

طرح بهینه در سانسور فزاینده‌ی نوع دو از توزیع رایلی با برداشت‌های دوجمله‌ای براساس پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی و تابع هزینه

الهام بصیری*^۱، سکینه بیگی**

*گروه آمار، دانشگاه کوثر بجنورد

**گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کوثر بجنورد

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۹/۹

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱/۲۹

چکیده: طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دو یکی از روش‌های سانسور است که در مطالعات طول عمر از اهمیت زیادی برخوردار است. این روش از سانسور به آزمایشگر این امکان را می‌دهد تا در مراحل مختلف آزمایش برخی از واحدهای تحت آزمایش را کنار گذاشت. یکی از سؤالاتی که در طراحی مدل سانسور فزاینده مطرح می‌شود این است که چطور می‌توان تصمیم گرفت که در هر مرحله چند واحد را از آزمایش حذف کرد؟ برای پاسخ به این سؤال با در نظر گرفتن معیارهای مختلف می‌توان جواب‌های متفاوتی داد. در این مقاله با فرض اینکه طرح سانسور متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای باشد، قصد داریم پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دو هرگاه توزیع مورد بررسی توزیع رایلی باشد را با توجه به دو معیار هزینه‌ی آزمایش و میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی در مسئله‌ی پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی، به دست آوریم. برای نشان دادن کارایی نتایج، مطالعه‌ی شبیه‌سازی و مثال واقعی با نرم‌افزار MATLAB ارائه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی، توزیع رایلی، میانگین دوم خطای پیش‌بینی، تابع هزینه، طرح بهینه‌ی سانسور.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۵، ۶۲N۰۱

۱- مقدمه

توزیع رایلی یکی از مهم‌ترین توزیع‌های آماری است که در زمینه‌های مختلف از جمله تحلیل بقا و قابلیت اطمینان دارای کاربرد زیادی است. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع رایلی با پارامتر θ است هرگاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع آن به ترتیب به صورت زیر باشند.

$$f_{\theta}(x) = \theta x e^{-\theta x^2}, \quad F_{\theta}(x) = 1 - e^{-\theta x^2}, \quad \theta > 0, x > 0 \quad (1)$$

یکی از سیاست‌های مدیران کارخانه‌ها در بازارهای رقابتی، جلب رضایت مشتریان است تا با عرضه‌ی محصولات خود نقش بیشتری در گرداندن چرخ صنعت و سود حاصل از آن داشته باشند. در این راستا، علاوه بر فعالیت‌های گسترده به منظور بهبود کیفیت محصولات، ارائه‌ی خدمات پس از فروش نیز امری اجتناب‌ناپذیر و ضروری است. خدماتی که کارخانه‌ها با پرداخت هزینه‌های قابل توجه آن، مسئولیت ارائه‌ی آن‌ها را بر عهده می‌گیرند. با توجه به پیچیدگی شرایط ارائه‌ی این خدمات و لزوم توجه در دقت و صحت انجام آن‌ها، استفاده از دستورالعمل اجرایی این خدمات به‌ویژه نوع خاص آن یعنی خدمات گارانتی بسیار ضروری است. تمامی خدماتی که در دوره‌ی گارانتی به مشتری داده می‌شود در دوره‌ی وارانتی نیز وجود دارد و تنها تفاوت آن با گارانتی آن است که در دوره‌ی وارانتی هزینه‌ی خدمات انجام شده توسط مشتری پرداخت می‌شود و در ازای آن مشتری می‌تواند از فضای تعمیرگاه استفاده نماید؛ بنابراین، تعیین پیش‌بینی زمان گارانتی و یا وارانتی محصولات و تعداد دفعات موردنیاز به تعمیر، می‌تواند موضوعی قابل بحث باشد. بخش زیادی از این تحقیقات مرتبط به موضوع پیش‌بینی است که می‌تواند به صورت یک نمونه‌ای یا دونمونه‌ای انجام شود. در حالت دونمونه‌ای مواردی پیش می‌آیند که روش انجام آزمایش برای نمونه‌ی آینده، متفاوت با طرح نمونه‌ی مشاهده‌شده است؛ بنابراین، در چنین حالتی نیازمند نتایج نظری مرتبط با مسئله هستیم. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد پیش‌بینی و روش‌های آن می‌توان به مراجع [۱ و ۲] مراجعه نمود.

بسیاری از اوقات در مباحث قابلیت اعتماد، آزمون‌های طول عمر، تحقیقات زیست‌شناسی، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی از جمله زمان محدود، عدم دسترسی به همه‌ی قطعات و یا گران بودن واحدهای تحت آزمایش، آزمایشگر نمی‌تواند زمان دقیق از کارافتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. در چنین حالتی اصطلاحاً گویند سانسور رخ داده است. به‌طور معمول سانسورها به شیوه‌های مختلفی اعمال می‌شوند. بعضی از انواع سانسورها عبارتند از: سانسور نوع یک، سانسور نوع دو، سانسور تصادفی، سانسور فزاینده و سانسور هیبرید. در سانسور نوع دو از راست، این امکان وجود دارد که واحدها فقط در انتهای آزمایش حذف شوند؛ اما در تعمیمی از سانسور نوع دو از راست که سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست نامیده می‌شود، این امکان وجود دارد که در هر مرحله از آزمایش به‌عنوان مثال در زمان از کارافتادگی هر واحد، می‌توان واحدهایی را از آزمایش کنار گذاشت. همچنین، با توجه به اینکه در سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست، قطعات سانسور شده هنوز دچار شکست نشده‌اند می‌توان از آن‌ها به‌عنوان قطعات دست‌دوم در آزمایش‌های بعدی استفاده کرد که از نظر اقتصادی حائز اهمیت است.

فرض کنید n واحد مستقل از هم با زمان‌های شکست متناظر با X_1, \dots, X_n دارای تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$ و تابع چگالی احتمال مشترک $f(\cdot)$ ، مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. بلافاصله بعد از مشاهده‌ی اولین شکست، تعداد R_1 واحد از $(n-1)$ واحد باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند که در آن $R_1 = 0, \dots, n-m$. بعد از مشاهده‌ی دومین شکست تعداد R_2 واحد از $(n-R_1-2)$ واحد باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند که در آن $R_2 = 0, \dots, n-m-R_1$ و در نهایت در زمان مشاهده‌ی m امین شکست تعداد R_m واحد باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند، طوری که $R_m = n-m - \sum_{i=1}^{m-1} R_i$. در این روش از

سانسور R_i ها، $1 \leq i \leq m$ ، مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده هستند. علاوه بر این، زمان‌های شکست که متغیرهای تصادفی هستند و آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست نامیده می‌شوند، با $X_{1:m:n}^{\bar{R}}, \dots, X_{m:m:n}^{\bar{R}}$ نشان داده می‌شوند؛ بنابراین، طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دو براساس m و بردار $\tilde{R}(m) = (R_1, \dots, R_m)$ مشخص می‌شود. در ادامه برای سادگی نمادگذاری از نماد $X_{i:m:n}$ به جای $X_{i:m:n}^{\bar{R}}$ ، $1 \leq i \leq m$ ، استفاده می‌کنیم. برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر در مورد سانسور فزاینده‌ی نوع دو و کاربردهای آن می‌توان به [۳]-[۶] ارجاع داد.

تاکنون، چندین پژوهش‌گر مسئله‌ی پیش‌بینی آماره‌های مرتب سانسور فزاینده را با در نظر گرفتن دو رویکرد کلاسیک و بیزی مورد مطالعه قرار داده‌اند. به‌عنوان مثال، پژوهش‌گرانی پیش‌بینی‌کننده‌های خطی را در توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو، به دست آوردند [۷]. در پژوهش دیگری پیش‌بینی‌کننده‌های مختلفی از جمله بهترین پیش‌بینی‌کننده‌ی ناریب خطی و درست‌نمایی ماکسیمم در مدل سانسور فزاینده‌ی نوع دو از توزیع پارتو تعیین شدند [۸]. در مدل با نرخ خطر متناسب، پژوهش‌گرانی پیش‌بینی‌کننده‌های مختلفی مانند پیش‌بینی‌کننده‌ی ناریب، پیش‌بینی‌کننده‌ی درست‌نمایی ماکسیمم و پیش‌بینی‌کننده‌ی میانه‌ی شرطی را در مدل سانسور فزاینده‌ی نوع دو تعیین کردند [۹ و ۱۰]. پیش‌بینی بیزی k -رکوردها براساس آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو در توزیع نمایی توسط پژوهش‌گران دیگری مورد مطالعه قرار گرفت [۱۱]. در پژوهشی دیگر مسئله‌ی پیش‌بینی ناپارامتری آماره‌های مرتب تعمیم‌یافته‌ی آینده با فرض اینکه اندازه نمونه‌ی آینده یک متغیر تصادفی است، مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در این پژوهش، پیش‌بینی آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو با اندازه نمونه‌ی تصادفی مورد مطالعه قرار گرفت [۱۲].

