

# یک رویکرد برنامه ریزی دوسطحی برای مسئله توسعه تأثیر در شبکه در فضای رقابتی

فرناز هوشمند خلیق<sup>۱</sup>

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۲/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱/۲

**چکیده:** شبکه‌های اجتماعی در بازاریابی محصولات نقش مهمی ایفا می‌کنند. در این مقاله، مسئله توسعه تأثیر در شبکه‌های اجتماعی در فضای رقابتی بررسی می‌گردد که در آن، کاربران شبکه تحت تأثیر تبلیغات مثبت و منفی قرار دارند. ابتدا رهبر تعدادی از اعضای شبکه اجتماعی را به‌عنوان بذر مثبت انتخاب و سپس، پیرو بااطلاع کامل از تصمیمات رهبر، افراد دیگری را به‌عنوان بذر منفی انتخاب می‌نماید و تأثیرات مثبت و منفی در شبکه توسعه می‌یابند. هدف رهبر، بیشینه‌سازی سود حاصل از افرادی است که تحت تأثیر مثبت قرار می‌گیرند و هدف پیرو کمینه‌سازی این مقدار است. مسئله در قالب یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی فرمول‌بندی و برای حل آن، یک الگوریتم دقیق مبتنی بر تجزیه ارائه می‌شود. نتایج محاسباتی عملکرد مدل الگوریتم را ارزیابی می‌کنند.

**واژه‌های کلیدی:** توسعه تأثیر، شبکه اجتماعی، برنامه‌ریزی دوسطحی، الگوریتم دقیق مبتنی بر تجزیه

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰C۱۱، ۹۰B۶۰

## ۱- مقدمه

شبکه‌های اجتماعی به‌عنوان بستری برای برقراری روابط اجتماعی میان افراد، امکان نشر ایده‌ها، اخبار و اطلاعات را فراهم می‌کنند و می‌توانند در بازاریابی محصولات نقش مهمی ایفا کنند. بر این اساس، اصطلاح بازاریابی ویروسی<sup>۲</sup> مطرح می‌گردد که در آن، هدف آن است که با توجه به

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: [f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir](mailto:f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir)

بودجه تبلیغاتی، تعداد محدودی از افراد را که به آن‌ها تحت عنوان افراد کلیدی یا بذر<sup>۱</sup> اطلاق می‌گردد، انتخاب و از طریق آن‌ها محصول موردنظر را تبلیغ کنیم، به این امید که تبلیغات این محصول در شبکه توسعه یابد و محصول در زمان کوتاهی مورد استقبال درصد بالایی از اعضای شبکه قرار گیرد. این مهم که افراد عموماً تحت تأثیر تصمیمات دوستان و همکارانشان قرار دارند، پایه و اساس بازاریابی ویروسی است و در آن، انتخاب بهینه‌ی افراد کلیدی یا بذر حائز اهمیت قرار دارد و برای اتخاذ تصمیم بهینه، اطلاعاتی مانند میزان تأثیرگذاری افراد بر یکدیگر موردنیاز است.

شبکه اجتماعی را می‌توان در قالب گراف جهت‌دار  $G = (\mathbb{N}, \mathbb{A})$  نمایش داد که در آن، هر رأس  $i \in \mathbb{N}$  بیانگر یک کاربر شبکه و کمان جهت‌دار  $(i, j) \in \mathbb{A}$  بیانگر امکان تأثیرگذاری کاربر  $i$  بر کاربر  $j$  است. برای انتشار یک خبر، ایده یا معرفی یک محصول جدید، ابتدا لازم است تعدادی از رؤوس شبکه به‌عنوان رؤوس بذر انتخاب گردند. با هر رأس، دو وضعیت فعال و غیرفعال نظیر می‌شود. در شروع کار، رؤوسی که به‌عنوان بذر انتخاب می‌شوند، وضعیت فعال و سایر رؤوس وضعیت غیرفعال دارند و در هر مرحله، هر رأس غیرفعال به شرطی که تعداد مشخصی از همسایگانش فعال شده باشند، فعال می‌گردد. بدین‌وسیله، رؤوس ممکن است به‌تدریج از حالت غیرفعال به فعال تغییر وضعیت دهند و بنابراین، ایده‌ها، اخبار و تبلیغ محصولات به‌تدریج در شبکه منتشر می‌شوند.

در [۱] برای توصیف توسعه تأثیر در شبکه و چگونگی تبدیل وضعیت رؤوس از حالت غیرفعال به فعال، دو رویکرد انتشار مختلف مطرح شده است. در رویکرد اول که روش آستانه‌ای خطی<sup>۲</sup> نام دارد، میزان تأثیرپذیری هر رأس از هر یک از همسایگانش معلوم است و با هر رأس یک آستانه مشخص نظیر می‌شود که اگر مجموع تأثیراتی که همسایگان یک رأس به او منتقل می‌کنند، از یک آستانه مشخص بیشتر باشد، آن رأس تحت تأثیر قرار می‌گیرد (از غیرفعال به فعال تغییر وضعیت می‌دهد). فرآیند تأثیرگذاری در مراحل متوالی ادامه می‌یابد، به این صورت که در هر مرحله  $t$ ، همه رؤوسی که در مرحله  $t-1$  فعال بوده‌اند، فعال می‌مانند و هر رأس غیرفعالی که میزان تأثیرگذاری همسایگانش روی او از آستانه موردنظر بیشتر باشد، به حالت فعال تغییر وضعیت می‌دهد. در رویکرد دوم که روش آبشاری استقلال<sup>۳</sup> نام دارد، هر رأس فعال با یک احتمال مشخص ممکن است همسایگانش را نیز فعال گرداند. در [۱]، هدف آن است که بذره‌ای اولیه به‌گونه‌ای تعیین شوند که تعداد رؤوسی که تا پایان افق برنامه‌ریزی فعال می‌شوند، بیشینه گردد.

1- Seed

2- Linear threshold model

3- Independence cascade model

نویسندگان به NP-سخت بودن مسئله اشاره و برای حل آن، یک الگوریتم تقریبی حریصانه ارائه نموده‌اند.

در [۲]، موضوع توسعه تأثیر در شبکه‌هایی که در معرض تبلیغات منفی قرار دارند، مورد بررسی قرار گرفته است که در آن، دو گروه مدافع و مهاجم مفروض هستند و مدافع زیرمجموعه‌ای از رئوس را در مقابل تبلیغات منفی مقاوم‌سازی کرده است (این تصمیم از قبل معلوم است و به‌عنوان قید در مسئله لحاظ می‌گردد). مهاجم با اطلاع کامل از تصمیمات مدافع، قصد دارد زیرمجموعه‌ای از رئوس مقاوم شده را تحت تأثیر منفی دهد. این تأثیر بر اساس مدل آستانه‌ای خطی در طول چند مرحله توسعه می‌یابد. هدف مهاجم، بیشینه‌سازی تعداد وزن‌دار رئوسی است که در طول افق برنامه‌ریزی تحت تأثیر قرار می‌گیرند که وزن‌ها هم به رأس و هم به دوره‌ی زمانی که در آن، رأس مربوطه برای اولین بار تحت تأثیر قرار می‌گیرد، وابسته هستند. سه فرمول‌بندی مختلف برای مسئله‌ی مهاجم ارائه و برای حل، از الگوریتم صفحه برش استفاده شده است. در [۳] توسعه تأثیر در شبکه‌های ترکیبی مورد مطالعه قرار گرفته به این معنی که یک فرد ممکن است هم‌زمان در چند شبکه اجتماعی عضویت داشته باشد و لذا، اطلاعات می‌تواند از طریق او در چند شبکه انتشار یابد.

