



مدل سری‌های زمانی دو خطی گسسته مقدار بر اساس عملگرهای تصادفی پگرام و رقیق‌ساز

سکینه رضانی، مهرناز محمدپور^۱

گروه آمار، دانشگاه مازندران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۱

چکیده: در این مقاله، یک مدل‌بندی دوخطی گسسته مقدار جدید بر اساس ترکیب دو عملگر تصادفی رقیق‌ساز و پگرام معرفی می‌شود. برخی از ویژگی‌های آماری مدل فوق مورد بحث قرار می‌گیرند و پارامترهای مدل توسط روش‌های کمترین مربعات شرطی و یول‌واکر برآورد می‌شوند. به کمک شبیه‌سازی، رفتار و کارایی دو روش برآورد مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در انتها، کارایی مدل معرفی شده در برازش دو داده واقعی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کمترین مربعات شرطی، عملگر رقیق‌ساز، عملگر پگرام، مدل دوخطی گسسته-مقدار

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲M۱۰

۱- مقدمه

مدل‌بندی سری‌های زمانی شمارشی در دنیای واقعی کاربرد گسترده‌ای دارد. از آنجاکه سری‌های زمانی گسسته مقدار معمولاً دارای دامنه تغییرات متناهی و محدود می‌باشند، ضرورت دارد به جای استفاده از مدل‌های پیوسته استاندارد، مدل‌بندی مناسبی بر روی آن‌ها صورت گیرد. مدل‌های خطی گسسته مقدار مختلفی جهت مدل‌بندی این‌گونه سری‌های زمانی پیشنهاد شده است [۹-۱]. بیشتر این مدل‌های خطی، بر اساس عملگر رقیق‌ساز^۲ که در پایین معرفی شده است ارائه می‌گردند [۱۰].

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.mohammadpour@umz.ac.ir

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته مقدار نامنفی و $a < 0$ باشد، عملگر رقیق‌ساز "o" به صورت زیر تعریف می‌شود

$$aoX = \sum_{i=1}^X Y_i$$

که در آن سری شمارشی $\{Y_i\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی گسسته مقدار نامنفی و مستقل از X است.

این مسئله در حالی است که مدل‌های خطی در بسیاری از موارد جوابگو در مدل‌بندی و برازش به داده‌ها نمی‌باشند. مطالعات محدودی در مدل‌های سری‌های زمانی غیرخطی گسسته مقدار انجام شده است که در این میان می‌توان به کار دوکان و همکاران [۱۱] اشاره کرد. آن‌ها مدل سری‌های زمانی دوخطی را برای داده‌های گسسته مقدار براساس عملگر رقیق‌ساز توسعه دادند و مدل دوخطی گسسته مقدار مرتبه (p, q, m, n) ، $(INBL(p, q, m, n))$ را معرفی کردند

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i oX_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j oe_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} oX_{t-i} e_{t-j} + e_t$$

که در آن "o" عملگر رقیق‌ساز است. در ادامه ایشان به بررسی مدل $INBL(1, 0, 1, 1)$

$$X_t = a oX_{t-1} + b oX_{t-1} e_{t-1} + e_t$$

پرداختند و شرط اکیداً ایستایی، وجود گشتاورهای مرتبه‌های بالا، برآورد پارامترها و ویژگی جانبی مدل را بررسی کردند. دراست و همکاران [۱۲]، مدل دو خطی گسسته مقدار زبر قطری را معرفی کردند. بنتازی [۱۳]، عملگر رقیق‌ساز را بر روی فرایندهای دو خطی قطری متناوب تعمیم دادند که منجر به معرفی مدل‌های دو خطی گسسته مقدار متناوب شد. مدل‌های سری‌های زمانی خطی و غیرخطی معرفی شده در بالا برای داده‌هایی با ناهمبستگی منفی کاربرد ندارد که آن از محدودیت‌های مدل است. پگرام^۲ [۱۴]، این محدودیت را با معرفی کلاس جدیدی از مدل‌ها حل کرد و بیسواس و سانگ [۱۵]، مدل گسسته مقدار اتورگرسیو میانگین متحرک را بر مبنای عملگر پگرام که در تعریف پایین آورده شده است، ارائه نمودند.

۱- Integer-valued bilinear

۲- Pegram

تعریف ۱-۱ (عملگر پگرام). فرض کنید U, V متغیرهای تصادفی مستقل گسسته و $\varphi \in (0, 1)$ وزن معین باشد. عملگر پگرام، متغیرهای U, V را برحسب وزن‌های $\varphi, 1-\varphi$ به صورت زیر ترکیب می‌کند

$$Z = (\varphi, U) * (1 - \varphi, V).$$

با تابع احتمال حاشیه‌ای زیر برای $j = 0, 1, 2, \dots$ به صورت زیر است

$$P(Z = j) = \varphi P(U = j) + (1 - \varphi) P(V = j).$$

خو و همکاران [۱۶] در سال (۲۰۱۷) کلاسی از مدل‌های خودبازگشتی گسسته مقدار مرتبه اول بر اساس دو عملگر رقیق‌ساز و پگرام را ارائه دادند که منجر به معرفی مدل منعطف‌تری در میان کلاس مدل‌های خطی شد.