یکی دیگر از مسائلی که در سانسور فزاینده‌ی نوع دو همواره مورد توجه بوده است مسئله‌ی تعیین طرح بهینه‌ی سانسور است. این مسئله در ابتدا در [۳] مورد بررسی قرار گرفت. بعد از آن پژوهش‌گران زیادی با در نظر گرفتن معیارهای مختلف به مطالعه‌ی این مسئله پرداخته‌اند. برای

مثال، در پژوهش‌هایی طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست با مینیمم کردن واریانس بهترین برآوردگرهای خطی نارایب در خانواده‌ی توزیع‌های مکان-مقیاس تعیین شد [۱۳-۱۵]. پژوهشی دیگر به تعیین طرح بهینه‌ی سانسور براساس معیار اطلاع فیشر در توزیع بر نوع ۱۲ پرداخت [۱۶]. با در نظر گرفتن معیار پیتمن نیز طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده در پژوهشی دیگر به دست آمد [۱۷]. در پژوهشی دیگر پژوهش‌گران بعد از به دست آوردن برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم برای پارامترهای توزیع بیرن‌بام-ساندرز براساس آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو، به مقایسه‌ی دو طرح سانسور مختلف پرداختند و طرح بهینه را تعیین نمودند [۱۸]. با در نظر گرفتن تابع هزینه پژوهش‌گران دیگری به معرفی یک الگوریتم به‌منظور تعیین طرح بهینه‌ی سانسور در خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس پرداختند [۱۹]. طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دو با در نظر گرفتن معیار آنتروپی نیز توسط پژوهش‌گر دیگری به‌دست‌آمده است [۲۰]. با در نظر گرفتن معیار واریانس برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم و بهترین برآوردگر خطی نارایب نیز طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دو از توزیع نرمال تعیین شده است [۲۱].

در تمامی مقالات ذکر شده در بالا طرح سانسور مقداری از پیش تعیین شده در نظر گرفته شده است؛ اما در برخی مواقع مانند آزمایش‌های بالینی تعداد بیماران در حال تغییر است و بنابراین تعداد واحدهایی که در هر مرحله از آزمایش خارج می‌شوند تصادفی هستند. به‌عبارت‌دیگر طرح سانسور یک متغیر تصادفی است. با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت و توزیع دوجمله‌ای برای طرح سانسور فزاینده، مسئله‌ی برآورد پارامترهای توزیع وایبل در دو مقاله موردبررسی قرار گرفت [۲۲ و ۲۳]. بعد از این دو پژوهش، پژوهش‌گران دیگری نیز مسائل مشابهی را در سایر توزیع‌ها موردبررسی قرار دادند. به‌عنوان مثال، برآورد پارامترهای توزیع پارتو تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو با طرح تصادفی از توزیع یکنواخت در یک پژوهش انجام شد [۲۴]. برآورد بیزی پارامترهای توزیع‌های پارتو، گامای نمایشی شده و پواسن-نمایی تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو با طرح تصادفی از توزیع دوجمله‌ای توسط پژوهش‌گران دیگری بررسی شد [۲۵-۲۷]. برآورد پارامتری توزیع نمایی موزون نیز در مقاله‌ای دیگر انجام شد. در این مقاله نیز توزیع دوجمله‌ای برای طرح سانسور فزاینده نوع دو در نظر گرفته شد [۲۸]. درزمینه‌ی پیش‌بینی داده‌های ترتیبی نیز چندین پژوهش‌گر طرح تصادفی را برای سانسور فزاینده‌ی نوع دو در نظر گرفتند [۲۹-۳۱]. اخیراً پژوهش‌گرانی با در نظر گرفتن سانسور فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های تصادفی به تعیین پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور فزاینده پرداختند. برای این منظور، پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور با مینیمم نمودن واریانس مجانبی تعمیم‌یافته‌ی برآوردگرهای درست‌نمایی ماکزیمم برای پارامترهای توزیع‌های فرشه و پارتوی تعمیم‌یافته به دست آمد [۳۲ و ۳۳].

هدف این پژوهش تعیین طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست است. برای این منظور دو معیار را مورد استفاده قرار می‌دهیم. اولین معیار، میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی

(MSPE¹) برای پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای در مسئله‌ی پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی از جامعه‌ای با توزیع رایلی است. معیار دیگر نیز تابع هزینه‌ی طراحی مدل است. در ادامه، طرح بهینه‌ی سانسور را طوری می‌یابیم که دو معیار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی و تابع هزینه‌ی طراحی مدل از مقادیر مشخص و از قبل تعیین‌شده‌ای کوچک‌تر باشند. در اینجا توزیع دو جمله‌ای برای توزیع طرح سانسور فزاینده در نظر گرفته شده است. برای تعیین طرح بهینه‌ی سانسور، پارامتر بهینه‌ی توزیع آن را به دست می‌آوریم.

ساختار مقاله به شرح زیر است: در ابتدا در بخش دوم به تعیین پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای آماره‌ی مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو از توزیع رایلی می‌پردازیم. سپس، میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی را برای پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای به‌دست‌آمده، محاسبه می‌نماییم. در ادامه و در بخش سوم به معرفی یک تابع هزینه در مدل سانسور فزاینده‌ی نوع دو پرداخته می‌شود. با در نظر گرفتن دو معیار معرفی‌شده، در بخش چهارم به تعیین توزیع بهینه برای طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دو می‌پردازیم. در انتها، مطالعه‌ی شبیه‌سازی و مثال واقعی با نرم‌افزار MATLAB برای بررسی کارایی نتایج ارائه شده‌اند.

۲- پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای

فرض کنید $X_{1:m_1, n_1}, \dots, X_{m_r: m_r, n_r}$ آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست مشاهده شده از یک نمونه‌ی تصادفی به‌اندازه‌ی n_1 و با طرح سانسور $\tilde{R}(m_1) = (R_1, \dots, R_{m_1})$ و از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال تعریف شده در رابطه‌ی (۱) باشند. علاوه‌براین، فرض کنید $Y_{s:m_r, n_r}$ نمایانگر S آماره‌ی مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو از یک نمونه‌ی تصادفی مستقل و هم‌توزیع آینده به‌اندازه‌ی n_r و با طرح سانسور $\tilde{R}'(m_r) = (R'_1, \dots, R'_{m_r})$ باشد. همچنین، فرض کنید $\tilde{R}(m_1) = (R_1, \dots, R_{m_1})$ و $\tilde{R}'(m_r) = (R'_1, \dots, R'_{m_r})$ مستقل از هم متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای با تابع احتمال زیر باشند

$$P(R_i = r_i) = \binom{n_1 - m_1}{r_i} p^{r_i} (1-p)^{n_1 - m_1 - r_i}, \quad r_i = 0, \dots, n_1 - m_1,$$

$$, \quad r_i = 0, \dots, n_1 - m_1 - \sum_{k=1}^{i-1} r_k, \quad i = 2, \dots, m_1 - 1$$

$$P(R_i = r_i | R_1 = r_1, \dots, R_{i-1} = r_{i-1}) = \binom{n_1 - m_1 - \sum_{k=1}^{i-1} r_k}{r_i} p^{r_i} (1-p)^{n_1 - m_1 - \sum_{k=1}^i r_k},$$

