



پایداری و بقا در یک مدل ریاضی از تاثیر متقابل منابع آبی و جمعیت بر یکدیگر

ا. ربیعی مطلق^{*}، ح.م. محمدی نژاد[†]

گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۱۰

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۱

دبیر مسئول: فریبرز آذریناه

چکیده: در این مقاله با معرفی یک مدل ریاضی مبتنی بر دستگاه‌های شکار و شکارچی، به مطالعه‌ی تاثیر متقابل جمعیت و منابع آبی بر یکدیگر خواهیم پرداخت. ابتدا یک مدل ریاضی در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیل را معرفی می‌کنیم و سپس توابع و پارامترهای موثر در این فرایند را معرفی خواهیم کرد. همچنین به مطالعه‌ی رفتار موضعی دستگاه پیرامون نقاط تعادل درونی و همچنین مطالعه‌ی رفتار سراسری دستگاه در ناحیه‌ی قابل قبول برای جواب‌ها خواهیم پرداخت. به‌ویژه نشان خواهیم داد که چگونه تغییرات پارامترهای موثر بر دستگاه می‌توانند با ایجاد انشعاب‌های موضعی و تغییر در ساختار مدارها، منجر به بقا یا عدم بقای جمعیت نسبت به یک وضعیت تعادل شوند.

واژه‌های کلیدی: بقا، دستگاه‌های شکار و شکارچی، انشعاب‌های موضعی، منابع آبی.

رده‌بندی ریاضی: 92B06, 34C60.

۱) مقدمه

در سال‌های پیش رو، چالش کمبود منابع آبی و روش بهینه‌ی استفاده از این منابع، احتمالاً، مهم‌ترین تهدید پیش روی بسیاری از کشورها، به ویژه در حوزه‌ی جغرافیایی کشور ایران، خواهد بود. افزایش جمعیت، بهره‌برداری غیر اصولی و بی‌رویه از منابع آبی، همزمان با گرمایش زمین و کاهش نزولات جوی همه و همه باعث تحلیل منابع آبی شده است که این به نوبه‌ی خود امنیت در حوزه‌ی محصولات کشاورزی و تامین غذا را نیز مورد تهدید قرار می‌دهد. با این وجود، هر نوع پیش‌بینی از شدت و میزان مصرف آب و تاثیر آن بر منابع آبی یک سرزمین از اهمیت زیادی برخوردار است. در این میان، مدل‌های ریاضی با قابلیت پیش‌بینی شدت و نحوه‌ی گسترش مصرف آب در جامعه، از مؤثرترین ابزارهای موجود در مطالعه‌ی الگوهای تغییر در منابع آبی هستند. این مدل‌ها به ما این امکان را می‌دهند تا با شبیه‌سازی این موضوع، به مطالعه‌ی تاثیر متقابل جمعیت و منابع آبی بر یکدیگر و همین‌طور تعیین شاخص حداکثری برای میزان مصرف آب در یک جامعه و در نهایت پیش‌بینی آینده‌ی این تاثیر متقابل بپردازیم.

مدل‌های شکار و شکارچی، از مهم‌ترین ابزارهای ریاضی در بررسی تاثیر متقابل دو (یا چند) گونه بر یکدیگر هستند. یکی از شناخته‌شده‌ترین انواع مدل‌های شکار و شکارچی، مدل لسلی-گوور (Lesli-Gower) است که در سال ۱۹۴۸ برای مطالعه‌ی تغییرات جمعیت دو گونه‌ی

^{*}نویسنده مسئول مقاله، رایانامه: orabieimotlagh@birjand.ac.ir (O. RabieiMotlagh)

[†]نویسنده همکار، رایانامه: hmohammadinejad@birjand.ac.ir (H.M. Mohammadinejad)

استفاده کننده از این منبع باشد. همچنین فرض کنیم x_{in} و x_{out} به ترتیب نشان دهنده‌ی میزان آب ورودی به منبع و آب خارج شده از منبع در هر واحد زمان و y_{in} و y_{out} به ترتیب نشان دهنده‌ی میزان جمعیت ورودی به جامعه و جمعیت خارج شده از جامعه در هر واحد زمان باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + (x_{in} - x_{out})\Delta t. \\y(t + \Delta t) &= y(t) + (y_{in} - y_{out})\Delta t.\end{aligned}$$