در [۴]، مسأله توسعه تأثیر در شبکه‌هایی که تحت تأثیر تبلیغات مثبت و منفی قرار دارند، بررسی شده و برای هر رأس، یکی از سه وضعیت فعال مثبت، فعال منفی و غیرفعال امکان‌پذیر است. فرض بر آن است که بذره‌ای منفی از قبل در شبکه انتخاب شده‌اند (لذا درباره انتخاب آن‌ها تصمیم‌گیری نمی‌شود) و با توجه به توسعه تأثیر آن‌ها، بذره‌ای مثبت باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که تعداد رئوس فعال مثبت در شبکه بیشینه گردد. مسئله به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح<sup>۱</sup> فرمول‌بندی و با یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر آزادسازی لاگرانژ حل شده است. مسأله مشابهی در مقاله [۵] بررسی و برای حل آن، از روش تولید ستون استفاده شده است.

در این مقاله، مسأله توسعه تأثیر در شبکه را با این فرض که کاربران شبکه تحت تأثیر تبلیغات مثبت و منفی قرار دارند، بررسی می‌کنیم. بر خلاف مقاله [۴] که در آن بذره‌ای منفی از قبل در شبکه انتخاب شده‌اند، در این مقاله، مسئله دارای ماهیت دوسطحی است و در آن، ابتدا سطح رهبر، تعدادی از اعضای شبکه اجتماعی را به‌عنوان بذر مثبت انتخاب و سپس، پیرو با اطلاع کامل از تصمیمات رهبر، افراد دیگری را به‌عنوان بذر منفی انتخاب می‌نماید. سپس، تأثیرات مثبت و منفی در شبکه توسعه می‌یابد. هدف سطح رهبر، بیشینه‌سازی سود حاصل از افرادی است که تحت تأثیر مثبت قرار می‌گیرند، حال آنکه هدف سطح پیرو کمینه‌سازی این مقدار است. ابتدا مسئله در قالب یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی فرمول‌بندی و با یک الگوریتم دقیق مبتنی بر تجزیه حل می‌گردد.

مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی ماهیتاً سخت هستند و روش‌های مختلفی برای حل آن‌ها ارائه شده است. یکی از روش‌های شناخته‌شده، آن است که با استفاده از شرایط KKT، مسئله را به صورت یک سطحی بازنویسی کنیم، البته این روش زمانی قابل استفاده است که مسئله سطح پایین محدب و شرایط کیفی قیود<sup>۱</sup> برقرار باشد. برخی مطالعات، به روش‌های مبتنی بر شاخه و کران پرداخته‌اند [۶ و ۷]. در برخی دیگر، روش‌های مبتنی بر تجزیه مطرح گردیده [۸ و ۹]، برخی نیز به ارائه روش ابتکاری پرداخته‌اند [۱۰، ۱۱ و ۱۲]. نویسندگان در [۱۳] مسئله را در حالتی که مسئله سطح رهبر دو هدفه است بررسی کردند. برای مروری جامع بر مسائل دوسطحی (مفاهیم، کاربردها و روش‌های حل) [۱۴] را ببینید.

نوآوری‌های این مقاله بدین شرح است: ابتدا مسئله توسعه تأثیر در شبکه در فضای رقابتی معرفی و در قالب یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی فرمول‌بندی می‌گردد که در آن، متغیرهای دودویی در هر دو سطح حضور دارند. سپس، یک روش دقیق مبتنی بر تجزیه برای حل آن پیشنهاد می‌شود. نتایج محاسباتی عملکرد مدل و روش را روی چند شبکه واقعی با اندازه کوچک ارزیابی می‌کنند. سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: بخش بعد به تشریح مسئله و فرمول‌بندی آن می‌پردازد. سپس، یک روش دقیق مبتنی بر تجزیه برای حل مدل ارائه می‌گردد که در آن از رویکردهای مختلفی برای تسریع الگوریتم استفاده می‌شود. پس از آن، عملکرد روش روی چند شبکه ارزیابی می‌گردد و سرانجام، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای تحقیقات آتی ارائه خواهد شد.

## ۲- توصیف مسئله

شرکتی را در نظر بگیرید که قصد دارد کالای خود را در یک شبکه اجتماعی تبلیغ کند. او بودجه تبلیغاتی محدودی دارد، لذا تعدادی از اعضای شبکه اجتماعی را به عنوان بذر مثبت انتخاب و روی آن‌ها سرمایه‌گذاری می‌کند تا تبلیغات از طریق این افراد در شبکه توسعه یابد. متأسفانه یک گروه مخالف، در راستای تخریب شرکت، علیه او تبلیغات منفی انجام می‌دهد و تعدادی از اعضای شبکه را به عنوان بذر منفی انتخاب می‌کند تا تبلیغات منفی را از طریق آن‌ها انتشار دهد. بنابراین، اعضای شبکه اجتماعی هم با تبلیغات مثبت و هم منفی مواجه هستند و در هر دوره زمانی، هر کاربر در یکی از سه وضعیت «فعال مثبت»، «فعال منفی» یا «غیرفعال» قرار دارد. فرض بر آن است که رئوسی که به عنوان بذر مثبت و بذر منفی انتخاب می‌شوند به ترتیب، وضعیت فعال مثبت و فعال منفی خواهند داشت و وضعیت آن‌ها تا پایان افق زمانی تغییر نمی‌کند و از طریق آن‌ها، تأثیرات مثبت و منفی در شبکه توسعه می‌یابد. ما به پیروی از [۱] برای فرمول‌بندی توسعه تأثیر از مدل آستانه‌ای خطی استفاده می‌کنیم به این معنی که با رابطه دوستی میان افراد

$i$  و  $j$ ، وزن  $b_{i,j}$  را نظیر می‌کنیم که بیانگر میزان تأثیرپذیری فرد  $j$  از فرد  $i$  است. همچنین، با هر فرد  $i$ ، آستانه  $\theta_i^+$  را نظیر می‌کنیم که اگر مجموع تأثیراتی که  $i$  از دوستانی که در وضعیت فعال مثبت قرار دارند دریافت می‌کند منهای مجموع تأثیراتی که او از دوستانی که در وضعیت فعال منفی قرار دارند دریافت می‌نماید، از آستانه  $\theta_i^+$  بیشتر باشد، فرد  $i$  تحت تأثیر مثبت قرار می‌گیرد و اصطلاحاً می‌گوییم وضعیت آن فعال مثبت می‌شود. همچنین، با هر فرد  $i$ ، آستانه  $\theta_i^-$  نظیر می‌شود که اگر مجموع تأثیراتی که  $i$  از دوستانی که در وضعیت فعال منفی قرار دارند دریافت می‌کند، منهای مجموع تأثیراتی که او از دوستانی که در وضعیت فعال مثبت قرار دارند دریافت می‌نماید، از آستانه  $\theta_i^-$  بیشتر باشد، فرد تحت تأثیر منفی قرار می‌گیرد و اصطلاحاً می‌گوییم وضعیت آن فعال منفی می‌شود و در غیر از این دو صورت، فرد به شرطی که به‌عنوان بذر انتخاب نشده باشد، در وضعیت غیرفعال قرار دارد. فرض بر آن است که فردی که فعال مثبت می‌شود، نسبت به خرید کالا اقدام می‌کند. همچنین، کیفیت کالای شرکت و خدمات پس از فروش در وضعیت مطلوبی قرار دارد و لذا، این اطمینان وجود دارد که وقتی فردی در وضعیت فعال مثبت قرار گرفت تا پایان افق زمانی، در همین وضعیت می‌ماند؛ اما فردی که در وضعیت فعال منفی قرار می‌گیرد، لزوماً تا پایان، در این وضعیت نیست و ممکن است بعداً در وضعیت‌های غیرفعال یا حتی فعال مثبت قرار گیرد.

