مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ، دوره ، شماره ، ص -
شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2020.30655.1748

مقایسه تصادفی سیستم‌های k از n بر اساس تابع دگرشکلی

الهام خالق پناه نوقابی، مجید رضائی، مجید چهکندی[۱]

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۵/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۳/۳

چکیده: یکی از مسائل مهم در نظریه قابلیت اعتماد، مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌های منسجم است. نتایج زیادی در بحث مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌ها با مؤلفه‌های مستقل و هم توزیع (IID) ارائه شده است. در این مقاله به بررسی سیستم‌های k از n می‌پردازیم که نقش مهمی در مطالعه‌ی قابلیت اعتماد سیستم‌های مهندسی بازی می‌کنند. بر اساس مفهوم تابع دگرشکلی نتایجی در ارتباط با مقایسه‌ی آزاد توزیع سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته به دست خواهیم آورد. شرایطی روی توابع توزیع دگرشکلی سیستم‌های k از n یا مانده‌ی عمر آن‌ها فراهم نمودیم که ترتیب بین طول عمر یا مانده‌ی عمر سیستم‌ها را نتیجه می‌دهد. در حالت خاص، با در نظر گرفتن دو مفصل بقای پرکاربرد (فارلی-گامبل-مورگنسترن وکلایتون اکاس) به مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌های k از n بر اساس k و n می‌پردازیم. با ارائه چند مثال نیز نشان می‌دهیم برخی از نتایجی که در حالت استقلال برای مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌های k از n برقرار است در حالت وابسته نقض می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستم k از n، تابع دگرشکلی، تابع مفصل، مانده‌ی عمر

کد رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰C۷۰، ۹۰C۹۰

۱- مقدمه

مقایسه تصادفی سیستم‌ها جایگاه حائز اهمیتی در علم مهندسی قابلیت اعتماد دارد. در چند دهه‌ی اخیر، مقایسه‌های تصادفی بر پایه‌ی شاخص‌های متفاوت، حجم وسیعی از پژوهش‌ها را به خود اختصاص داده است. در این زمینه ابزارهای متفاوتی مورداستفاده قرارگرفته است که از آن جمله می‌توان به دو مفهوم بردار علامت [۱] و تابع دگرشکلی [۲] اشاره نمود. عدم کار آیی بردار

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: mchahkandi@birjand.ac.ir

علامت در مقایسه‌ی سیستم‌ها با مؤلفه‌های وابسته در مثالی توسط [۳] نشان داده شده است. در این‌گونه از موارد استفاده از تابع دگرشکلی راهگشاست.

تابع دگرشکلی نخستین بار توسط [۲] و [۴] در علم اقتصاد معرفی شد و سپس در تحلیل مدل‌های اقتصادی و سیستم‌های منسجم توسعه یافت. مطالعه‌ای کامل درباره‌ی مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌ها با مؤلفه‌های همگن (در حالت‌های متفاوت وابستگی) بر پایه‌ی تابع دگرشکلی توسط [۵] و [۶] ارائه شده است. ناوارو و همکاران [۷] شرایط حفظ ترتیب‌های تصادفی را در سیستم‌هایی با مؤلفه‌های ناهمگن وابسته بررسی نمودند. مقایسه‌های تصادفی گذشته و مانده‌ی عمر سیستم‌های منسجم با مؤلفه‌های ناهمگن وابسته نیز توسط [۸] و [۹] مطالعه شده است.

هرچند مطالعات انجام شده برای سیستم‌های منسجم در حالت کلی است، اما به دلیل پیچیدگی بحث، مقایسه‌های تصادفی در حالت خاص برای سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته منجر به نتایج ساده‌تر، قابل‌فهم‌تر و گسترده‌تری خواهد شد. درزمینه‌ی مقایسه‌ی طول عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های IID بررسی‌های فراوانی صورت گرفته که از آن جمله می‌توان به [۱۰] اشاره نمود. اخیراً [۱۱] درزمینه‌ی مطالعه‌ی سیستم‌های k از n با رویکرد تابع دگرشکلی، وابستگی بین مؤلفه‌ها را مدنظر قرار داده و به مقایسه‌ی تصادفی سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته‌ی تعویض‌پذیر پرداخته است. در مطالعه‌ی حاضر نیز سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته موردبحث قرارگرفته است. نخست شرط صعودی بودن طول عمر سیستم‌های k از n، نسبت به k بر اساس ترتیب‌های تصادفی از جمله میانگین مانده‌ی عمر، میانگین گذشته‌ی عمر و برخی از سایر ترتیب‌ها را ارائه نموده‌ایم. بررسی این رابطه در سیستم‌های سری نیز موردبحث است. سپس سیستم‌های k از n در دو جامعه متفاوت با شرط وجود ترتیب تصادفی معمولی بین مؤلفه‌های پایه، مورد مقایسه قرارگرفته‌اند. در انتها، رفتار تصادفی مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n به‌شرط این‌که در لحظه‌ی t، حداقل $n-r+۱$ $(r \leq k)$ مؤلفه سیستم در حال کار باشند، مطالعه شده است. بدین منظور در بخش ۲ مفاهیم و تعاریف موردنیاز بیان شده است. بخش ۳ به مقایسه‌ی تصادفی طول عمر سیستم‌های k از n، با ساختار وابستگی فارلی- گامبل- مورگنسترن، کلایتون اکاس و فرانک اختصاص داده شده است. در بخش ۴ نتایجی درزمینه‌ی مقایسه‌ی تصادفی مانده‌ی عمر سیستم‌های k از با مؤلفه‌های وابسته‌ی تعویض‌پذیر ارائه خواهد شد. مثال‌هایی نیز برای درک بیشتر موضوع ارائه می‌شود.

۲- مفاهیم و تعاریف

در این بخش برخی از مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی موردنیاز یادآوری می‌شود. نخست برخی خواص تابعی تحت عنوان علامت منظم از مرتبه دو $(SR_۲)$ و فراوانی پولیا از مرتبه دو $(PF_۲)$ معرفی

می‌شوند (مطالب بیشتر در این زمینه را در [۱۲] و [۱۳] ببینید). سپس برخی از ترتیب‌های تصادفی شناخته شده بر اساس مفاهیم معرفی شده بازنویسی خواهد شد. برای آشنایی با ترتیب‌های تصادفی مختلف، [۱۴] منبع مناسبی است. در ادامه مفاهیم تابع مفصل و تابع دگرشکلی نیز بیان می‌شوند.

تعریف ۱ تابع حقیقی مقدار $h_\alpha(x)$ تعریف شده روی مجموعه $A\times B$ که $\alpha\in A\subset R$ و $x\in B\subset R$ را $\mathrm{SR}_۲$ گویند، هرگاه $h_\alpha(x)\geq ۰$ و به ازای هر $x_۱\leq x_۲$ و $\alpha_۱\leq\alpha_۲$

$$\xi\begin{vmatrix} h_{\alpha_۱}(x_۱) & h_{\alpha_۱}(x_۲) \\ h_{\alpha_۲}(x_۱) & h_{\alpha_۲}(x_۲) \end{vmatrix}\geq ۰,$$

که $|.|$ بیانگر دترمینان ماتریس است.

- اگر $\xi=۱$ باشد، تابع $h_\alpha(x)$ را کاملاً مثبت از مرتبه دو $(\mathrm{TP}_۲)$ گویند.
- اگر $\xi=-۱$ باشد، تابع $h_\alpha(x)$ را منظم معکوس از مرتبه دو $(\mathrm{RR}_۲)$ گویند.

تعریف ۲ تابع $h(x)$ که $x\in R$ را $\mathrm{PF}_۲$ گویند، هرگاه

۱. به ازای تمام مقادیر $x\in R$، تابع $h(x)\geq ۰$ باشد.
۲. به ازای مقدار ثابت $\delta>۰$، تابع $\dfrac{h(x)}{h(x+\delta)}$ نسبت به x صعودی باشد.

تعریف ۳ فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی نامنفی مطلقاً پیوسته باشند که به ترتیب دارای توابع توزیع، قابلیت اعتماد و چگالی $F_i(.)$، $\bar{F}_i(.)$ و $f_i(.)$ که $i=۱,۲$ هستند.