در معادله‌ی اول در بالا، معمولاً میزان آب ورودی به ذخایر موجود (ناشی از بارندگی‌های سالانه و ...) با یک مطالعه‌ی آماری از میزان آب دریافتی در دوره‌های گذشته به دست می‌آید و معمولاً میزان آن برابر مقدار میانگین آب دریافتی در دوره‌های گذشته است که تحت تاثیر عوامل مختلف در دوره‌های زمانی مشخص از میزان آن کاسته یا به آن افزوده می‌گردد؛ یعنی

$$x_{in} = B_0 + B(t, x, y), \quad B_0 > 0$$

که در اینجا، ثابت B_0 نشان دهنده‌ی متوسط میزان مورد انتظار از ورودی آب در هر واحد زمان است و $B(t, x, y)$ تغییرات وابسته به زمان از ورودی آب در هر واحد زمان را نشان می‌دهد.

به وضوح، میزان ذخیره‌سازی آب همواره مقداری متناهی است، مثلاً فرض کنیم $K > 0$ نشان دهنده‌ی ظرفیت نهایی برای ذخیره‌سازی آب باشد. انتظار داریم با نزدیک شدن $x(t)$ به K مقدار $B_0 + B(t, x, y)$ رفته رفته به صفر نزدیک شود و اگر $x(t) > K$ آنگاه انتظار داریم که $B_0 + B(t, x, y) < 0$. در حقیقت نامساوی آخر نشان می‌دهد که اگر میزان آب موجود در مخزن بیش از گنجایش آن باشد، آب اضافی از منبع سر ریز شده و خارج می‌گردد. مطالعات آماری نشان می‌دهد که در ساده‌ترین حالت ممکن می‌توان $B_0 + B(t, x, y)$ را با تابعی به صورت

$$B_0 + B(t, x, y) = (b_0 + b(t, x, y)) \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

تقریب زد که در آن $b_0 + b(t, x, y) \geq 0$ نشان دهنده‌ی نرخ آب ورودی به مخزن در هر واحد زمان است. میزان آب مصرف شده در هر واحد زمان را نیز می‌توان با در نظر گرفتن میانگین مقدار آبی که هر یک از اعضا جامعه مصرف می‌کند به علاوه‌ی میزان آبی که در اثر عوامل مختلف (مثلاً فرسودگی شبکه‌ی توزیع یا سایر عوامل مرتبط) به هدر می‌رود، محاسبه کرد. اگر هر عضو جامعه در هر واحد زمان به طور متوسط به مقدار $p(t, x, y) \geq 0$ از منابع آبی برخوردار باشد، آنگاه میزان کل آب مصرفی توسط افراد جامعه در هر واحد زمان برابر $yp(t, x, y)$ خواهد بود و لذا خواهیم داشت:

$$x_{out} = y p(t, x, y) + q(t, x)$$

که در اینجا $q(t, x) \geq 0$ نشان دهنده‌ی میزان هدررفت آب در هر واحد زمانی است. توابع $p(t, x, y)$ و $q(t, x)$ را به ترتیب، «تابع پاسخ» و «تابع هدررفت» می‌نامیم. با جایگذاری توابع بالا در معادله‌ی تغییرات $x(t)$ وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ ، معادله‌ی تغییرات $x(t)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x' = (b_0 + b(t, x, y)) \left(1 - \frac{x}{K}\right) - (yp(t, x, y) + q(t, x))$$

که در آن $q(t, x) \geq 0$ ، $p(t, x, y) \geq 0$ ، توابعی کران دارند و در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \leq 0, \quad \frac{\partial q}{\partial x} \geq 0.$$

شرایط بالا بیان گر این واقعیت است که با افزایش منابع آبی، امکان افزایش میزان مصرف آب هر عضو از جامعه در واحد زمان نیز افزایش می‌یابد؛ در حالی که با افزایش جمعیت جامعه، سهم آب مصرفی هر فرد در واحد زمان کاهش می‌یابد و بالاخره این که، با افزایش منابع آبی، هدررفت آن نیز افزایش خواهد یافت. دقت کنیم که در روابط بالا p و q می‌توانند توابع ثابت نامنفی باشند که در این حالت منظور این است که هر فرد از جامعه مقدار ثابتی از منابع آبی را در هر واحد زمان مورد استفاده قرار می‌دهد و همچنین میزان هدررفت آب در هر واحد زمان نیز مقداری ثابت است. با این حال، چنانچه p یا q توابعی غیر ثابت بر حسب x یا y در نظر گرفته شوند باید در شرایط $p(t, 0, y) = 0$ و $q(t, 0) = 0$ نیز صدق کنند. این شرایط بیانگر این واقعیت است که در نبود منابع آبی، سهم هر فرد از این منابع صفر است و البته در این صورت هدررفتی هم وجود نخواهد داشت.

