

تعمیمی از مدل تصمیم گیری چند شاخصه ی TOPSIS مبتنی بر یکنواخت سازی مطلوبیت شاخص ها

احمد کاظمی فرد^۱

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۸/۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۱

چکیده: اگرچه TOPSIS یکی از پرکاربردترین مدل ها در تحلیل مسائل تصمیم گیری چند شاخصه (چند معیاره) است، اما محدودیتی که در استفاده از آن وجود دارد، شرط افزایشی یا کاهشی یکنواخت بودن مطلوبیت شاخص های مسئله است. از طرفی در دنیای واقعی در بسیاری از موارد برخی از شاخص های مسائل تصمیم گیری فاقد این ویژگی هستند. چنین وضعیتی باعث می شود که به منظور استفاده از این مدل، فرض غیرواقعی مطلوبیت یکنواخت به چنین شاخص هایی تحمیل شده و لذا صحت نتایج حاصل مورد تردید خواهد بود. در این مقاله با رفع این الزام محدودیت آور، تعمیمی از مدل TOPSIS را فراهم آورده ایم تا از این رهگذر دامنه ی استفاده از این روش تصمیم گیری توسعه یابد.

واژه های کلیدی: تصمیم گیری چندمعیاره، تصمیم گیری چند شاخصه، نظریه ی فازی، مدل TOPSIS، مطلوبیت

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۵۰، ۶۲C۸۰

۱- مقدمه

امروزه پیچیدگی های ذاتی، متنوع و روزافزون در مسائل تصمیم گیری، مشتمل بر انواع عدم قطعیت ها و تضادهای فزاینده، در زمینه های گوناگونی مانند اقتصاد، علوم پایه، مدیریت سازمانی، علوم مهندسی، علوم اجتماعی، روانشناسی و ... اهمیت بیش از پیش استفاده از مدل های مناسب تصمیم گیری را نشان می دهد. مدل های تصمیم گیری چندمعیاره (MCDM) و به طور ویژه مدل های تصمیم گیری چند شاخصه (MADM) که از دهه ی هفتاد میلادی به

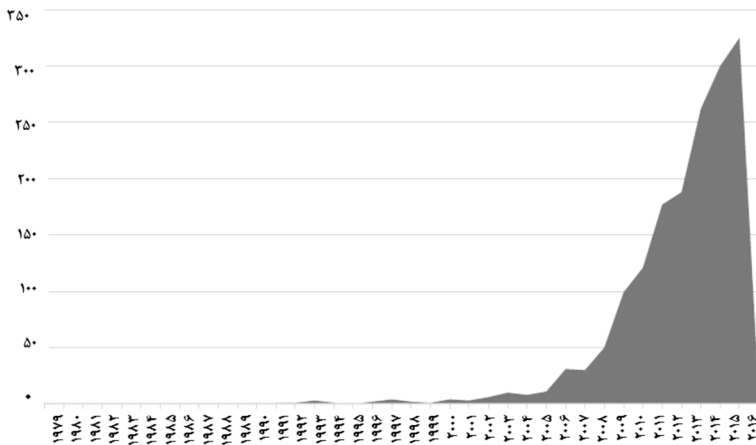
بعد مطرح شده‌اند به موازات افزایش پیچیدگی‌های مسائل، مرتباً مورد بازنگری و توسعه قرار گرفته‌اند. برخی از مهم‌ترین این روش‌ها عبارتند از LINMAP، ELECTRE، SAW، MRS، AHP، ANP، AKUTA TOPSIS، MUSA، VIKORE، COPRAS، MOORA، PROMETHEE، SWARA، FARE و BWM [۱]. از این میان دو مدل بسیار پر کاربرد که همواره در کانون توجه محققان و مورد استفاده‌ی فراوان در تحلیل مسائل تصمیم‌گیری بوده‌اند عبارتند از مدل تحلیل سلسله مراتبی (AHP) و مدل TOPSIS که به ترتیب در سال ۱۹۷۰ توسط توماس ال ساعتی [۲] و سال ۱۹۸۱ توسط هوانگ و یون ارائه شده‌اند [۳].

از آنجاکه ارزیابی اوزان شاخص‌ها نقش مهمی در فرایندهای تصمیم‌گیری ایفا می‌کند، روش‌های متنوع وزن‌یابی نیز همواره مورد اهتمام پژوهشگران حوزه‌ی تصمیم‌گیری بوده است. برخی از روش‌های رایج ارزیابی اوزان شاخص‌ها عبارتند از روش آنترپوی، روش بُردار ویژه، روش LINMAP، روش کمترین مجذورات وزین شده و استفاده از ماتریس‌های مقایسات زوجی [۱]. به‌ویژه مفهوم مقایسات زوجی از این بابت که مبنای روش AHP نیز قرار می‌گیرد از اهمیت بیشتری برخوردار است.

سادگی الگوریتم، انعطاف‌پذیری در لحاظ نمودن شاخص‌های کمی و کیفی و نیز توانایی پذیرش شاخص‌های متعارض از دلایل عمده‌ی توسعه‌ی به‌کارگیری روش AHP بوده است [۱]؛ اما علیرغم این محاسن و از آنجاکه استفاده از روش AHP مبتنی بر انجام همه‌ی مقایسات زوجی در رابطه با شاخص‌ها و گزینه‌هایی است که در صورت‌بندی مسئله، اصطلاحاً یک سلسله‌مراتب را تشکیل داده باشند، استفاده از هر ماتریس مقایسات زوجی که شامل n شاخص باشد مستلزم انجام $\frac{n(n-1)}{2}$ مقایسه خواهد بود و همین مسئله احتمال بروز ناسازگاری‌های بیشتر در قضاوت‌ها را به موازات افزایش تعداد شاخص‌ها تشدید می‌کند. از همین رو تلاش‌های متعددی در راستای کاهش تعداد مقایسات زوجی مورد نیاز صورت گرفته است. به‌ویژه کرسولاین و همکاران در [۴] روش SWARA را معرفی کرده‌اند که در آن به ازای هر n شاخص، فقط n قضاوت زوجی مورد نیاز خواهد بود و در واقع پس از تنظیم شاخص‌ها به ترتیب نزولی اهمیت، هر شاخص صرفاً با شاخص تالی خود مقایسه می‌گردد و از این منظر نسبت به روش AHP بهبود قابل توجهی دارد. تعمیم‌هایی از روش SWARA نیز صورت گرفته است که از جمله می‌توان به [۵] اشاره نمود. رضایی نیز در [۶] به معرفی روش بهترین-بدترین (BWM) پرداخته است که در آن همه‌ی شاخص‌ها صرفاً با مهم‌ترین و کم‌اهمیت‌ترین آن‌ها مقایسه می‌گردند و لذا فرایند آن به ازای n شاخص، مستلزم $2n-3$ مقایسه خواهد بود که نسبت به روش AHP دارای بهبود است. علیرغم اینکه تعداد مقایسات زوجی در روش BWM