از این رو با یک مسأله برنامه‌ریزی دوسطحی مواجه هستیم. شرکت به‌عنوان رهبر تعدادی از افراد را به‌عنوان بذر مثبت انتخاب می‌کند. سپس، گروه مخالف به‌عنوان پیرو بااطلاع کامل از تصمیمات رهبر و با توجه به بودجه تبلیغاتی محدود خود، تعدادی از افراد را (به شرطی که به‌عنوان بذر مثبت انتخاب نشده باشند) به‌عنوان بذر منفی انتخاب می‌کند، سپس، تأثیرات مثبت و منفی از طریق رئوس بذر در شبکه توسعه می‌یابد. وقتی فرد  $i$  برای اولین بار در دوره  $t$  فعال می‌گردد، سود  $p_{i,t}$  ایجاد می‌شود. شرکت می‌خواهد تصمیمات را به‌گونه‌ای اتخاذ کند که سود حاصل از افرادی که در طول افق برنامه‌ریزی  $T$  دوره‌ای فعال مثبت می‌شوند، بیشینه شود درحالی‌که هدف پیرو کمینه‌سازی این مقدار است.

### ۳- مدل مسئله

همان‌طور که قبلاً گفته شد، شبکه اجتماعی را با گراف جهت‌دار  $G = (\mathbb{N}, \mathbb{A})$  نشان می‌دهیم که هر کمان  $(i, j)$  بیانگر امکان تأثیرپذیری فرد  $j$  از فرد  $i$  است. در طول مقاله ممکن است واژه‌های «فرد در شبکه اجتماعی» و «رأس در گراف» به‌طور معادل به‌جای یکدیگر استفاده شوند.

نمادهای مسئله به شرح زیر است:  $\delta_i^-$

## مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترها

- $\mathbb{N}$  : مجموعهٔ رئوس با اندیس  $i, j$
- $\mathbb{A}$  : مجموعهٔ کمان‌ها
- $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$  : مجموعهٔ دوره‌ها با اندیس  $t$
- $b_{i,j}$  : یک عدد صحیح و مثبت مبین وزن کمان  $(i, j)$  که میزان تأثیرپذیری فرد  $j$  از فرد  $i$  را نشان می‌دهد.
- $c_i$  : هزینهٔ انتخاب رأس  $i$  به‌عنوان بذر مثبت برای سطح رهبر
- $c'_i$  : هزینهٔ انتخاب رأس  $i$  به‌عنوان بذر منفی برای سطح پیرو
- $\theta_i^+$  : پارامتر آستانه‌ای مثبت و صحیح که اگر تأثیرات همسایگان با وضعیت فعال: مثبت منهای تأثیرات همسایگان با وضعیت فعال منفی از  $\theta_i^+$  بیشتر باشد،  $i$  در وضعیت فعال مثبت قرار می‌گیرد.
- $\theta_i^-$  : پارامتر آستانه‌ای مثبت و صحیح که اگر تأثیرات همسایگان با وضعیت فعال: منفی منهای تأثیرات همسایگان با وضعیت فعال مثبت از  $\theta_i^-$  بیشتر باشد،  $i$  در وضعیت فعال منفی قرار می‌گیرد.
- $B_i$  : بودجهٔ تبلیغاتی رهبر
- $B'_i$  : بودجهٔ تبلیغاتی پیرو
- $p_{i,t}$  : عدد مثبت بیانگر سودی که اگر رأس  $i$  برای اولین بار در دورهٔ  $t$  فعال مثبت گردد، برای شرکت ایجاد می‌شود  $(p_{i,t+1} < p_{i,t})$  و  $(p_{i,1} > p_{i,0})$
- $M$  : یک عدد مثبت به اندازهٔ کافی بزرگ  
متغیرهای تصمیم به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

## متغیرهای تصمیم

- $\delta_i^+$  : متغیر دودویی که اگر رهبر رأس  $i$  را به‌عنوان بذر مثبت انتخاب کند یک، در غیر این صورت، صفر است.
- $\delta_i^-$  : متغیر دودویی که اگر پیرو رأس  $i$  را به‌عنوان بذر منفی انتخاب کند یک و در غیر این صورت، صفر است.
- $\eta_{i,t}^+$  : متغیر دودویی که اگر  $i$  در دورهٔ  $t$  فعال مثبت باشد، یک و در غیر این صورت، صفر است.

متغیر دودویی که اگر  $t$  در دوره  $t$  فعال منفی باشد، یک و در غیر این صورت، صفر است. :  $\eta_{i,t}^-$

بدین ترتیب، مسئله در قالب یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

(BLP)

$$\max_{\delta_i^+} z_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,0} \delta_i^+ + \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} (\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+) \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \delta_i^+ \leq B_1 \quad (2)$$

$$\delta_i^+ \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (3)$$

$$\min_{\delta_i^-, \eta_{i,t}^+, \eta_{i,t}^-} z_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} (\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+) \quad (4)$$

s.t.

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i' \delta_i^- \leq B_2 \quad (5)$$

$$\delta_i^+ + \delta_i^- \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (6)$$

$$\eta_{i,0}^+ = \delta_i^+ \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (7)$$

$$\eta_{i,t}^+ \geq \eta_{i,t-1}^+ \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1 \quad (8)$$

$$\eta_{i,t}^- \geq \delta_i^- \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T} \quad (9)$$

$$\eta_{i,t}^+ + \eta_{i,t}^- \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T} \quad (10)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^+ - \eta_{j,t-1}^-) b_{j,i} \geq \theta_i^+ - M(1 - \eta_{i,t}^+ + \eta_{i,t-1}^+) \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1 \quad (11)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^- - \eta_{j,t-1}^+) b_{j,i} \geq \theta_i^- - M(1 - \eta_{i,t}^- + \delta_i^-) \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1 \quad (12)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^+ - \eta_{j,t-1}^-) b_{j,i} \leq \theta_i^+ - \varepsilon + M(\eta_{i,t}^+ + \delta_i^-) \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1 \quad (13)$$

$$\delta_i^- \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (14)$$

$$\eta_{i,t}^+, \eta_{i,t}^- \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T} \quad (15)$$

تابع هدف سطح رهبر (۱) سود حاصل از رئوسی را که در طول افق برنامه‌ریزی فعال مثبت می‌شوند بیشینه می‌کند، درحالی‌که تابع هدف سطح پیرو (۴) این مقدار را کمینه می‌کند. قیود (۲) و (۵) به ترتیب محدودیت بودجه را برای رهبر و پیرو نشان می‌دهند. قید (۶) تضمین می‌کند که اگر یک رأس توسط رهبر به‌عنوان بذر مثبت انتخاب شود، نمی‌تواند توسط پیرو به‌عنوان بذر