از آنجایی که مدل‌های آمیخته در مدل‌سازی‌های تجربی، منعطف‌تر بوده و نیز قادر به مدل‌سازی داده‌های چند مدی هم می‌باشند، انگیزه ارائه مدل *INBL* جدیدی به صورت ترکیبی از عملگر پگرام و رقیق‌ساز دو جمله‌ای را به وجود می‌آورد. در این مقاله، مدل $(2, 0, 2, 1)$ *INBL* براساس دو عملگر رقیق‌ساز و پگرام ارائه خواهیم نمود. در بخش ۲، به معرفی مدل و بررسی برخی ویژگی‌های آماری مدل می‌پردازیم. در بخش ۳ با استفاده از دو روش یول‌واکر و کمترین مربعات شرطی، به برآورد پارامترهای مدل می‌پردازیم. در ادامه با یک مطالعه شبیه‌سازی، عملکرد دو روش فوق برای برآورد پارامترها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در انتها کاربرد مدل معرفی شده بر روی دو مجموعه داده واقعی بررسی می‌شود.

۲- معرفی مدل و برخی ویژگی‌های آماری

فرایند دوخطی گسسته مقدار ایستای $\{X_t\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$X_t = (\varphi, a_0 X_{t-2} + b_0 X_{t-1} e_{t-1}) * (1 - \varphi, e_t) \quad (1)$$

که در آن "*" عملگر پگرام، "o" عملگر رقیق‌ساز و $\{e_t\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی i.i.d. با توزیع متناهی گسسته با میانگین μ و واریانس σ^2 و مستقل از سری زمانی $\{X_s\}_{s < t}$ می‌باشند. همچنین دنباله‌های شمارشی $\{Y_t\}$ و $\{\tilde{Y}_t\}$ در عملگرهای رقیق‌ساز a_0 و b_0 دارای توزیع‌های گسسته با میانگین‌های a, b و واریانس‌های α, β می‌باشند. مدل فوق را $MPTINBL(2, 0, 2, 1)$ بر اساس عملگرهای پگرام و رقیق‌ساز یا به اختصار 1 $MPTINBL(2, 0, 2, 1)$ می‌نامیم. در ادامه به بررسی گشتاورهای مدل می‌پردازیم.

قضیه ۱-۲ فرض کنید $\{X_t\}$ فرایند ایستای $MPTINBL(\nu, \cdot, \nu, 1)$ بیان شده در (۱) باشد.

(۱) اگر شرط $\varphi(a + b\mu) < 1$ برقرار باشد، آنگاه $E(X_t)$ متناهی است و

$$E(X_t) = \frac{(1-\varphi)\mu}{1-\varphi(a+b\mu)}; \quad (2)$$

(۲) اگر شرط $\varphi((a+b\mu)^\nu + b^\nu\sigma^\nu) < 1$ برقرار باشد، آنگاه $E(X_t^\nu)$ متناهی است و

$$E(X_t^\nu) = \frac{(1-\varphi)(\mu^\nu + \sigma^\nu) + \varphi(\alpha + \beta\mu)}{1-\varphi[(a+b\mu)^\nu + b^\nu\sigma^\nu]}; \quad (3)$$

(۳) اگر $\varphi(a_p^p + b_p^p\mu_p^p) < \frac{1}{\nu^p}$ برقرار باشد، آنگاه $E(X_t^p) < \infty$ که در آن $a_p^p = E(Y^p)$ ،

$$\mu_p^p = E(e_t^p) \text{ و } b_p^p = E(\bar{Y}^p)$$

برهان. گشتاور مرتبه اول به راحتی قابل محاسبه است. برای محاسبه گشتاور مرتبه دوم فرایند طبق خاصیت عملگر رقیق‌ساز داریم:

$$E(X_t^\nu) = (1-\varphi)E(e_t^\nu) + \varphi[(a+b\mu)^\nu + b^\nu\sigma^\nu]E(X_{t-\nu}^\nu) + \varphi[(\alpha + \beta\mu)E(X_{t-\nu}^\nu)]$$

و طبق ایستایی فرایند $\{X_t\}$ ، نتیجه به دست می‌آید. برای اثبات وجود گشتاورهای بالاتر ابتدا

$$n_p^p = E(X_t^p)$$

$$E(X_t^p) = (1-\varphi)\mu_p^p + \varphi E(a\alpha X_{t-\nu} + b\sigma X_{t-\nu}e_{t-\nu})^p \leq (1-\varphi)\mu_p^p + \nu^p (E(a\alpha X_{t-\nu})^p + E(b\sigma X_{t-\nu}e_{t-\nu})^p) \quad (4)$$

حال تحت ایستایی فرایند می‌توان نامساوی زیر را برای دو عبارت‌های $E(b\sigma X_{t-\nu}e_{t-\nu})^p$ و

$$E(a\alpha X_{t-\nu})^p$$

$$E(b\sigma X_{t-\nu}e_{t-\nu})^p \leq b_p^p n_p^p \mu_p^p, \quad E(a\alpha X_{t-\nu})^p \leq a_p^p n_p^p.$$

بنابراین با جایگذاری معادلات بالا در (۴) داریم:

$$E(X_t^p) \leq \frac{(1-\varphi)\mu_p^p}{1-\varphi^p(a_p^p + b_p^p\mu_p^p)}$$

و اثبات کامل می‌شود. □

گزاره ۱-۲ میانگین شرطی فرایند به صورت زیر می‌باشند

$$E(X_{t+1} | t) = \varphi(a + b\epsilon_t) X_{t-1} + (1-\varphi)\mu, \quad (5)$$

و برای $k=1, 2, \dots$

$$E(X_{t+\tau k} | t) = (\varphi(a + b\mu))^k X_t + (1-\varphi)\mu \sum_{i=1}^k (\varphi(a + b\mu))^{i-1},$$

$$E(X_{t+(\tau k+1)} | t) = (\varphi(a + b\mu))^k E(X_{t+1} | t) + (1-\varphi)\mu \sum_{i=1}^k (\varphi(a + b\mu))^{i-1},$$

که در آن $E(\cdot | t)$ امید شرطی نسبت به سیگما میدان تولیدشده F_t^S توسط متغیرهای تصادفی $s \leq t, \epsilon_s$ است.

