۶،۶)
	۰/۹۳۵۴	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۱۷	۰/۰۱۳۵	
	۰/۴۴۹۲	۰/۰۲۳۷	۰/۰۲۹۱	۰/۰۳۱۳	۰/۰۲۸۶	(۱۰،۱۰)
	۰/۹۳۷۱	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۱۹	
	۰/۳۶۲۵	۰/۰۲۸۵	۰/۰۳۲۶	۰/۰۳۴۲	۰/۰۳۱۷	(۱۵،۱۵)
	۰/۹۴۳۶	۰/۰۱۰۸	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۹۴	
	۰/۵۹۹۱	-۰/۰۱۹۵	-۰/۰۱۲۷	۰/۰۰۷۵	-۰/۰۰۳۷	(۴،۴) (۱،۰/۲)
	۰/۹۲۴۸	۰/۰۲۷۲	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۳۹	۰/۰۲۷۶	
	۰/۵۳۲۶	-۰/۰۲۰۳	-۰/۰۱۵۱	۰/۰۰۱۳	-۰/۰۰۴۸	(۶،۶)
	۰/۹۳۷۹	۰/۰۲۶۵	۰/۰۱۱۷	۰/۰۰۲۹	۰/۰۲۳۳	
	۰/۴۸۱۸	-۰/۰۱۴۸	-۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۰۷۴	(۱۰،۱۰)
	۰/۹۴۲۲	۰/۰۲۱۹	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۲۶	۰/۰۱۶۸	
	۰/۳۹۶۵	-۰/۰۱۲۶	-۰/۰۱۱۴	۰/۰۰۸۱	-۰/۰۰۵۹	(۱۵،۱۵)
	۰/۹۴۸۰	۰/۰۱۴۵	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۲۰	
	۰/۵۱۵۶	-۰/۱۳۱۸	-۰/۱۲۵۷	-۰/۱۱۰۱	-۰/۱۱۵۰	(۴،۴) (۲، ۰/۵، ۱/۵)
	۰/۹۴۰۸	۰/۰۲۳۷	۰/۰۱۲۹	۰/۰۰۳۱	۰/۰۲۵۰	
	۰/۴۳۲۸	-۰/۱۰۹۸	-۰/۱۰۵۸	-۰/۰۹۴۳	-۰/۰۹۸۰	(۶،۶)
	۰/۹۳۷۱	۰/۰۱۵۳	۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۱۹	۰/۰۱۵۶	
	۰/۳۵۱۴	-۰/۰۸۷۵	-۰/۰۸۰۵	-۰/۰۷۶۴	-۰/۰۸۳۳	(۱۰،۱۰)
	۰/۹۴۶۶	۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۲۲	
	۰/۲۸۷۴	-۰/۰۵۳۷	-۰/۰۴۹۲	-۰/۰۴۳۶	-۰/۰۵۱	(۱۵،۱۵)
	۰/۹۵۱۲	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۸	۰/۰۱۱۳	

توجه: در ستون‌های ۳-۶، ردیف اول بیانگر میانگین اربیبی و ردیف دوم بیانگر میانگین مربعات خطای برآوردها هستند. در ستون ۷، ردیف اول بیانگر میانگین طول ناحیه اعتبار و ردیف دوم بیانگر درصد پوشش آن می‌باشند.

جدول (۳): برآوردهای بیز و ناحیه‌های اعتبار برای پارامتر  $R$ ،  $(a_i = 3, b_i = 1, i = 1, 2, 3)$