۱. $X_۱$ در ترتیب تصادفی معمولی کوچک‌تر از $X_۲$ است که آن را با نماد $X_۱\leqslant_{ST}X_۲$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر به ازای تمام مقادیر $t>۰$، $\bar{F}_۱(t)\leqslant\bar{F}_۲(t)$.
۲. $X_۱$ در ترتیب تصادفی نرخ خطر کوچک‌تر از $X_۲$ است که آن را با نماد $X_۱\leqslant_{HR}X_۲$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر تابع $\bar{F}_i(t)$ کاملاً مثبت از مرتبه دو روی مجموعه‌ی $(i,t)\in\{۱,۲\}\times[۰,\infty)$ باشد.
۳. $X_۱$ در ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس کوچک‌تر از $X_۲$ است که آن را با نماد $X_۱\leqslant_{RH}X_۲$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر تابع $F_i(t)$ کاملاً مثبت از مرتبه دو روی مجموعه‌ی $(i,t)\in\{۱,۲\}\times[۰,\infty)$ باشد.
۴. $X_۱$ در ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی کوچک‌تر از $X_۲$ است که آن را با نماد $X_۱\leqslant_{LR}X_۲$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر تابع $f_i(t)$ کاملاً مثبت از مرتبه دو روی مجموعه‌ی $(i,t)\in\{۱,۲\}\times[۰,\infty)$ باشد.

۵. X_1 در ترتیب تصادفی میانگین مانده‌ی عمر کوچک‌تر از X_2 است که آن را با نماد $X_1 \leqslant_{MRL} X_2$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر تابع $\int_t^{\infty} \overline{F}_i(x)dx$ کاملاً مثبت از مرتبه دو روی مجموعه‌ی $(i,t)\in\{1,2\}\times[0,\infty)$ باشد.

۶. X_1 در ترتیب تصادفی میانگین گذشته‌ی عمر کوچک‌تر از X_2 است که آن را با نماد $X_1 \leqslant_{RML} X_2$ نمایش می‌دهند، اگر و تنها اگر تابع $\int_0^{t} F_i(x)\,dx$ کاملاً مثبت از مرتبه دو روی مجموعه‌ی $(i,t)\in\{1,2\}\times[0,\infty)$ باشد.

۷. X_1 در ترتیب تصادفی محدب صعودی (ICX) کوچک‌تر از X_2 است که آن را با نماد $X_1 \leqslant_{ICX} X_2$ نمایش می‌دهند، اگر $\int_t^{\infty} \overline{F}_1(x)\ dx \leqslant \int_t^{\infty} \overline{F}_2(x)\ dx$ به ازای هر $t \ge 0$ باشد.

۸. X_1 در ترتیب تصادفی زمان کل آزمایش (TTT) کوچک‌تر از X_2 است که آن را با نماد $X_1 \leqslant_{TTT} X_2$ نمایش می‌دهند، اگر $\int_0^{F_1^{-1}(p)} \overline{F}_1(x)\,dx \leqslant \int_0^{F_2^{-1}(p)} \overline{F}_2(x)\,dx$ به ازای هر $p\in(0,1)$ باشد.

۹. X_1 در ترتیب تصادفی فزونی ثروت (EW) کوچک‌تر از X_2 است که آن را با نماد $X_1 \leqslant_{EW} X_2$ نمایش می‌دهند، اگر $\int_{F_1^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_1(x)\,dx \leqslant \int_{F_2^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_2(x)\,dx$ به ازای هر $p\in(0,1)$ باشد.

ارتباط بین برخی از ترتیب‌های تصادفی ذکر شده، در جدول ۱ نمایش داده شده است. علامت $\star$ در جدول ۱ بدین معناست که در صورت برابری میانگین دو متغیر تصادفی، رابطه برقرار است.

جدول (۱): ارتباط بین ترتیب‌های تصادفی

$X_1 \le_{MRL} X_2$	$\Leftarrow$	$X_1 \le_{HR} X_2$	$\Leftarrow$	
$\Downarrow$		$\Downarrow$		
$E(X_1) \le E(X_2)$	$\Leftarrow$	$X_1 \le_{ST} X_2$		$X_1 \le_{LR} X_2$
$\Uparrow$		$\Uparrow$		
$X_1 \le_{RML} X_2$	$\Leftarrow$	$X_1 \le_{RH} X_2$	$\Leftarrow$	
$X_1 \le_{ICX} X_2$	$\Leftarrow$	$X_1 \le_{ST} X_2$		
		$\Downarrow$		
$X_1 \ge_{EW} X_2$	$\overset{\star}{\Leftrightarrow}$	$X_1 \le_{TTT} X_2$		

تعریف ۴ تابع صعودی و پیوسته $q(.):[0,1]\to[0,1]$ چنان‌که $q(0)=0$ و $q(1)=1$ باشد را تابع دگرشکلی می‌نامند.

تابع $F_q(t)=q(F(t))$ را تابع توزیع دگرشکلی منتسب به توزیع F گویند. واضح است که تابع $F_q(.)$ بر اساس ویژگی‌های تابع دگرشکلی، یک تابع توزیع است.

تابع $\bar{q}(u)=1-q(1-u)$ را تابع دگرشکلی دوگانِ گویند که دارای خواص مشابه تابع دگرشکلی است. اگر تابع $\bar{q}(.)$ روی تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(.)$ اثر کند، آنگاه

$$\bar{F}_{\bar{q}}(t)=\bar{q}\left(\bar{F}(t)\right)=1-q\left(1-\bar{F}(t)\right)=1-F_q(t).$$

بدیهی است که $\bar{F}_{\bar{q}}(.)$ یک تابع قابلیت اعتماد و درواقع تابع قابلیت اعتماد منتسب به تابع $\bar{F}(.)$ است.

تابع مفصل (مفصل بقا) ارتباطی مفید بین تابع توزیع (بقا) توأم n متغیری و توابع توزیع (بقا) حاشیه‌ای برقرار می‌کند. برای مشاهده‌ی جزئیات و برهان قضیه‌ی بعد به [۱۵] مراجعه شود.

قضیه ۱ فرض کنید $H(.)$ یک تابع توزیع توأم n متغیری با توابع توزیع حاشیه‌ای $F_1(.),\ldots,F_n(.)$ باشد. آنگاه مفصلی مانند C وجود دارد که به ازای هر $x=(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{R}^n$ داریم

$$H(x_1,\ldots,x_n)=C\left(F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)\right), \tag{1}$$

اگر توابع توزیع حاشیه‌ای $F_1(.),\ldots,F_n(.)$ پیوسته باشند، تابع $C:[0,1]^n\to[0,1]$ یکتاست.

قضیه‌ی ۱ را می‌توان بر اساس تابع بقا نیز بیان نمود؛ یعنی اگر $\bar{H}(.)$ یک تابع قابلیت اعتماد توأم n متغیری با توابع قابلیت اعتماد حاشیه‌ای $\bar{F}_1(.),\ldots,\bar{F}_n(.)$ باشد. آنگاه مفصل بقای n متغیری K وجود دارد که به ازای هر $x=(x_1,\ldots,x_n)$ داریم

$$\bar{H}(x_1,\ldots,x_n)=K\left(\bar{F}_1(x_1),\ldots,\bar{F}_n(x_n)\right). \tag{2}$$

اگر توابع قابلیت اعتماد حاشیه‌ای $\bar{F}_1(.),\ldots,\bar{F}_n(.)$ پیوسته باشند، مفصل بقای $K:[0,1]^n\to[0,1]$ نیز یکتاست. در جدول ۲، تابع مفصل بقای برخی از ساختارهای وابستگی موردمطالعه در این مقاله ارائه شده است. منبع [۱۶] برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی توابع مفصل مناسب است.

ساختار متفاوت سیستم‌ها، عملکرد متفاوت را نتیجه می‌دهد. مقایسه‌ی عملکرد سیستم‌ها نیز از طریق مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌ها امکان‌پذیر است. برای مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌ها، به تابع قابلیت اعتماد آن‌ها نیازمندیم.

ناوارو و همکاران [۵] نمایشی مهم از تابع قابلیت اعتماد طول عمر سیستم با مؤلفه‌های وابسته و هم توزیع (DID) برحسب تابع قابلیت اعتماد طول عمر مؤلفه‌ها ارائه نمودند.

جدول (۲): تابع مفصل بقای برخی ساختارهای وابستگی

مفصل	تابع مفصل بقا	دامنه تغییرات پارامتر وابستگی
فارلی- گامبل-مورگنسترن (FGM)	$\prod_{i=1}^{n} u_i \left(1+\theta\prod_{i=1}^{n}(1-u_i)\right)$	$\lvert\theta\rvert \le 1$
کلایتون اکاس (CO)	$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\alpha > 0$
فرانک	$\log_\beta \left[1+\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\beta^{u_i}-1\right)}{(\beta-1)^{n-1}}\right]$	$\beta > 0$

لم ۱: فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم با مؤلفه‌های وابسته $X_1,\ldots,X_n$ (DID) که دارای تابع قابلیت اعتماد مشترک $\bar{F}(.)$ هستند، باشد. آنگاه

$$\bar{F}_T(t) = h\left(\bar{F}(t)\right). \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی (۳)، $h(.)$ همان تابع دگرشکلی است که $h(.):[0,1]\to[0,1]$، صعودی و پیوسته است و $h(0)=0$ و $h(1)=1$. شایان توجه است که تابع دگرشکلی فقط بر اساس ساختار سیستم و تابع مفصل تعیین می‌شود. واضح است که تابع قابلیت اعتماد طول عمر مؤلفه‌ها در تعیین تابع دگرشکلی نقشی ایفا نمی‌کند. نمایش (۳)، نقش مهمی در مقایسه‌ی سیستم‌ها با مؤلفه‌های وابسته ایفا می‌کند. برای درک جزئیات بیشتر در این زمینه، مطالعه‌ی [۵] و [۶] توصیه می‌شود.