منفی انتخاب گردد. قید (۷) تضمین می‌کند که وقتی یک رأس به‌عنوان بذر مثبت انتخاب شود تا پایان افق برنامه‌ریزی، وضعیت فعال مثبت خواهد داشت. قید (۸) تضمین می‌کند که اگر یک رأس در یک دوره در وضعیت فعال مثبت قرار بگیرد تا پایان افق برنامه‌ریزی در همین وضعیت می‌ماند. قید (۹) تضمین می‌کند که وقتی پیرو یک رأس را به‌عنوان بذر منفی انتخاب کند، آن رأس تا پایان افق برنامه‌ریزی وضعیت فعال منفی خواهد داشت. قید (۱۰) بیان می‌کند که هر رأس در هر دوره زمانی در یکی از وضعیت‌های فعال مثبت، فعال منفی یا غیرفعال قرار دارد. قید (۱۱) گزاره زیر را تضمین و بیان می‌کند که اگر رأس  $I$  در دوره  $t-1$  فعال مثبت نباشد، اما در دوره  $t$  فعال مثبت گردد، باید در دوره  $t-1$ ، مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال مثبت منهای مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال منفی از آستانه  $\theta_i^+$  بیشتر باشد.

$$(\eta_{i,t}^+ = 1 \text{ and } \eta_{i,t-1}^+ = 0) \Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^+ - \eta_{j,t-1}^-) b_{j,i} \geq \theta_i^+ \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1$$

قید (۱۲) گزاره زیر را تضمین و بیان می‌کند که اگر رأس  $I$  به‌عنوان بذر منفی انتخاب نشده و در دوره  $t$  در وضعیت فعال منفی قرار دارد، باید در دوره  $t-1$ ، مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال منفی منهای مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال مثبت از آستانه  $\theta_i^-$  بیشتر باشد.

$$(\eta_{i,t}^- = 1 \text{ and } \delta_i^- = 0) \Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^- - \eta_{j,t-1}^+) b_{j,i} \geq \theta_i^- \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1$$

قید (۱۳) گزاره زیر را تضمین و بیان می‌کند که اگر رأس  $I$  به‌عنوان بذر منفی انتخاب نشده و در دوره  $t$  در وضعیت فعال مثبت قرار ندارد، آنگاه باید مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال مثبت منهای مجموع تأثیرات همسایگان  $I$  با وضعیت فعال منفی اکیداً کمتر از  $\theta_i^+$  باشد.

$$(\eta_{i,t}^+ = 0 \text{ and } \delta_i^- = 0) \Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}: (j,i) \in \mathbb{A}} (\eta_{j,t-1}^+ - \eta_{j,t-1}^-) b_{j,i} \leq \theta_i^+ - \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}: t \geq 1$$

قیود (۳)، (۱۴) و (۱۵) دامنه متغیرها را بیان می‌کنند.

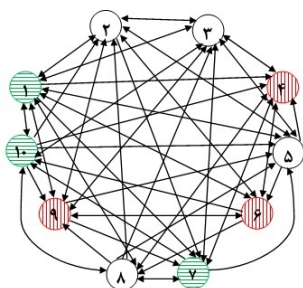
### مثال عددی

شبکه‌ای با ۱۰ رأس را مطابق با شکل (۱)-الف در نظر بگیرید. فرض کنید افق زمانی شامل سه دوره، بودجه رهبر و پیرو برابر با ۴، هزینه انتخاب یک رأس به‌عنوان بذر (مثبت و منفی) برابر با ۲، مقادیر پارامترهای  $\theta_i^+$  و  $\theta_i^-$  برای همه رئوس برابر با ۲ و مقدار پارامتر  $p_{i,t}$  برای همه رئوس در دوره‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ به ترتیب برابر با ۱، ۲، ۳ و ۱ است. همچنین، مقدار پارامتر  $b_{i,j}$  به شرح جدول (۱) است.

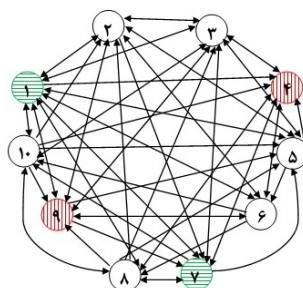


جدول (۱): مقدار پارامتر  $b_{i,j}$

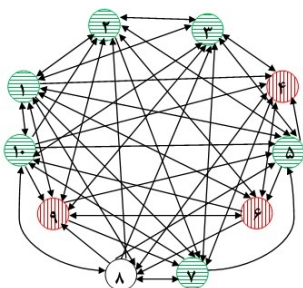
$i \backslash j$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	-	۲	۲	۲	۱	۲	۱	۱	۲	۱
۲	۲	-	۱	-	۲	-	-	۱	-	-
۳	۲	۱	-	۱	-	-	-	-	-	-
۴	۲	-	-	-	-	-	-	-	-	-
۵	۱	۲	۱	۱	-	۱	-	-	-	-
۶	۲	-	-	-	-	-	-	-	-	-
۷	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۸	۲	-	-	-	-	-	-	-	-	-
۹	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱



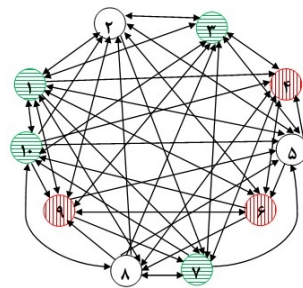
(ب)  $t=1$



(الف)  $t=0$



(د)  $t=4$



(ج)  $t=3$

○ رأس غیرفعال    ● رأس فعال منفی    ● رأس فعال مثبت

شکل (۱): توسعه تأثیر در مدت سه دوره

در جواب بهین، رهبر رئوس ۱ و ۷ را به‌عنوان بذر مثبت و پیرو رئوس ۴ و ۹ را به‌عنوان بذر منفی انتخاب می‌کنند و تأثیرات مثبت و منفی همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده، توسعه می‌یابد. مقدار بهین تابع هدف مسأله دوسطحی برابر با ۹ است.

#### ۴- روش حل

در این قسمت، ابتدا یک روش دقیق مبتنی بر تجزیه و برش‌های منطقی برای حل مدل BLP ارائه می‌شود. سپس، نقاط ضعف آن بررسی و در راستای بهبود آن‌ها رویکردهای مختلفی مطرح می‌گردد.

#### ۴-۱ روش مبتنی بر تجزیه

در روش مبتنی بر تجزیه، مسأله BLP به دو بخش که به آن‌ها تحت عنوان مسأله اصلی آزاد<sup>۱</sup> (RMP) و زیر مسئله<sup>۲</sup> (SP) اشاره می‌کنیم، تجزیه می‌شود. مسأله اصلی آزاد یک نسخه آزاد از مدل BLP است و یک کران بالا روی مقدار بهین تابع هدف BLP فراهم می‌کند. زیر مسئله، همان مسأله سطح پیرو است که واکنش پیرو را نسبت به جواب به دست آمده از RMP تعیین می‌کند و بر اساس جواب آن، یک کران پایین روی مقدار بهین تابع هدف مسأله BLP تعیین می‌گردد. در هر تکرار، بر اساس جواب زیر مسئله، برش‌های معتبری برای مسأله RMP تولید و مسأله RMP دوباره حل می‌شود و این روند ادامه می‌یابد. در اثر اضافه شدن برش‌های معتبر، ناحیه شدنی مسأله RMP به‌تدریج کوچک شده و لذا، کران بالا سیرکاهشی خواهد داشت تا سرانجام، کران‌های پایین و بالا به یکدیگر همگرا گردند و بهترین جواب شدنی تولید شده در این روند، جواب بهین مسأله دوسطحی خواهد بود.