اکنون به مطالعه‌ی معادله‌ی تغییرات جمعیت می‌پردازیم. در اینجا نیز همانند بسیاری از مطالعات جدید، مدل رشد جمعیت ما مبتنی بر مدل رشد «شبه منطقی» است. کلمه شبه منطقی در اینجا به این معنی است که فرض می‌کنیم که ظرفیت نهایی جامعه وابستگی حیاتی به آب دارد، یعنی

$$y' = a y \left(1 - \frac{y}{c(t, x)}\right)$$

که در آن $c(t, x) \geq 0$ تابعی پیوسته و نسبت به t کران دار است که نشان دهنده وابستگی ظرفیت نهایی جامعه به ذخایر آبی است و در شرایط $c(t, 0) = 0$ و $\frac{\partial c}{\partial x} \geq 0$ صدق می کند. این شرایط بیان می کنند که وابستگی جمعیت به منابع آبی حیاتی است و با افزایش میزان منابع آبی، ظرفیت نهایی جامعه نیز افزایش می یابد. تابع $c(t, x)$ در بالا را «تابع وابستگی» می نامیم. اکنون با توجه به مطالب بالا، مدل پیشنهادی ما برای مطالعه الگوی تاثیر متقابل منابع آبی و جمعیت بر یکدیگر، به صورت دستگاه زیر جمع بندی می شود:

$$\begin{cases} x' = (b_0 + b(t, x, y))(1 - x/K) - yp(t, x, y) + q(t, x), \\ y' = ay(1 - y/c(t, x)). \end{cases} \quad (1.2)$$

با توجه به ماهیت متغیرهای x و y در معادله ی بالا، مقادیر منفی برای x و y فاقد معنی است. درحقیقت آن جواب هایی مثل $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ از دستگاه (۱.۲) دارای تفسیر زیستی هستند که در لحظه $t = 0$ از نقطه ای مثل $\gamma(0)$ در ناحیه ی اول صفحه شروع می شوند. یک نکته قابل توجه درباره ی دستگاه بالا این است که محور y ها در ناحیه تعریف دستگاه قرار ندارد. توجه به این نکته و این که محور x ها یک زیرمجموعه ی پایا برای دستگاه (۱.۲) است، ما را به این نتیجه می رساند که ناحیه ی اول صفحه ی (x, y) یک زیرمجموعه ی پایا است. لم زیر تضمین می کند که مدل (۱.۲) سازگار است.

لم ۱.۲. ناحیه ی اول صفحه ی (x, y) یک مجموعه ی پایا است، به این معنی که هر جواب از (۱.۲) که از ناحیه ی اول شروع شود، در این ناحیه باقی می ماند. به علاوه این که جواب های دستگاه در این ناحیه کران دارند. ناحیه ی اول صفحه را «ناحیه ی قابل قبول» برای دستگاه (۱.۲) می نامیم.

اثبات. قسمت اول لم بدیهی است. حال نشان می دهیم هر جواب $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ از مدل (۱.۲) در ناحیه ی اول صفحه کران دار است. این که $x(t)$ کران دار است، بدیهی است؛ نشان می دهیم $y(t)$ کران دار است. چون $x(t)$ کران دار است و $c(t, x)$ پیوسته و نسبت به t کران دار است، پس $c(t, x(t))$ نیز کران دار است؛ مثلاً فرض کنیم $c(t, x(t)) \leq M$. حال از معادله ی دوم مدل (۱.۲) می توان نتیجه گرفت که برای $y(t) > M$ داریم $y'(t) < 0$ که نشان می دهد $y(t)$ نمی تواند بی کران باشد. □

با توجه به مطالب بالا، ما در ادامه ی این مقاله، فقط مدارهایی از دستگاه (۱.۲) را که در ناحیه ی قابل قبول برای دستگاه قرار دارند، در نظر خواهیم گرفت