ناحیه اعتبار	$\hat{R}_{LE}$			$\hat{R}_{SE}$	$(n, k)$	$(\gamma, \delta_1, \delta_2)$
	$v = 1/5$	$v = 1$	$v = -0/5$			
	0/5540	0/0072	0/0126	0/0297	0/0237	(4,4) (2, 2, 1/5)
	0/9276	0/0216	0/0067	0/0022	0/0176	
	0/4936	0/0194	0/0236	0/0366	0/0322	(6,6)
	0/9316	0/0169	0/0058	0/0019	0/0143	
	0/4147	0/0219	0/0252	0/0284	0/0270	(10,10)
	0/9349	0/0117	0/0039	0/0012	0/0115	
	0/3590	0/0249	0/0281	0/0308	0/0291	(15,15)
	0/9386	0/0097	0/0027	0/0009	0/0091	
	0/5516	-0/0194	-0/0138	0/0023	-0/0027	(4,4) (1,1,2)
	0/9218	0/0231	0/0119	0/0034	0/0246	
	0/5024	-0/0163	-0/0127	0/0011	-0/0033	(6,6)
	0/9296	0/0180	0/0079	0/0024	0/0159	
	0/4688	-0/0122	-0/0115	0/0074	-0/0061	(10,10)
	0/9361	0/0157	0/0071	0/0021	0/0137	
	0/4135	-0/0105	-0/0093	0/0069	-0/0055	(15,15)
	0/9390	0/0133	0/0054	0/0017	0/0115	
	0/4449	-0/1105	-0/1044	-0/0873	-0/0928	(4,4) (2, 0/5, 1/5)
	0/9126	0/0239	0/0115	0/0027	0/0223	
	0/4965	-0/0672	-0/0629	-0/0511	-0/0549	(6,6)
	0/9173	0/0130	0/0055	0/0018	0/0111	
	0/3108	-0/0835	-0/0766	-0/0731	-0/0790	(10,10)
	0/9250	0/0117	0/0049	0/0013	0/0105	
	0/2754	-0/0508	-0/0479	-0/0415	-0/0467	(15,15)
	0/9344	0/0098	0/0034	0/0007	0/0085	

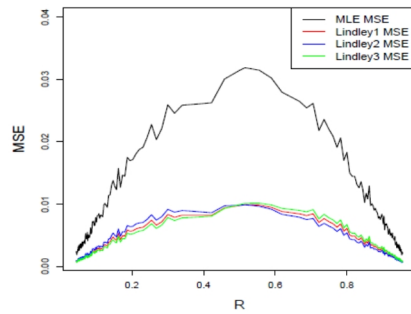
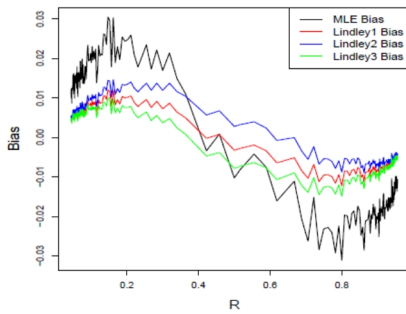
سپس در حالتی که پارامتر مشترک  $\gamma$  معلوم باشد ( $\gamma = 2$ )، عملکرد برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  و برآوردهای بیز به دست آمده از تقریب لیندلی تحت تابع زیان مربع خطا و

لاینکس  $(\nu = -2, 2)$  را مقایسه می‌کنیم. برای این منظور مقادیر مختلفی از  $n$ ،  $k$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  را در نظر گرفته و مراحل زیر را دنبال کرده‌ایم:

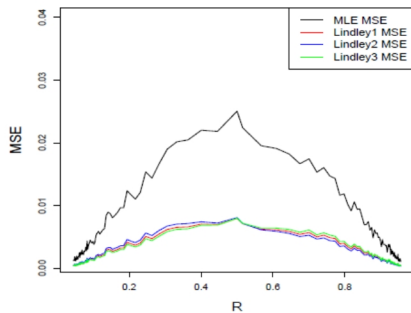
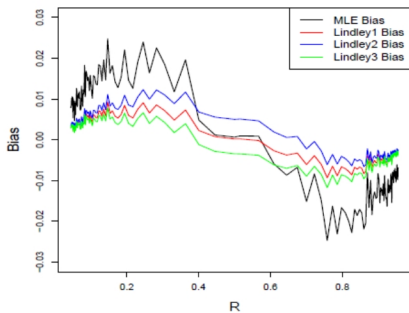
گام اول: با استفاده از  $n$ ،  $k$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  داده شده، مقادیر رکورد بالایی را از توزیع‌های  $PL(\gamma, \delta_1)$  و  $PL(\gamma, \delta_2)$  تولید کنید.

گام دوم: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  را از رابطه‌ی (۴) محاسبه کرده و با استفاده از رابطه‌های (۲۹) و (۳۰) برآوردهای بیز  $R$  را به دست آورید.