نسبت به روش SWARA بیشتر است، اما یکی از مزایای روش BWM آن است که در خلال فرایند آن میزان ناسازگاری در قضاوت‌ها نیز ارزیابی می‌شود. روش BWM مجدداً توسط رضایی توسعه داده شده است [۷]. همان‌گونه که گفته شد روش TOPSIS نیز از جمله روش‌های تصمیم‌گیری است که توجه روزافزون بسیاری از پژوهشگران را از منظر کاربرد یا تلاش برای بهبود و توسعه‌ی عملکرد آن به خود اختصاص داده است. همان‌طور که

شکل (۱) نشان می‌دهد، در دهه‌های اخیر روند کاملاً رو به تزایدی در انتشار مقالاتی که در آن‌ها از مدل TOPSIS جهت حل و فصل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره استفاده شده است، وجود دارد؛ به طوری که فقط در محدوده‌ی زمانی سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ میلادی حدود پنجاه مقاله‌ی تحقیقاتی معتبر به زبان انگلیسی در ارتباط با توسعه و بهبود این مدل منتشر شده است [۸].



شکل (۱): توزیع مقالات منتشر شده در ارتباط با مدل TOPSIS مبتنی بر تعداد در سال (میلادی) [۱]

همچنین در یک مطالعه در سال ۲۰۱۲ با بررسی ۲۶۹ مقاله که در بیش از ۱۰۰ مجله علمی منتشر شده و در آن‌ها از مدل TOPSIS برای تحلیل مسائل جهان واقعی استفاده گردیده، پراکندگی حوزه‌های مربوطه به ترتیب فراوانی عبارتند از مدیریت زنجیره تأمین و لجستیک ۲۷/۵ درصد، سیستم‌های طراحی، مهندسی و ساخت ۲۳ درصد، مدیریت کسب و کار و بازاریابی ۱۲/۳ درصد، مدیریت سلامت، ایمنی و محیط‌زیست ۱۰/۴ درصد، مدیریت منابع انسانی ۸/۹ درصد، مدیریت انرژی ۵/۲ درصد، مهندسی شیمی ۲/۶ درصد، مدیریت منابع آبی ۲/۶ درصد و سایر موارد [۹] به‌عنوان نمونه‌هایی دیگر، در [۱۰] شوکلا و همکاران به بررسی مقالات مبتنی بر استفاده از روش TOPSIS در فرایندهای مختلف تولید پرداخته‌اند و در [۱۱] نیز کاربردهایی

از به کارگیری روش TOPSIS در حوزه‌ی صنعت که منتهی به سال ۲۰۱۸ میلادی هستند مرور شده است. مجموعه‌ی این مطالب مؤید اهمیت فزاینده و همچنین گستردگی حوزه‌های استفاده از مدل TOPSIS در حل و فصل مسائل دنیای واقعی است.

از طرفی نمونه‌هایی از تعمیم‌ها که به مرور از مدل TOPSIS توسط محققین ارائه گردیده و موجب توسعه‌ی دامنه‌ی استفاده یا بهبود عملکرد آن شده است عبارتند از تصمیم‌گیری گروهی به روش TOPSIS به جای تصمیم‌گیری فردی [۱۲] تصمیم‌گیری به روش TOPSIS در محیط فازی (نوع اول و دوم)، به جای محیط قطعی [۱۳-۱۷] به کارگیری روش TOPSIS با استفاده از اعداد شهودی فازی [۱۳ و ۱۸] به کارگیری روش TOPSIS با استفاده از اعداد بازه‌ای [۱۳، ۱۹ و ۲۰] استفاده از مقادیری بازه‌ای فازی در روش TOPSIS [۹] استفاده از تو صیغ‌های زبانی به جای استفاده از اعداد مطلق در روش TOPSIS [۲۱]. از دیگر تغییراتی که نسبت به نسخه‌ی اولیه‌ی TOPSIS ایجاد شده است می‌توان از استفاده از روابط خاکستری [۲۲ و ۲۳] و ترکیب روابط خاکستری و آنتروپی فازی با روش TOPSIS [۲۴] ترکیب TOPSIS با روابط خاکستری بهبود یافته [۲۵]. بهینه‌سازی پارامتریک به روش TOPSIS [۲۶] ترکیب روش TOPSIS و شبکه‌های عصبی [۲۷] استفاده از فاصله‌های آماری به جای فاصله‌ی اقلیدسی در روش TOPSIS [۲۸] استفاده از TOPSIS فازی برای تحلیل کلان داده‌ها [۲۹] مدل TOPSIS مبتنی بر فاصله، شباهت و همبستگی [۳۰]. علاوه بر این موارد، ترکیب مدل TOPSIS با سایر روش‌های تصمیم‌گیری نیز مورد اتمام برخی محققین بوده است. از جمله ترکیب روش‌های AHP و TOPSIS [۳۱، ۳۲، ۳۳]. ترکیب روش‌های TOPSIS و SWARA [۳۴] ترکیب روش‌های TOPSIS و BWM [۳۵] ترکیب روش‌های TOPSIS، AHP و SAW [۳۶] تعمیم روش TOPSIS به مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه و محیط‌های پیوسته با داده‌های قطعی [۳۷] و تعمیم روش TOPSIS به مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه و محیط‌های پیوسته با داده‌های فازی نیز انجام شده است [۳۸].

بدیهی است که این تعمیم‌ها مرتباً حوزه‌های استفاده از مدل TOPSIS را در انواع مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره گسترش داده است؛ اما علی‌رغم مزایا و گستردگی حوزه‌های استفاده از مدل TOPSIS، یک محدودیت اساسی که ناشی از الگوریتم این مدل است باعث می‌شود که در موارد بسیار مهمی غیرقابل استفاده بوده یا اینکه با لحاظ کردن برخی مفروضات غیرمعقول و غیرواقعی از آن استفاده شود. این محدودیت عبارت است از فرض مطلوبیت افزایشی یا کاهش‌ی یکنواخت در شاخص‌های تصمیم‌گیری. این در حالی است که چنین مفروضاتی در عالم واقع ممکن است مصداق نداشته باشند. به عنوان نمونه در انتخاب پیمانکار جهت انجام یک پروژه، سه شاخص که دارای اهمیت حیاتی هستند عبارتند از کیفیت، قیمت و زمان تکمیل پروژه. در این گونه مسائل شاخص کیفیت، دارای مطلوبیت افزایشی یکنواخت و دو شاخص دیگر