۳ نقاط تعادل معادله ی مستقل از زمان

در این بخش، مدل (۱.۲) را در حالتی که توابع پاسخ، هدررفت و وابستگی مستقل از زمان هستند در نظر می گیریم. برای این منظور، مدل (۱.۲) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x' = b_0(1 - x/K) - yp(x, y) + q(x), \\ y' = ay(1 - y/c(x)). \end{cases}$$

درگام نخست، برای بی بُعد کردن دستگاه از تغییر متغیر

$$\tau = at, \quad n = y(0) \quad u(\tau) = x(t)/K, \quad v(\tau) = y(t)/n,$$

استفاده می کنیم و دستگاه بی بُعد شده را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$u' = b(1 - u) - P(u, v)v - Q(u), \quad v' = v \left(1 - \frac{v}{C(u)} \right) \quad (1.3)$$

که در اینجا

$$b = b_0/(aK), \quad P(u, v) = \frac{np(Ku, nv)}{aK}, \quad Q(u) = \frac{q(Ku)}{aK}, \quad C(u) = \frac{c(Ku)}{n}.$$

دقت کنیم که با توجه به لم ۱.۲، معادله ی (۱.۳) نیز سازگار است؛ به این معنی که ناحیه ی اول صفحه ی (u, v) پایا است و جواب ها در این ناحیه کران دارند. درحقیقت ناحیه ی اول صفحه ی (u, v) همان ناحیه ی قابل قبول دستگاه است. نقطه ی تعادل آزاد دستگاه (۱.۳) به صورت

$E_0 = (u_0, 0)$ است که u_0 تنها ریشه‌ی معادله‌ی $b = bu + Q(u)$ است. در حقیقت، اگر فرض کنیم $g(u) = b - bu - Q(u)$ آنگاه

$$g(0) = b > 0 \quad g'(u) = -b - Q'(u) \leq 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = -\infty.$$

لذا کاربردی ساده از قضیه‌ی مقدار میانی نشان می‌دهد که مقدار منحصر به فردی برای u_0 وجود دارد که $g(u_0) = 0$ و یا به طور معادل $b = bu_0 + Q(u_0)$. همچنین یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که مقادیر ویژه‌ی قسمت خطی (۱.۳) در E_0 عبارتند از $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 1 - b - Q'(u_0) < 0$ و $0 < \lambda_2 = 1$ که تضمین می‌کند E_0 یک زین هذلولوی است. در حقیقت، نقطه‌ی تعادل E_0 محور u را به عنوان منیفلد پایدار دارد و شاخه‌ای از منیفلد ناپایدار E_0 وارد ناحیه‌ی قابل قبول دستگاه می‌شود. اکنون به بررسی نقاط تعادل درونی دستگاه می‌پردازیم. نقاط تعادل درونی دستگاه (۱.۳) به صورت $E^* = (u^*, v^*)$ هستند که $v^* = C(u^*)$ و u^* ریشه‌ی معادله‌ی زیر است:

$$g(u) := b(1 - u) - Q(u) - C(u)P(u, C(u)) = 0. \quad (2.3)$$

یک بار دیگر، استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی نشان می‌دهد که معادله‌ی بالا حداقل یک ریشه‌ی مثبت مثل u^* دارد و در نتیجه، دستگاه (۱.۳) حداقل یک نقطه‌ی تعادل درونی مثل $E^* = (u^*, v^*)$ دارد. بررسی امکان وجود نقاط تعادل درونی بیش‌تر برای دستگاه (۱.۳)، در حالت کلی امکان‌پذیر نیست. با این حال، لم زیر یک محدودیت بر روی تعداد نقاط تعادل درونی دستگاه ایجاد می‌کند.

لم ۱.۳. اگر $P(u, C(u))$ در بازه‌ی $(0, 1)$ صعودی باشد، آنگاه دستگاه (۱.۳) فقط یک نقطه‌ی تعادل درونی دارد.