۳- مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته

یک سیستم منسجم با n مؤلفه وابسته و هم توزیع را در نظر بگیرید. سیستم فعال است، اگر حداقل $n-k+1$ مؤلفه فعال باشد. به‌عبارت‌دیگر درصورتی‌که k مؤلفه یا بیشتر خراب باشد، سیستم نیز از کار می‌افتد. چنین سیستمی را سیستم k از n گویند. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$

طول عمر مؤلفه‌های سیستم با تابع قابلیت اعتماد مشترک $\bar{F}(t)=Pr(X_i>t)$ چگالی $f(.)$ و معکوس تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}^{-1}(.)$ برای $i=1,\dots,n$ باشد. ممکن است طول عمر مؤلفه‌های سیستم وابسته باشند که این وابستگی را می‌توان با تابع قابلیت اعتماد توأم مؤلفه‌ها به‌صورت $\bar{\boldsymbol{F}}(t_1,\dots,t_n)=\Pr(X_1>t_1,\dots,X_n>t_n)$ بیان نمود.

طول عمر سیستم k از n را با نماد $T=\phi(X_1,\dots,X_n)=X_{k:n}$ که $k=1,\dots,n$ نمایش می‌دهند؛ که در آن $X_{1:n},\dots,X_{n:n}$ همان آماره‌های ترتیبی از متغیرهای تصادفی $X_1,\dots,X_n$ می‌باشند. برای مثال یک سیستم k از n با $k=1$ یک سیستم سری n مؤلفه‌ای و برای $k=n$ یک سیستم موازی n مؤلفه‌ای است.

قابلیت اعتماد یک سیستم k از n با مؤلفه‌های وابسته و تعویض‌پذیر بر اساس نتایج [۱۷] و رابطه‌ی (۲) به شرح زیر است

$$\begin{aligned}\bar{F}_{k:n}(t)&=\sum_{j=n-k+1}^{n}\binom{j-1}{n-k}\binom{n}{j}(-1)^{j+k-n-1}\bar{F}_{1:j}(t)\\&=\sum_{j=n-k+1}^{n}\binom{j-1}{n-k}\binom{n}{j}(-1)^{j+k-n-1}K\left(\underbrace{\bar{F}(t),\dots,\bar{F}(t)}_{\text{مرتبه } j},\underbrace{1,\dots,1}_{\text{مرتبه } n-j}\right).\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $u=\bar{F}(t)$ و $b_{n,k,j}=\binom{j-1}{n-k}\binom{n}{j}(-1)^{j+k-n-1}$، تابع دگرشکلی سیستم k از n به شکل زیر بیان می‌شود

$$h_{k:n}(u)=\sum_{j=n-k+1}^{n}b_{n,k,j}K\left(\underbrace{u,\dots,u}_{\text{مرتبه } j},\underbrace{1,\dots,1}_{\text{مرتبه } n-j}\right). \tag{۴}$$

بررسی رفتار تابع $h_{k:n}(u)$، مشتق و انتگرال آن، نقش تبیین‌کننده‌ای در بررسی ترتیب‌های تصادفی سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته ایفا می‌کند. آن‌چنان‌که اهمیت این مطلب در [۱۱] مشهود است.

در ادامه به دنبال بررسی آن هستیم که طول عمر سیستم k از n چه رفتاری نسبت به تعداد مؤلفه‌های خراب سیستم دارد. به‌عنوان مثال تحت کدام‌یک از ترتیب‌های تصادفی (ORD) روندی افزایشی در رابطه‌ی (۵) برقرار است.

$$X_{1:n}\le_{ORD}\dots\le_{ORD}X_{j:n}\le_{ORD}X_{j+1:n}\le_{ORD}\dots\le_{ORD}X_{n:n}. \tag{۵}$$

در این حیطه سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های IID (که دارای ساختار وابستگی حاصل‌ضربی بین مؤلفه‌ها است) از دیدگاه تصادفی مورد مقایسه قرارگرفته‌اند. در این زمینه [۱۰] نشان داده

است، طول عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های IID در ترتیب تصادفی ST، HR، LR و RH صعودی در k هستند. بررسی رفتار سیستم‌های k از n با فرض وابسته بودن مؤلفه‌ها واقع‌بینانه‌تر است. این مسئله موردتوجه [۱۸] و [۱۱] قرارگرفته است. ناوارو و ربیو [۱۸] برای مؤلفه‌های DID و تعویض‌پذیر نشان داده‌اند که ترتیب صعودی در طول عمر سیستم‌های منسجم k از n بر اساس ترتیب ST برقرار و در ترتیب‌های HR، LR و RH لزوماً برقرار نیست. کلکین‌نما و اسدی [۱۱] با توجه به ویژگی‌های تابع $h_{k:n}(u)$، شرط لازم و کافی برای برقراری ترتیب صعودی در طول عمر سیستم‌های k از n بر اساس مقایسه‌های تصادفی HR، LR و RH را ارائه نمودند. در قضیه‌ی بعدی بر اساس رفتار انتگرال تابع $h_{k:n}(u)$، ترتیب صعودی در طول عمر سیستم‌های k از n را برای ترتیب‌های MRL، RML، ICX، TTT و EW بررسی خواهیم نمود. برهان قضیه ۲ به‌راحتی با به‌کارگیری تعاریف ۱ و ۳ به دست می‌آید، لذا از ارائه برهان آن خودداری شده است.

قضیه ۲: فرض کنید $X_{k:n}$ طول عمر یک سیستم منسجم با مؤلفه‌های DID و تعویض‌پذیر و تابع دگرشکلی به شکل رابطه‌ی (۴) باشد.

۱. $X_{k:n} \le_{MRL} X_{k+1:n}$ به ازای هر $k=1,\dots,n$، اگر و تنها اگر تابع $\int_0^u h_{k:n}^{\star}(z)\,dz$ دارای خاصیت RR_2 روی $(k,u)\in\{1,\dots,n\}\times(0,1)$ باشد.

۲. $X_{k:n} \le_{RML} X_{k+1:n}$ به ازای هر $k=1,\dots,n$، اگر و تنها اگر تابع $\int_u^1 \overline{h}_{k:n}^{\star}(z)\,dz$ دارای خاصیت RR_2 روی $(k,u)\in\{1,\dots,n\}\times(0,1)$ باشد.

۳. $X_{k:n} \le_{ICX} X_{k+1:n}$ به ازای هر $k=1,\dots,n$، اگر $\dfrac{\int_0^u h_{k:n}^{\star}(z)\,dz}{\int_0^u h_{k+1:n}^{\star}(z)\,dz} \le 1$ به ازای هر $u\in(0,1)$ برقرار باشد.

۴. $X_{k:n} \le_{TTT} X_{k+1:n}$ به ازای هر $k=1,\dots,n$، اگر $\dfrac{\int_0^u h_{k:n}^{\star\star}(z)\,dz}{\int_0^u h_{k+1:n}^{\star\star}(z)\,dz} \le 1$ به ازای هر $u\in(0,1)$ برقرار باشد.

۵. $X_{k:n} \le_{EW} X_{k+1:n}$ به ازای هر $k=1,\dots,n$، اگر $\dfrac{\int_u^1 h_{k:n}^{\star\star}(z)\,dz}{\int_u^1 h_{k+1:n}^{\star\star}(z)\,dz} \le 1$ به ازای هر $u\in(0,1)$ برقرار باشد.

که در آن $h^{\star}_{i:n}(z)=\frac{h_{i:n}(z)}{f\left(\bar{F}^{-1}(z)\right)}$ و $h^{\star\star}_{i:n}(z)=\frac{1-z}{h'_{i:n}\left(h^{-1}_{i:n}(1-z)\right)}$ است.
قضیه‌ی ۲، شرط موردنیاز برقراری رابطه‌ی (۵) بر اساس ترتیب‌های موردبحث در گزاره‌ها را فراهم نموده است.