گام سوم: مراحل ۱ و ۲ را ۳۰۰۰ بار تکرار کرده و میانگین خطاها و میانگین مربعات خطاهای برآوردهای به دست آمده را بیابید.



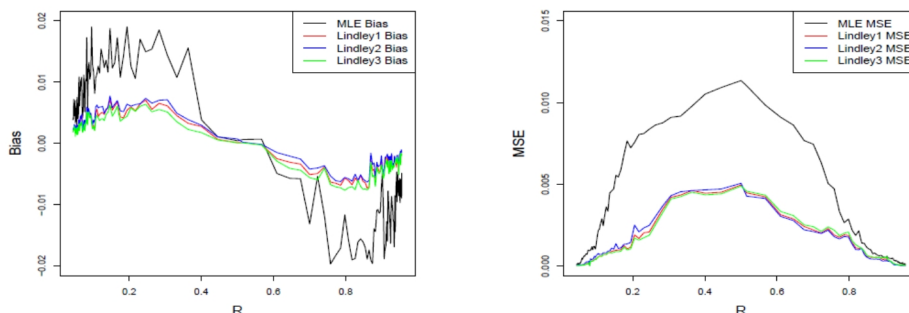
شکل (۳): میانگین خطاها و میانگین مربعات خطاهای برآوردها ( $n = k = 4$ )



شکل (۴): میانگین خطاها و میانگین مربعات خطاهای برآوردها ( $n = k = 6$ )

در شکل‌های ۳ الی ۵ نمودارهای میانگین خطاها و میانگین مربعات خطاهای حاصل از مراحل فوق رسم شده است. در این نمودار، برآوردهای بیز تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس  $(\nu = -2, 2)$  به ترتیب با  $Lindley1$ ،  $Lindley2$  و  $Lindley3$  مشخص شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود برآوردهای بیز پارامتر  $R$  دارای میانگین مربعات خطای کمتری نسبت به

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی بوده‌اند و با افزایش حجم نمونه، عملکرد برآوردگرها بهبود یافته است. همچنین، برای مقادیر کرانگین  $R$  میانگین مربعات خطای برآوردگرها کوچک‌تر بوده‌اند.



شکل (۵): میانگین خطاها و میانگین مربعات خطاهای برآوردها ( $n = k = 15$ )

#### ۲-۴- تحلیل داده واقعی

برای نشان دادن کاربردی از روش‌های ذکر شده بر اساس رکوردها، از داده‌هایی که توسط رابرت [۲۲] ارائه شده‌اند، استفاده می‌کنیم. این داده‌ها مربوط به غلظت ماهانه دی‌اکسید گوگرد در منطقه لانگ‌بیچ کالیفرنیا در بازه زمانی ۱۹۵۶ تا ۱۹۷۴ بوده‌اند که به صورت زیر ثبت شده‌اند:

گروه اول (غلظت دی‌اکسید گوگرد در آوریل): ۱۳، ۲۰، ۲۴، ۳، ۸، ۱۰، ۱۰، ۲، ۱۹، ۸، ۱۷، ۸، ۱۰، ۹، ۱۵، ۱۰، ۳۷، ۱۱، ۸، ۱۲/۷.

گروه دوم (غلظت دی‌اکسید گوگرد در آگوست): ۲۱، ۱۶، ۲۰، ۱۵، ۹، ۱۰، ۱۰، ۴، ۲۵، ۱۸، ۱۸، ۲۶، ۲۵، ۱۷، ۴۰، ۵۵، ۱۹، ۱۶، ۹، ۱۹/۶.