دارای مطلوبیت کاهشی یکنواخت تلقی می‌گردند؛ اما معمولاً در انجام پروژه‌های بسیار مهم، کارفرما می‌تواند به کمک گروهی از خبرگان به‌طور مثال به برآوردی از حداقل قیمت منطقی ممکن جهت انجام پروژه دست یابد. این بدان معناست که کارفرمایان به‌طور طبیعی به قیمت‌هایی که از طرف پیمانکاران ارائه گردیده و به میزان قابل توجهی پایین‌تر از حداقل قیمت برآورد شده باشند، به دیده تردید خواهند نگریست. لذا می‌توان گفت در چنین مواردی شاخص قیمت تا حد حداقل برآورد شده، دارای مطلوبیت افزایشی بوده و پس از آن حالت مطلوبیت کاهشی (اکید یا غیر اکید) به خود خواهد گرفت. از طرفی زمان مطلوب تکمیل یک پروژه معمولاً بین زمان نرمال و زمان ضربتی برآورد شده توسط خبرگان در نوسان است، لذا علی‌القاعده زمان‌های کوتاه‌تر از زمان ضربتی که توسط برخی پیمانکاران اعلام می‌شود غیر کارشناسی به نظر رسیده و موجب بدبینی کارفرمایان خواهد شد، بنابراین شاخص زمان تکمیل پروژه نیز تا حد زمان ضربتی دارای مطلوبیت افزایشی و پس از آن دارای حالت مطلوبیت کاهشی (اکید یا غیر اکید) خواهد بود. علاوه بر این، بایستی دقت کرد که کوتاه شدن زمان پروژه تا حد زمان ضربتی، ممکن است به علت اینکه منجر به هزینه‌ی ضربتی بسیار بالا و غیرقابل تأمین گردد، مطلوب نباشد. در چنین مواردی زمان مطلوب، ارزشی میان‌ی بین زمان‌های نرمال و ضربتی ارزیابی می‌گردد؛ بنابراین در مجموع می‌توان گفت فرض کاهشی یکنواخت بودن شاخص زمان تکمیل پروژه در بسیاری از موارد یک فرض غیرمعقول و غیرواقعی است. از نظرگاهی دیگر به‌واسطه‌ی همبستگی موجود بین قیمت و کیفیت، ممکن است افزایش کیفیت بیش‌ازحد، منجر به تحمیل هزینه‌های غیرقابل تأمین گردد. در نتیجه فرض تلقی شاخص کیفیت نیز به‌عنوان شاخصی با مطلوبیت افزایشی، ممکن است ماهیتاً صادق نباشد.

پرواضح است که بدون در نظر گرفتن این واقعیات، استفاده از مدل TOPSIS در رتبه‌بندی مربوط به بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری خالی از اشکال نبوده یا دامنه‌ی استفاده از آن بسیار محدود می‌شود. در این مقاله تلاش شده است تا با رفع این محدودیت، استفاده از مدل TOPSIS را به حوزه‌هایی از مسائل تصمیم‌گیری که در آن‌ها فرض مطلوبیت افزایشی یا کاهشی شاخص‌ها لزوماً برقرار نیست، گسترش دهیم.

۲- الگوریتم مدل TOPSIS

الگوریتم این مدل به‌گونه‌ای است که در آن از تمامی اطلاعات گزینه‌ها در محاسبات استفاده می‌شود و این ویژگی از نظرگاه دقت در رتبه‌بندی گزینه‌ها یک حسن مهم محسوب می‌گردد.

فرض کنیم در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری چند شاخصه، اطلاعات کمی مربوط به m گزینه‌ی A_1, A_2, \dots, A_m در ارتباط با n شاخص C_1, C_2, \dots, C_n که در آن C_1, C_2, \dots, C_l شاخص‌هایی با مطلوبیت افزایشی یکنواخت و $C_{l+1}, C_{l+2}, \dots, C_n$ شاخص‌هایی با مطلوبیت کاهشی یکنواخت

هستند، در قالب ماتریسی مانند $A = [r_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ که اصطلاحاً ماتریس تصمیم‌گیری نامیده می‌شود و در آن مقدار متناظر به گزینه i ام ($i=1, 2, \dots, m$) در ارتباط با شاخص j ام ($j=1, 2, \dots, n$) است منعکس شده است. در این صورت گام‌های مدل TOPSIS عبارتند از گام صفر- قرار دهید:

$$J_1 = \{1, \dots, t\} \text{ و } J_2 = \{t+1, \dots, n\}.$$

گام اول- ماتریس تصمیم‌گیری بی‌مقیاس $N = [n_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ را توسط نرم اقلیدسی با استفاده تبدیل

$$r_{ij} \rightarrow n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m r_{ij}^2}}$$

ایجاد کنید و ماتریس بی‌مقیاس وزین V را با مفروض بودن بردار $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ از اوزان شاخص‌ها به‌صورت زیر به دست آورید:

$$V = N \times W = \begin{pmatrix} n_{11} & \dots & n_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{m1} & \dots & n_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & \dots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

گام دوم- گزینه‌های ایده آل مثبت (A^+) و ایده آل منفی (A^-) را به‌صورت زیر تعریف نمایید:

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i \{v_{ij}\} \right) \middle| j \in J_1, \left(\min_i \{v_{ij}\} \right) \middle| j \in J_2, 1 \leq i \leq m \right\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i \{v_{ij}\} \right) \middle| j \in J_1, \left(\max_i \{v_{ij}\} \right) \middle| j \in J_2, 1 \leq i \leq m \right\} = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$$

گام سوم- فاصله‌ی اقلیدسی گزینه i ام ($i=1, 2, \dots, m$) از ایده آل مثبت (d_i^+) و فاصله‌ی آن از ایده آل منفی (d_i^-) را به‌صورت زیر محاسبه کنید:

$$d_i^+ = \left(\sum_{j=1}^n (v_j^+ - v_{ij})^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$d_i^- = \left(\sum_{j=1}^n (v_j^- - v_{ij})^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

گام چهارم- برای گزینه i ام ($i=1,2,\dots,m$) شاخص نزدیکی نسبی به ایده آل را محاسبه و رتبه‌بندی گزینه‌ها را بر اساس ترتیب نزولی این شاخص یعنی $cl_i^+ = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$ انجام دهید [۱].

پیچیدگی محاسباتی الگوریتم TOPSIS در [۳۹] مورد بحث قرار گرفته و نشان داده شده است که با درگرفتن ورودی n به‌عنوان تعداد شاخص‌های مسئله، پیچیدگی محاسباتی مربوط به گام‌های اول، دوم، سوم و چهارم به ترتیب عبارت است از $O(n^2)$ ، $O(n)$ ، $O(n)$ و $O(1)$.

۳-تعمیم مدل TOPSIS

وقتی که در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری شاخصی دارای مطلوبیت افزایشی یا کاهش‌ی یکنواخت نباشد، مطلوبیتی به صورت ترکیبی از این دو حالت خواهد داشت. به‌عنوان نمونه ممکن است مطلوبیت چنین شاخصی در ابتدا افزایشی و سپس کاهش‌ی باشد. پرواضح است که حضور این گونه شاخص‌ها به‌واسطه‌ی آن‌که در الگوریتم TOPSIS نزدیکی مقادیر متناظر به مقدار ایده آل، ملاک مطلوبیت بیشتر است مانع استفاده از این مدل می‌شود.