اثبات. فرض کنیم $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی دستگاه باشد. از آنجا که $g(u^*) = 0$ پس داریم:

$$b = \frac{Q(u^*) + C(u^*)P(u^*, C(u^*))}{1 - u^*} > 0.$$

این نشان می‌دهد که $0 < u^* < 1$. حال فرض کنیم $I = (0, 1)$ صعودی باشد و $E_1^* = (u_1^*, C(u_1^*))$ و $E_2^* = (u_2^*, C(u_2^*))$ دو نقطه‌ی تعادل درونی متمایز باشند که $0 < u_1^* < u_2^* < 1$. در این حالت، با توجه به فرضیات حاکم بر دستگاه و صورت لم داریم:

$$bu_1^* + C(u_1^*)P(u_1^*, C(u_1^*)) + Q(u_1^*) < bu_2^* + C(u_2^*)P(u_2^*, C(u_2^*)) + Q(u_2^*).$$

نتیجه این که $0 = g(u_1^*) > g(u_2^*) = 0$ که یک تناقض است. لذا دستگاه فقط یک نقطه‌ی تعادل درونی می‌تواند داشته باشد. \square

اکنون فرض کنیم $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی دستگاه (۱.۳) باشد. در این حالت، اثر و دترمینان قسمت خطی دستگاه در E^* به ترتیب برابرند با

$$Tr(u^*) = -1 - b - Q'(u^*) - C(u^*) \frac{\partial P}{\partial u}(u^*, C(u^*)) < 0, \quad (3.3)$$

$$\Delta(u^*) = b + Q'(u^*) + C'(u^*)P(u^*, C(u^*)) \quad (4.3)$$

$$+ C(u^*) \left(C'(u^*) \frac{\partial P}{\partial v}(u^*, C(u^*)) + \frac{\partial P}{\partial u}(u^*, C(u^*)) \right) \\ = \frac{d}{du^*} [C(u^*)P(u^*, C(u^*))] + b + Q'(u^*) = -g'(u^*).$$

دقت کنیم که در عبارت بالا، همه‌ی جملات، مگر احتمالاً $\frac{\partial P}{\partial v}(u^*, C(u^*))$ مثبت هستند. اگر $\Delta(u^*) > 0$ ، آنگاه E^* یک جاذب هذلولوی خواهد بود و اگر $\Delta(u^*) < 0$ ، آنگاه E^* یک زین هذلولوی است. به علاوه، $\Delta(u^*) = 0$ اگر و تنها اگر $g'(u^*) = 0$ به این ترتیب، به قضیه‌ی زیر می‌رسیم.

قضیه ۲.۳. مدل (۱.۳) را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی دستگاه باشد. در این صورت: الف) دستگاه حداقل یک نقطه‌ی تعادل درونی دارد و اگر $P(u, C(u))$ در بازه‌ی $I = (0, 1)$ صعودی باشد، آنگاه E^* منحصر به فرد است و یک جاذب هذلولوی است. به علاوه، اگر $b \geq 1$ ، آنگاه این نقطه‌ی تعادل درونی یک جاذب سراسری است.

ب) هر نقطه‌ی تعادل درونی مثل E^* یک زین هذلولوی است اگر و تنها اگر $g'(u^*) > 0$ و یک جاذب هذلولوی است اگر و تنها اگر $g'(u^*) < 0$.

ج) نقطه‌ی تعادل درونی E^* ناهذلولوی است اگر و تنها اگر $g'(u^*) = 0$ که در این صورت E^* یک نقطه‌ی تعادل تباهیده است و قسمت خطی دستگاه در E^* دو مقدار ویژه‌ی $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = Tr(u^*) < -1$ دارد.