در جدول ۴، آزمون‌های نیکویی برازش کولموگروف-اسمیرنوف (K-S) و اندرسون-دارلینگ (A-D) برای این داده‌ها گزارش شده‌اند. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود توزیع لیندلی توانی برازش مناسبی برای داده‌های هر دو گروه فوق است. همچنین نمودارهای ارائه شده در شکل ۶ و ۷ نیز این نکته را تأیید می‌کنند. علاوه بر این‌ها، برابری پارامتر مشترک  $\gamma$  برای دو مدل با استفاده از آزمون فرض  $H_0: \gamma_1 = \gamma_2$  در مقابل  $H_1: \gamma_1 \neq \gamma_2$  بررسی شده است. برای این منظور آماره آزمون نسبت درست‌نمایی برابر  $0.737\%$  به دست آمده و  $p$ -مقدار متناظر آن  $0.786\%$  بوده است. بنابراین فرض برابری پارامتر  $\gamma$  در دو مدل رد نمی‌شود. در اینجا برای مقایسه مقدار دی‌اکسید گوگرد در ماه‌های آوریل و آگوست از مدل تنش-مقاومت استفاده

می‌کنیم. اگر متغیرهای تصادفی  $Y$  و  $X$  به ترتیب غلظت در ماه‌های آگوست و آوریل باشند، آنگاه  $R = P(X > Y)$  احتمال آن است که غلظت در ماه آگوست کمتر از آوریل باشد. اگر کران پایین حد اطمینان برای  $R$  بزرگ‌تر از  $0/5$  باشد، می‌توان گفت غلظت در ماه آگوست کمتر بوده است.

**جدول (۴):** آزمون‌های نیکویی برازش برای داده‌های غلظت گوگرد

A-D (p-value)	K-S (p-value)	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (خطای معیار)	مجموعه داده‌ها
0/5478 (0/6991)	0/1909 (0/8186)	$\hat{\gamma}_1 = 1/2805$ (0/1870)	گروه اول
0/5372 (0/3608)	0/1442 (0/9780)	$\hat{\delta}_1 = 0/0702$ (0/0372)	گروه دوم
		$\hat{\gamma}_2 = 1/3548$ (0/1985)	
		$\hat{\delta}_2 = 0/0325$ (0/0211)	

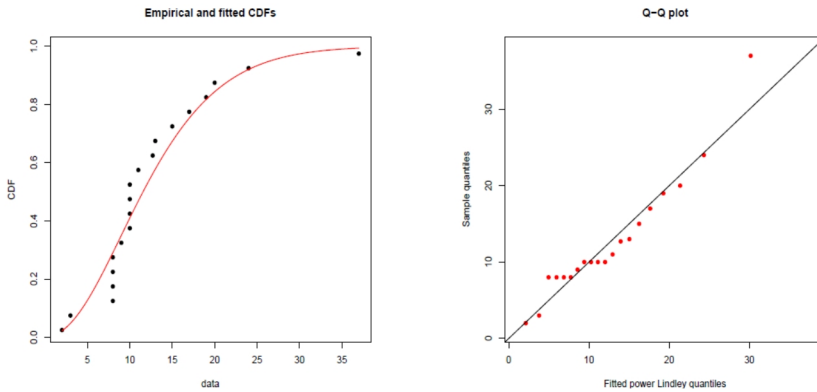
**جدول (۵):** برآوردهای بیز پارامتر  $R$  تحت توابع زیان مربع خطا و لاینکس

ناحیه اعتبار	$\hat{R}_{LE}$			$\hat{R}_{SE}$	پیشین
	$v = 1/5$	$v = 1$	$v = -0/5$		
(0/1473, 0/7451)	0/4193	0/4253	0/4438	0/4376	I
(0/1146, 0/7392)	0/4064	0/4131	0/4339	0/4269	II
(0/1741, 0/7402)	0/4328	0/4383	0/4551	0/4495	III
(0/0604, 0/7877)	0/3453	0/3522	0/3739	0/3665	IV