برهان. محاسبه میانگین‌های شرطی به راحتی امکان پذیر است.

گزاره ۲-۲ میانگین توان دوم شرطی مرتبه k -ام فرایند به صورت زیر است

$$\begin{aligned} E(X_{t+k}^r | t) &= \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{\left[\frac{k}{r} \right]} E(X_t^r | t) \\ &+ (1-\varphi) (\mu^r + \sigma^r) \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{r} \right]} \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{i-1} \\ &+ \varphi (\alpha + \beta \mu) \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{r} \right]} \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{i-1} E(X_{t+k-\tau i} | t), \quad k = \tau s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_{t+k}^r | t) &= \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{\left[\frac{k}{r} \right]} E(X_{t+1}^r | t) \\ &+ (1-\varphi) (\mu^r + \sigma^r) \sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{r} \right]} \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{i-1} \\ &+ \varphi (\alpha + \beta \mu) \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{r} \right]} \left(\varphi \left[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r \right] \right)^{i-1} E(X_{t+k-\tau i} | t), \quad k = \tau s + 1 \end{aligned} \quad (6)$$

برهان. برای میانگین شرطی توان دوم فرایند داریم،

$$E(X_{t+1}^r | t) = \varphi(a + b e_t)^r X_{t-1}^r + \varphi(\alpha + \beta e_t) X_{t-1} + (1 - \varphi)(\mu^r + \sigma^r),$$

$$E(X_{t+r}^r | t) = \varphi[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r] X_t^r + \varphi(\alpha + \beta\mu) X_t + (1 - \varphi)(\mu^r + \sigma^r),$$

$$E(X_{t+r}^r | t) = \varphi[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r] E(X_{t+1}^r | t) + \varphi(\alpha + \beta\mu) E(X_{t+1} | t) + (1 - \varphi)(\mu^r + \sigma^r),$$

و با استفاده از اصل استقرا داریم،

$$E(X_{t+k}^r | t) = \varphi[(a + b\mu)^r + b^r \sigma^r] E(X_{t+k-r}^r | t) + \varphi(\alpha + \beta\mu) E(X_{t+k-r} | t) + (1 - \varphi)(\mu^r + \sigma^r),$$

و با تکرار k مرتبه نتیجه حاصل می‌شود. □

فرع ۱-۲ با توجه به روابط (۵) و (۶) داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(X_{t+k} | t) = E(X_t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E(X_{t+k}^r | t) = E(X_t^r).$$

قضیه ۲-۲ تابع خودکواریانس فرایند $\{X_t\}$ به صورت زیر است

$$\gamma_X(h) = \frac{bE(X_t)\varphi(1-\varphi)\sigma^r}{1-\varphi(a+b\mu)}, \quad (7)$$

$$\gamma_X(rh) = [\varphi(a+b\mu)]^h \gamma_X(\cdot), \quad h=1,2,\dots \quad (8)$$

$$\gamma_X(rh+1) = [\varphi(a+b\mu)]^h \gamma_X(1).$$

برهان. برای تعیین $\gamma_X(1)$ ابتدا عبارت $E(X_t X_{t+1})$ به صورت زیر بیان می‌شود،

$$E(X_t X_{t+1}) = (1-\varphi)\mu E(X_t) + \varphi[aE(X_t X_{t-1}) + bE(X_t X_{t-1} e_t)] \quad (9)$$

با اندکی محاسبات ساده عبارت $E(X_t X_{t-1} e_t)$ به صورت زیر نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} & E(X_t X_{t-1} e_t) \\ &= (1-\varphi)(\mu^r + \sigma^r) E(X_{t-1}) + \varphi \mu [aE(X_{t-1} X_{t-2}) + bE(X_{t-1} X_{t-2} e_{t-1})] \end{aligned}$$

با توجه به خاصیت ایستایی اکید فرایند و $E(X_t X_{t-1} e_t) = E(X_{t-1} X_{t-2} e_{t-1})$ نتیجه

می‌شود

$$E(X_t X_{t-1} e_t) = \frac{\varphi a \mu E(X_{t-1} X_{t-2}) + (1-\varphi)(\mu^\tau + \sigma^\tau) E(X_{t-1})}{1-\varphi b \mu}$$

با جایگذاری عبارت بالا در معادله (۹) و خاصیت ایستایی فرآیند داریم

$$E(X_t X_{t+1})(1-\varphi(a+b\mu)) = E(X_t)[(1-\varphi)\mu + \varphi b(1-\varphi)\sigma^\tau].$$

به همین ترتیب برای تعیین تابع خودکواریانس مرتبه h ام، $\gamma_X(h)$ خواهیم داشت:

$$E(X_t X_{t+h}) = (1-\varphi)\mu E(X_t) + \varphi [a E(X_t X_{t+h-\tau}) + b E(X_t X_{t+h-\tau} e_{t+h-\tau})]$$

طبق خاصیت استقلال $e_{t+h-\tau}$ از $X_{t+h-\tau}$ و X_t داریم:

$$E(X_t X_{t+h}) = (1-\varphi)\mu E(X_t) + \varphi(a+b\mu)E(X_t X_{t+h-\tau})$$

و

$$\gamma_X(h) = (1-\varphi)\mu E(X_t) + \varphi(a+b\mu)[\gamma_X(h-\tau) + E^\tau(X_t)] - E^\tau(X_t)$$

از آنجاکه

$$(1-\varphi)\mu E(X_t) + [\varphi(a+b\mu) - 1]E^\tau(X_t) = 0.$$

اثبات کامل می‌شود. □

۳- برآوردیابی و شبیه‌سازی

بسیاری از ویژگی‌های مدل به پارامترهای آن بستگی دارد، بنابراین برآورد پارامترهای مدل بسیار مهم است. در این بخش، به برآورد پارامترهای مدل $MPTINBL(\tau, \cdot, \tau, 1)$ توسط دو روش یول واکر و کمترین مربعات شرطی می‌پردازیم و با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده، دو روش برآوردیابی را باهم مقایسه می‌نماییم. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی، عملگر رقیق‌ساز دو جمله‌ای و توزیع $\{e_t\}$ پواسن $P(\lambda)$ در نظر گرفته شده است.