برای تشکیل مسأله اصلی آزاد، ابتدا قیود مرتبط با مسأله پیرو (قیود (۴) الی (۱۵)) از مسأله BLP حذف و عبارت 
$$\sum_{t \in T: t \geq 1} p_{i,t} (\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+)$$
 در تابع هدف مسأله رهبر با متغیر پیوسته و نامنفی  $\varphi$  جایگزین می‌گردد. بنابراین، در آغاز الگوریتم مسأله اصلی آزاد به‌صورت زیر تشکیل می‌گردد که به آن تحت عنوان  $RMP^*$  اشاره می‌کنیم و مقدار بهین تابع هدف آن، یک کران بالا روی مقدار بهین تابع هدف مسأله BLP است. در این مدل،  $\bar{\varphi}$  یک کران بالای معتبر روی مقدار  $\varphi$  است که برای جلوگیری از بیکرانی مسئله در نظر گرفته شده است.

1- Relaxed master problem

2- Sub-problem

**RMP<sup>(۰)</sup>**

$$\max z_{RMP} = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,0} \delta_i^+ + \varphi$$

s.t. (۲), (۳)

$$\varphi \leq \bar{\varphi} \quad (۱۶)$$

در طول الگوریتم، برش‌های معتبر به‌مرور به مسئله اصلی آزاد اضافه می‌شوند. لذا، قالب کلی مسئله اصلی آزاد در تکرارهای دوم به بعد به‌صورت زیر است که به آن تحت RMP اشاره می‌کنیم و در آن، قیود (۱۷) و (۱۸) برش‌های منطقی معتبر هستند که مفهوم آن‌ها را بعداً شرح خواهیم داد.

**(RMP)**

$$\max z_{RMP} = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,0} \delta_i^+ + \varphi$$

s.t. (۲), (۳), (۱۶)

$$\sum_{i \in \mathbb{N}; \delta_i^+(k)=0} \delta_i^+ \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{K} : k \neq k^* \quad (۱۷)$$

$$\varphi \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}; t \geq 1} p_{i,t} \left( \eta_{i,t}^{+(k^*)} - \eta_{i,t-1}^{+(k^*)} \right) + M \sum_{i \in \mathbb{N}; \delta_i^+(k^*)=0} \delta_i^+ \quad (۱۸)$$

مقدار بهین تابع هدف مسئله RMP، یک کران بالا روی مقدار بهین تابع هدف مسئله دوسطحی است. با فرض آنکه  $\hat{\delta}^+$  جواب بهین مسئله RMP باشد، در هر تکرار برای ارزیابی واکنش پیرو نسبت به این جواب، زیر مسئله  $SP(\hat{\delta}^+)$  به‌صورت زیر تعریف و حل می‌گردد:

**(SP( $\hat{\delta}^+$ ))**

$$\min z_{SP} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}; t \geq 1} p_{i,t} (\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+)$$

s.t. (۵), (۸) - (۱۵)

$$\delta_i^- = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}; \hat{\delta}_i^+ = 1 \quad (۱۹)$$

$$\eta_{i,0}^+ = \hat{\delta}_i^+ \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (۲۰)$$

روند کلی روش مبتنی بر تجزیه به این صورت است که در هر تکرار  $k$ ، ابتدا مسأله RMP حل و جواب بهین آن با  $\hat{\delta}^{+(k)}$  نشان داده می‌شود. برای ارزیابی واکنش پیرو به این جواب، مسأله  $\text{SP}\left(\hat{\delta}^{+(k)}\right)$  حل و جواب بهین آن با  $\left(\hat{\delta}^{-(k)}, \hat{\eta}^{+(k)}, \hat{\eta}^{-(k)}\right)$  نشان داده می‌شود. اگر  $\mathbb{K}$  مجموعه تکرارهای انجام شده تا لحظه فعلی و  $k^*$  اندیس نظیر بهترین جواب پیدا شده تا لحظه فعلی باشد، به ازای هر  $k \in \mathbb{K}$ ، یکی از دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

#### حالت اول: $k \neq k^*$

در این حالت، مطمئن هستیم که  $\hat{\delta}^{+(k)}$  نمی‌تواند جواب بهین باشد و باید از ناحیه شدنی مسأله RMP حذف گردد.  $\hat{\delta}^{+(k)}$  را می‌توان با استفاده از برش (۱۷) حذف نمود.

#### حالت دوم: $k = k^*$

در این حالت، برش (۱۸) در مسأله RMP لحاظ می‌گردد. این برش صورت خطی گزاره زیر است:

$$\left(\delta_i^+ = \delta_i^{+(k^*)} \quad \forall i \in \mathbb{N}\right) \Rightarrow \varphi \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} \left(\eta_{i,t}^{+(k^*)} - \eta_{i,t-1}^{+(k^*)}\right)$$

و ایجاب می‌کند که اگر RMP دوباره ترکیب  $\delta_i^{+(k^*)}$  را تولید کرد، مقدار  $\varphi$  حداقل برابر با

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} \left(\eta_{i,t}^{+(k^*)} - \eta_{i,t-1}^{+(k^*)}\right)$$

شود.  $\varphi$  متغیری است که به جای عبارت  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} \left(\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+\right)$  جایگزین شده است و

مقدار این عبارت به ازای  $\delta_i^{+(k^*)}$  برابر با  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} \left(\eta_{i,t}^{+(k^*)} - \eta_{i,t-1}^{+(k^*)}\right)$  است و قید (۱۸) این

ارتباط را بیان و سبب تقویت کران بالای تولید شده توسط RMP می‌شود. با توجه به این توضیحات، گام‌های روش مبتنی بر تجزیه در الگوریتم ۱ بیان شده است.

### الگوریتم ۱: الگوریتم مبتنی بر تجزیه

• فرض می‌کنیم  $K$  شمارندهٔ جواب‌هایی که تاکنون بررسی شده،  $\mathbb{K}$  مجموعهٔ اندیس جواب-های بررسی شده تا لحظهٔ فعلی،  $UB$  بهترین کران بالا که تاکنون روی مقدار بهین تابع هدف مسألهٔ BLP پیدا شده،  $k^*$  اندیس نظیر بهترین جواب شدنی که تاکنون روی مسألهٔ BLP شناسایی شده،  $LB$  مقدار تابع هدف نظیر بهترین جواب شدنی که تاکنون پیدا شده و  $\bar{\varphi}$  یک کران بالای معتبر روی  $\varphi$  باشد که سبب می‌شود وضعیت بیکرانی برای مسألهٔ RMP رخ ندهد.

قرار می‌دهیم  $K := \emptyset$ ،  $k^* := \emptyset$ ،  $LB := \infty$  و  $UB := +\infty$  و  $\bar{\varphi} := \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_1}$ .

• تا وقتی که  $|UB - LB| > \epsilon$  موارد زیر را انجام می‌دهیم:

• قرار می‌دهیم  $K := K + 1$  و  $K$  را به مجموعهٔ  $\mathbb{K}$  اضافه می‌کنیم.

• مسألهٔ RMP را حل و جواب بهین آن را با  $\hat{\delta}^{+(K)}$  و مقدار بهین تابع هدف آن را با  $\hat{Z}_{RMP}$  نشان داده و قرار می‌دهیم  $UB := \hat{Z}_{RMP}$ .