حال از آنجا که مطلوبیت‌های متناظر به ارزش‌های هر شاخص را می‌توان مجموعه‌ای فازی انگاشت، در ادامه بحث، یادآوری مختصری از برخی مفاهیم فازی خالی از فایده نبوده و خواننده را برای مطالعه‌ی مبسوط در رابطه با مجموعه‌های فازی، اعداد فازی و برخی کارکردهای آن‌ها به منابع استاندارد از جمله به [۴۰، ۴۱ و ۴۲] ارجاع می‌دهیم. نخست یادآوری می‌شود که محمل یک مجموعه‌ی فازی مانند \tilde{A} با مجموعه‌ی مرجع U عبارت است از

$$Supp(\tilde{A}) = \left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \right\}$$

از طرفی یکی از مهم‌ترین مفاهیم در نظریه‌ی فازی مفهوم عدد فازی است که در واقع ابزار بیان مجموعه‌های کاربردی در محیط‌های فازی است. به‌ویژه دسته‌ای از اعداد فازی که دارای نقش اساسی در محاسبات جبری فازی هستند عبارتند از اعداد فازی موسوم به اعداد فازی LR. یک عدد فازی LR مجموعه‌ای است فازی که تابع عضویت آن توسط دو تابع که تابع چپ (L) و تابع راست (R) نامیده می‌شوند به‌صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = (\xi_1, \xi_2, \alpha, \beta)_{LR} = \begin{cases} L\left(\frac{\xi_1 - x}{\xi_1 - \eta_1}\right) & \eta_1 \leq x \leq \xi_1 \\ R\left(\frac{x - \xi_2}{\eta_2 - \xi_2}\right) & \xi_2 \leq x \leq \eta_2 \end{cases}$$

شکل می‌گیرد که در آن $Supp(\widetilde{A}) = (\eta_1, \eta_r)$ و $\alpha = \xi_1 - \eta_1$ و $\beta = \eta_r - \xi_r$ پای چپ و راست \widetilde{A} نامیده شده و توابع چپ و راست نیز دارای ویژگی‌های عمومی زیر هستند: [۴۰]

توابع $[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$: $L(x), R(x)$ ، توابعی نزولی (و مشتق‌پذیر) هستند، به طوری که:

$$\begin{aligned} L(0) = R(0) = 1, \quad \forall x > 0; \quad L(x), R(x) < 1 & \bullet \\ \forall x \in [0, 1); \quad L(x), R(x) > 0 & \bullet \\ \lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0 & \bullet \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم مطلوبیت متناظر با شاخص J ام تو سط تابع E ضویت مجموعه فازی (و در حقیقت عدد فازی) $\mu_{\widetilde{C}_j}(x)$ مشخص شده باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی \sim را روی $Supp(\widetilde{C}_j)$ به صورت تعریف می‌کنیم:

$$\forall a, b \in Supp(\widetilde{C}_j); a \sim b \Leftrightarrow \mu_{\widetilde{C}_j}(a) = \mu_{\widetilde{C}_j}(b).$$

همچنین فرض کنیم افراز حاصل از این رابطه‌ی هم‌ارزی به صورت $Supp(\widetilde{C}_j) / \sim = \{P_\gamma^j \mid \gamma \in \Omega^j\}$ باشد که در آن Ω^j یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار است.

حال اگر $r_{ij} \in P_\gamma^j$ آنگاه با در نظر گرفتن نگاشت

$$\left([r_{ij}]_{i=1}^m \right)^T \rightarrow \left([\hat{r}_{ij}]_{i=1}^m \right)^T$$

که در آن تعریف می‌کنیم: $\hat{r}_{ij} := \inf(P_\gamma^j)$ یا $\hat{r}_{ij} := \sup(P_\gamma^j)$ ، مجموعه داده‌های متناظر با شاخص C_j به شاخصی با مطلوبیت یکنواخت تبدیل خواهد شد. با انجام این فرایند برای تمامی شاخص‌هایی که مطلوبیت یکنواخت ندارند، مسئله، قابل تحلیل توسط مدل TOPSIS خواهد بود. برای بررسی این مطلب فرض کنیم در یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری چند شاخصه، مطلوبیت شاخص C_j تو سط عدد فازی \widetilde{C}_j با محمل $Supp(\widetilde{C}_j) = (\eta_1^j, \eta_r^j)$ به صورت عدد فازی LR

$$U_j(x) = \mu_{\widetilde{C}_j}(x) = \begin{cases} L^{(j)} \left(\frac{\xi_1^j - x}{\xi_1^j - \eta_1^j} \right) & \eta_1^j \leq x \leq \xi_1^j \\ 1 & \xi_1^j \leq x \leq \xi_r^j \\ R^{(j)} \left(\frac{x - \xi_r^j}{\eta_r^j - \xi_r^j} \right) & \xi_r^j \leq x \leq \eta_r^j \end{cases}$$

داده‌شده باشد. حال تابع $\varphi^j : [\eta_l^j, \eta_r^j] \rightarrow [\eta_l^j, \xi_1^j]$ با ضابطه‌ی

$$\varphi^j(x) = \begin{cases} x & \eta_l^j \leq x \leq \xi_1^j \\ \xi_1^j & \xi_1^j \leq x \leq \xi_r^j \\ \xi_1^j - (\xi_1^j - \eta_l^j) \left(L^{(j)-1} \left(R^{(j)} \left(\frac{x - \xi_1^j}{\eta_l^j - \xi_r^j} \right) \right) \right) & \xi_r^j \leq x \leq \eta_r^j \\ \eta_l^j & O.W \end{cases} \quad (1)$$

یا تابع $\omega^j : [\eta_l^j, \eta_r^j] \rightarrow [\xi_r^j, \eta_r^j]$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم

$$\omega^j(x) = \begin{cases} x & \xi_r^j \leq x \leq \eta_r^j \\ \xi_r^j & \xi_1^j \leq x \leq \xi_r^j \\ \xi_r^j + (\eta_r^j - \xi_r^j) \left(R^{(j)} \left(L^{(j)} \left(\frac{\xi_1^j - x}{\xi_1^j - \eta_l^j} \right) \right) \right) & \eta_l^j \leq x \leq \xi_1^j \\ \xi_r^j & O.W \end{cases} \quad (2)$$

اکنون با در نظر گرفتن (۱) فرض کنیم $C_j = [r_{1j}, r_{rj}, \dots, r_{mj}]^T$ ، در این صورت

$$\left([r_{ij}]_{i=1}^m \right)^T = [\varphi^j(r_{1j}), \varphi^j(r_{rj}), \dots, \varphi^j(r_{mj})]^T.$$