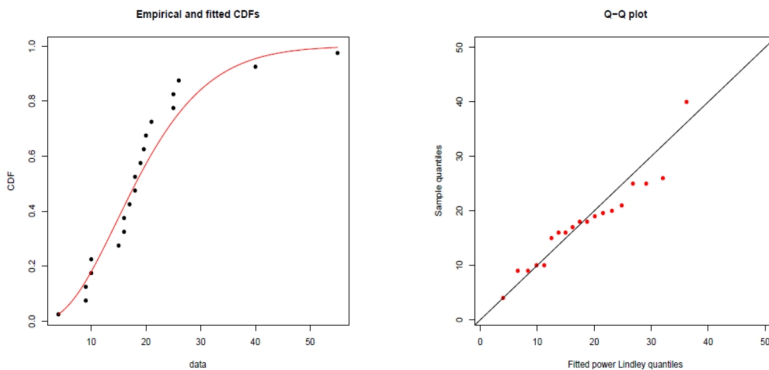
اکنون فرض کنید که فقط مقادیر رکورد بالایی غلظت‌ها در ماه‌های آوریل و آگوست به صورت  $u = (13, 20, 24, 37)$  و  $v = (21, 25, 26, 55)$  در دسترس باشد. با استفاده از این رکوردها و رابطه (۶)، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها برابر می‌شود با  $\hat{\gamma} = 1/3328$ ،  $\hat{\delta}_1 = 0/0476$  و  $\hat{\delta}_2 = 0/0286$  که با استفاده از آن‌ها برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R$  برابر  $0/3170$  خواهد بود. همچنین فاصله اطمینان مجانبی ۹۵ درصدی برای پارامتر  $R$  برابر می‌شود با  $(0/6340, 0/0892)$ . برای انجام رهیافت بیزی، توزیع‌های پیشین آگاهی‌بخش  $a_j = b_j = 3$  (پیشین I)،  $a_j = 2, b_j = 3$  (پیشین II)،  $a_j = 4, b_j = 2$  (پیشین III) و همچنین پیشین ناآگاهی‌بخش  $a_j = b_j = 0/0001$  (پیشین IV) را در نظر گرفته‌ایم. ابتدا از توزیع‌های پسین داده شده در (۱۹) -



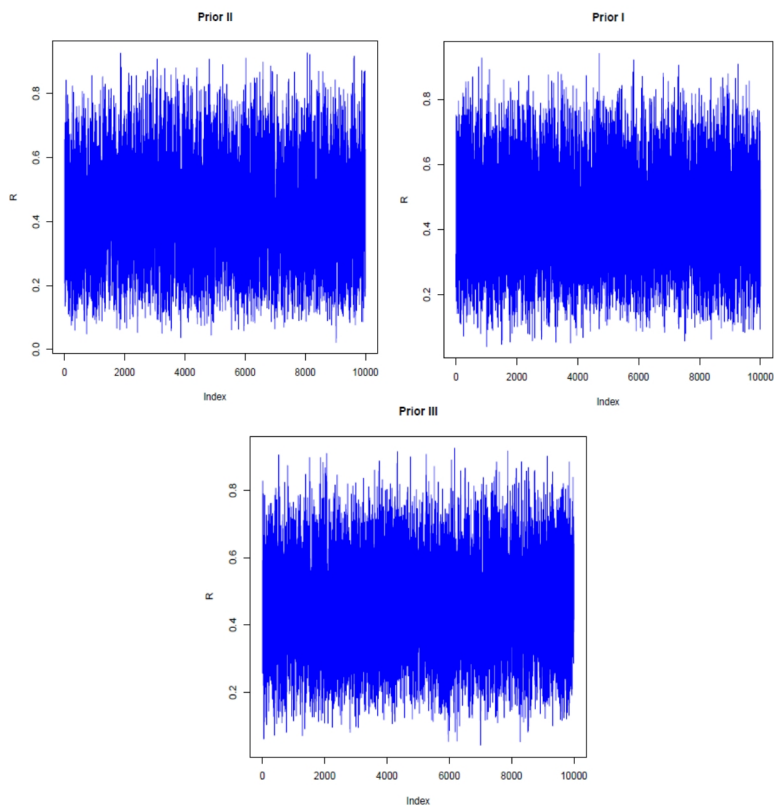
(۲۱) به تعداد ۶۰,۰۰۰ نمونه تصادفی تولید کرده‌ایم و برای از بین بردن اثر نقاط آغازین، ۱۰,۰۰۰ نمونه اولیه را حذف کردیم. سپس برای کاهش همبستگی بین نمونه‌ها، از هر ۵ مقدار تولید شده تنها یکی را ذخیره کرده‌ایم. نمودارهای اثر نمونه‌های تولید شده برای  $R$  در شکل ۸ نمایش داده شده‌اند که نشان‌دهنده همگرایی زنجیره‌های تولید شده می‌باشند. با استفاده از نمونه‌های تولید شده فوق برآوردهای بیز  $R$  تحت تابع زیان‌های مربع خطا و لاینکس محاسبه شده و در جدول ۵ گزارش شده‌اند. همان‌طور که از جدول ۵ مشاهده می‌شود برآوردهای بیز به دست آمده تحت پیشین ناآگاهی بخش نسبت به دیگر پیشین‌های آگاهی‌بخش، کوچک‌تر بوده‌اند. همچنین با توجه به نتایج به دست آمده از تحلیل‌های فوق، می‌توان گفت که غلظت گوگرد در ماه آگوست کمتر از آوریل نبوده است.