• مسألهٔ  $SP(\hat{\delta}^{+(K)})$  را حل و جواب بهین آن را با  $(\hat{\delta}^{-(K)}, \hat{\eta}^{+(K)}, \hat{\eta}^{-(K)})$  و مقدار بهین تابع هدف آن را با  $\hat{Z}_{SP}$  نشان می‌دهیم.

• اگر  $LB < \hat{Z}_{SP} + \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_1} \hat{\delta}_i^{+(K)}$ ، آنگاه قرار می‌دهیم  $k^* := K$  و  $LB := \hat{Z}_{SP} + \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_1} \hat{\delta}_i^{+(K)}$ .

•  $(\hat{\delta}^{-(k^*)}, \hat{\delta}^{+(k^*)}, \hat{\eta}^{+(k^*)}, \hat{\eta}^{-(k^*)})$  جواب بهین مسألهٔ BLP است. متوقف می‌شویم.

### ۴-۲ رویکردهایی برای بهبود روش مبتنی بر تجزیه

الگوریتم ۱ یک الگوریتم شمارش صریح است که در آن همهٔ ترکیبات ممکن برای بردار  $\delta^+$  توسط RMP تولید و ارزیابی می‌شوند. لذا، زمان اجرای آن بالاست. در ادامه، این الگوریتم را از جنبه‌های مختلف بهبود می‌دهیم.

#### بهبود اول: تقویت RMP

جواب‌هایی که RMP در تکرارهای اولیهٔ الگوریتم تولید می‌کند، با جواب بهین مسألهٔ دوسطحی فاصلهٔ زیادی دارند. برای برطرف نمودن این ضعف، سعی می‌کنیم اطلاعاتی در خصوص واکنش پیرو را به داخل مسألهٔ RMP وارد کنیم. نسخه بهبودیافتهٔ RMP که به آن تحت عنوان IRMP اشاره می‌کنیم، به صورت زیر است:

**(IRMP)**

$$\max z_{IRMP} = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i,\varepsilon} \delta_i^+ + \varphi$$

$$s.t. \text{ (۳), (۶)-(۱۸)}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \delta_i^+ + \alpha = B_i \quad (۲۱)$$

$$\alpha \leq (c_i - \varepsilon) + B_i \delta_i^+ \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (۲۲)$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} c'_i \delta_i^- + \alpha' = B_i \quad (۲۳)$$

$$\alpha' \leq (c'_i - \varepsilon) + B_i (\delta_i^+ + \delta_i^-) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (۲۴)$$

$$\varphi \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{t \in \mathbb{T}: t \geq 1} p_{i,t} (\eta_{i,t}^+ - \eta_{i,t-1}^+) \quad (۲۵)$$

$$\alpha, \alpha' \geq 0 \quad (۲۶)$$

در شروع کار، IRMP همهٔ قیود مسأله BLP به‌جز تابع هدف مسألهٔ پیرو را در بردارد، لذا، یک آزادسازی برای مسألهٔ BLP محسوب می‌شود. همچنین، قیود (۲۱) و (۲۲) ایجاب می‌کنند که در جوابی که توسط IRMP تولید می‌شود، از حداکثر بودجه برای تعیین رئوس بذر مثبت استفاده شود. به‌عبارت‌دیگر متغیر پیوسته و نامنفی  $\alpha$  قسمتی از بودجهٔ رهبر را که بلااستفاده مانده است، نشان می‌دهد و قید (۲۲) برقراری گزارهٔ زیر را تضمین می‌کند و در آن،  $\varepsilon$  یک عدد مثبت و به‌اندازهٔ کافی کوچک است و در صورت صحیح مقدار بودن پارامتر  $c_i$ ، می‌تواند برابر با ۱ قرار داده شود.

$$\delta_i^+ = 0 \Rightarrow \alpha < c_i$$

قیود (۲۳) و (۲۴) به IRMP کمک می‌کنند که رفتار پیرو را تا حدی شبیه‌سازی کند. فرض کنید متغیر پیوسته و نامنفی  $\alpha'$  قسمتی از بودجهٔ پیرو را که بلااستفاده مانده نشان دهد. قید (۲۴) برقراری گزارهٔ زیر را تضمین و این حقیقت را که پیرو در تعیین رئوس بذر منفی حداکثر استفاده را از بودجه‌اش دارد، در مسألهٔ IRMP وارد می‌کند.

$$(\delta_i^+ = 0 \wedge \delta_i^- = 0) \Rightarrow \alpha' < c'_i$$

قید (۲۵) مقدار  $\varphi$  را برآورد می‌کند. قیود (۱۷) و (۱۸) برش‌های منطقی معتبر هستند که در شروع کار در IRMP حضور ندارند، اما در طول الگوریتم به‌مرور به آن اضافه می‌شوند. مزیت IRMP نسبت به RMP آن است که عموماً در تکرارهای آغازین منجر به تولید جواب‌های شدنی

خوبی می‌شود و موجب می‌گردد که در طول الگوریتم از تولید همه ترکیبات بردار  $\delta^+$  اجتناب شود.

### بهبود دوم: فعال‌سازی ویژگی مخزن جواب<sup>۱</sup>

ویژگی مخزن جواب یک قابلیت در بهینه‌یاب CPLEX است که برای مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح قابل فعال‌سازی است. در صورتی که این قابلیت در بهینه‌یاب CPLEX در وضعیت فعال قرار گیرد، بهینه‌یاب قادر خواهد بود پس از حل مدل، علاوه بر جواب بهین، سایر جواب‌های شدنی را که در طول فرآیند شاخه و کران تولید شده‌اند نیز ارائه دهد.

در الگوریتم ۱، به دلیل بالا بودن زمان حل مدل IRMP، بهتر است هر بار که مدل IRMP حل می‌شود، علاوه بر جواب بهین، چند جواب شدنی دیگر نیز که در طول فرآیند شاخه و کران تولید شده‌اند، نگهداری گردند و در تکرار بعد، برش‌های نظیر همه آن‌ها به IRMP اضافه شوند. بدین ترتیب، در هر تکرار به جای یک برش، چندین برش معتبر به IRMP اضافه می‌شود و این امر در کاهش تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی الگوریتم بسیار مؤثر است. تعداد جواب‌هایی که بهینه‌یاب CPLEX علاوه بر جواب بهین نگهداری و گزارش می‌کند را ظرفیت مخزن جواب می‌نامیم و آن را با  $\rho$  نشان می‌دهیم. تنظیمات جدول (۲) را اعمال می‌کنیم که مورد ۱ بیانگر ظرفیت مخزن است و مورد ۲ بیانگر آن است که CPLEX در حین فرآیند حل، هنگام به‌روزرسانی مخزن، جواب‌های با تابع هدف بهتر را جایگزین جواب‌های بدتر نماید.