حال قرار می‌دهیم:

$$\varphi^j(C_j) = [\varphi^j(r_{1j}), \varphi^j(r_{rj}), \dots, \varphi^j(r_{mj})]^T.$$

اگر در ماتریس تصمیم‌گیری A ، تبدیل $C_j \rightarrow \varphi_j(C_j)$ را انجام دهیم، شاخص j ام با حفظ مقیاس، دارای مطلوبیت افزایشی یکنواخت خواهد بود، زیرا تابع $L^{(j)}(x)$ نزولی و لذا تابع

$$L^{(j)} \left(\frac{\xi_1^j - x}{\xi_1^j - \eta_l^j} \right)$$

در دامنه خود صعودی و دارای مشتق مثبت و تابع $\varphi^j(x)$ در بازه‌ی

$\xi_r^j \leq x \leq \eta_r^j$ نزولی و لذا دارای مشتق منفی بوده و در نتیجه با توجه به اینکه $\eta_l^j \leq \varphi^j(x) \leq \xi_r^j$ و نیز نامنفی بودن $\eta_r^j - \xi_r^j$ با مشتق‌گیری از تابع $U_{C_j}(\varphi^j(x))$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d\left(U_{C_j}(\varphi^j(x))\right)}{dx} &= \frac{d\left(L^{(j)}\left(\frac{\xi_1^j - \varphi^j(x)}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\xi_1^j - \varphi^j(x)}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} \frac{d\left(L^{(j)}\right)\left(\frac{\xi_1^j - \varphi^j(x)}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} \\ &= \frac{-1}{\xi_1^j - \eta_1^j} \frac{d(\varphi^j(x))}{dx} \frac{d\left(L^{(j)}\right)\left(\frac{\xi_1^j - \varphi^j(x)}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} > 0. \end{aligned}$$

به طور مشابه با در نظر گرفتن (۲) اگر $C_j = [r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj}]^T$ آنگاه با فرض

$$\left([\hat{r}_{ij}]_{i=1}^m\right)^T = [\omega^j(r_{1j}), \omega^j(r_{2j}), \dots, \omega^j(r_{mj})]^T$$

قرار می دهیم

$$\omega^j(C_j) = \left([\hat{r}_{ij}]_{i=1}^m\right)^T = [\omega^j(r_{1j}), \omega^j(r_{2j}), \dots, \omega^j(r_{mj})]^T$$

و لذا اگر در ماتریس تصمیم گیری A ، تبدیل $C_j \rightarrow \omega^j(C_j)$ را انجام دهیم، شاخص j ام با حفظ مقیاس، دارای مطلوبیت کاهشی یکنواخت خواهد بود؛ زیرا در فاصله $\eta_1^j \leq x \leq \xi_1^j$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d\left(U_{C_j}(\omega^j(x))\right)}{dx} &= \frac{d\left(R^{(j)}\left(\frac{\omega^j(x) - \xi_1^j}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\omega^j(x) - \xi_1^j}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} \frac{d\left(R^{(j)}\right)\left(\frac{\omega^j(x) - \xi_1^j}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} \\ &= \frac{-1}{\xi_1^j - \eta_1^j} \frac{d(\omega^j(x))}{dx} \frac{d\left(R^{(j)}\right)\left(\frac{\omega^j(x) - \xi_1^j}{\xi_1^j - \eta_1^j}\right)}{dx} < 0. \end{aligned}$$

در نتیجه با در نظر گرفتن یکی از دو تبدیل φ^j یا ω^j به مطلوبیت یکنواخت در شاخص مورد بحث دست خواهیم یافت. لازم به ذکر است که یکنواخت سازی مطلوبیت شاخص ها به ازای n شاخص، دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n)$ است.

اگر مشابه این فرایند را برای سایر شاخص هایی که دارای مطلوبیت افزایشی یا کاهشی یکنواخت نیستند نیز انجام دهیم، تحلیل ماتریس تصمیم گیری حاصل که آن را با $\varphi(A)$ نشان می دهیم، به جهت رتبه بندی با الگوریتم TOPSIS قابل انجام خواهد بود.

۴-مثال‌های عددی

الف) در قالب یک مثال ساده نشان می‌دهیم که استفاده از الگوریتم TOPSIS معمولی، بدون توجه به شرط افزایشی یا کاهششی یکنواخت بودن مطلوبیت‌های شاخص‌های مسئله، ممکن است منجر به نتایج اشتباه گردد. برای این منظور ماتریس تصمیم‌گیری زیر را در نظر گرفته و در ساده‌ترین حالت ممکن فرض کنیم که در این ماتریس، شاخص اول دارای مطلوبیت افزایشی خطی تا $C_1 = 20$ و سپس مطلوبیت ثابت شونده و شاخص دوم نیز دارای مطلوبیت ثابت تا $C_1 = 22$ و سپس مطلوبیت کاهششی خطی بوده و اوزان شاخص‌ها نیز یکسان باشد.

$$A \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ \begin{pmatrix} 30 & 21 \\ 15 & 35 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

اکنون بدون توجه به این فرض که مطلوبیت شاخص‌ها یکنواخت نیست و با طی گام‌های الگوریتم معمولی TOPSIS، ماتریس بی‌مقیاس وزین و گزینه‌های ایده آل مثبت و منفی عبارت خواهند بود از

$$A \begin{matrix} C_1 & C_2 \\ \begin{pmatrix} 0/574 & 0/499 \\ 0/278 & 0/832 \\ 0/766 & 0/273 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+) = \{0/766, 0/273\} \text{ و } A^- = (v_1^-, v_2^-) = \{0/278, 0/832\}$$

لذا $cl_{v_1^+} = 0$ و $cl_{v_2^+} = 1$. این محاسبات نشان می‌دهد که ترتیب اولویت گزینه‌ها عبارت است از

$$A_3 > A_1 > A_2$$

که یک تناقض آشکار است زیرا با توجه به اطلاعات مسئله، گزینه‌های دوم و سوم، در حقیقت تفاوتی با یکدیگر ندارند؛ بدان جهت که مطلوبیت شاخص اول به ازای مقادیر بزرگ‌تر از $C_1 = 20$ و همچنین مطلوبیت شاخص دوم به ازای مقادیر کمتر از $C_2 = 22$ یکسان است؛ اما اکنون می‌توان دید که مطلوبیت این شاخص‌ها در قالب اعداد فازی LR زیر قابل بیان هستند:

$$C_1 : (\xi_1^1, \xi_2^1, \alpha^1, \beta^1)_{LR} = (0, 20, 0, 20)_{LR}$$

$$C_2 : (\xi_1^2, \xi_2^2, \alpha^2, \beta^2)_{LR} = (10, 22, 0, 3)_{LR}$$

حال با اعمال تبدیل های ϕ^1 و ω^2 به ترتیب بر شاخص های اول و دوم، به ماتریس تصمیم گیری

$$A \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 20 & 22 \\ 15 & 35 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$$

دست خواهیم یافت که در آن شاخص اول دارای مطلوبیت افزایشی یکنواخت و شاخص دوم دارای مطلوبیت کاهش یکنواخت است؛ لذا در این وضعیت می توان فرایند TOPSIS را روی آن اعمال کرد. اگرچه در ماتریس اخیر نیازی به انجام مراحل الگوریتم وجود نداشته و آشکار است که $A = A > A$.