شکل (۶): نمودارهای تشخیصی برای برازش توزیع لیندلی توانی بر روی گروه اول داده‌ها



شکل (۷): نمودارهای تشخیصی برای برازش توزیع لیندلی توانی بر روی گروه دوم داده‌ها



شکل (۸): نمودار اثر نمونه‌های تولید شده  $R$

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با فرض اینکه داده‌های به دست آمده از متغیرهای تنش و مقاومت مدل به صورت مقادیر رکوردی باشند، روش‌های استنباطی را برای پارامتر تنش-مقاومت  $R$  در توزیع لیندلی توانی توسعه دادیم. ابتدا برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر  $R$  و نیز فاصله اطمینان مجانبی را برای آن به دست آوردیم. برای محاسبه برآوردگرهای بیز نیز از روش نمونه‌گیری گیبز و روش تقریب لیندلی استفاده کردیم. سپس یک مطالعه شبیه‌سازی برای بررسی عملکرد روش‌های ذکر شده انجام داده‌ایم که نتایج زیر از آن حاصل شده است:

- همان‌طور که انتظار می‌رفت، با افزایش حجم نمونه، دقت برآوردهای به دست آمده بهتر شدند.

- عملکرد برآوردهای بیز با استفاده از پیشین‌های آگاهی‌بخش بهتر از برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی بوده‌اند.
- عملکرد برآوردهای بیز پارامتر  $R$  تحت تابع زیان لاینکس با توجه به مقادیر  $V$  متفاوت بوده است. در برخی موارد برآوردهای تحت زیان لاینکس بهتر از زیان مربع خطا بودند و برعکس.
- میانگین مربعات خطای برآوردهای  $R$  برای مقادیر کرانگین، کوچک‌تر از حالتی است که  $R$  نزدیک به  $0.5$  باشد.
- فواصل اطمینان مجانبی به دست آمده نسبت به فاصله‌های اعتبار به دست آمده از روش بیزی دارای درصد پوشش و طول کمتری بودند.

### تشکر و قدردانی

نویسندگان از سردبیر محترم مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی و داوران ارجمند که نظرات سازنده‌شان موجب بهبود مقاله گردید، صمیمانه سپاسگزارند.

### منابع

- [۱] مهدی زاده، مهدی و زمان زاده، احسان (۱۳۹۷). برآورد قابلیت اعتماد پویا برای تنش و مقاومت وابسته بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه دار. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی / دوره ۸، شماره ۲، صص ۵۴-۷۳.
- [۲] یعقوب‌زاده شهرستانی، شهرام (۱۳۹۷). برآورد  $R = P(X > Y)$  در توزیع نمایی، بر اساس روش‌های  $E$ -بیز و بیز سلسله مراتبی. مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی / دوره ۸، شماره ۱، صص ۴۹-۶۴.
- [۳] احمدی، جعفر و ارقامی، ناصررضا (۱۳۷۵). رکوردها در توزیع بتای نوع اول. مجله اندیشه آماری / دوره ۱، شماره ۹، صص ۹-۱۳.
- [4] Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K., Balakrishnan, N. and Al-Enezi, L.J. (2013). Power Lindley distribution and associated inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **64**, 2033.
- [5] Balakrishnan, N. and Lai, C.D. (2009). *Continuous Bivariate Distributions*, 2nd ed., Springer, New York.