و تمام واحدهای باقیمانده در صورت وجود، در زمان m_1 امین شکست با احتمال یک از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند؛ بنابراین، تابع احتمال توأم $\tilde{R}(m_1) = (R_1, \dots, R_{m_1})$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P(\tilde{R} = \tilde{r}) = P(R_1 = r_1) P(R_2 = r_2 | R_1 = r_1) \times P(R_{m_1-1} = r_{m_1-1} | R_1 = r_1, \dots, R_{m_1-2} = r_{m_1-2}) \quad (2)$$

$$= A(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1) p^{\mu_1(\tilde{R}, m_1)} (1-p)^{\mu_2(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)},$$

که در آن

$$A(\tilde{R}, m, n, j) = \frac{(n-m)!}{\left(\prod_{i=1}^{j-1} r_i!\right) \left(n-m-\sum_{i=1}^{j-1} r_i\right)!}, \quad (3)$$

$$\mu_1(\tilde{R}, j) = \sum_{i=1}^{j-1} r_i, \quad \mu_2(\tilde{R}, m, n, j) = (j-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{j-1} (j-i)r_i. \quad (4)$$

در این بخش به دنبال تعیین پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای برای $Y_{s:m_1:n_1}$ هستیم. تابع درست‌نمایی شرطی θ به شرط در اختیار داشتن $\tilde{X} = (X_{1:m_1:n_1}, \dots, X_{m_1:m_1:n_1})$ و $\tilde{R}(m_1) = (R_1, \dots, R_{m_1})$ برابر است با (مرجع [۳] را ببینید)

$$L(\theta | \tilde{X} = \tilde{x}, \tilde{R} = \tilde{r}) = C^* \theta^{m_1} \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_i \right) e^{-\theta T},$$

که در آن $C^* = \nu^{m_1} C$ و $T = \sum_{i=1}^{m_1} (1+r_i) x_i$ و ثابت نرمال‌ساز C برابر است با

$$C = \prod_{j=1}^{m_1-1} \left(n-1 - \sum_{i=1}^{j-1} r_i - j + 1 \right), \quad \sum_{i=1}^{\circ} r_i \equiv \circ.$$

لذا تابع درست‌نمایی توأم به صورت زیر نوشته می‌شود

$$L(\theta, p | \tilde{X} = \tilde{x}, \tilde{R} = \tilde{r}) = L(\theta | \tilde{X} = \tilde{x}, \tilde{R} = \tilde{r}) P(\tilde{R} = \tilde{r})$$

$$= A L_1(\theta) L_2(p),$$

هرگاه $A = C^* \left(\prod_{i=1}^{m_1} x_i \right) A(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)$ مقداری ثابت است که به پارامترهای θ و p

بستگی ندارد و

$$L_{\lambda}(\theta) = \theta^{m_{\lambda}} e^{-\theta T}, \quad L_{\gamma}(p) = p^{\mu_1(\tilde{R}, m_{\lambda})} (1-p)^{\mu_2(\tilde{R}, m_{\lambda}, n_{\lambda}, m_{\lambda})}$$

تابع پیشین θ و p را به صورت $\pi(\theta, p) = \pi_{\lambda}(\theta) \pi_{\gamma}(p)$ در نظر می‌گیریم که در آن

$$\pi_{\lambda}(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}, \quad \theta > 0, \quad a, b > 0,$$

$$\pi_{\gamma}(p) = \frac{1}{\beta(c, d)} p^{c-1} (1-p)^{d-1}, \quad 0 < p < 1, \quad a, b > 0,$$

هرگاه، $\Gamma(a)$ و $\beta(c, d)$ به ترتیب نمایش‌دهنده‌ی توابع گاما و بتای کامل می‌باشند. لازم به ذکر است که این توزیع پیشین توسط [۲۸] در مسئله‌ی برآورد بیزی پارامترهای توزیع رایلی در مدل سانسور فزاینده‌ی نوع دو با برداشته‌های تصادفی از توزیع دو جمله‌ای، مورد استفاده قرار گرفت. در نهایت تابع پسین θ و p را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \pi(\theta, p | \tilde{X} = \tilde{x}, \tilde{R} = \tilde{r}) &= \frac{\theta^{a+m_{\lambda}-1} e^{-\theta(b+T)} p^{c+\mu_1(\tilde{R}, m_{\lambda})-1} (1-p)^{d+\mu_2(\tilde{R}, m_{\lambda}, n_{\lambda}, m_{\lambda})-1}}{\int_0^{\infty} \int_0^1 \theta^{a+m_{\lambda}-1} e^{-\theta(b+T)} p^{c+\mu_1(\tilde{R}, m_{\lambda})-1} (1-p)^{d+\mu_2(\tilde{R}, m_{\lambda}, n_{\lambda}, m_{\lambda})-1} dp d\theta} \quad (5) \\ &= \frac{(b+T)^{a+m_{\lambda}} \theta^{a+m_{\lambda}-1} e^{-\theta(b+T)} p^{c+\mu_1(\tilde{R}, m_{\lambda})-1} (1-p)^{d+\mu_2(\tilde{R}, m_{\lambda}, n_{\lambda}, m_{\lambda})-1}}{\Gamma(a+m_{\lambda}) \beta(c+\mu_1(\tilde{R}, m_{\lambda}), d+\mu_2(\tilde{R}, m_{\lambda}, n_{\lambda}, m_{\lambda}))}. \end{aligned}$$

علاوه بر این، به شرط ثابت بودن $\tilde{R}' = \tilde{r}'$ ، تابع چگالی حاشیه‌ای $Y_{s:m_{\gamma}; n_{\gamma}}$ به صورت زیر نوشته می‌شود (مرجع [۳] را ببینید)

$$\begin{aligned} f_{Y_{s:m_{\gamma}; n_{\gamma}} | R'_1=r'_1, \dots, R'_{s-1}=r'_{s-1}}(y) &= c'_{s-1} \sum_{i=1}^s a'_{i,s} (\bar{F}_{\theta}(y))^{\gamma'_i-1} f_{\theta}(y) \\ &= \gamma \theta y c'_{s-1} \sum_{i=1}^s a'_{i,s} e^{-\theta \gamma'_i y^{\gamma}}, \quad y > 0, \end{aligned}$$

هرگاه

$$\gamma'_i = n_{\gamma} - i + 1 - \sum_{k=1}^{i-1} R'_k, \quad c'_{s-1} = \prod_{j=1}^s \gamma'_j, \quad a'_{i,s} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^s \frac{1}{\gamma_l - \gamma_i}, \quad 1 \leq i \leq s \leq m_{\gamma}.$$

بنابراین تابع چگالی حاشیه‌ای $Y_{s:m_{\gamma}; n_{\gamma}}$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$f_{Y_{s:m_r:n_r}}(y) = \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} f_{Y_{s:m_r:n_r} | R'_1=r'_1, \dots, R'_{s-1}=r'_{s-1}}(y) P(R'_1=r'_1, \dots, R'_{s-1}=r'_{s-1}) \quad (۶)$$

$$= \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} \sum_{i=1}^s \gamma A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) \theta y c'_{s-1} a'_{i,s} e^{-\theta \gamma_i y^\gamma} p^{\mu(\tilde{R}', s)} (1-p)^{\mu(\tilde{R}', m_r, n_r, s)}.$$

با توجه به روابط (۵) و (۶) تابع چگالی پیش‌بینی $Y_{s:m_r:n_r}$ برابر است با

$$f_{Y_{s:m_r:n_r}}^*(y | \tilde{x}, \tilde{r}) = \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} \sum_{i=1}^s \frac{\gamma A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) y c'_{s-1} a'_{i,s} (b+T)^{a+m_1}}{\Gamma(a+m_1) \beta(c+\mu_1(\tilde{R}, m_1), d+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1))}$$

$$\times \int_0^\infty \theta^{a+m_1} e^{-\theta(b+T+\gamma_i y^\gamma)} d\theta \int_0^1 p^{c+\mu(\tilde{R}', s)+\mu(\tilde{R}, m_1)^{-1}} (1-p)^{d+\mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s)+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)^{-1}} dp$$

$$= \gamma y \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) c'_{s-1} (a+m_1) (b+T)^{a+m_1}$$

$$\times \frac{\beta(c+\mu_1(\tilde{R}', s)+\mu_1(\tilde{R}, m_1), d+\mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s)+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1))}{\beta(c+\mu_1(\tilde{R}, m_1), d+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1))}$$

$$\times \sum_{i=1}^s \frac{a'_{i,s}}{(b+T+\gamma_i y^\gamma)^{a+m_1+1}}.$$

$Y_{s:m_r:n_r}$ با توجه به تابع چگالی پیش‌بینی فوق می‌توان پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای برای $Y_{s:m_r:n_r}$ تحت تابع زیان مربع خطا (SEL¹) را به صورت

$$\hat{Y}_{s:m_r:n_r} = \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} \sum_{i=1}^s \frac{A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) c'_{s-1} a'_{i,s} (b+T)^{a+m_1}}{\Gamma(a+m_1) \beta(c+\mu_1(\tilde{R}, m_1), d+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1))}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma y^\gamma \theta^{a+m_1} e^{-\theta(b+T+\gamma_i y^\gamma)} dy d\theta$$

$$\times \int_0^1 p^{c+\mu(\tilde{R}', s)+\mu(\tilde{R}, m_1)^{-1}} (1-p)^{d+\mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s)+\mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)^{-1}} dp.$$