(ب) ماتریس تصمیم گیری A را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$A \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ 76 & 2000 & 25 & 90 & 140 \\ 64 & 1300 & 55 & 75 & 160 \\ 97 & 1850 & 82 & 120 & 121 \\ 60 & 1200 & 70 & 145 & 81 \\ 82 & 1500 & 43 & 67 & 145 \\ 125 & 2200 & 65 & 130 & 130 \\ 69 & 1400 & 58 & 55 & 91 \\ 70 & 1350 & 81 & 128 & 175 \\ 163 & 2800 & 62 & 137 & 56 \\ 77 & 1450 & 74 & 147 & 125 \\ 138 & 1900 & 15 & 106 & 135 \\ 90 & 1650 & 98 & 97 & 110 \end{pmatrix}$$

که در آن شاخص های اول و دوم به ترتیب دارای مطلوبیت افزایشی و کاهش یکنواخت بوده و همچنین فرض کنیم مطلوبیت های مربوط به شاخص های سوم، چهارم و پنجم که دارای مطلوبیت افزایشی یا کاهش یکنواخت نیستند، به ترتیب مطابق با توابع چپ و راست و پارامترهای زیر باشد:

$$C_r : L^{(r)}(x) = R^{(r)}(x) = 1 - x, \quad C_r = (\xi_r^r, \xi_r^r, \varepsilon^r, \beta^r)_{LR} = (50, 60, 30, 30)_{LR}$$

$$C_f : L^{(f)}(x) = R^{(f)}(x) = e^{-x}, \quad C_f = (\xi_f^f, \xi_f^f, \alpha^f, \beta^f)_{LR} = (100, 100, 100, 100)_{LR}$$

$$C_d : L^{(d)}(x) = R^{(d)}(x) = (1 + x)^{-1}, \quad C_d = (\xi_d^d, \xi_d^d, \alpha^d, \beta^d)_{LR} = (120, 120, 120, 65)_{LR}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\varphi^r(C_r) = [\varphi^r(25), \varphi^r(55), \varphi^r(82), \varphi^r(70), \varphi^r(43), \varphi^r(65), \varphi^r(58), \varphi^r(81), \varphi^r(62), \varphi^r(74), \varphi^r(15), \varphi^r(88)]^T \\ = [25, 50, 28, 40, 43, 45, 50, 29, 48, 36, 20, 20]^T.$$

$$\varphi^f(C_f) = [\varphi^f(90), \varphi^f(75), \varphi^f(120), \varphi^f(145), \varphi^f(67), \varphi^f(140), \varphi^f(55), \varphi^f(128), \varphi^f(137), \varphi^f(147), \varphi^f(108), \varphi^f(97)]^T \\ = [90, 75, 80, 55, 67, 70, 55, 72, 63, 53, 94, 97]^T$$

$$\varphi^d(C_d) = [\varphi^d(140), \varphi^d(160), \varphi^d(121), \varphi^d(81), \varphi^d(145), \varphi^d(130), \varphi^d(91), \varphi^d(175), \varphi^d(56), \varphi^d(125), \varphi^d(135), \varphi^d(110)]^T \\ = [53/44, 25/86, 105/181, 45/58, 72/93, 91/67, 67/56, 86/72, 67/35, 110/110]^T$$

اکنون در ماتریس تصمیم‌گیری $\varphi(A)$ شاخص دوم دارای مطلوبیت کاهشی یکنواخت و سایر شاخص‌ها دارای مطلوبیت افزایشی یکنواخت خواهند بود. در حقیقت داریم:

$$\varphi(A) = \begin{matrix} & C_1 & C_r & C_f & C_d \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_r \\ A_f \\ A_d \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 76/00 & 1200 & 25/00 & 90/00 & 53/44 \\ 64/00 & 1150 & 50/00 & 75/00 & 25/86 \\ 97/00 & 1500 & 28/00 & 80/00 & 105/181 \\ 60/00 & 1000 & 40/00 & 55/00 & 81/00 \\ 82/00 & 1250 & 43/00 & 65/00 & 45/58 \\ 125/0 & 1800 & 45/00 & 70/00 & 72/93 \\ 69/00 & 1100 & 50/00 & 55/00 & 91/00 \\ 140/0 & 2000 & 29/00 & 72/00 & 9/620 \\ 163/0 & 2300 & 48/00 & 63/00 & 56/00 \\ 77/00 & 1150 & 36/00 & 53/00 & 86/72 \\ 138/0 & 1900 & 20/00 & 94/00 & 62/35 \\ 90/00 & 1400 & 20/00 & 97/00 & 110/0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

اکنون ماتریس بی مقیاس وزین مثلاً با احتساب وزن‌های $W = \{w_1, w_r, w_f, w_d\} = \{1, 1, 1, 1\}$ عبارت است از:

$$V = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 0/2114 & 0/2259 & 0/1910 & 0/3509 & 0/2120 \\ 0/1780 & 0/2165 & 0/3821 & 0/2924 & 0/1026 \\ 0/2698 & 0/2824 & 0/2140 & 0/3119 & 0/4170 \\ 0/1669 & 0/1883 & 0/3057 & 0/2145 & 0/3213 \\ 0/2281 & 0/2354 & 0/3286 & 0/2613 & 0/1808 \\ 0/3477 & 0/3389 & 0/3439 & 0/2729 & 0/2893 \\ 0/1919 & 0/2071 & 0/3821 & 0/2145 & 0/3610 \\ 0/3894 & 0/3766 & 0/2216 & 0/2807 & 0/0382 \\ 0/4534 & 0/4331 & 0/3668 & 0/2457 & 0/2221 \\ 0/2142 & 0/2165 & 0/2751 & 0/2067 & 0/3440 \\ 0/3839 & 0/3577 & 0/1528 & 0/3665 & 0/2473 \\ 0/2504 & 0/2636 & 0/1528 & 0/3782 & 0/4364 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

جدول (۱): فاصله از ایده آل‌های مثبت و منفی و نزدیکی نسبی گزینه‌ها به ایده آل

| گزینه | d_i^+ | d_i^- | cl_i^+ |
|----------|---------|---------|----------|
| A_1 | 0/1476 | 0/0974 | 0/3975 |
| A_2 | 0/1954 | 0/1111 | 0/3624 |
| A_3 | 0/0756 | 0/1916 | 0/7171 |
| A_4 | 0/1280 | 0/1635 | 0/5609 |
| A_5 | 0/1348 | 0/0971 | 0/4185 |
| A_6 | 0/0680 | 0/1455 | 0/6814 |
| A_7 | 0/1012 | 0/2085 | 0/6732 |
| A_8 | 0/2334 | 0/0629 | 0/2124 |
| A_9 | 0/1236 | 0/1632 | 0/5691 |
| A_{10} | 0/1074 | 0/1576 | 0/5946 |
| A_{11} | 0/1220 | 0/1221 | 0/5002 |
| A_{12} | 0/0995 | 0/2237 | 0/6922 |