۳-۱ روش یول واکر

برآوردگر یول واکر (YW) پارامترهای مجهول a, b, λ, φ با مساوی قرار دادن گشتاورهای مرتبه اول، دوم و تابع خودکواریانس فرایند در روابط (۲)، (۳)، (۷) و (۸) با میانگین نمونه‌ای (\bar{X}) ، گشتاور مرتبه دوم نمونه‌ای (\bar{X}^2) و تابع خودهمبستگی نمونه‌ای $(\hat{\gamma}_X(h))$ از حل معادلات زیر محاسبه می‌گردند

$$\hat{\varphi}(\hat{a} + \hat{b}\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\gamma}_X(\tau)}{\hat{\gamma}_X(\cdot)}, \quad \overline{X^\tau} = \frac{(1-\hat{\varphi})(\hat{\lambda}^\tau + \hat{\lambda}) + \hat{\varphi}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\hat{\lambda})}{1-\hat{\varphi}\left[(\hat{a} + \hat{b}\hat{\lambda})^\tau + \hat{b}^\tau\hat{\lambda}\right]}$$

$$\bar{X} = \frac{(1-\hat{\varphi})\hat{\lambda}}{1-\hat{\varphi}(\hat{a} + \hat{b}\hat{\lambda})}, \quad \hat{\varphi}\hat{b} = \frac{\hat{\gamma}_X(1)}{\bar{X}^\tau}$$

۲-۳ روش کمترین مربعات شرطی

برآوردگر کمترین مربعات شرطی (CLS) پارامترهای $\vartheta = (a, b, \lambda, \varphi)$ ، از طریق مینیمم کردن تابع زیر به دست می‌آید،

$$Q(\vartheta) = \sum_{t=1}^n (X_t - E(X_t | t-1))^\tau = \sum_{t=1}^n (X_t - \varphi a X_{t-\tau} - \varphi b X_{t-\tau} e_{t-1} - (1-\varphi)\lambda)^\tau$$

که در آن $e_t = \frac{X_t - \varphi a X_{t-\tau} - \varphi b X_{t-\tau} e_{t-1}}{1-\varphi}$ تعریف می‌شود. مینیمم کردن تابع $Q(\vartheta)$ با استفاده از الگوریتم نیوتن رافسون انجام می‌شود،

$$(\vartheta)^{(j+1)} = (\vartheta)^{(j)} - S^{-1}(\vartheta)^{(j)} G(\vartheta)^{(j)}$$

که در آن G و S بردار گرادیانت و ماتریس هسیان هستند که به صورت زیر ارائه می‌شوند

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial \lambda} & \frac{\partial^2 Q}{\partial a \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial b \partial \lambda} & \frac{\partial^2 Q}{\partial b \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial a} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial b} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi \partial a} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi \partial b} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi \partial \lambda} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix}, G = \left[\frac{\partial Q}{\partial a}, \frac{\partial Q}{\partial b}, \frac{\partial Q}{\partial \lambda}, \frac{\partial Q}{\partial \varphi} \right]$$

بنابراین با استفاده از تعریف e_t می‌توان مشتقات جزئی تابع $Q(\vartheta)$ نسبت به پارامترها به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \tau \sum_{t=\tau}^n \left(-\varphi X_{t-\tau} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial a} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial b} &= r \sum_{t=\tau}^n \left(-\varphi X_{t-\tau} e_{t-1} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial b} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda), \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= r \sum_{t=\tau}^n \left(-(1-\varphi) - \varphi X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial \lambda} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda), \\ \frac{\partial Q}{\partial \varphi} &= r \sum_{t=\tau}^n \left(-a X_{t-\tau} - b X_{t-\tau} e_{t-1} + \lambda - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial \varphi} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda)\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_t}{\partial \varphi} &= \frac{-a X_{t-\tau} - b X_{t-\tau} e_{t-1} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial \varphi} + e_t}{(1-\varphi)} \\ \frac{\partial e_t}{\partial a} &= \frac{-\varphi X_{t-\tau} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial a}}{(1-\varphi)}, \quad \frac{\partial e_t}{\partial b} = \frac{-\varphi X_{t-\tau} e_{t-1} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial b}}{(1-\varphi)}.\end{aligned}$$

به راحتی می توان مشتقات جزئی مرتبه دوم $\frac{\partial^2 Q}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j}$ را نیز تعیین نمود. از آنجایی که عبارت های

e_t و e_τ را نمی توان محاسبه کرد و همچنین به خاطر بحث های موجود در سوبا راثو [۱۷]، بدون

اینکه از کلیت مسئله کاسته شود می توان شروط $e_\tau = e_t = 1$ و $\frac{\partial e_t}{\partial \vartheta_i} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = 0$ را اعمال

کرد. الگوریتم نیوتن رافسون نیاز به مقادیر اولیه دارد که با استفاده از برآوردگرهای روش کمترین مربعات شرطی پارامترهای مدل $MPTINAR(\tau)$ به دست می آید. با تکرار مراحل تا زمانی که خطای دو مرحله متوالی به کمتر از $10^{-\tau}$ برسد یعنی $10^{-\tau} \leq |g_i^{(n+1)} - g_i^{(n)}|$ روند ادامه می یابد.