با توجه به قضیه‌ی ۲ واضح است که در حالت وابسته ترتیب صعودی در طول عمر سیستم‌های k از n لزوماً برقرار نیست. بدین معنا که برقراری رابطه‌ی (۵) به رفتار تابع $h_{k:n}(.)$، مشتق و انتگرال آن بستگی دارد. در مثال بعدی با در نظر گرفتن مفصل FGM ماکزیمم مقادیر n ای را خواهیم یافت که شرط لازم برای تابع $h_{k:n}(.)$ در قضیه‌های مذکور را تأمین نماید. درواقع بررسی می‌کنیم که به ازای چه مقادیری از n تابع $h_{k:n}(.)$، مشتق یا انتگرال آن، تابعی RR_2 است.

مثال ۱: فرض کنید ساختار وابستگی بین طول عمر مؤلفه‌های سیستم k از n توسط مفصل FGM تبیین شود که ضابطه‌ی آن در جدول ۲ ارائه شده است. در این صورت تابع دگرشکلی در رابطه‌ی (۴) به شکل زیر است

$$h_{k:n}(u)=\sum_{j=n-k+1}^{n-1} b_{n,k,j}u^{j}+\binom{n-1}{n-k}(-1)^{k-1}u^{n}\left(1+\theta(1-u)^{n}\right).$$

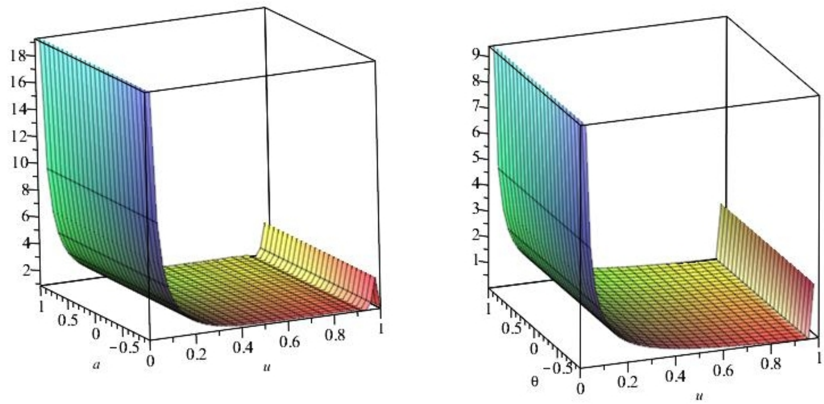
برقراری رابطه‌ی $X_{1:4}\le_{LR}\ldots\le_{LR}X_{4:4}$ تحت مفصل FGM در [۱۱] قابل‌مشاهده است. در ادامه به دنبال پاسخی برای این پرسش هستیم که آیا ترتیب یادشده در طول عمر سیستم‌های k از n، به ازای هر n برقرار است؟

با بررسی‌هایی که توسط نرم‌افزار انجام می‌شود، می‌توان مشاهده نمود رابطه‌ی (۵) برای مقادیر $n=5,6,\ldots,11$ برای ترتیب LR به ازای تمامی مقادیر پارامتر θ در مفصل FGM برقرار است؛ اما برای $n=12$ در برخی مقادیر j، تابع $\frac{h'_{j+1:n}(u)}{h'_{j:n}(u)}$ در u نزولی نیست، همان‌گونه که شکل ۱-(الف) تأییدی بر این مطلب است. با کنکاش در پی بررسی رابطه‌ی (۵) در ترتیب‌های تصادفی ضعیف‌تری مانند HR به شکل رابطه‌ی (۶) هستیم.

$$X_{1:n}\le_{HR}\ldots\le_{HR}X_{j:n}\le_{HR}X_{j+1:n}\le_{HR}\ldots\le_{HR}X_{n:n}\quad j=1,\ldots,n. \qquad (6)$$

پس از انجام بررسی‌های لازم به این نتیجه می‌رسیم که رابطه‌ی (۶) برای $n\le 36$ برقرار است. برای این منظور برای هر n، به ازای تمام $j=1,\ldots,n-1$، باید تابع $\frac{h_{j+1:n}(u)}{h_{j:n}(u)}$ بر اساس u نزولی باشد. شکل ۱-(ب) نشان‌دهنده‌ی عدم برقراری رابطه‌ی (۶) در $n=37$ است. بررسی این

مهم از طریق رسم $n-1$ شکل سه‌بعدی تابع $\frac{h_{j+1:n}(u)}{h_{j:n}(u)}$ به ازای تمام مقادیر u و θ به‌وسیله‌ی نرم‌افزار Maple صورت پذیرفته است. واضح است که بررسی این مسئله پیچیده و زمان‌بر است؛ بنابراین نتایج مثال مطرح شده را می‌توان در قالب گزاره‌ای جمع‌بندی نمود.



(الف): نمودار تابع $\frac{h'_{11:12}(u)}{h'_{10:12}(u)}$ **(ب)**: نمودار تابع $\frac{h_{28:37}(u)}{h_{27:37}(u)}$

شکل (۱): نمودار مربوط به مثال ۱

در گزاره‌ی بعدی، تحت مفصل FGM ، ماکزیمم n ای را گزارش خواهیم نمود که شرط صعودی بودن $X_{k:n}$ نسبت به k را بر اساس ترتیب‌های LR و HR تضمین می‌نماید.

گزاره ۱: برای سیستم k از n، $k=1,\dots,n$ با مؤلفه‌های وابسته تحت مفصل FGM داریم

۱. $X_{1:n} \le_{LR} \dots \le_{LR} X_{j:n} \le_{LR} X_{j+1:n} \le_{LR} \dots \le_{LR} X_{n:n}$ برای $1 \le n \le 11$ برقرار است.

۲. $X_{1:n} \le_{HR} \dots \le_{HR} X_{j:n} \le_{HR} X_{j+1:n} \le_{HR} \dots \le_{HR} X_{n:n}$ برای $1 \le n \le 36$ برقرار است.

به جهت اهمیت سیستم‌های سری در صنعت، بررسی عملکرد این سیستم‌ها در حالت وابسته نیز موردتوجه است. تابع قابلیت دگرشکلی سیستم سری بر اساس رابطه‌ی (۴) به شکل $h_{1:n}(u) = K(u,\dots,u)$ است. اگر مؤلفه‌ها مستقل باشند آنگاه مفصل حاصل‌ضربی است و لذا $h_{1:n}(u) = u^n$ که به‌راحتی به کمک ابزار دگرشکلی و به ازای هر n، درستی رابطه‌ی

$X_{1:n+1} \leq_{LR} X_{1:n}$ به اثبات می‌رسد. در لم و مثال بعد به بررسی این مسئله در حالت وابسته می‌پردازیم.

لم ۲: برای سیستم سری با n مؤلفه‌ی وابسته تحت مفصل CO همواره $X_{1:n+1} \leq_{LR} X_{1:n}$.

برهان. تابع قابلیت دگرشکلی سیستم سری بر اساس مفصل کلایتون اکاس دارای ضابطه‌ی زیر است

$$h_{1:n}(u) = \left(nu^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \qquad (7)$$

شرط لازم و کافی برای برقراری رابطه‌ی LR، نزولی بودن تابع $\frac{h'_{1:n}(u)}{h'_{1:n+1}(u)}$ برحسب u است که معادل است با

$$\frac{h''_{1:n}(u)\,h'_{1:n+1}(u) - h''_{1:n+1}(u)\,h'_{1:n}(u)}{[h'_{1:n+1}(u)]^{2}} \leq 0, \qquad (8)$$

$h'(u)$ و $h''(u)$ مشتقات مرتبه اول و دوم $h(u)$ برحسب u هستند؛ اما

$$h'_{1:n}(u) = nu^{-(\alpha+1)}\left(nu^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}-1},$$

$$h''_{1:n}(u) = -n(\alpha+1)u^{-(\alpha+2)}\left(nu^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}-1}$$
$$+n^{2}(\alpha+1)u^{-2(\alpha+1)}\left(nu^{-\alpha} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}-2},$$

$$h_{1:n+1}(u) = \left\{(n+1)u^{-\alpha} - (n+1) + 1\right\}^{-\frac{1}{\alpha}},$$

$$h'_{1:n+1}(u) = (n+1)u^{-(\alpha+1)}\left\{(n+1)u^{-\alpha} - n\right\}^{-\frac{1}{\alpha}-1},$$

$$h''_{1:n+1}(u) = -(n+1)(\alpha+1)u^{-(\alpha+2)}\left\{(n+1)u^{-\alpha} - n\right\}^{-\frac{1}{\alpha}-1}$$
$$+(n+1)^{2}(\alpha+1)u^{-2(\alpha+1)}\left\{(n+1)u^{-\alpha} - n\right\}^{-\frac{1}{\alpha}-2}.$$