به دست آورد. در نتیجه خواهیم داشت

$$\hat{Y}_{s:m_r:n_r} = \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) c'_{s-1} \frac{(b+T)^{a+m_1}}{\Gamma(a+m_1)} \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right) \\ \times \frac{\beta\left(c + \mu_1(\tilde{R}', s) + \mu_1(\tilde{R}, m_1), d + \mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s) + \mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)\right)}{\beta\left(c + \mu_1(\tilde{R}, m_1), d + \mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)\right)} \\ \times \sum_{i=1}^s \frac{a'_{i,s}}{\gamma_i^{r/\gamma}} \int_0^{\infty} \theta^{a+m_1-r/\gamma} e^{-\theta(b+T)} d\theta.$$

لذا پیش‌بینی‌کننده‌ی بیزی نقطه‌ای برای $Y_{s:m_r:n_r}$ تحت تابع زیان مربع خطا (SEL)، برابر

$$\hat{Y}_{s:m_r:n_r} = (b+T)^{\frac{1}{\gamma}} Q\left(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s\right), \quad (7)$$

است، هرگاه

$$Q\left(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s\right) = \beta\left(a+m_1 - \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right) \sum_{r'_1=0}^{g(r'_1)} \sum_{r'_2=0}^{g(r'_2)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) \\ \times \frac{\beta\left(c + \mu_1(\tilde{R}', s) + \mu_1(\tilde{R}, m_1), d + \mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s) + \mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)\right)}{\beta\left(c + \mu_1(\tilde{R}, m_1), d + \mu_r(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1)\right)} \times k(s, m_r, n_r), \quad (8)$$

که در آن

$$k(s, m_r, n_r) = \frac{1}{\gamma} c'_{s-1} \sum_{i=1}^s \frac{a'_{i,s}}{\left(\gamma_i\right)^{r/\gamma}}. \quad (9)$$

در ادامه برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم $b = 0$. حال، با توجه به اینکه با فرض معلوم بودن $\tilde{R} = \tilde{r}$ ، T دارای توزیع گاما با پارامترهای m_1 و θ است. لذا

$$E\left(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}\right) = \frac{Q\left(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s\right) \Gamma\left(m_1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\theta^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(m_1)},$$

و

$$E\left(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}\right)^r = m_1 \frac{Q\left(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s\right)^r}{\theta},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\text{Var} \left(\hat{Y}_{s:m_\tau:n_\tau} \right) = \frac{Q \left(\tilde{R}, \tilde{R}', m_\tau, m_\tau, n_\tau, n_\tau, s \right)^\tau}{\theta} \left\{ m_\tau - \left(\frac{\Gamma \left(m_\tau + \frac{1}{\tau} \right)}{\Gamma \left(m_\tau \right)} \right)^\tau \right\}. \quad (10)$$

همچنین، با توجه به (۶) داریم

$$E \left(Y_{s:m_\tau:n_\tau} \right) = \frac{\Psi_1 \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s, p \right)}{\theta^{\frac{1}{\tau}}}, \quad (11)$$

هرگاه

$$\Psi_1 \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s, p \right) = \Gamma \left(\frac{1}{\tau} \right) \sum_{r'_s=0}^{g(r'_s)} \sum_{r'_\tau=0}^{g(r'_\tau)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s \right) \quad (12)$$

$$\times p^{\mu(\tilde{R}', s)} (1-p)^{\mu_r(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s)} k(s, m_\tau, n_\tau),$$

که $k(s, m_\tau, n_\tau)$ در رابطه‌ی (۹) تعریف شده است.

از طرف دیگر، با فرض اینکه Z_1, \dots, Z_n یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیع نمایی استاندارد باشد و $W_{j:m:n}$ نشان‌دهنده‌ی j امین آماره‌ی مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو از این نمونه با طرح سانسور $\tilde{T} = (r_1, \dots, r_m)$ باشد، داریم (مرجع [۳] را ببینید)

$$W_{j:m:n} = \sum_{l=1}^j \frac{Z_l}{n - \sum_{k=0}^{l-1} r_k - l + 1},$$

که در آن $\underline{\underline{d}}$ نمایانگر هم‌توزیع بودن است و $R_0 = 0$ ؛ بنابراین $E(W_{j:m:n}) = g(j, m, n)$ که

$$g(j, m, n) = \sum_{l=1}^j \frac{1}{n - \sum_{k=0}^{l-1} r_k - l + 1}. \quad (13)$$

حال با توجه به (۶) و (۱۳) داریم

$$E \left((Y_{s:m_\tau:n_\tau})^\tau \right) = \frac{\Psi_\tau \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s, p \right)}{\theta}, \quad (14)$$

هرگاه

$$\Psi_\tau \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s, p \right) = \sum_{r'_s=0}^{g(r'_s)} \sum_{r'_\tau=0}^{g(r'_\tau)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A \left(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s \right) \quad (15)$$

$$\times p^{\mu(\tilde{R}', s)} (1-p)^{\mu_r(\tilde{R}', m_\tau, n_\tau, s)} g(s, m_\tau, n_\tau),$$

که $g(s, m_r, n_r)$ به صورت رابطه‌ی (۱۳) است. لذا از روابط (۱۱) و (۱۴) می‌توان نوشت

$$\text{Var}(Y_{s:m_r:n_r}) = \frac{1}{\theta} \left(\Psi_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) - \Psi_1(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) \right)^2 \quad (۱۶)$$

حال از روابط (۱۰) و (۱۶) مقدار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی (MSPE) برای پیش‌بینی - کننده‌ی بیزی نقطه‌ای $\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \text{MSPE}(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}) &= E\left(\hat{Y}_{s:m_r:n_r} - Y_{s:m_r:n_r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ m_1 Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s)^2 + \Psi_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) \right. \\ &\quad \left. - 2Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s) \Psi_1(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) \frac{\Gamma\left(m_1 + \frac{1}{r}\right)}{\Gamma(m_1)} \right\}, \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن توابع Q ، Ψ_1 و Ψ_r به ترتیب به صورت روابط (۸)، (۱۲) و (۱۵) می‌باشند؛ بنابراین، اولین معیار در نظر گرفته‌شده در این مقاله میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی است و به صورت رابطه‌ی (۱۷) تعریف شده است. در بخش بعد معیار دیگری با عنوان تابع هزینه را معرفی می‌کنیم.

۳- تابع هزینه

معیار دیگری که در این مقاله برای تعیین طرح سانسور بهینه در نظر می‌گیریم، تابع هزینه است. با فرض اینکه C هزینه‌ی راه‌اندازی آزمایش، C_t هزینه‌ی زمان آزمایش و C_u هزینه‌ی هر واحد تحت آزمایش باشد، متوسط تابع هزینه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} E(TC) &= c_0 + c_t E(X_{m_1:m_1:n_1}) + c_u n_1 \\ &= c_0 + c_t \frac{\Psi_1(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1, p)}{\theta^{\frac{1}{r}}} + c_u n_1, \end{aligned} \quad (۱۸)$$

هرگاه Ψ_1 به صورت رابطه‌ی (۱۲) تعریف شده باشد. در بخش بعدی با در نظر گرفتن دو معیار معرفی‌شده، به تعیین پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست می‌پردازیم.