لذا خواهیم داشت:

$$A^+ = \{v_1^+, v_2^+, v_3^+, v_4^+, v_5^+\} = \{0/4534, 0/1883, 0/3821, 0/3782, 0/4364\}$$

$$A^- = \{v_1^-, v_2^-, v_3^-, v_4^-, v_5^-\} = \{0/1669, 0/4331, 0/1528, 0/2067, 0/382\}$$

اکنون فاصله از ایده آل‌های مثبت و منفی و همچنین نزدیکی نسبی گزینه‌های مسئله در قالب جدول (۱) ارائه شده‌است؛ بنابراین اولویت‌بندی گزینه‌ها بر اساس نزدیکی نسبی به ایده آل عبارت خواهد بود از:

$$A_7 > A_{17} > A_6 > A_7 > A_0 > A_4 > A_8 > A_{11} > A_0 > A_1 > A_1 > A_8$$

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در دنیای واقعی، مطلوبیت شاخص‌های تصمیم‌گیری به‌ندرت جنبه‌ی صعودی یا نزولی اکید دارند و همین خصیصه دامنه‌ی استفاده از مدل TOPSIS را کاملاً محدود می‌کند. در نمونه‌های واقعی، تصمیم‌گیرنده‌ای که مایل به استفاده از مدل TOPSIS است، مجبور به تحمیل فرض افزایشی یا کاهش‌ی یکنواخت بودن مطلوبیت به همه‌ی شاخص‌هایی خواهد شد که ماهیتاً دارای این ویژگی نیستند. واضح است که اعمال این فرض صحت نتیجه‌گیری‌ها را کاملاً تحت‌الشعاع قرار می‌دهد. در این مقاله تعمیمی از مدل TOPSIS را مطرح کرده‌ایم که به‌واسطه‌ی آن با ایجاد تغییرات مناسبی در داده‌های مربوط به شاخص‌هایی که در یک ماتریس تصمیم‌گیری دارای مطلوبیت افزایشی یا کاهش‌ی یکنواخت نیستند، استفاده از مدل TOPSIS بلا مانع گردد. مطلوبیت یک شاخص در حالت غیریکنواخت می‌تواند به صورت‌های متنوعی باشد که ترکیبی از مطلوبیت‌های کاهش‌ی، ثابت و افزایش‌ی هستند. به‌منظور تدارک چنین تعمیمی بایستی شاخص‌هایی که مطلوبیت آن‌ها انواعی از ترکیبات اخیر باشد مورد ارزیابی قرار گیرند اما به‌واسطه تشابه در فرایند، علاوه بر بیان کلی، حالتی را که در آن مطلوبیت برخی شاخص‌ها به کمک توابع چپ و راست فازی بیان گردیده‌اند، موردبررسی بیشتر قرار داده و در مثال عددی نیز از آن استفاده کرده‌ایم. با تعمیمی که در این مقاله از مدل TOPSIS به‌عمل آمده است هیچ‌گونه پیش‌شرطی مبنی بر کاهش‌ی یا افزایش‌ی یکنواخت بودن مطلوبیت شاخص‌ها جهت استفاده از آن وجود ندارد و می‌توان آن را برای تحلیل انواع مسائل تصمیم‌گیری (چند شاخصه یا چندهدفه) به کار بست.

تقدیر و تشکر

نویسنده از داوران محترم بابت راهنمایی‌هایی که منجر به بهبود محتوای مقاله شده است کمال تشکر را دارد.

منابع

- [۱] کاظمی فرد، احمد؛ صادقیان، رامین (۱۳۹۷). تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، انتشارات دانش‌پرو، تهران.
- [2] Saaty, T., (1980), *The Analytic Hierarchy Process*, New York: McGraw-Hill.
- [3] Hwang, C. and Yoon, K., (1981), *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag: New York".
- [4] Keršulienė, V., Zavadskas, E. K., & Turskis, Z. (2010). Selection of rational dispute resolution method by applying new step-wise weight assessment ratio analysis (SWARA). *Journal of business economics and management*, **11**(2), 243-258.
- [5] Zolfani, S. H., Yazdani, M., & Zavadskas, E. K. (2018). An extended stepwise weight assessment ratio analysis (SWARA) method for improving criteria prioritization process. *Soft Computing*, **22**(22), 7399-7405.
- [6] Rezaei, J. (2015). Best-worst multi-criteria decision-making method. *Omega*, **53**, 49-57.
- [7] Rezaei, J. (2016). Best-worst multi-criteria decision-making method: Some properties and a linear model. *Omega*, **64**, 126-130.
- [8] Zavadskas, E.K., Mardani, A. and Turskis, Z. (2016), Development of TOPSIS Method to Solve Complicated Decision-Making Problems- An Overview on Developments from 2000 to 2015. *International Journal of Information Technology & Decision Making*. **15**(03): p. 645-682.
- [9] Behzadian, M., Otaghsara, S. K., Yazdani, M., and Ignatius, J., (2012), A state-of the-art survey of TOPSIS applications, *Expert Systems with Applications*, **39**, 13051-13069.
- [10] Shukla, A., Agarwal, P., Rana, R. S., & Purohit, R. (2017). Applications of TOPSIS algorithm on various manufacturing processes: a review. *Materials Today: Proceedings*, **4**(4), 5320-5329.
- [11] Yadav, S. K., Joseph, D., & Jigeesh, N. (2018). A review on industrial applications of TOPSIS approach. *International Journal of Services and Operations Management*, **30**(1), 23-28.