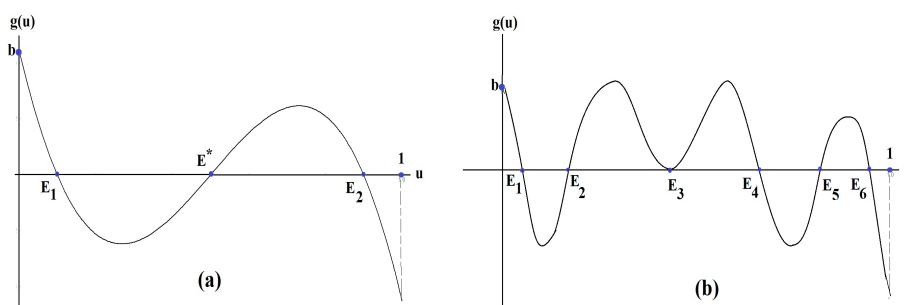
اثبات. بنابر مطالب بیان شده در قبل از صورت قضیه و روابط (۳.۳) و (۴.۳)، اثبات قسمتهای «ب» و «ج» واضح است. برای اثبات قسمت «الف»، از این که $\frac{d}{du^*} (C(u^*)P(u^*, C(u^*))) \geq 0$ و از روابط (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می شود که نقطه‌ی تعادل E^* یک جاذب هذلولوی است. نشان می دهیم که اگر $b \geq 1$ ، آنگاه هر مدار از (۱.۳) به نقطه‌ی تعادل E^* جذب می شود. به برهان خلف، فرض کنیم بعضی از مدارهای (۱.۳) به E^* جذب نشوند. از لم ۱.۲ و قضیه‌ی پوانکاره-بندیکسون نتیجه می گیریم که این مدارها باید جذب یک مدار تناوبی شوند. از آنجا که هر مدار تناوبی در صفحه، حتماً یک نقطه‌ی تعادل در ناحیه‌ی درون خود دارد و با توجه به این که تنها نقطه‌ی تعادل درونی دستگاه (۱.۳)، یعنی E^* ، یک جاذب هذلولوی است، پس می توان نتیجه گرفت که دستگاه (۱.۳) یک مدار T -تناوبی مثل $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ دارد که E^* را در درون خود دارد و هر مدار در درون $\gamma(t)$ جذب نقطه‌ی تعادل E^* می شود. از طرفی، با استفاده از نظریه‌ی فلوک (Floquet Theory)، برای جزئیات بیشتر و تعاریف مرتبط، [۲۰، بخش ۵.۳] دیده شود، نمای مشخصه‌ی $\gamma(t)$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید:

$$- \int_0^T \left[\frac{\Psi v(t)}{C(u(t))} + \left((b-1) + v(t) \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) + Q'(u(t)) \right) \right] dt < 0.$$

این نشان می دهد که $\gamma(t)$ یک دور حدی جاذب است و لذا هر مدار از (۱.۳) که در درون $\gamma(t)$ باشد، جذب $\gamma(t)$ می شود. این یک تناقض است و لذا فرض اولیه اشتباه است. نتیجه این که E^* یک جاذب سراسری است. \square

یک نکته‌ی مهم درباره‌ی قضیه‌ی بالا زمانی است که در قسمت (ب)، $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی از نوع زین هذلولوی است. در این صورت، همان طور که در شکل ۱ (a) ملاحظه می شود، چون $g(0) = b > 0$ و $g(1) < 0$ ، پس معادله‌ی $g(u) = 0$ علاوه بر u^* حداقل دو ریشه‌ی دیگر مثل $u_1 < u^* < u_2$ دارد که $g'(u_{1,2}) \leq 0$. این واقعیت ما را به قضیه‌ی زیر می رساند.

قضیه ۳.۳. اگر $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی (۱.۳) از نوع زین هذلولوی باشد، آنگاه دو نقطه‌ی تعادل درونی دیگر از نوع جاذب هذلولوی یا تباهیده مثل $E_{1,2} = (u_{1,2}, C(u_{1,2}))$ نیز وجود دارند به طوری که $u_1 < u^* < u_2$ در حالت کلی، اگر معادله‌ی (۱.۳) دقیقاً n نقطه‌ی تعادل درونی از نوع زین هذلولوی داشته باشد، آنگاه دستگاه حداقل $(n+1)$ نقطه‌ی تعادل درونی از نوع جاذب هذلولوی یا تباهیده دارد. به علاوه، هر زین هذلولوی در میان دو جاذب هذلولوی یا تباهیده قرار دارد (شکل ۱ (b) را ببینید).



شکل ۱: (a) زین هذلولوی E^* در بین دو جاذب هذلولوی E_1, E_2 قرار دارد. (b) زین هذلولوی E_2 بین تعادل ناهذلولوی E_3 و جاذب هذلولوی E_1 قرار دارد و ...