۴- طرح بهینه‌ی سانسور

برای تعیین طرح بهینه‌ی سانسور باید توزیع آن را مشخص نمود. به عبارت دیگر، باید مقدار بهینه - ی p را به دست آورد. برای این منظور p را طوری می‌یابیم که $E(TC) \leq c^*$ و

$MSPE(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}) \leq m^*$ هرگاه $MSPE$ و $E(TC)$ به ترتیب در روابط (۱۷) و (۱۸) تعریف شده‌اند و c^* و m^* مقادیر ثابت و از قبل تعیین شده هستند. از رابطه‌ی (۱۷) می‌توان نتیجه گرفت که $MSPE(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}) \leq m^*$ معادل این است که

$$\Psi_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) - {}_2Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s) \Psi_1(\tilde{R}', m_r, n_r, s, p) \frac{\Gamma(m_1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_1)} \\ \leq m^* \theta - m_1 Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s)^r,$$

به عبارت دیگر

$$\sum_{r'_s=0}^{g(r'_s)} \sum_{r'_r=0}^{g(r'_r)} \cdots \sum_{r'_{s-1}=0}^{g(r'_{s-1})} A(\tilde{R}', m_r, n_r, s) p^{\mu(\tilde{R}', s)} (1-p)^{\mu_r(\tilde{R}', m_r, n_r, s)} \\ \left\{ g(s, m_r, n_r) - {}_2Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s) k(s, m_r, n_r) m_1 \beta\left(\frac{1}{2}, m_1 + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (19) \\ \leq m^* \theta - m_1 Q(\tilde{R}, \tilde{R}', m_1, m_r, n_1, n_r, s)^r.$$

همچنین از رابطه‌ی (۱۸) نتیجه می‌شود که $E(TC) \leq c^*$ معادل است با

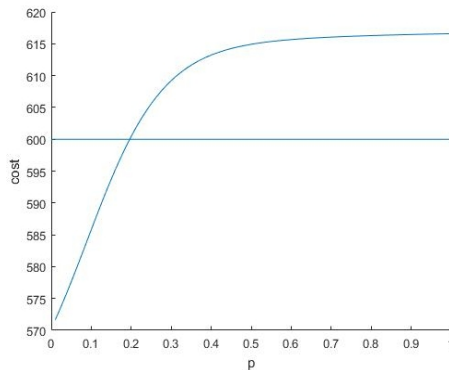
$$\Psi_1(\tilde{R}, m_1, n_1, m_1, p) \leq \theta^{\frac{1}{r}} \left(\frac{c^* - c_0 - c_u n_1}{c_t} \right). \quad (20)$$

بنابراین پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور یعنی p^{opt} در دو رابطه‌ی (۱۹) و (۲۰) صدق می‌کند.

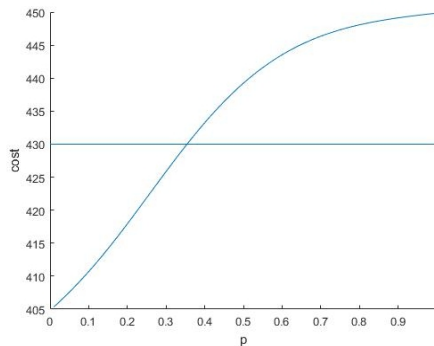
شکل ۱ نمودار تابع هزینه را با در نظر گرفتن $n_1 = 15$ ، $m_1 = 10$ ، $\theta = 1$ ، $a = b = c = d = 0$ ، $c^* = 600$ و $c_t = 35$ ، $c_u = 30$ ، $c_0 = 50$ ، ازای $c^* = 430$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل‌ها می‌توان مشاهده کرد تابع هزینه یک تابع صعودی از p است. مقدار p^{opt} مقداری از p است که به ازای آن شرط $E(TC) \leq c^*$ برقرار است. با توجه به شکل‌های ۱ و ۲ بازه‌ای را برای p می‌توان یافت که چنین شرطی برقرار شود.

شکل ۳ نیز نمودار $MSPE$ را به ازای $m_1 = m_r = 10$ ، $\theta = 1$ ، $a = b = c = d = 0$ ازای $n_1 = n_r = 15$ ، $c^* = 600$ و $c_t = 35$ ، $c_u = 30$ ، $c_0 = 50$ ، $n_1 = n_r = 10$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $\theta = 1$ به ازای $c^* = 430$ و $c_t = 35$ می‌دهد. نمودار $MSPE$ به ازای $n_1 = n_r = 10$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $\theta = 1$ و همچنین مقادیر مختلف S در شکل ۴ نمایش داده شده است. از شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان مشاهده کرد $MSPE$ نیز یک تابع صعودی از p است. مقدار p^{opt}

مقداری از p است که به ازای آن شرط $MSPE(\hat{Y}_{s,m_r;n_r}) \leq m^*$ برقرار است. با توجه به شکل‌های ۳ و ۴ بازه‌ای را می‌توان یافت که چنین شرطی برقرار شود.

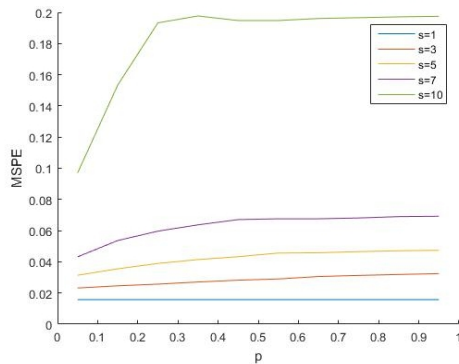


شکل (۱): نمودار تابع هزینه به ازای $\theta = 1$ ، $m_1 = 10$ ، $n_1 = 15$ ، $c_o = 50$ ، $c_u = 30$ ، $c_t = 35$ و $c^* = 600$.

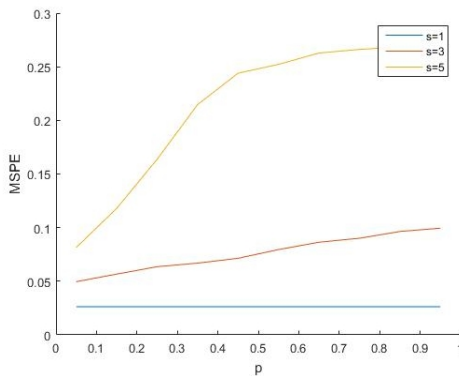


شکل (۲): نمودار تابع هزینه به ازای $\theta = 1$ ، $m_1 = 5$ ، $n_1 = 10$ ، $c_o = 50$ ، $c_u = 30$ ، $c_t = 35$ و $c^* = 430$.

حال با در نظر گرفتن هر دو شرط $E(TC) \leq c^*$ و $MSPE(\hat{Y}_{s,m_r;n_r}) \leq m^*$ و با فرض $c_t = 35$ ، $c_u = 30$ ، $c_o = 50$ ، $n_1 = n_r = 15$ ، $m_1 = m_r = 10$ ، $\theta = 1$ ، $a = b = c = d = 0$ و $c^* = 600$ و همچنین مقادیر مختلف S و m^* به محاسبه مقادیر p^{opt} می‌پردازیم. نتایج در جدول ۱ گزارش شده است. جدول ۲ نیز اطلاعات مشابه را به ازای $c^* = 430$ ، $m_1 = m_r = 5$ و $n_1 = n_r = 10$ ارائه می‌دهد. لازم به ذکر است که m^* برای S های مختلف به صورت میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار $MSPE$ در نظر گرفته شده است.



شکل (۳): نمودار $MSPE$ برای $\theta = 1$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $n_1 = n_r = 15$ و همچنین مقادیر مختلف S .



شکل (۴): نمودار $MSPE$ برای $\theta = 1$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $n_1 = n_r = 10$ و همچنین مقادیر مختلف S

جدول (۱): مقادیر p^{opt} به ازای $\theta = 1$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $n_1 = n_r = 15$ ، $c_u = 5$ ، $c_f = 35$ و $c^* = 600$ و همچنین مقادیر مختلف S .

p^{opt}	m^*	S
(0, 0/19)	0/015	1
(0, 0/19)	0/027	3
(0, 0/19)	0/039	5
(0, 0/15)	0/056	7
(0, 0/15)	0/153	10

جدول (۲): مقادیر p^{opt} به ازای $\theta=1$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $n_1 = n_r = 10$ ، $c_u = 30$ ، $c_t = 35$ و $c^* = 430$ و همچنین مقادیر مختلف S

p^{opt}	m^*	S
(0, 0/35)	0/026	1
(0, 0/26)	0/073	3
(0, 0/27)	0/186	5

۵- مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش، به منظور ارزیابی عملکرد نتایج بخش قبل، یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی انجام شده است. برای این منظور الگوریتم زیر را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

الگوریتم ۱: فرض کنید $a, c, d, \theta, m_1, m_r, n_1, n_r, c, c_u, c_t, c^*, m^*$ و S همگی معلوم باشند. در این صورت:

(۱) مقدار p^{opt} را از روابط (۱۹) و (۲۰) بیابید.