### جدول (۲): تنظیمات ویژگی مخزن جواب در بهینه‌یاب CPLEX

#	گزینه	مقدار
۱	ظرفیت مخزن	$\rho = 20$
۲	استراتژی جایگزینی در مخزن <sup>۲</sup>	بدترین هدف <sup>۲</sup>

### بهبود سوم: حل تقریبی زیر مسئله

زیر مسئله SP، NP-سخت و حل آن زمان‌بر است. لذا، برای بهبود زمان حل، پس از آنکه  $\hat{\delta}^{+(k)}$  توسط IRMP تعیین شد، پیش از حل مستقیم  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$ ، ابتدا با استفاده از روش ابتکاری (که در ادامه شرح داده خواهد شد)، یک جواب شدنی برای  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  شناسایی می‌کنیم و

1- Solution pool

1- Worst objective

2- Pool replacement strategy

مقدار تابع هدف  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  را به ازای این جواب را با  $\hat{z}_H^{(k)}$  نشان می‌دهیم. اگر  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_s} \hat{\delta}_i^{+(k)} + \hat{z}_H^{(k)} \leq LB$  قطعاً حاصل جمع مقدار بهین تابع هدف مسأله  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  و  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_s} \hat{\delta}_i^{+(k)}$  نیز از LB کمتر است و لذا، جواب  $\hat{\delta}^{+(k)}$  از نظر رهبر جواب مناسبی نیست، پس حل دقیق  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  ضرورت ندارد و برشی اضافه می‌کنیم که  $\hat{\delta}^{+(k)}$  را از ناحیهٔ شدنی IRMP حذف کند؛ اما اگر  $\sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_s} \hat{\delta}_i^{+(k)} + \hat{z}_H^{(k)} > LB$  جواب به دست آمده از روش ابتکاری ۱ را به‌عنوان نقطهٔ شروع در اختیار بهینه‌یاب CPLEX قرار می‌دهیم و  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  را حل می‌کنیم. همچنین، روی CPLEX، این تنظیم را نیز اعمال می‌کنیم که در فرآیند حل  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  هرگاه به یک جواب شدنی با مقدار هدف کمتر یا مساوی  $LB - \sum_{i \in \mathbb{N}} p_{i_s} \hat{\delta}_i^{+(k)}$  رسید، فرآیند حل  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  متوقف گردد و برشی به IRMP اضافه شود که  $\hat{\delta}^{+(k)}$  را از ناحیهٔ شدنی IRMP حذف کند.

### روش ابتکاری برای حل مسأله $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$

- فرض کنید  $\mathbb{N}_1$  رئوس بذر انتخابی توسط رهبر باشد، به ازای هر  $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1$  تعریف می‌کنیم  $\mu_i := \text{card} \{ j \in \mathbb{N} : \hat{\delta}_j^{+(k)} = 0, (i, j) \in \mathbb{A} \}$  که در آن  $\text{card}$  بیانگر تعداد اعضای مجموعه است. در واقع،  $\mu_i$  برابر با تعداد همسایه‌هایی از رأس  $i$  است که به‌عنوان بذر مثبت انتخاب نشده‌اند. رئوس بذر انتخابی توسط پیرو و باقیماندهٔ بودجهٔ پیرو را به ترتیب با  $\mathbb{N}_2$  و  $R$  نشان می‌دهیم و با فرض آنکه  $i_s$  عضوی از مجموعهٔ  $\{ i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1 : c'_i \leq B_i \}$  با بزرگ‌ترین مقدار  $\mu_i$  است، قرار می‌دهیم:  $\mathbb{N}_2 := \{ i_s \}$  و  $R := B_i - c'_i$  و  $\mathbb{N}_3 := \{ i \in \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N}' \cup \mathbb{N}'' ) : c'_i \leq R \}$
- تا وقتی که  $\mathbb{N}_2 \neq \emptyset$  عضو  $\mathbb{N}_2$  از  $\mathbb{N}_2$  را که با اعضای  $\mathbb{N}_2$  همسایه‌های مشترک بیشتری دارد با  $i_s$  نشان داده و قرار می‌دهیم  $\mathbb{N}_2 := \mathbb{N}_2 \cup \{ i_s \}$ ،  $R := R - c'_i$  و  $\mathbb{N}_3 := \{ i \in \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2) : c'_i \leq R \}$ .
- مدل  $SP(\hat{\delta}^{+(k)})$  را همراه با قیودی که  $\delta_i^-$  را به ازای  $i \in \mathbb{N}_2$  روی مقدار یک ثابت می‌کنند، حل می‌کنیم و مقدار بهین تابع هدف آن را با  $\hat{z}_H^{(k)}$  نشان می‌دهیم.



در ادامه هر جا صحبت از الگوریتم بهبودیافته می‌شود، منظور الگوریتم ۱ همراه با بهبودهای فوق است.

## ۵- نتایج محاسباتی

در این قسمت عملکرد مدل و الگوریتم پیشنهادی را روی چند شبکه واقعی کوچک (برگرفته از [۱۵]) ارزیابی می‌کنیم. افق زمانی را پنج دوره‌ای و هزینه انتخاب یک رأس به عنوان بذر (مثبت و منفی) را برابر با ۴، بودجه رهبر و پیرو را برابر با ۱۲ و مقدار پارامتر  $P_{i,t}$  را برای همه رئوس در دوره‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب برابر با ۱، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ در نظر می‌گیریم. همچنین، مقدار پارامتر  $b_{i,j}$  را به صورت تصادفی برابر با ۱ یا ۲ قرار می‌دهیم.

ارزیابی‌ها روی یک کامپیوتر شخصی، با سیستم عامل ویندوز ۱۰، پردازنده Core i7 و ۸ گیگابایت حافظه موقت انجام شده است. الگوریتم پیشنهادی در نرم‌افزار AIMMS پیاده‌سازی و از CPLEX برای حل مدل‌ها استفاده شده است.

نتایج در جدول (۳) خلاصه شده‌اند. ستون اول، نامی است که در [۱۵] به هر شبکه اختصاص داده شده است. ستون‌های دوم تا چهارم، مشخصات هر نمونه را نشان می‌دهند. در ستون‌های پنجم و ششم، به ترتیب مقدار بهین تابع هدف مسئله و زمان اجرای الگوریتم (برحسب ثانیه) گزارش شده است. مواردی که در ستون ششم با  $>3600$  مشخص شده است، به این معنی است الگوریتم پیشنهادی در محدودیت  $3600$  ثانیه متوقف نشده است. علامت \* در ستون پنجم به این معنی است که روش در محدودیت زمانی  $3600$  ثانیه متوقف شده و جواب بهین به دست آمده است و ستون آخر بیانگر لحظه‌ای است که بهترین جواب توسط الگوریتم تولید شده است.

همان‌طور که در جدول (۳) ملاحظه می‌شود، به دلیل وارد کردن واکنش پیرو در مسأله IRMP، روش پیشنهادی عموماً در تکرارهای اولیه جواب بهین را می‌یابد و سایر تکرارها صرف اضافه کردن برش و اثبات بهینگی جواب از طریق همگرا شدن  $UB$  به  $LB$  می‌گردد. با افزایش تعداد رئوس و دوره‌های زمانی، اندازه مدل IRMP بزرگ می‌شود و زمان حل آن افزایش می‌یابد که منجر به افزایش زمان اجرای الگوریتم خواهد شد. لذا، برای حل نمونه‌های بزرگ مسأله BLP ارائه یک روش فراابتکاری ضرورت دارد.