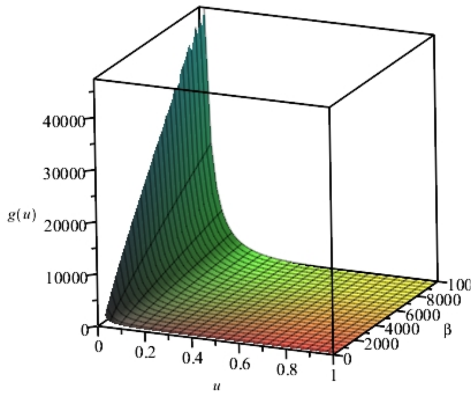
با محاسبات جبری ساده، نامساوی (۸) معادل می‌شود با

$$n\left(nu^{-\alpha} - n + 1\right)^{-1} \leq (n+1)\left\{(n+1)u^{-\alpha} - n\right\}^{-1},$$

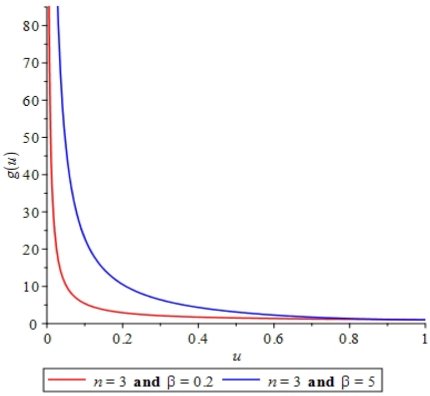
که نامساوی اخیر همواره برای هر $n \geq ۱$ و $\alpha \geq ۰$ برقرار است.

در مثال بعد به بررسی مسئله بر اساس مفصل فرانک می‌پردازیم.

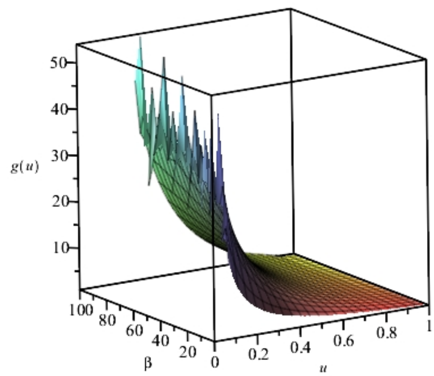
مثال ۲ فرض کنید ساختار وابستگی بین مؤلفه‌های سیستم مطابق مفصل فرانک باشد. با توجه به جدول ۲، تابع قابلیت دگرشکلی به‌صورت $h_{۱:n}(u) = \log_{\beta}\left[۱ + \frac{(\beta^{u} - ۱)^{n}}{(\beta - ۱)^{n-۱}}\right]$ است.



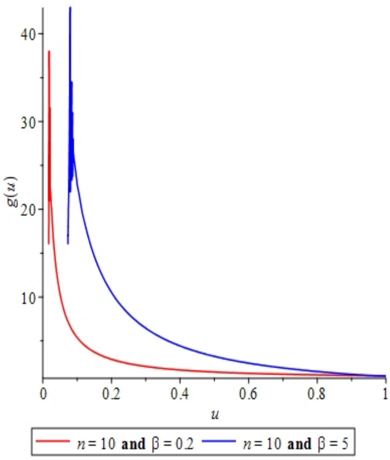
(الف): نمودار تابع $g(u)$ در $n = ۳$



(ب): نمودار تابع $g(u)$ در $n = ۳$ برای $\beta = ۰/۲, ۵$



(ج): نمودار تابع $g(u)$ در $n = ۱۰$



(د): نمودار تابع $g(u)$ در $n = ۱۰$ برای $\beta = ۰/۲, ۵$

شکل (۲): نمودار مربوط به مثال ۲.

رفتار طول عمر سیستم‌های سری در این مفصل برای مقادیر پارامتر β و n متفاوت است. در این ساختار وابستگی، حتی ترتیب ضعیف‌تر HR نیز برقرار نیست و روند خاصی برای رفتار سیستم سری تحت مفصل فرانک با مقادیر $\beta>۰$ را نمی‌توان پیش‌بینی کرد. برای برقراری $X_{۱:n+۱}\le_{HR} X_{۱:n}$، بایستی تابع $g(u)=\frac{h_{۱:n}(u)}{h_{۱:n+۱}(u)}$ نسبت به u نزولی باشد. به‌طور مثال در مقایسه‌ی دو سیستم سری $X_{۱:۳}$ و $X_{۱:۴}$ با بررسی شکل ۲-(الف) و (ب)، وجود رابطه‌ی $X_{۱:۴}\le_{HR} X_{۱:۳}$ را به ازای مقادیر مختلفی از β می‌توان نتیجه گرفت. این مطلب به‌وضوح در شکل ۲-(ب) برای مقادیر $\beta=۰/۲,۵$ مشاهده می‌شود. این در حالی است که این روند نزولی در ترتیب HR به ازای هر n برقرار نیست. برای این منظور رفتار دو سیستم سری $X_{۱:۱۰}$ و $X_{۱:۱۱}$ را در ترتیب HR، تحت مفصل فرانک موردبررسی قرار می‌دهیم. با رسم تابع $g(u)$ در شکل ۲-(ج)، مشاهده می‌نماییم که به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\beta>۰$، تابع لزوماً نزولی نیست. همچنان که نمودار رسم شده‌ی تابع $g(u)$ برای $\beta=۰/۲,۵$، در شکل ۲-(د) این حقیقت را تائید می‌کند؛ بنابراین رابطه‌ی $X_{۱:۱۱}\le_{HR} X_{۱:۱۰}$، برقرار نیست.

مطالعه و بررسی تأثیر مؤلفه‌های پایه در رفتار تصادفی سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به همین دلیل رفتار سیستم‌هایی با ساختار یکسان و مؤلفه‌های پایه‌ای متفاوت بر اساس تابع دگرشکلی در مقالاتی از جمله [۵] و [۸] موردبررسی قرارگرفته است. در قضیه‌ی بعدی با توجه به خاصیت $PF_۲$ برای تابع $h_{k:n}(.)$ و مشتق آن، طول عمر سیستم‌های k از n در دو جامعه متفاوت مقایسه می‌شود.

قضیه ۳: فرض کنید $X_{k:n}$ و $Y_{k:n}$ طول عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته‌ی تعویض‌پذیر به ترتیب دارای مؤلفه‌هایی با طول عمرهای $X_۱,\dots,X_n$ و $Y_۱,\dots,Y_n$ و تابع قابلیت اعتماد مشترک پایه‌ای $\bar{F}(.)$ و $\bar{G}(.)$ باشند.

۱. اگر $X_۱\le_{ST} Y_۱$ و $h_{k:n}(u)$ تابعی $PF_۲$ باشد، آنگاه $X_{k:n}\le_{HR} Y_{k:n}$.
۲. اگر $X_۱\le_{ST} Y_۱$ و $h'_{k:n}(u)$ تابعی $PF_۲$ باشد، آنگاه $X_{k:n}\le_{LR} Y_{k:n}$.
۳. اگر $X_۱\le_{ST} Y_۱$ و $۱-h_{k:n}(u)$ تابعی $PF_۲$ باشد، آنگاه $X_{k:n}\le_{RH} Y_{k:n}$.

برهان. در اینجا تنها به اثبات قسمت اول می‌پردازیم و به دلیل تشابه، از اثبات سایر قسمت‌ها اجتناب می‌کنیم. از فرض $X_۱\le_{ST} Y_۱$ داریم

$$\bar{F}(t)\le \bar{G}(t)\quad \forall t>۰. \qquad (۹)$$

تابع $h_{k:n}(u)$ تابعی $PF_{۲}$ است، بدین معنا که $\frac{h_{k:n}(u)}{h_{k:n}(u+\delta)}$ به ازای مقادیر $\delta > ۰$ تابعی صعودی از u است. به‌عبارت‌دیگر

$$\frac{h_{k:n}(u_{۲})}{h_{k:n}(u_{۲}+\delta)} \le \frac{h_{k:n}(u_{۱})}{h_{k:n}(u_{۱}+\delta)} \quad \forall u_{۲} \le u_{۱}. \qquad (۱۰)$$

با قرار دادن مقادیر $u_i = \bar{F}(t_i)$ و $u_i + \delta = \bar{G}(t_i)$ در رابطه‌ی (۱۰) به ازای مقادیر $i = ۱, ۲$ که در آن $t_{۱} \le t_{۲}$ و با استفاده از رابطه‌ی (۹)، داریم

$$\frac{h_{k:n}(\bar{F}(t_{۲}))}{h_{k:n}(\bar{G}(t_{۲}))} \le \frac{h_{k:n}(\bar{F}(t_{۱}))}{h_{k:n}(\bar{G}(t_{۱}))} \quad \forall t_{۱} \le t_{۲}$$

که معادل نزولی بودن تابع $\frac{h_{k:n}(\bar{F}(t))}{h_{k:n}(\bar{G}(t))}$ بر اساس t است؛ بنابراین $X_{k:n} \le_{HR} Y_{k:n}$ نتیجه می‌شود.