(۲) مقادیر $R_i, i=1, \dots, m_1$ و $R'_j, j=1, \dots, m_r$ را از توزیع دوجمله‌ای با پارامتر p^{opt} تولید کنید؛ یعنی

$$R_i \sim Bin(n_1 - m_1 - \sum_{k=1}^{i-1} R_k, p^{opt}), \quad i=1, \dots, m_1 - 1, \quad R_{m_1} = n_1 - m_1 - \sum_{k=1}^{m_1-1} R_k,$$

$$R'_j \sim Bin(n_r - m_r - \sum_{k=1}^{j-1} R'_k, p^{opt}), \quad j=1, \dots, m_r - 1, \quad R'_{m_r} = n_r - m_r - \sum_{k=1}^{m_r-1} R'_k.$$

(۳) تعداد m_1 و m_r متغیر تصادفی مستقل W_1, \dots, W_{m_1} و W'_1, \dots, W'_{m_r} را از توزیع یکنواخت پیوسته $U(0, 1)$ تولید کنید.

$$(۴) \text{ قرار دهید } V_i = W_i^{1 + \sum_{k=m_1-i+1}^{m_1} R_k}, \quad i=1, \dots, m_1, \text{ و } V_j = W'_j^{1 + \sum_{k=m_r-j+1}^{m_r} R'_k}, \quad j=1, \dots, m_r,$$

$$(۵) \text{ قرار دهید } U_i = 1 - \prod_{k=m_1-i+1}^{m_1} V_k, \quad i=1, \dots, m_1, \text{ و } U_j = 1 - \prod_{k=m_r-j+1}^{m_r} V'_k, \quad j=1, \dots, m_r,$$

(۶) آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو را به صورت $X_{i:m_1:n_1} = F^{-1}(U_i)$ و $Y_{s:m_r:n_r} = F^{-1}(U_s)$ به دست آورید، هرگاه F^{-1} تابع چنک توزیع رایلی است.

(۷) مقدار پیش‌بینی‌کننده‌ی نقطه‌ای بیزی $\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$ را از رابطه‌ی (۷) محاسبه کنید.

(۸) مراحل ۱ تا ۷ را به تعداد $K=10000$ بار تکرار نمایید و فرض کنید که $X_{i:m_1:n_1}(I)$ ، $Y_{s:m_r:n_r}(I)$ و $\hat{Y}_{s:m_r:n_r}(I)$ به ترتیب مقدار آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو و پیش-بینی‌کننده‌ی نقطه‌ای به دست آمده در تکرار I ام باشند ($I = 1, \dots, K$).

جدول (۳): مقادیر $\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$ ، p^{opt} ، $EB(\hat{Y}_{s:m_r:n_r})$ و $EECT$ ، $EMSPE(\hat{Y}_{s:m_r:n_r})$ ، $c_u = 30$ ، $c_o = 50$ ، $n_1 = n_r = 10$ ، $m_1 = m_r = 5$ ، $a = b = c = d = 0$ ، $c_t = 35$ و مقادیر مختلف s و θ

EB	$EECT$	$EMSPE$	$\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$	p^{opt}	s	s	c^*	θ
۰/۰۱۹	۴۰۱/۶۶۰	۰/۰۳۵	۰/۳۴۲	۰/۳۲	۰/۰۵۲	۱	۴۰۴/۸۴	۰/۷۵
۰/۰۴۷	۳۹۶/۳۲	۰/۰۷۸	۰/۷۴۶	۰/۲۲	۰/۰۹۶	۳		
۰/۰۸۳	۳۹۳/۲۸	۰/۱۷۷	۱/۱۵۶	۰/۱۶	۰/۲۲۹	۵		
۰/۰۱۵	۳۸۸/۶۹	۰/۰۲۵	۰/۲۹۶	۰/۳۲	۰/۰۲۶	۱	۳۸۸/۷۸	۱
۰/۰۴۴	۳۸۶/۰۴	۰/۰۶۰	۰/۶۵۷	۰/۳۲	۰/۰۷۲	۳		
۰/۰۷۹	۳۸۳/۹۵	۰/۱۵۳	۱/۰۴۷	۰/۲۰	۰/۱۷۱	۵		
۰/۰۱۰	۳۷۲/۱۱	۰/۰۱۳	۰/۲۰۹	۰/۳۲	۰/۰۱۳	۱	۳۷۷/۴۲	۲
۰/۰۳۲	۳۶۹/۴۳	۰/۰۳۳	۰/۴۷۹	۰/۳۲	۰/۰۳۶	۳		
۰/۰۵۲	۳۶۶/۶۴	۰/۰۷۳	۰/۷۲۷	۰/۱۸	۰/۰۸۵	۵		

(۹) مقادیر متوسط پیش‌بینی‌کننده‌ی نقطه‌ای بیزی، متوسط میانگین توان دوم خطای پیش-بینی، متوسط تابع هزینه و متوسط اربیی پیش‌بینی‌کننده‌ی نقطه‌ای بیزی را به ترتیب از روابط زیر به دست آورید

$$\hat{Y}_{s:m_r:n_r} = \frac{1}{K} \sum_{I=1}^K \hat{Y}_{s:m_r:n_r}(I),$$

$$EMSPE(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}) = \frac{1}{K} \sum_{I=1}^K (\hat{Y}_{s:m_r:n_r}(I) - Y_{s:m_r:n_r}(I))^2,$$

$$EECT = c_o + c_t \frac{1}{\theta^r} \frac{1}{K} \sum_{I=1}^K X_{m_1:m_1:n_1}(I) + c_u n,$$

$$EB(\hat{Y}_{s:m_r:n_r}) = \frac{1}{K} \sum_{I=1}^K (\hat{Y}_{s:m_r:n_r}(I) - Y_{s:m_r:n_r}(I)).$$

با به کارگیری الگوریتم ۱ و با فرض $c_u = 30$ ، $c_o = 50$ ، $n_1 = n_r = 10$ ، $m_1 = m_r = 5$ و همچنین مقادیر مختلف a ، c ، d ، θ ، s و m^* مقادیر $EECT$ ، $EMSPE$ و $c_t = 35$

EB محاسبه و در جداول ۳، ۴ و ۵ ارائه شده‌اند. در جداول ۳، ۴ و ۵ مقادیر c^* و m^* به ترتیب میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار $EECT$ و $EMSPE$ در نظر گرفته شده‌اند.