## جدول (۳): نتایج محاسباتی

شبکه	تعداد رئوس	تعداد کمان‌ها	بودجه رهبر	بودجه پیرو	مقدار بهین تابع هدف	زمان اجرای الگوریتم بهبود یافته (ثانیه)	زمان یافتن بهترین جواب (ثانیه)
KARATE	۳۴	۱۵۴	۴	۸	۲۴*	۹۹,۴	۳,۵
KARATE	۳۴	۱۵۴	۸	۱۲	۲۸*	۱۳۰,۹۳	۱,۱
KARATE	۳۴	۱۵۴	۱۲	۱۲	۷۱	>۳۶۰۰	۲,۶
FOOTBALL	۳۵	۲۳۶	۴	۸	۶*	۳۵,۵	۰,۶
FOOTBALL	۳۵	۲۳۶	۸	۱۲	۲۶*	۳۲۵,۳	۱,۷
FOOTBALL	۳۵	۲۳۶	۱۲	۱۲	۶۹	>۳۶۰۰	۴,۲
MEXICAN	۳۵	۲۳۴	۴	۸	۱۱*	۷۰,۴	۲,۱
MEXICAN	۳۵	۲۳۴	۸	۱۲	۳۹*	۱۴۳۷,۲	۱۹,۵
MEXICAN	۳۵	۲۳۴	۱۲	۱۲	۷۶	>۳۶۰۰	۱۹۴,۳
SAWMILL	۳۶	۱۲۴	۴	۸	۳۴*	۴۰,۹	۱,۷
SAWMILL	۳۶	۱۲۴	۸	۱۲	۴۱*	۸۶۶,۸	۵,۱
SAWMILL	۳۶	۱۲۴	۱۲	۱۲	۴۶	>۳۶۰۰	۷۸,۱
HB/BCSPWR01	۳۹	۹۲	۴	۸	۱۵*	۴,۵	۰,۴
HB/BCSPWR01	۳۹	۹۲	۸	۱۲	۱۷*	۲۱۸۷,۳	۱۷۳۸,۸
HB/BCSPWR01	۳۹	۹۲	۱۲	۱۲	۲۸	>۳۶۰۰	۲۷۱۸,۳
HB/BCSPWR02	۴۹	۱۱۸	۴	۸	۱۱*	۱۷,۲	۴,۶
HB/BCSPWR02	۴۹	۱۱۸	۸	۱۲	۲۳	>۳۶۰۰	۱۲۴۹,۱
HB/BCSPWR02	۴۹	۱۱۸	۱۲	۱۲	۴۰	>۳۶۰۰	۳۹۱,۷
متوسط						>۱۷۵۵,۲	۳۵۶,۵

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله توسعه تأثیر در شبکه‌های اجتماعی در فضای رقابتی معرفی و در قالب یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی فرمول‌بندی شد و برای حل آن یک الگوریتم دقیق مبتنی بر تجزیه ارائه و عملکرد آن روی چند نمونه واقعی برگرفته از ادبیات ارزیابی شد. نتایج محاسباتی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی قادر است جواب بهین را برای نمونه‌های کوچک در زمان مناسبی بیابد؛ اما با افزایش تعداد رئوس شبکه، دوره‌های زمانی و بودجه رهبر زمان حل الگوریتم افزایش می‌یابد. لذا، ارائه یک روش فراابتکاری برای حل این مسئله به‌عنوان کار آتی پیشنهاد می‌گردد.

همچنین، بررسی مسئله توسعه تأثیر در شرایط عدم قطعیت که در آن امکان و میزان تأثیرپذیری افراد از یکدیگر به طور قطعی معلوم نیست، یک مسیر تحقیقاتی ارزشمند است.

## منابع

- [1] Kempe, D. Kleinberg, J. and Tardos, E. (2003). Maximizing the spread of influence through a social network, *Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, New York.
- [2] Hemmati, M. Smith, J.C. and Thai M.T. (2014). A cutting-plane algorithm for solving a weighted influence interdiction problem, *Computational Optimization and Applications*, **57**, 71–104.
- [3] Shen, Y. Dinh T.N. Zhang, H. and Thai, M.T. (2012). Interest-matching information propagation in online social networks, *ACM International Conference on Information and Knowledge Management*.
- [4] Samadi, M. Nikolaev, A. and Nagi, R. (2016). A subjective evidence model for influence maximization in social networks, *Omega*, **59**, 263-278.
- [5] Samadi, M. Nagi, R. Semenov, A. and Nikolaev, A. (2018). Seed activation scheduling for influence maximization in social networks, *Omega*, **77**, 96–114.
- [6] Bard, J.F. and Moore, J.T. (1992). An algorithm for the discrete bilevel programming problem, *Naval Research Logistics*, **39**, 419–435.
- [7] Shi, C. Lu, J. and Zhang, G. (2005). An extended Kuhn–Tucker approach for linear bilevel programming, *Applied Mathematics and Computation*, **162**, 51-63.
- [8] Saharidis, G.K. and Ierapetritou, M.G. (2009). Resolution method for mixed integer bi-level linear problems based on decomposition technique, *Journal of Global Optimization*, **44**, 29–51.
- [9] Hooshmand, F. and MirHassani, S.A. (2018). An effective bilevel programming approach for the evasive flow capturing location problem, *Networks and Spatial Economics* (<https://doi.org/10.1007/s11067-018-9415-0>), 1–27.
- [10] Lin, D.Y. (2011). A Karoonsoontawong and S. Travis Waller, "A Dantzig-Wolfe decomposition based heuristic scheme for bi-level dynamic network design problem, *Networks and Spatial Economics*, **11**, 101–126.

- 
- [11] Rahmani, A. and MirHassani S.A. (2015). Lagrangean relaxation-based algorithm for bi-level problems, *Optimization Methods and Software*, **30**, 1-14.
- [12] Nakhai Kamalabadi, I. Hosseini, E. and Fathi, M. (2014). Enhancing the solution method of linear Bi – level programming problem based on enumeration method and dual method (in persian), *Journal of Advanced Mathematical Modeling (JAMM)*, **4**, 27-53.
- [13] Mehrabani, A. and Sadeghi, H. (2016). Computing the pareto frontier of a linear Multiobjective bi-level model (in persian), *Journal of Advanced Mathematical Modeling (JAMM)* (DOI: 10.22055/jamm.2016.12027), **5**, 25-45.
- [14] Lu, J. Han, J. Hu, Y. and Zhang, G. (2016). Multilevel decision-making: A survey, *Information Sciences*, **10**, 463-487.
- [15] Davis, T. and Hu, Y. (2011) The University of Florida sparse matrix collection, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **38**, 1-25.

## A Bilevel Programming Approach for the Problem of Spreading Influence in a Competitive Network

Farnaz Hooshmand Khaligh

Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

Received: May 2 2019

Accepted for publication: March 21 2020

Corresponding author: [f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir](mailto:f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir)

© 2018 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

### Abstract

Social networks have a great role in viral marketing by which, a company selects a few influential users as seeds to introduce a new product with the hope that the influence is cascaded throughout the network within a finite number of time-stages. This paper addresses the problem of spreading influence in a competitive network in which the users are affected by both positive and negative propaganda. First, some users are selected as seeds by the leader, and then, the follower, with the full knowledge of the leader's decisions, selects some other users as negative seeds. Afterwards, the positive and negative influences spread throughout the network. The leader's objective is to maximize the number of positive active users. However, the follower's objective is to minimize this value. First, the problem is formulated as a bilevel programming model, and then, an exact decomposition-based algorithm is developed to solve it. Computational results evaluate the performance of the proposed model and algorithm on some instances taken from the literature.

**Keywords:** Spread of influence, Social Network, Bilevel programming, Exact decomposition-based algorithm.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 90B60, 90C11.



© 2018 by the authors. Licensee SCU, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).