تذکر ۱ می‌توان به‌راحتی نشان داد که در حالت وابسته نیز مشابه حالت استقلال (به [۱۰] مراجعه کنید)، درصورتی‌که در دو جامعه $X_{۱} \le_{ST} Y_{۱}$ آنگاه $X_{k:n} \le_{ST} Y_{k:n}$ است.

تذکر ۲ اگر بین مؤلفه‌های دو جامعه ترتیب ST باشد، ترتیب ICX و TTT بین سیستم‌های k از n دو جامعه نیز نتیجه می‌شوند. این در حالی است که اگر مؤلفه‌های دو جامعه دارای ترتیب ضعیف‌تر ICX باشد، بنا به [۵] ترتیب ICX در سیستم‌های k از n دو جامعه نیز برقرار است، اگر $h_{k:n}(u)$ تابعی مقعر باشد.

۴- مقایسه تصادفی مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته

اشکال مختلفی از مانده‌ی عمر سیستم‌های منسجم موردعلاقه‌ی محققین است. در ساده‌ترین نوع آن، متغیر $(T-t|T>t)$، مانده‌ی عمر سیستم را در لحظه‌ی t به‌شرط فعال بودن سیستم در لحظه‌ی t نشان می‌دهد. انواع متفاوت مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n، در مقالاتی از جمله [۱۹]، [۲۰] و [۲۱] معرفی و مطالعه شده است. مانده‌ی عمر یک سیستم به‌شرط شکست حداقل $r(\le k)$ مؤلفه، به شکل $(T-t \mid X_{r:n} > t)$ است که آن را در سیستم‌های k از n با نماد

$$(T-t|X_{r:n}>t) \equiv (X_{k:n}-t|X_{r:n}>t) = X^{t}_{k|r:n}, \quad ۱ \le r \le k \le n, \qquad (۱۱)$$

نمایش می‌دهیم. در حالت خاص، مانده‌ی عمر سیستم در لحظه‌ی t به‌شرط زنده‌بودن تمامی مؤلفه‌ها نیز به‌صورت

$$\left(X_{k:n}-t \mid X_{1:n}>t\right) \equiv (X_{k:n}-t \mid X_1>t,\ldots,X_n>t)=X^t_{k|1:n}, \qquad (۱۲)$$

است. مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n در حالت استقلال مؤلفه‌ها در مقالاتی مانند [۲۲] موردبررسی قرارگرفته است. در حالت وابسته نیز برخی پژوهش‌ها همچون [۲۳]، [۸] و [۹] انجام شده است.

در بخش حاضر علاقه‌مند به مطالعه و بررسی مانده‌ی عمر $X^t_{k|r:n}$ و $X^t_{k|1:n}$، با فرض وابسته بودن مؤلفه‌های سیستم k از n هستیم. بدین منظور ابتدا نمایشی از تابع قابلیت اعتماد $X^t_{k|r:n}$ بر اساس تابع دگرشکلی ارائه می‌نماییم. قابل به ذکر است، نمایش‌های دیگری از این تابع را در [۲۴] و [۲۵] می‌توان یافت.

فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ مؤلفه‌های هم توزیع و وابسته دارای تابع قابلیت اعتماد توأم $\bar{F}\left(t_1,\ldots,t_n\right)$ با مفصل بقای تعویض‌پذیر $K\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ هستند. فرض کنید تابع قابلیت اعتماد مؤلفه‌ها $v=\bar{F}\left(t\right)$ و مانده‌ی عمر مؤلفه‌ی iام در زمان t، $X^t_i=\left(X_i-t \mid X_i>t\right)$ باشد که دارای تابع قابلیت اعتماد $u=\bar{F}_t\left(x\right)=\dfrac{\bar{F}\left(x+t\right)}{\bar{F}\left(t\right)}$ است. بر اساس نتایج [۲۵] تابع دگرشکلی برای متغیر مانده‌ی عمر $X^t_{k|r:n}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} h_{k|r:n}\left(u;v\right) &= \frac{1}{h_{r:n}\left(v\right)}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{k-i-1}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\ \Big\{\sum_{l=0}^{i}\sum_{m=0}^{j}(-1)^{l+m} \\ &\times\binom{i}{l}\binom{j}{m}K\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{\text{مرتبـــه } i-l},\ \underbrace{v,\ldots,v}_{\text{مرتبـــه } j+l-m},\ \underbrace{uv,\ldots,uv}_{\text{مرتبـــه } n-j-i+m}\Big)\Big\}, \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که تابع $h_{r:n}\left(v\right)$ قبلاً در رابطه‌ی (۴) معرفی شده است. تابع قابلیت اعتماد دگرشکلی مانده‌ی عمر سیستم k از n به‌شرط فعال بودن تمام مؤلفه‌ها به شکل ساده‌تر زیر بیان می‌شود

$$Pr(X_{k:n}-t>x \mid X_{1:n}>t)=\frac{Pr(X_{k:n}>t+x, X_{1:n}>t)}{Pr(X_{1:n}>t)}$$

$$=\frac{\sum_{j=n-k+1}^{n}\binom{j-1}{n-k}\binom{n}{j}(-1)^{j+k-n-1}K\Big(\underbrace{\bar{F}\left(t+x\right),\ldots,\bar{F}\left(t+x\right)}_{\text{مرتبـــه } j},\underbrace{\bar{F}\left(t\right),\ldots,\bar{F}\left(t\right)}_{\text{مرتبـــه } n-j}\Big)}{K\left(\bar{F}\left(t\right),\ldots,\bar{F}\left(t\right)\right)}$$

با قرار دادن نمادهای $u=\bar{F}_t(x)$، $v=\bar{F}(t)$ و $b_{n,k,j}=\binom{j-1}{n-k}\binom{n}{j}(-1)^{j+k-n-1}$ تابع قابلیت اعتماد دگرشکلی $h_{k|1:n}(u;v)$ عبارت است از

$$h_{k|1:n}(u;v)=\frac{\sum_{j=n-k+1}^{n} b_{n,k,j} K\left(\underbrace{uv,\ldots,uv}_{\text{مرتبه } j},\ \underbrace{v,\ldots,v}_{\text{مرتبه } n-j}\right)}{K(v,\ldots,v)}=\frac{h_{k:n}(u;v)}{h_{1:n}(v)} \qquad (۱۴)$$

بنا به‌دشواری محاسباتی در کار با مانده‌ی $X^t_{k|r:n}$ در ادامه حالت خاص آن $r=1$ و برقراری رابطه‌ی

$$X^t_{1|1:n} \le_{ORD} \ldots \le_{ORD} X^t_{j|1:n} \le_{ORD} X^t_{j+1|1:n} \le_{ORD} \ldots \le_{ORD} X^t_{n|1:n}, \qquad (۱۵)$$

موردتوجه است. در قضیه‌ی بعدی شرط لازم و کافی جهت برقراری رابطه‌ی صعودی (۱۵) به ازای معیارهای تصادفی متفاوت ارائه می‌شود.

قضیه ۴: با برقراری مفروضات قضیه‌ی ۲ درصورتی‌که $\mathrm{X}^t_{k|1:n}$ مانده‌ی عمر سیستم k از n در زمان t به‌شرط فعال بودن تمامی مؤلفه‌ها باشد، آنگاه با فرض $v=\bar{F}(t)$ برای هر t و $k=1,\ldots,n$ داریم،

۱. $X^t_{k|1:n} \le_{ST} X^t_{k+1|1:n}$، اگر و تنها اگر به ازای تمام $u\in(0,1)$ و v باشد. $h_{k:n}(u;v) \le h_{k+1:n}(u;v)$

۲. $X^t_{k|1:n} \le_{HR} X^t_{k+1|1:n}$، اگر و تنها اگر تابع $h_{k:n}(u;v)$ دارای خاصیت RR_2 روی $(k,u)\in\{1,\ldots,n\}\times(0,1)$ به ازای هر v باشد.

۳. $X^t_{k|1:n} \le_{LR} X^t_{k+1|1:n}$، اگر و تنها اگر تابع $h'_{k:n}(u;v)$ دارای خاصیت RR_2 روی $(k,u)\in\{1,\ldots,n\}\times(0,1)$ به ازای هر v باشد.

۴. $X^t_{k|1:n} \le_{RH} X^t_{k+1|1:n}$، اگر و تنها اگر تابع $h_{1:n}(v)-h_{k:n}(u;v)$ دارای خاصیت RR_2 روی $(k,u)\in\{1,\ldots,n\}\times(0,1)$ به ازای هر v باشد.