- [12] Chen, C.T., (2000), Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment, *Fuzzy sets and systems*, **114**, 1-9.
- [13] Li, D.F., (2005), Multiattribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets, *Journal of computer and System Sciences*, **70**, 73-85.
- [14] Memari, A., Dargi, A., Jokar, M. R. A., Ahmad, R., & Rahim, A. R. A. (2019). Sustainable supplier selection: A multi-criteria intuitionistic fuzzy TOPSIS method. *Journal of Manufacturing Systems*, 50, 9-24.
- [15] Balioti, V., Tzimopoulos, C., & Evangelides, C. (2018). Multi-Criteria Decision Making Using TOPSIS Method Under Fuzzy Environment. Application in Spillway Selection. In *Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings* **2**(11), 637.
- [16] Oz, N. E., Mete, S., Serin, F., & Gul, M. (2018). Risk assessment for clearing and grading process of a natural gas pipeline project: An extended TOPSIS model with Pythagorean fuzzy sets for prioritizing hazards. *Human and Ecological Risk Assessment: An International Journal*, 1-18.
- [17] Tulkhah, A., & Saifudin, A. (2019). Fuzzy Topsis untuk Meningkatkan Akurasi dan Objektivitas Bobot pada Seleksi Vendor PT. Telkomsel TTC BSD. *metode*, **4**(1), 28- 34.
- [18] Boran, F. E., Genç, S., Kurt, M., and Akay, D., (2009), A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method, *Expert Systems with Applications*, **36**, 11363-11368.
- [19] Dymova, L., Sevastjanov, P., and Tikhonenko, A., (2013), A direct interval extension of TOPSIS method, *Expert Systems with Applications*, **40**, 4841-4847.
- [20] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., & Izadikhah, M. (2006). An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data. *Applied mathematics and computation*, **175**(2), 1375-1384.
- [21] Cables, E., García-Cascales, (2012), M. S., and M. T. Lamata, The LTOPSIS: An alternative to TOPSIS decision-making approach for linguistic variables, *Expert Systems with Applications*, **39**, 2119-2126.
- [22] Chen, M.-F. and Tzeng, G.-H., (2004), Combining grey relation and TOPSIS concepts for selecting an expatriate host country, *Mathematical and Computer Modelling*, **40**, 1473-1490.
- [23] Oztaysi, B., 2014, A decision model for information technology selection using AHP integrated TOPSIS-Grey: The case of content management systems, *Knowledge-Based Systems*, **70**, 44-54.
- [24] Chen, C. H. (2019). A New Multi-Criteria Assessment Model Combining GRA Techniques with Intuitionistic Fuzzy Entropy-Based TOPSIS

- Method for Sustainable Building Materials Supplier Selection. *Sustainability*, **11**(8), 2265.
- [25] Yang, W., & Wu, Y. (2019). A Novel TOPSIS Method Based on Improved Grey Relational Analysis for Multiattribute Decision-Making Problems. <https://doi.org/10.1155/2019/8761681>.
- [26] Chakraborty, S., Chatterjee, P., & Das, P. P. (2019). A DoE–TOPSIS method-based meta-model for parametric optimization of non-traditional machining processes. *Journal of Modelling in Management*, **14**(2), 430-455.
- [27] Araujo, C. A. S., Wanke, P., & Siqueira, M. M. (2018). A performance analysis of Brazilian public health: TOPSIS and neural networks application. *International Journal of Productivity and Performance Management*, **67**(9), 1526-1549.
- [28] Vommi, V. (2017). TOPSIS with statistical distances: A new approach to MADM. *Decision Science Letters*, **6**(1), 49-66.
- [29] Uddin, S., Rahman, M., Hasan, S., Rana, S. M., & Allayear, S. M. (2019). A Fuzzy TOPSIS Approach for Big Data Analytics Platform Selection. *Journal of Advances in Computer Engineering and Technology*, **5**(1), 49-56.
- [30] Erpolat Taşabat, S. (2019). A Novel Multicriteria Decision-Making Method Based on Distance, Similarity, and Correlation: DSC TOPSIS. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2019/9125754>.
- [31] Torfi, F., Farahani, R. Z., and Rezapour, S., (2010), Fuzzy AHP to determine the relative weights of evaluation criteria and Fuzzy TOPSIS to rank the alternatives, *Applied Soft Computing*, **10**, 520-528.
- [32] Ak, M. F., & Gul, M. (2019). AHP–TOPSIS integration extended with Pythagorean fuzzy sets for information security risk analysis. *Complex & Intelligent Systems*, **5**(2), 113-126.
- [33] Ramayanti, G., & Ulum, H. (2017). Sistem Penentuan Supplier Kawat Las Dengan Metode Analytical Hierarchy Process (AHP) dan Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution (TOPSIS). *Jurnal Sistem Dan Manajemen Industri*, **1**(1), 12-18.
- [34] K Narayanan, A., Jinesh N. (2018). Application of SWARA and TOPSIS Methods for Supplier Selection in a Casting Unit. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*. **7**(5), 456- 458.
- [35] Yucesan, M., Mete, S., Serin, F., Celik, E., & Gul, M. (2019). An Integrated Best-Worst and Interval Type-2 Fuzzy TOPSIS Methodology for Green Supplier Selection. *Mathematics*, **7**(2), 182, 1-19.

- [36] Suryana, A., Yulianto, E., & Pratama, K. D. (2017). Perancangan Sistem Pendukung Keputusan Penilaian Prestasi Pegawai Menggunakan Metode SAW, AHP, Dan TOPSIS. *Jurnal Ilmiah Teknologi Informasi Terapan*, 3(2), 130-139.
- [37] Lai, Y.-J., Liu, T.-Y., and Hwang, C.-L., (1994), Topsis for MODM, *European journal of operational research*, 76, 486-500.
- [38] Zhang, X., & Xu, Z. (2014). Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 29(12), 1061-1078.
- [39] Hamdani, & Wardoyo, R. (2016, July). The complexity calculation for group decision making using TOPSIS algorithm. In AIP conference proceedings (Vol. 1755, No. 1, p. 070007). AIP Publishing.
- [۴۰] ذکوانگ، اچ لی (۱۳۹۵). نخستین درس در نظریه‌ی فازی و کاربردها، ترجمه منصور سراج، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز.
- [۴۱] اکبری، محمد قاسم؛ حسامیان، غلامرضا (۱۳۹۸). بهبود برآورد، آزمون فرضیه و فاصله اطمینان برای ضرایب فازی مدل رگرسیون خطی ساده با ورودی دقیق و خروجی فازی. *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*. دوره‌ی ۹، شماره‌ی ۲، صص ۱-۳۲.
- [۴۲] چاچی، جلال؛ روزه، مهدی (۱۳۹۶). مدل‌سازی داده‌های مهندسی آب با استفاده از روش رگرسیون فازی استوار کمترین مربعات پیراسته. *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، دوره‌ی ۷، شماره‌ی ۱، صص ۱۸-۱.

An Extension of TOPSIS Model Based on Monotonic Utility of Criteria

Ahmad Kazemifard

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz,
Iran

Received: October 24 2019

Accepted for publication: January 21 2020

Corresponding author: a.kazemifard@scu.ac.ir

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Although TOPSIS is one of the widely used models in analyzing MCDM/MADM problems, there exists a necessary condition for its application that is the increasing or decreasing utility of the criteria. In the real world, in many cases, some of the criteria of decision making lack this property. In these cases an unrealistic assumption of the monotonic utility of the criteria is imposed to the model. However such an assumption may affect the accuracy of the results. This paper provides an extension of TOPSIS model which overcomes this limitation.

Keywords: Multiple Criteria Decision Making (MCDM), Multiple Attribute Decision Making (MADM), Fuzzy theory, TOPSIS model, Utility

Mathematics Subject Classification(2010): 90B50, 62C86



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).