جدول (۴): مقادیر p^{opt} ، $\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$ ، $EMSPE(\hat{Y}_{s:m_r:n_r})$ ، $EECT$ و $EB(\hat{Y}_{s:m_r:n_r})$ به ازای $b=0$ ، $\theta=1$ ، $m_1=m_r=5$ ، $n_1=n_r=10$ ، $c_u=30$ ، $c_o=50$ ، $c_t=35$ و d و c ، a ، s مقادیر مختلف

EB	$EECT$	$EMSPE$	$\hat{Y}_{s:m_r:n_r}$	p^{opt}	m^*	s	c^*	d	c	a
۰/۰۰۲	۳۸۸/۵۷	۰/۰۲۵	۰/۲۸۰	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۱	۳۸۸/۷۸	۲	۰/۵	۱
۰/۰۳۲	۳۸۸/۷۱	۰/۰۶۰	۰/۶۰۱	۰/۳۲	۰/۰۳۴	۳				
۰/۰۲۵	۳۸۲/۲۱	۰/۱۲۲	۰/۹۲۰	۰/۱۸	۰/۱۵۹	۵				
۰/۰۰۰	۳۸۸/۶۲	۰/۰۲۵	۰/۲۸۰	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۱	۳۸۸/۷۸	۲	۱	۰/۵
۰/۰۰۸	۳۸۸/۸۳	۰/۰۶۱	۰/۶۳۷	۰/۳۲	۰/۰۶۷	۳				
۰/۰۴۱	۳۸۲/۷۵	۰/۱۲۷	۰/۹۷۸	۰/۱۷	۰/۱۵۹	۵				
۰/۰۰۲	۳۸۸/۶۸	۰/۰۲۴	۰/۲۷۹	۰/۳۲	۰/۲۵۵	۱	۳۸۸/۷۸	۱	۲	۰/۵
۰/۰۲۳	۳۸۸/۷۰	۰/۰۶۱	۰/۶۵۳	۰/۳۲	۰/۰۶۸	۳				
۰/۰۰۹	۳۸۱/۸۵	۰/۱۳۲	۱/۰۱۰	۰/۱۴	۰/۱۶۳	۵				
۰/۰۱۳	۳۸۸/۶۸	۰/۰۲۵	۰/۲۶۶	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۱	۳۸۸/۷۸	۰/۵	۲	۱
۰/۰۰۳	۳۸۸/۴۶	۰/۰۵۸	۰/۶۲۳	۰/۳۲	۰/۰۶۷	۳				
۰/۰۵۵	۳۸۲/۸۷	۰/۱۳۲	۰/۹۹۳	۰/۱۷	۰/۱۵۹	۵				
۰/۰۳۴	۳۸۸/۶۷	۰/۰۲۵	۰/۲۴۴	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۱	۳۸۸/۷۸	۱	۰/۵	۲
۰/۰۷۹	۳۸۸/۶۶	۰/۰۶۰	۰/۵۵۴	۰/۳۲	۰/۰۷۴	۳				
۰/۰۰۹	۳۸۶/۱۰	۰/۱۵۵	۰/۹۱۷	۰/۲۵	۰/۱۶۶	۵				
۰/۰۳۶	۳۸۸/۵۶	۰/۰۲۶	۰/۲۴۳	۰/۳۲	۰/۰۲۵	۱	۳۸۸/۷۸	۰/۵	۱	۲
۰/۰۶۷	۳۸۸/۶۸	۰/۰۶۱	۰/۵۶۴	۰/۳۲	۰/۰۷۰	۳				
۰/۰۶۸	۳۸۲/۴۸	۰/۱۳۰	۰/۸۸۷	۰/۳۰	۰/۱۶۶	۵				

همچنین در جداول ۳، ۴ و ۵ مقادیر p^{opt} گزارش شده در واقع کران‌های بالای بازه‌ای هستند که به ازای کلیه‌ی مقادیر آن بازه دو شرط (۱۹) و (۲۰) برقرار هستند. به عبارت دیگر، با توجه به مقدار p^{opt} در جداول بازه‌ی اصلی به صورت $(0, p^{opt})$ است. از جداول ۳، ۴ و ۵ می‌توان مشاهده کرد که:

- (۱) در تمامی حالات دو شرط $EMSPe \leq m^*$ و $EECT \leq c^*$ برقرار است.
- (۲) همان‌طور که انتظار می‌رود $\hat{Y}_{S:m_r:n_r}$ تابعی صعودی از S است.
- (۳) هرگاه همه مقادیر ثابت باشند، تابع $EMSPe$ نیز برحسب S صعودی است.
- (۴) با افزایش مقادیر θ مقدار p^{opt} نیز افزایش می‌یابد ولی مقادیر $EMSPe$ و $EECT$ کاهش می‌یابند.

جدول (۵): مقادیر p^{opt} ، $\hat{Y}_{S:m_r:n_r}$ ، $EMSPe(\hat{Y}_{S:m_r:n_r})$ ، $EECT$ و $EB(\hat{Y}_{S:m_r:n_r})$ به ازای $a=b=c=d=0$ ، $\theta=1$ ، $c_o=50$ ، $c_u=30$ ، $c_t=35$ و همچنین مقادیر مختلف S ، m_1 ، m_r و n_1 و n_r

EB	$EECT$	$EMSPe$	$\hat{Y}_{S:m_r:n_r}$	p^{opt}	m^*	S	c^*	n_r	n_1	m_r	m_1
۰/۰۱۵	۳۸۸/۶۲	۰/۰۲۵	۰/۲۹۵	۰/۳۲	۰/۰۲۶	۱	۳۸۸/۷۸	۱۰	۱۰	۵	۵
۰/۰۴۴	۳۸۸/۷۱	۰/۰۶۶	۰/۶۷۶	۰/۳۲	۰/۰۷۲	۳					
۰/۰۷۹	۳۸۳/۷۵	۰/۱۵۲	۱/۰۴۷	۰/۲۰	۰/۱۷۱	۵					
۰/۰۰۵	۶۹۳/۳۶	۰/۰۱۱	۰/۲۰۳	۰/۱۹	۰/۰۱۱	۱	۶۹۳/۴۷	۲۰	۲۰	۱۰	۱۰
۰/۰۲۰	۶۹۳/۴۲	۰/۰۲۹	۰/۶۰۴	۰/۱۹	۰/۰۳۴	۵					
۰/۰۶۰	۶۸۹/۳۱	۰/۱۱۴	۱/۱۸۰	۰/۱۵	۰/۱۱۶	۱۰					
۰/۰۱۱	۳۸۸/۷۸	۰/۰۱۳	۰/۲۰۹	۰/۳۲	۰/۰۱۲	۱	۳۸۸/۷۸	۲۰	۱۰	۱۰	۵
۰/۰۳۴	۳۸۵/۳۰	۰/۰۴۵	۰/۶۳۷	۰/۲۴	۰/۰۴۷	۵					
۰/۱۱۸	۳۸۱/۷۶	۰/۱۳۲	۱/۱۸۴	۰/۱۴	۰/۱۷۲	۱۰					
۰/۰۰۸	۶۹۳/۲۳	۰/۰۲۳	۰/۲۸۷	۰/۱۹	۰/۰۲۳	۱	۶۹۳/۴۷	۱۰	۲۰	۵	۱۰
۰/۰۲۲	۶۹۳/۴۲	۰/۰۴۳	۰/۶۱۷	۰/۱۹	۰/۰۵۷	۳					
۰/۰۴۱	۶۹۳/۴۵	۰/۱۰۸	۱/۰۰۰	۰/۱۹	۰/۱۲۷	۵					

۶- مثال واقعی

در اینجا زمان‌های شکست مربوط به ۲۳ بلبرینگ را در نظر می‌گیریم. این زمان‌های شکست که توسط [۲۸] به‌عنوان داده‌هایی از توزیع رایلی مورد استفاده قرار گرفتند، عبارتند از:

۰/۱۷۸۸، ۰/۲۸۹۲، ۰/۳۳، ۰/۴۱۵۲، ۰/۴۲۱۲، ۰/۴۵۶۰، ۰/۴۸۴۸، ۰/۵۱۸۴، ۰/۵۱۹۶،
 ۰/۵۴۱۲، ۰/۵۵۵۶، ۰/۶۷۸۰، ۰/۶۸۶۴، ۰/۶۸۸۸، ۰/۸۴۱۲، ۰/۹۳۱۲، ۰/۹۸۶۴،
 ۱/۰۵۱۲، ۱/۰۵۸۴، ۱/۲۷۹۲، ۱/۲۸۰۴، ۱/۷۳۴۰

نتیجه‌گیری

تعیین طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دو از جمله مسائلی است که تاکنون توسط پژوهش-گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. در برخی موارد امکان این که مقادیر سانسور شده مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده باشند وجود ندارد. به عبارتی طرح سانسور متغیری تصادفی است. در این مقاله با فرض این که طرح سانسور متغیری تصادفی از توزیع دوجمله‌ای باشد به تعیین پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور می‌پردازیم. در این راستا دو معیار را به کار می‌بریم. اولین معیار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی برای پیش‌بینی‌کننده‌ی نقطه‌ای بیزی در مسئله‌ی پیش‌بینی دو نمونه‌ای است. معیار دیگر نیز تابع هزینه‌ی طراحی سانسور فزاینده‌ی نوع دو می‌باشد. در ادامه پارامتر بهینه‌ی توزیع طرح سانسور طوری تعیین می‌شود که این دو معیار از مقادیر مشخص از قبل تعیین شده‌ای کمتر باشند. نتایج مقاله نشان داد که این دو معیار توابعی صعودی بر حسب p هستند و بنابراین مقادیر کوچک‌تر برای p منجر به نتایج بهتری می‌شود. در این مطالعه معیارهای دیگری نظیر متوسط طول فاصله‌های پیش‌بینی HPD یا فاصله‌های پیش‌بینی با دم‌های برابر برای مشاهده‌ی آینده نیز می‌توانند مورد بررسی قرار گیرند.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از داوران محترم برای ارائه پیشنهادهای سازنده‌شان در بهبود این مقاله تشکر و قدردانی می‌نمایند.