همچنین می توان با استفاده از نتایج فریلند و مک کیب [۱۸]، توزیع مجانبی برآوردگرهای کمترین مربعات شرطی را محاسبه کرد. برای این منظور ابتدا $H = (H_a, H_b, H_\lambda, H_\varphi)$ به این صورت تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}H_a &= \left(-\varphi X_{t-\tau} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial a} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda), \\ H_b &= \left(-\varphi X_{t-\tau} e_{t-1} - \varphi b X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial b} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda),\end{aligned}$$

$$H_\lambda = \left(-(1-\varphi) - \varphi X_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial \lambda} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda),$$

$$H_\varphi = \left(-aX_{t-\tau} - bX_{t-\tau}e_{t-1} + \lambda - \varphi bX_{t-\tau} \frac{\partial e_{t-1}}{\partial \varphi} \right) (1-\varphi)(e_t - \lambda),$$

هم‌چنین $\partial H_a, \partial H_b, \partial H_\lambda$ و ∂H_φ را به‌عنوان مشتقات جزئی مرتبه اول از H نسبت به بردار پارامترها تعریف می‌کنیم. با استفاده از مفاهیم بالا، برآوردگرهای کمترین مربعات شرطی دارای توزیع مجانبی نرمال به‌صورت زیر می‌باشند

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim \left(\cdot, M^{-1}VM^{-T} \right)$$

که در آن $M = E \left[\left(\partial H_{g_i}, \partial H_{g_j} \right) \right]_{i,j=1}^r$ ، $V = E \left[\left(H_{g_i}, H_{g_j} \right) \right]_{i,j=1}^r$ تعریف می‌شوند.

۳-۳- شبیه‌سازی

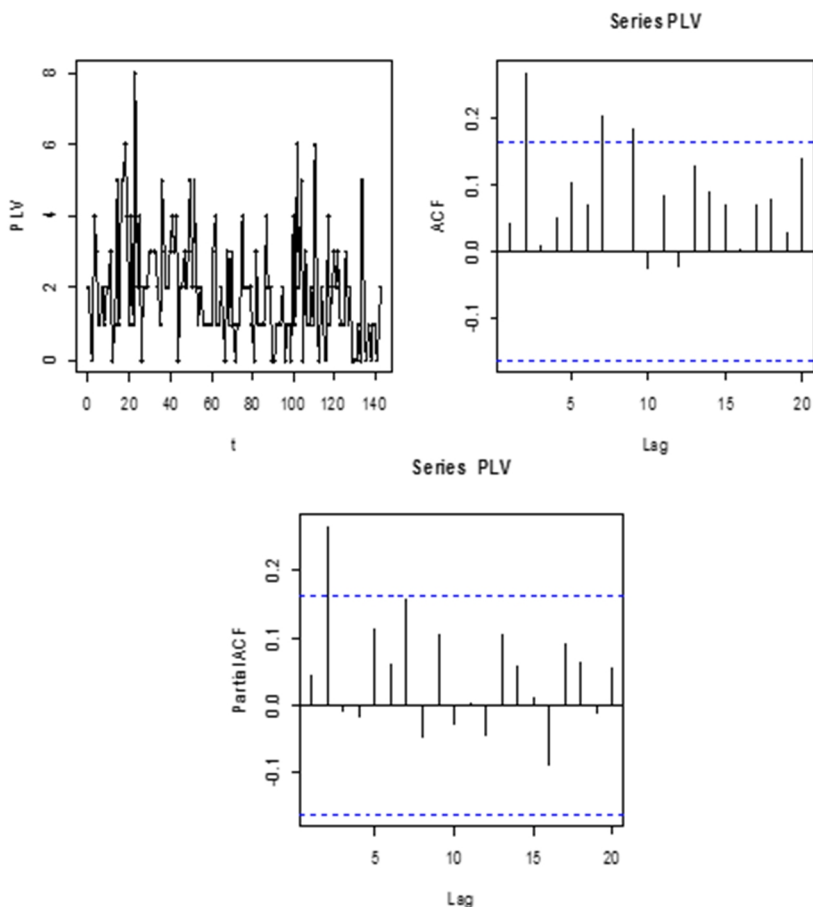
در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه عملکرد دو روش یول‌واکر و کمترین مربعات شرطی برای برآورد پارامترهای مدل $MPTINBL(2,0,2,1)$ انجام شده است. برای این منظور، نمونه‌های مختلفی (n) با اندازه‌های ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ از فرایند شبیه‌سازی کرده‌ایم. جدول ۱ آریبی و میانگین مربعات خطا را بر اساس ۵۰۰ بار شبیه‌سازی نشان می‌دهد. بر اساس جدول ۱، برآوردها به مقدار واقعی پارامتر همگرا می‌باشند. هم‌چنین با افزایش حجم نمونه برآوردگرهای حاصل از روش یول‌واکر به مقادیر اصلی زودتر همگرا می‌شود. از طرفی زمانی که فضای پارامتر به مرز شرط اکیداً ایستایی نزدیک‌تر می‌شود کارایی روش CLS بدتر می‌شود.