برهان. ابتدا به اثبات مورد ۲ می‌پردازیم و در ادامه به دلیل تشابه در روند اثبات از اثبات موردهای ۱، ۳ و ۴ اجتناب می‌کنیم. برای مقدار ثابت t، v مقداری ثابت است. با در نظر گرفتن

$u=\overline{F}_t(x)$ و $x_1 \le x_2$ ، مقدار $u_2 \le u_1$ است. می‌دانیم ترتیب تصادفی HR برقرار است، اگر $\frac{h_{k+1|1:n}(u;v)}{h_{k|1:n}(u;v)}$ تابعی نزولی برحسب u باشد؛ بنابراین

$$X_{k|1:n}^t \le_{HR} X_{k+1|1:n}^t \Leftrightarrow \frac{h_{k+1|1:n}(u_1;v)}{h_{k|1:n}(u_1;v)} \le \frac{h_{k+1|1:n}(u_2;v)}{h_{k|1:n}(u_2;v)}, \qquad \forall u_2 \le u_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{h_{k+1:n}(u_1;v)}{h_{1:n}(v)}}{\frac{h_{k:n}(u_1;v)}{h_{1:n}(v)}} \le \frac{\frac{h_{k+1:n}(u_2;v)}{h_{1:n}(v)}}{\frac{h_{k:n}(u_2;v)}{h_{1:n}(v)}}, \quad \forall u_2 \le u_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_{k+1:n}(u_1;v)}{h_{k:n}(u_1;v)} \le \frac{h_{k+1:n}(u_2;v)}{h_{k:n}(u_2;v)}, \quad \forall u_2 \le u_1. \tag{۱۶}$$

رابطه‌ی (۱۶) خاصیت RR_2 تابع $h_{k:n}(u;v)$ روی مقادیر $(k,u)\in\{1,\dots,n\}\times(0,1)$ نشان می‌دهد

در ادامه با مثال‌هایی، نحوه تأثیر وابستگی مؤلفه‌ها و زمان‌بر مقایسه‌ی تصادفی مانده‌ی طول عمر سیستم k از n را نشان می‌دهیم.

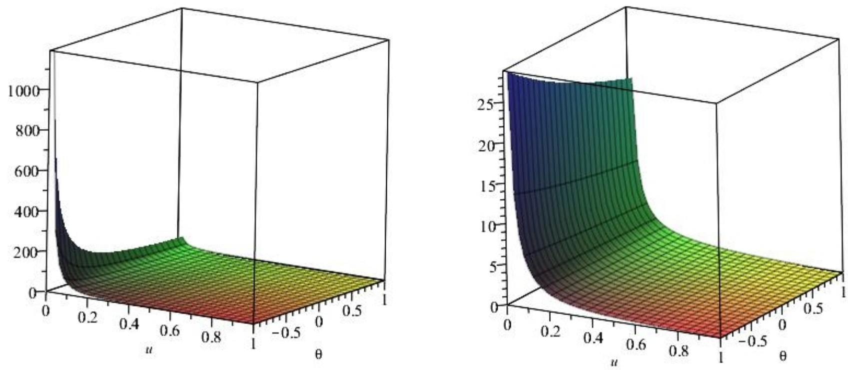
مثال ۳: سیستم سه مؤلفه‌ای متشکل از مؤلفه‌های وابسته با طول عمرهای X_1, X_2, X_3 که دارای توزیع نمایی با میانگین یک هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید توزیع توأم مؤلفه‌ها دارای مفصل بقای FGM با پارامتر $|\theta|\le 1$ باشد. مانده‌ی عمر سیستم k از ۳ به‌شرط فعال بودن مؤلفه‌ها در زمان t را با $X_{k|1:3}^t$ نمایش می‌دهیم. در این صورت

$$h_{k:n}(u;v)=\sum_{j=3-k+1}^{3}\binom{j-1}{3-k}\binom{3}{j}(-1)^{j+k-4}u^j v^3\left(1+\theta(1-uv)^j(1-v)^{3-j}\right).$$

با قرار دادن مقادیر متفاوت $j=1,2,3$ ، توابع قابلیت اعتماد دگرشکلی مانده‌ی عمر را می‌توان محاسبه نمود. با بررسی‌های انجام شده، همان‌گونه که شکل ۳ نشان می‌دهد، تابع $h_{k:n}(v;u)$ در مقدار $t=0.3$، تابعی RR_2 در (k,u) است؛ بنابراین در زمان $t=0.3$، مانده‌ی عمر $X_{k|1:3}^t$ به ازای تمام مقادیر $|\theta|\le 1$، دارای ترتیب زیر است

$$X_{1|1:3}^t \le_{LR} X_{2|1:3}^t \le_{LR} X_{3|1:3}^t. \tag{۱۷}$$

قابل‌توجه است ترتیب LR مانده‌ی پویای طول عمر سیستم k از ۳ در زمان شروع به کار که معادل ترتیب LR در طول عمر k از ۳ است، قبلاً در مثال ۱ (حتی برای مقادیر $n \leq ۱۱$) نشان داده شده است. این در حالی است که در زمان $t = ۱, ۴, ۵$، رابطه‌ی (۱۷) برقرار نیست؛ یعنی گذشت زمان باعث برهم زدن ترتیب به وجود آمده در مانده‌ی عمر سیستم‌های k از ۳ می‌شود (این مطلب با رسم شکل قابل‌بررسی است).



(**الف**): نمودار تابع $\dfrac{h'_{۲:۳}(u;v)}{h'_{۲:۳}(u;v)}$ (**ب**): نمودار تابع $\dfrac{h'_{۲:۳}(u;v)}{h'_{۱:۳}(u;v)}$

شکل (۳): نمودار مربوط به مثال ۳.

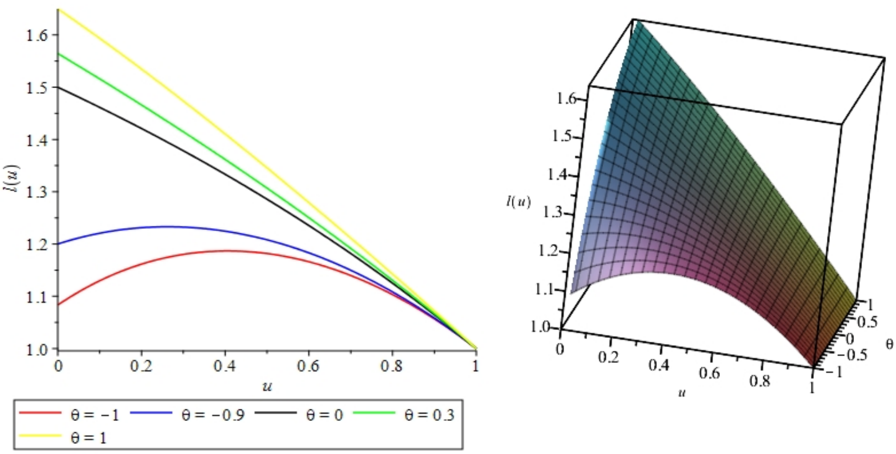
در پایان رفتار مانده‌ی عمر سیستم k از n در لحظه‌ی t را نسبت به تعداد مؤلفه‌های شکست‌خورده بررسی می‌کنیم. بر اساس نتایج [۲۶] در حالت استقلال می‌دانیم رفتار مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n بر اساس ترتیب نسبت درستنمایی، نسبت به r نزولی است یعنی $X^t_{k|r:n} \leq_{lr} X^t_{k|r-۱:n}$. در مثال بعدی به دنبال بررسی این خاصیت در حالت وابسته هستیم و نشان می‌دهیم چنین روندی در حالت وابسته لزوماً حفظ نمی‌شود.