منابع

- [1] Aitchison, J and Dunsmore, I. R. (1975). *Statistical Prediction Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [2] Geisser, S. (1993). *Predictive Inference: An Introduction*. Chapman and Hall, New York.
- [3] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Birkhauser, Boston.
- [4] Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: an appraisal. *Test*, **16**, 211-259.
- [5] Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014). *The Art of Progressive Censoring*. Birkhauser, New York.
- [6] بصیری، الهام (۱۳۸۹). طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [7] Balakrishnan, N. and Lin, C. T. (2002). Exact linear inference and prediction for exponential distributions based on general progressively

- type-II censored samples. *Journal of Statistical Computational and Simulation*. **72**, 677-686.
- [8] Raqab, M. Z., Asgharzadeh, A. and Valiollahi, R. (2010). Prediction for Pareto distribution based on progressively type-II censored samples. *Computational Statistics and Data Analysis*. **54**, 1732-1743.
- [9] Asgharzadeh, A. and Valiollahi, R. (2009). Inference for the proportional hazards family under progressive type-II censoring. *Journal of the Iranian Statistical Society*. **8**, 35-53.
- [10] Asgharzadeh, A. and Valiollahi, R. (2010). Point prediction for the proportional hazards family under progressive type-II censoring. *Journal of the Iranian Statistical Society*. **9**, 127-148.
- [11] Ahmadi, J., MirMostafaei, S. M. T. K. and Balakrishnan, N. (2012). Bayesian prediction of k-record values based on progressively censored data from exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **82**, 51-62.
- [12] Basiri, E., and Ahmadi, J. (2015). Prediction intervals for generalized-order statistics with random sample size. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **85**(9), 1725-1741.
- [13] Burkschat, M., Cramer, E., and Kamps, U. (2006). On optimal schemes in progressive censoring. *Statistics and probability letters*, **76**(10), 1032-1036.
- [14] Burkschat, M., Cramer, E., and Kamps, U. (2007). Linear estimation of location and scale parameters based on generalized order statistics from generalized Pareto distributions. *Recent Developments in Ordered Random Variables*. 253-261.
- [15] Burkschat, M., Cramer, E., & Kamps, U. (2007). Optimality criteria and optimal schemes in progressive censoring. *Communications in Statistics—Theory and Methods*. **36**(7), 1419-1431.
- [۱۶] بصیری، الهام؛ احمدی، جعفر (۱۳۸۹). طرح بهینه سانسور فزاینده در توزیع بر نوع ۱۲ بر اساس اطلاع فیشر. دهمین کنفرانس آمار ایران.
- [17] Volterman W., Davies F.K. and Balakrishnan N. (2012). Pitman closeness as a criterion for the determination of the optimal progressive censoring scheme. *Statistical Methodology*, **9**(6), 563-572.
- [18] Pradhan, B. and Kundu, D. (2013). Inference and optimal censoring schemes for progressively censored Birnbaum–Saunders distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143**(6), 1098-1108.

- [19] Bhattacharya, R., Pradhan, B., and Dewanji, A. (2016). On optimum life-testing plans under Type-II progressive censoring scheme using variable neighborhood search algorithm. *Test*, **25(2)**, 309-330.
- [20] Mishra, N. (2018). Optimal one-step censoring schemes under entropy criterion. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 1-14.
- [21] Salemi, U. H., Rezaei, S., Si, Y., and Nadarajah, S. (2018). On Optimal Progressive Censoring Schemes for Normal Distribution. *Annals of Data Science*, **5(4)**, 637-658.
- [22] Tse, S. K. and Yuen, H. K. (1998). Expected experiment times for the Weibull distribution under progressive censoring with random removals. *Journal of Applied Statistics*. **25(1)**, 75-83.
- [23] Tse, S. K., Yang, C. and Yuen, H. K. (2000). Statistical analysis of Weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals. *Journal of Applied statistics*. **27(8)**, 1033-1043.
- [24] Wu, S. J. (2003). Estimation for the two-parameter Pareto distribution under progressive censoring with uniform removals. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. **73(2)**, 125-134.
- [25] Amin, Z. H. (2008). Bayesian inference for the Pareto lifetime model under progressive censoring with binomial removals. *Journal of Applied Statistics*. **35(11)**, 1203-1217.
- [26] Kumar, D., Singh, U., Singh, S. K., and Bhattacharyya, G. (2015). Bayesian Estimation of Exponentiated Gamma Parameter for Progressive Type II Censored Data With Binomial Removals. *Journal of Statistics Applications and Probability*, **4(2)**, 265-273.
- [27] Singh, S. K., Singh, U., and Kumar, M. (2016). Bayesian Estimation for Poisson-exponential Model under Progressive Type-II Censoring Data with Binomial Removal and Its Application to Ovarian Cancer Data. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. **45(9)**, 3457-3475.
- [28] Dey, S. and Dey, T. (2014). Statistical inference for the Rayleigh distribution under progressively Type-II censoring with binomial removal. *Applied Mathematical Modelling*. **38(3)**, 974-982.
- [29] Soliman, A. A., Ellah, A. H. A., Abou-Elheggag, N. A., and El-Sagheer, R. M. (2013). Bayesian and frequentist prediction using progressive Type-II censored with binomial removals. *Intelligent Information Management*. **5(5)**, 162-170.
- [30] Dey, S., Kayal, T., and Tripathi, Y. M. (2017). Statistical Inference for the Weighted Exponential Distribution under Progressive Type-II

-
- Censoring with Binomial Removal. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **37(2)**, 188-208.
- [31] Meshkat, R., and Dehqani, N. (2018). Point prediction for the proportional hazards family based on progressive Type-II censoring with binomial removals. *Journal of Statistical Modelling: Theory and Applications (JSMTA)*. **1(1)**, 19-35.
- [32] Shahab, S., Anwar, S., and Islam, A. U. (2015). Optimal design of step stress partially accelerated life test under progressive type-II censored data with random removal for Frechet distribution. *Reliability: Theory & Applications*, **2(37)**, 12-26.
- [33] Anwar, S., Shahab, S. S., and Islam, A. U. I. (2016). Optimum Step Stress Partially Accelerated Life Test under Progressive Failure Censoring with Random Removals for Generalized Pareto Distribution. *International Journal of Trend in Research and Development*, **4(1)**, 62-71.

The Optima Scheme in Type II Progressive Censoring with Random Removals for the Rayleigh Distribution Based on Two-Sample Bayesian Prediction and Cost Function

Elham Basiri^{*}, Sakine Beigi^{**}

^{*}Department of Statistics, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran

^{**}Department of Industrial Engineering, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran

Received: April 18 2019

Accepted for publication: November 30 2019

Corresponding author: Elham_basiri2000@yahoo.com

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

A type II progressive censoring scheme is one of the censoring methods that is important in life-testing studies. This method of censoring allows the experimenter to withdraw some of the tested units at different stages of testing. One question that arises when designing a type II progressive censoring is how we can decide to remove several units from the test at each step? Different answers can be made to answer this question by considering different criteria. In this paper, assuming the censoring scheme is a random variable from Binomial distribution, we intend to obtain the optimal parameter for the distribution of censoring scheme when the distribution is the Rayleigh distribution by considering two criteria, the cost of testing and the Mean squared prediction error in the two-sample prediction problem. To illustrate the effectiveness of the results, a simulation study and a real data example are presented with the help of MATLAB software.

Keywords: Two-sample Bayesian prediction, Rayleigh distribution, Mean squared prediction error, Cost function, Optimal censoring scheme

Mathematics Subject Classification (2010): 62F15, 62N01.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).