۴- نتایج داده واقعی

در این بخش، کارایی فرایند $MPTINBL(2,0,2,1)$ را در مدل‌سازی داده واقعی، توسط دو سری داده مورد بررسی قرار می‌دهیم. داده اول در نظر گرفته شده، تعداد کلی گزارش شده از جرائم خشونت‌آمیز تجاوز و سرقت و... که از سال ۱۹۹۰ تا ۲۰۰۱ در ۲۱-امین ایستگاه پلیس پترزبورگ در روسیه است. هم‌چنین داده دوم، تعداد سرقت گزارش شده در ۱۳۰۶-امین ایستگاه پلیس پترزبورگ است. این داده‌ها در سایت (<http://www.forecastingprinciples.com>) ارائه شده‌اند.

جدول (۱): نتایج شبیه‌سازی برآورد پارامترهای مدل $MPTINBL(2, 2, 1)$ بر اساس آریبی و میانگین مربعات خطا در پرازنز

| a_{TW} | b_{TW} | λ_{TW} | φ_{TW} | a_{CLS} | b_{CLS} | λ_{CLS} | φ_{CLS} | n |
|---------------------------------------------------|---------------|----------------|----------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|------|
| $(a, b, \lambda, \varphi) = (0/2, 0/8, 1, 0/1)$ | | | | | | | | |
| 0/051(0/031) | 0/041(0/012) | 0/112(0/031) | 0/122(0/025) | 0/132(0/077) | 0/173(0/082) | -0/041(0/018) | -0/008(0/007) | 100 |
| 0/032(0/026) | 0/052(0/011) | 0/022(0/003) | 0/022(0/003) | 0/051(0/038) | -0/064(0/021) | -0/004(0/015) | 0/004(0/008) | 1000 |
| 0/000(0/012) | 0/033(0/009) | 0/005(0/000) | 0/008(0/000) | 0/028(0/016) | 0/002(0/004) | 0/002(0/002) | -0/005(0/001) | 5000 |
| $(a, b, \lambda, \varphi) = (0/3, 0/5, 2, 0/1)$ | | | | | | | | |
| 0/000(0/038) | 0/032(0/005) | 0/107(0/051) | 0/095(0/014) | 0/074(0/077) | 0/141(0/065) | -0/095(0/046) | -0/005(0/013) | 100 |
| 0/000(0/022) | 0/032(0/005) | 0/013(0/005) | 0/016(0/002) | 0/005(0/028) | 0/043(0/058) | -0/031(0/021) | 0/013(0/007) | 1000 |
| 0/025(0/012) | 0/016(0/005) | -0/004(0/005) | -0/004(0/000) | 0/025(0/014) | 0/009(0/033) | -0/002(0/002) | -0/004(0/000) | 5000 |
| $(a, b, \lambda, \varphi) = (0/6, 0/5, 3, 0/3)$ | | | | | | | | |
| -0/126(0/051) | 0/028(0/005) | 0/023(0/051) | 0/017(0/001) | 0/092(0/062) | 0/041(0/023) | 1/885(35/54) | 0/161(0/112) | 100 |
| 0/012(0/008) | -0/002(0/002) | 0/000(0/014) | -0/007(0/002) | -0/011(0/035) | -0/023(0/006) | 0/975(9/41) | 0/094(0/041) | 1000 |
| 0/014(0/001) | -0/021(0/001) | 0/001(0/005) | 0/012(0/000) | 0/010(0/036) | 0/038(0/007) | 0/182(0/75) | 0/021(0/012) | 5000 |
| $(a, b, \lambda, \varphi) = (0/7, 0/1, 1, 0/2)$ | | | | | | | | |
| 0/122(0/006) | -0/015(0/111) | 0/081(0/011) | 0/055(0/033) | 0/021(0/004) | -0/008(0/024) | 0/021(0/006) | 0/002(0/022) | 100 |
| -0/052(0/002) | -0/052(0/004) | 0/044(0/003) | 0/032(0/009) | 0/032(0/003) | -0/056(0/006) | 0/033(0/004) | 0/012(0/019) | 1000 |
| -0/049(0/002) | -0/061(0/003) | 0/041(0/000) | 0/032(0/005) | 0/044(0/004) | -0/069(0/017) | 0/022(0/005) | 0/015(0/019) | 5000 |
| $(a, b, \lambda, \varphi) = (0/9, 0/005, 4, 0/8)$ | | | | | | | | |
| -0/067(0/012) | 0/014(0/000) | -1/451(4/984) | -0/045(0/009) | -0/071(0/023) | 0/006(0/001) | 2/081(16/81) | 0/059(0/007) | 100 |
| -0/005(0/000) | 0/006(0/000) | -0/276(0/192) | -0/016(0/001) | -0/009(0/004) | -0/002(0/000) | 0/291(0/581) | 0/007(0/001) | 1000 |
| 0/002(0/000) | 0/004(0/000) | -0/021(0/135) | -0/013(0/000) | 0/022(0/005) | -0/003(0/000) | 0/222(0/571) | -0/007(0/002) | 5000 |



شکل (۱): مسیر نمونه‌ای، تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای داده سرقت ۲۱ امین ایستگاه پلیس

مسیر نمونه‌ای، تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی داده‌های فوق در شکل ۱ و ۲ نمایش داده شده است. از شکل ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که شرایط مدل اتورگرسیو مرتبه دوم برای این داده‌ها برقرار است. از آنجایی که تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی مدل فرآیندهای دوخطی شبیه مدل اتورگرسیو است بنابراین با مشاهده شکل‌های ۱ و ۲ می‌توان بر وجود فرآیند-های دوخطی تردید کرد. برای رفع این مسئله ابتدا ایستایی داده‌ها نیز توسط آزمون دیکی فلرافزایشی^۱ با P -مقدارهای برابر ۰/۰۱ و ۰/۰۲۵ تأیید شده است. از سوی دیگر، آزمون غیرخطی

۱- Augmented Dickey-Fuller test

کینان^۱ با P -مقدارهای برابر $0/0014$ و $0/0025$ غیرخطی بودن داده‌ها را در مقابل مدل خطی اتورگرسیو مرتبه دوم تأیید کرده است. جدول ۲، برآورد YW پارامترهای مدل برازش داده‌شده $MPTINBL(2,0,2,1)$ را نشان می‌دهد.