- 
- [6] Pak, A., Parham, G.H., Saraj, M. (2014). Inferences on the competing risk reliability problem for exponential distribution based on fuzzy data, *IEEE Transactions on Reliability*, **63**(1), 1-10.
- [7] Nadar, M., Kizilaslan, F., Papadopoulos, A. (2014). Classical and Bayesian estimation of  $P(Y < X)$  for Kumaraswamy's distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**(7), 1505-1529.
- [8] Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Aboukhamseen, S.M. (2015). Estimation of the reliability of a stress-strength system from power lindley distributions, *Communications in Statistics- Simulation and Computation*, **44**(1), 118-136.
- [9] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. (2017). Estimation of  $P(X > Y)$  for the two-parameter generalized exponential records, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **46**(1), 371-394.
- [10] Baklizi, A. (2012). Inference on  $P(X < Y)$  in the two-parameter Weibull model based on records, *ISRN Probability and Statistics*, **2012**, 1-11.
- [11] Wang, B.X. and Ye, Z.S. (2015), Inference on the Weibull distribution based on record values, *Computational Statistics and Data Analysis*, **83**, 26-36.
- [12] Tarvirdizade, B., and Ahmadpour, M., (2016). Estimation of the stress-strength reliability for the two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution based on upper record values, *Statistical Methodology*, **31**, 58-72.
- [13] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1998). *Records*. John Wiley and Sons, New York.
- [14] Pak, A. and Dey, S. (2019). Statistical Inference for the power Lindley model based on record values and inter-record times, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **347**, 156-172.
- [15] Rao, C.R. (1965). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- [16] Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S. and Rubin, D.B. (2003). *Bayesian Data Analysis*, 2nd ed., Chapman and Hall, London, U.K.
- [17] Chen, M.H., Shao, Q.M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.
- [18] Meeker, W.Q., Hahn, G.J. and Escobar, L.A. (2017). *Statistical Intervals, A Guide for Practitioners and Researches*, 2nd Edition, Jhon Wiley and Sons, USA.

- [19] Nadar, M. and Kizilaslan, F. (2015). Estimation and prediction of the Burr type XII distribution based on record values and inter-record times, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**(16), 3297-3321.
- [20] Valiollahi, R., Asgharzadeh, A. and Raqab, M.Z. (2013). Estimation of  $P(Y < X)$  for Weibull distribution under progressive type-II censoring, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**(24), 4476-4498.
- [21] Lindley, D.V. (1958). Fiducial distributions and Bayesian theorem, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **20**, 102-107.
- [22] Roberts, E. (1979). Review of statistics of extreme values with applications to air quality data: part II. Applications, *Journal of the Air Pollution Control Association*, **29**(7), 733-740.

## Estimation of Reliability Parameter $R = P(X > Y)$ in Power Lindley Distribution by Using Upper Record Values

Abbas Pak\*, Ali Akbar Jafari\*\*, Mohammad Reza Mahmoudi\*\*\*

\*Department of Computer Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

\*\*Department of Statistics, Yazd University, Yazd, Iran

\*\*\*Department of Statistics, Fasa University, Fasa, Iran

Received: April 23 2019

Accepted for publication: December 5 2019

Corresponding author: [abbas.pak1982@gmail.com](mailto:abbas.pak1982@gmail.com)

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

### Abstract

In the literature, statistical inference for the stress-strength parameter  $R = P(X > Y)$  has attracted much attention. Recently, statistical estimation of the parameter  $R$  in power Lindley distribution based on complete data sets was studied by Ghitany et al. [8]. However, in practice, we may deal with record breaking data sets in which only values larger than the current extreme value are reported. In this paper, assuming that stress and strength random variables  $Y$  and  $X$  are independently distributed as power Lindley distribution, we discuss on estimation of the parameter  $R$  based on upper record values. First, we obtain maximum likelihood estimate and asymptotic confidence interval of the parameter  $R$ . Then, considering squared error and linex loss functions, we derive Bayes estimators of  $R$ . Because there are not closed forms for the Bayes estimates, we use Lindley method as well as a Markov Chain Monte Carlo procedure to obtain approximate Bayes estimates. Simulation studies are conducted in order to evaluate the performances of the proposed procedures. Finally, by analyzing two sets of real data, application of the inferences based on upper records is demonstrated.

**Keywords:** Power Lindley distribution, Stress-Strength model, Maximum likelihood estimation, Bayes estimation.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62F10, 62F15, 62N05.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).