مثال ۴ سیستم موازی ۲ مؤلفه‌ای با مؤلفه‌های هم توزیع و وابسته‌ی تعویض‌پذیر در نظر بگیرید. فرض کنید طول عمر مؤلفه‌های $X_۱, X_۲$ باشند. تابع قابلیت اعتماد دگرشکلی برای مانده‌های $X^t_{۲|۲:۲}$ و $X^t_{۲|۱:۲}$ بر اساس رابطه‌ی (۱۳) تحت مفصل بقای FGM به شکل زیر است

$$h_{۲|۱:۲}(u;v) = \frac{۲u\left(۱+\theta\left(۱-uv\right)\left(۱-v\right)\right) - u^{۲}\left(۱+\theta\left(۱-uv\right)^{۲}\right)}{۱+\theta(۱-v)^{۲}},$$

$$h_{۲|۲:۲}\left(u;v\right)=\frac{۲uv-u^{۲}v^{۲}\left(۱+\theta\left(۱-uv\right)^{۲}\right)}{۲v-v^{۲}\left(۱+\theta\left(۱-v\right)^{۲}\right)}.$$

رابطه‌ی $X^{t}_{۲|۱:۲}\leq_{HR}X^{t}_{۲|۲:۲}$ برقرار است، اگر تابع $l\left(u\right)=\dfrac{h_{۱|۱:۲}\left(u;v\right)}{h_{۲|۲:۲}\left(u;v\right)}$ برای تمام مقادیر پارامتر $\theta\in\left[-۱,۱\right]$، نزولی از u باشد. شکل ۴-(الف)، عدم برقراری رابطه‌ی $X^{t}_{۲|۱:۲}\leq_{HR}X^{t}_{۲|۲:۲}$ را نشان می‌دهد. همچنان که در شکل ۴-(ب)، مشهود است، تابع $l\left(u\right)$ برای مقادیر $\theta=-۱,-۰.۹$ نزولی نیست. این در حالی است که در حالت استقلال $\left(\theta=۰\right)$، تابع $l\left(u\right)$ نزولی است؛ بنابراین در حالت وابسته، برخلاف حالت استقلال، مانده‌ی عمر سیستم k از n در لحظه‌ی t نسبت به r، لزوماً روندی نزولی ندارد.



(الف): نمودار تابع $l\left(u\right)$

(ب): نمودار تابع $l\left(u\right)$ برای برخی مقادیر θ

شکل (۴): نمودار مربوط به مثال ۴.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

برخلاف حالت استقلال که رفتار طول عمر سیستم‌های k از n بر اساس بسیاری از ترتیب‌های تصادفی شناخته شده دارای روند صعودی در k است، در حالتی که مؤلفه‌های سیستم دارای طول عمر وابسته‌اند، لزوماً روند صعودی موردنظر حفظ نمی‌شود. در این مقاله با ارائه شرط لازم

در برقراری روند صعودی بر اساس خاصیت $SR_۲$ تابع قابلیت اعتماد دگرشکلی، مشتق و انتگرال آن، امکان انجام مقایسه‌های آزاد توزیع -صرف‌نظر از توزیع مؤلفه‌ها- فراهم شده است. در دو مفصل پرکاربرد کلایتون اکاس و FGM، با بررسی شرط لازم، ماکزیمم nای که به ازای آن طول عمر سیستم‌های k از n روندی صعودی نسبت به k در ترتیب‌های تصادفی LR و HR دارد، به دست آمد. به‌طور خاص سیستم‌های سری نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. در مفصل کلایتون اکاس، طول عمر سیستم‌های سری در ترتیب تصادفی LR دارای روند نزولی نسبت به n است. این در حالی است که در مفصل فرانک این روند نزولی در ترتیب HR، لزوماً حفظ نمی‌شود. طول عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های پایه‌ای متفاوت (دو جامعه) نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. در پایان نیز به مقایسه‌ی تصادفی مانده‌ی عمر سیستم‌های k از n با مؤلفه‌های وابسته به‌ویژه زمانی که تمام مؤلفه‌ها در زمان t فعال هستند، پرداخته شد. ملاحظه شد که رفتار تصادفی مانده‌ی عمر سیستم نسبت به k بسیار وابسته به مقادیر t است و در حالت کلی نمی‌توان گفت که در هرلحظه از زمان مانده‌ی عمر سیستم نسبت به k در ترتیب‌های تصادفی مختلف روند صعودی یا نزولی دارد. بررسی آنچه در این مقاله مطرح شد در حالتی که مؤلفه‌های سیستم هم توزیع نیستند (حالت ناهمگن) اما وابسته‌اند می‌تواند در آینده مدنظر قرار گیرد.

منابع

[1] Samaniego, F. J. (1985). On Closure of the IFR Class under Formation of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **34**, 69-72.

[2] Quiggin, J. (1982). A Theory of Anticipated Utility, *Journal of Economic Behavior & Organization*, **3**, 323-343.

[3] Navarro, J., Samaniego, F. J., Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, *Naval Research Logistics*, **55**, 313-327.

[4] Yaari, M. E. (1987). The Dual Theory of Choice under Risk, *Econometrica*, **55**, 95-115.

[5] Navarro, J., Del Aguila, Y., Sordo, M. A. and Suarez-Llorens, A. (2013). Stochastic Ordering Properties for Systems with Dependent Identically Distributed Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **29**, 264-278.

[6] Navarro, J. and Gomis, G. M. (2016). Comparisons in the Mean Residual Life Order of Coherent Systems with Identically Distributed Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 33-47.

[7] Navarro, J., Del Águila, Y., Sordo, M. A., and Suárez-Llorens, A. (2016). Preservation of Stochastic Orders under the Formation of Generalized Distorted Distributions. Applications to Coherent Systems, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **18**, 529-545.

[8] Navarro, J., Longobardi, M., and Pellerey, F. (2017). Comparison Results for Inactivity Times of k-out-of-n and General Coherent Systems with Dependent Components, *TEST*, 1-25.

[9] Navarro, J. (2018). Distribution-free Comparisons of Residual Lifetimes of Coherent Systems Based on Copula Properties, *Statistical Papers*, **59**, 781-800.

[10] Kochar, S. (2012). Stochastic Comparisons of Order Statistics and Spacings: A Review, *ISRN Probability and Statistics*.

[11] Kelkinnama, M. and Asadi, M. (2016). Stochastic and Ageing Properties of Coherent Systems with Dependent Identically Distributed Components. *Statistical Papers*, 1-17.

[12] Karlin, S. (1968). *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford.

[13] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[14] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*, Springer, New York.

[15] Sklar, M. (1959). Fonctions De Repartition an Dimensions et Leurs Marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.

[16] Nelsen, B. (2007). *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York.

[17] David, H. and Nagaraja, H. N. (2004). *Order Statistics*, Wiley, Hoboken.

[18] Navarro, J. and Rubio, R. (2011). A Note on Necessary and Sufficient Conditions for Ordering Properties of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics*, **58**, 478-489.

[19] Khaledi, B. E. and Shaked, M. (2007). Ordering Conditional Lifetimes of Coherent Systems. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1173–1184.

[20] Asadi, M. and Goliforushani, S. (2008). On the Mean Residual Life Function of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 574–580.

[21] Poursaeed, M. H. (2010). A Note on the Mean Past and the Mean Residual Life of a $(n-k+1)$-out-of-n system under Multi-monitoring, *Statistical Papers*, **51**, 409–419.

[22] Goliforushani, S., Asadi, M. and Balakrishnan, N. (2012). On the Residual and Inactivity Times of the Components of Used Coherent Systems. *Journal of Applied Probability*, **49**, 385-404.

[23] Bairamov, I. and Tavangar, M. (2015). Residual Lifetimes of k-out-of-n Systems with Exchangeable Components, *Journal of The Iranian Statistical Society*, **14**, 63-87.

[24] Navarro, J. and Balakrishnan, N. (2010). Study of Some Measures of Dependence between Order Statistics and Systems, *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 52-67.

[25] Sadegh, M. K. (2016). Distribution of Order Statistics for Exchangeable Random Variables, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **15**, 59-70.

[26] Li, X. and Zhao, P. (2006). Some Aging Properties of the Residual Life of k-out-of-n Systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 535-541.

JAMM,
DOI: 10.22055/JAMM.2020.30655.1748

ISSN: 2251-8088
Jamm.Scu.ac.ir

Stochastic Comparison of k-out-of-n Systems Based on Distortion Function

Elham Khaleghpanah Noughabi, Majid Rezaei, Majid Chahkandi

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

Received: August 12 2019 Accepted for publication: May 23 2020
Corresponding author: mchahkandi@birjand.ac.ir

Abstract: One of the relevant problems in the reliability theory is the stochastic comparison of coherent systems. Several results have been obtained in the stochastic comparison of systems with independent and identically (i.i.d) components. In this paper, we focus on k-out-of-n systems that play an important role in the study of the reliability of engineering systems. We obtain some results on distribution-free comparisons of k-out-of-n systems, with possibly dependent component lifetimes, based on the concept of distortion function. We also provide some conditions on distorted distributions of k-out-of-n systems or their residual lifetimes that conclude ordering between their lifetimes or their residual lifetimes. As a special case we consider two common survival copula (Farlie-Gumbel-Morgenstern and Clayton–Oakes) to derive more details on the stochastic comparison of k-out-of-n systems for k and n. Finally, illustrative examples are presented to show that some of the results for the stochastic comparison of k-out-of-n systems with i.i.d components are violated independent case.

Keywords: k-out-of-n system, Distortion function, Copula function, Residual Lifetime.

Mathematics Subject Classification (2010): 90C70, 90C90.