جدول (۲): برآورد گشتاوری پارامترهای مدل $MPTINBL(2,0,2,1)$ حاصل از داده‌های ۲۱ و ۱۳۰۶ امین ایستگاه پلیس پترزبورگ

| ایستگاه | a | b | λ | φ |
|-------------------|------|-------|-----------|-----------|
| ۲۱-امین ایستگاه | ۰/۵۱ | ۰/۰۷۲ | ۲/۳۴ | ۰/۳۹ |
| ۱۳۰۶-امین ایستگاه | ۰/۳۲ | ۰/۰۲۹ | ۴/۸۱ | ۰/۶۴ |

۱-۴ پیش‌بینی

در این قسمت به بررسی مسئله پیش‌بینی که یکی از مهم‌ترین مباحث در تجزیه و تحلیل سری-های زمانی است، می‌پردازیم. همان‌طور که گفته شد، امید شرطی یک روش معمول برای پیش‌بینی مقدار میانگین داده‌های سری زمانی است. پیش‌بینی k گام به جلو از طریق میانگین شرطی به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{\varphi}(\hat{a} + \hat{b}\hat{e}_t)X_{t-1} + (1 - \hat{\varphi})\hat{\lambda},$$

$$\hat{X}_{t+k} = (1 - \hat{\varphi})\hat{\lambda} + \hat{\varphi}(\hat{a} + \hat{b}\hat{\lambda})X_{t+k-2}.$$

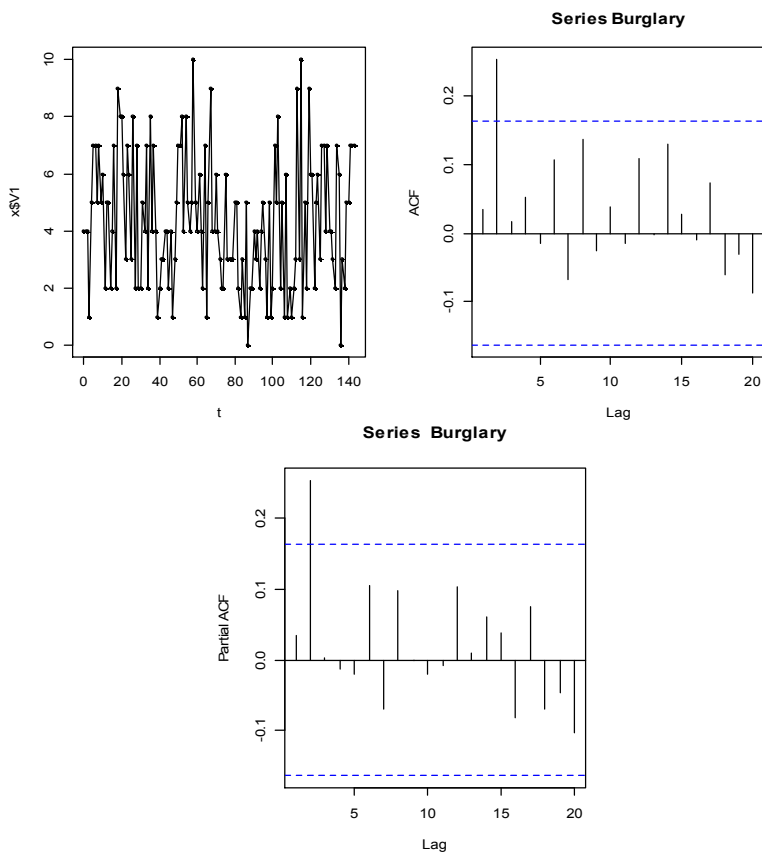
که در آن $\hat{e}_t = \frac{X_t - \hat{\varphi}(\hat{a} + \hat{b}\hat{e}_{t-1})X_{t-2}}{(1 - \hat{\varphi})}$ و $\hat{\varphi}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{\lambda}$ برآوردگرهای یول واکر پارامترها می‌باشند.

جهت بررسی کفایت و توانایی پیش‌بینی مدل $MPTINBL(2,0,2,1)$ برای سری داده‌های واقعی، پیش‌بینی ۱۰ گام به جلو در جدول ۳ گزارش شده است.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

با ارائه یک مدل غیرخطی گسسته مقدار جدید به برازش آن به داده‌ها پرداخته شده است. پارامترهای مدل با دو روش یول واکر و کمترین مربعات شرطی برآورد و عملکرد آنها با استفاده از شبیه‌سازی براساس آریبی و میانگین مربعات خطا مورد مطالعه قرار گرفته است. بر پایه‌ی

مطالعات شبیه‌سازی، مشاهده شد که با افزایش حجم نمونه روش یول‌واکر همگرایی سریع‌تری نسبت به روش کمترین مربعات شرطی دارد. از طرفی زمانی که فضای پارامتر به مرز شرط اکیداً ایستایی نزدیک‌تر می‌شود کارایی روش کمترین مربعات شرطی بدتر می‌شود. این موضوع توسط برون و هس [۱۹] برای مدل‌های پیوسته کلاسیک دو خطی نیز تأیید شد. لذا در تحلیل و آنالیز داده‌های واقعی روش یول‌واکر برای برآورد پارامترهای این مدل پیشنهاد می‌شود. کارایی فرایند در برازش داده‌ها توسط یک سری داده واقعی بیش پراکنده بررسی شده است.



شکل (۲): مسیر نمونه‌ای، تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی نمونه‌ای داده سرقت ۱۳۰۶ امین ایستگاه پلیس

جدول (۳): پیش‌بینی k گام به جلو حاصل از داده‌های ۲۱ و ۱۳۰۶ امین ایستگاه پلیس پترزبورگ

| ایستگاه ۲۱ | ایستگاه ۱۳۰۶ | k |
|------------|--------------|-----|
| ۱/۷۰۸ | ۵/۱۷۰ | ۱ |
| ۱/۹۵۷ | ۵/۰۲۴ | ۲ |
| ۱/۸۷۹ | ۴/۵۶۱ | ۳ |
| ۱/۹۴۶ | ۴/۵۲۴ | ۴ |
| ۱/۹۲۵ | ۴/۴۰۶ | ۵ |
| ۱/۹۴۳ | ۴/۳۹۷ | ۶ |
| ۱/۹۳۷ | ۴/۳۶۷ | ۷ |
| ۱/۹۴۲ | ۴/۳۶۵ | ۸ |
| ۱/۹۴۱ | ۴/۳۵۷ | ۹ |
| ۱/۹۴۲ | ۴/۳۵۶ | ۱۰ |

منابع

- [1] Al-Osh, M. A. and Alzaid, A. A. (1987). First-order integer-valued autoregressive process, *Journal Time Series Analysis*, **8**, 261-275.
- [2] Alzaid, A. A. and Al-Osh, M. A. (1993). Some autoregressive moving average processes with generalized Poisson marginal distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **45**, 223-232.
- [3] Aly, E-E. A. A. and Bouzar, N. (1994b). On some integer-valued autoregressive moving average models, *Multivariate Analysis*, **50**, 132-151.
- [4] Bakouch, H.S. and Ristic, M. M. (2010). Zero truncated Poisson integer-valued AR(1) model, *Metrika*, **72**, 265-280.
- [5] McKenzie, E. (1986). Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric distributions, *Advances in Applied Probability*, **18**, 679-705.
- [6] Mohammadpour, M., Bakouch, H. S. and Shirozhan, M. (2018). Poisson-Lindley INAR(1) model with applications, *Brazilian Journal of Statistics*, **32**, 262-280.
- [7] Ristic, M. M., Bakouch, H. S. and Nastic, A. S. (2009). A new geometric first-order integer-valued autoregressive process, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 2218-2226.

- [8] Schweer, S. and Weib, C. (2014). Compound Poisson INAR(1) processes: Stochastic properties and testing for overdispersion, *Computational Statistics and Data Analysis*, **77**, 267-284.
- [9] Shirozhan, M., Mohammadpour, M. and Bakouch, H. S. (2019). A new geometric INAR(1) model with mixing Pogram and generalized binomial thinning operators, *Iranian Journal of Science and Technology*, **43**, 1011-1020.
- [10] Steutel, F. W. and van Harn, K. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability, *The Annals of Probability*, **7**, 893-899.
- [11] Doukhan, P., Latour, A. and Oraichi, D. (2006). Simple integer-valued bilinear time series model, *Applied Probability*, **38**, 559-578.
- [12] Drost, F.C., Akker, V.D.R. and Werker, B.J.M. (2008). Note on integer-valued bilinear time series, *Statistics and Probability Letters*, **38**, 559-578.
- [13] Bentarzi, M. and Bentarzi, W. (2017). Periodic integer-valued bilinear time series model, *Journal Communication in statistics-Theory and Methods*, **46**, 1184-1201.
- [14] Pogram, G. G. (1980). An autoregressive model for multilag markov chains, *Journal of Applied Probability*, **17**, 350-362.
- [15] Biswas, A. and Song, K. (2009). Discrete-valued ARMA processes, *Journal of Statistics and Probability Letters*, **79**, 1884-1889.
- [16] Khoo, W. C., Ong, S. H. and Biswas, A. (2017). Modelling time series of counts with a new class of INAR(1) models, *Statistical Papers*, **58**, 393-416.
- [17] Subba Rao, T. (1981). On the theory of bilinear time series model, *Journal of the Royal Statistical Society*, **43**, 244-255.
- [18] Freeland, R. K. and McCabe, B. P. M. (2005). Asymptotic properties of CLS estimators in Poisson AR(1) model, *Statistics and Probability Letters*, **73**, 147-153.
- [19] Brunne, A.D. and Hess, G.D. (1995). Potential problems in estimating bilinear time-series models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **19**, 663-668.

An Integer-valued Bilinear Time Series Model Via Random Pogram and Thinning Operators

Sakineh Ramezani and Mehrnaz Mohammadpour

Department of Statistics, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran

Received: January 21 2019

Accepted for publication: January 20 2020

Corresponding author: m.mohammadpour@umz.ac.ir

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this paper, we introduce a new integer valued bilinear modeling based on the Pogram and thinning operators. Some statistical properties of the model are discussed. The model parameters are estimated by the conditional least square and Yule-Walker methods. By a simulation, the performances of the two estimation methods are studied. Finally, the efficiency of the proposed model is investigated by applying it on two real data sets.

Keywords: Conditional least square, Thinning operator, Pogram operator, Integer-valued bilinear model.

Mathematics Subject Classification (2010): 62M10.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>) .