در ادامه، به بررسی رفتار موضعی دستگاه (۱.۳) در اطراف نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده‌ی E^* (قسمت «ج» قضیه‌ی ۲.۳) خواهیم پرداخت. از قضیه‌ی ۲.۳ می دانیم که E^* یک نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده است اگر و تنها اگر $g'(u^*) = 0$ و یا به طور معادل، با استفاده از (۳.۳) و (۴.۳) داریم:

$$C'(u^*) = \frac{Tr(u^*) + 1}{\frac{d}{du^*} P(u^*, C(u^*))} > 0.$$

در این حالت، قسمت خطی (۱.۳) در E^* به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} Tr(u^*) + 1 & - (1 + Tr(u^*)) / C'(u^*) \\ C'(u^*) & -1 \end{pmatrix}.$$

قضیه ۴.۳. (مرجع [۲۰] بخش ۱۱.۲ قضیه ۱) دستگاه مسطح زیر را در نظر بگیریم:

$$x' = f(x, y), \quad y' = y + g(x, y)$$

که در آن f و g توابع تحلیلی و شامل جملات غیر خطی در مبدا هستند. همچنین فرض کنیم $y = \phi(x)$ جواب معادله‌ی $y + g(x, y) = 0$ باشد و بسط تیلور تابع $\psi(x) = f(x, \phi(x))$ به صورت زیر باشد:

$$\psi(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \dots, \quad (m \geq 2, a_m \neq 0).$$

در این صورت، اگر m فرد و $a_m > 0$ ، آنگاه مبدأ یک گره ناپایدار است و اگر m فرد و $a_m < 0$ ، آنگاه مبدأ یک زین توپولوژیک است (برای مشاهده جزئیات و تعاریف مرتبط با زین توپولوژیکی، مرجع [۲۰]، بخش ۱۰.۲ دیده شود) و بالاخره اگر m زوج باشد، آنگاه مبدأ یک نقطه‌ی گره زینی است.

برای استفاده از قضیه‌ی بالا، ابتدا باید دستگاه (۱.۳) را به شکل مورد استفاده در صورت قضیه درآوریم. محاسبات این قسمت بسیار طولانی است و شامل مراحل زیر است که ما برای رعایت اختصار، از بیان محاسبات جبری صرف نظر می‌کنیم.
 (۱) با تغییر متغیر $x = u - u^*$ و $y = v - v^*$ نقطه‌ی تعادل درونی E^* را به مبدأ منتقل می‌کنیم.
 (۲) با تغییر متغیر زیر قسمت خطی دستگاه به دست آمده در مرحله‌ی قبل را به شکل کانونی آن تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'(u^*)/Tr(u^*) & (1 + Tr(u^*)) / Tr(u^*) \\ C'(u^*)/Tr(u^*) & -1/Tr(u^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(۳) با تغییر متغیر $x(t) = u(t/Tr(u^*))$ و $y(t) = v(t/Tr(u^*))$ دستگاه به دست آمده در مرحله‌ی قبل را به دستگاه مورد استفاده در قضیه‌ی بالا تبدیل می‌کنیم.

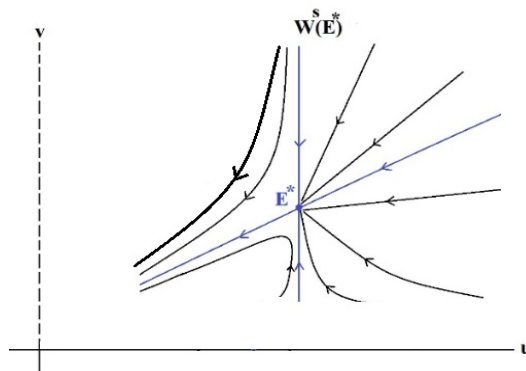
(۴) با استفاده از قضیه‌ی تابع ضمنی در دستگاه به دست آمده در مرحله‌ی قبل، تابع $\psi(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ در قضیه‌ی ۴.۳ را تا مرتبه‌ی دوم محاسبه کرده و به دست می‌آوریم:

$$a_2 = \frac{1}{Tr(u^*)} (F'(u^*) - 2F(u^*)), \quad F(u^*) = \frac{(b + C(u^*)P(u^*, C(u^*)) + Q'(u^*))}{C'(u^*)}.$$

مطالب بالا را می‌توان در قالب قضیه‌ی زیر را جمع‌بندی کرد.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $E^* = (u^*, C(u^*))$ نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده‌ی دستگاه (۱.۳) باشد. اگر $F'(u^*) \neq 2F(u^*)$ ، آنگاه E^* یک نقطه‌ی گره زینی است.

یک نکته‌ی مهم، زمانی که E^* از نوع گره زینی باشد، این است که در این حالت، با توجه به لم ۱.۲ و قضیه‌ی ۴.۳، فضای حالت (۱.۳) در حالت کلی هم‌ارز توپولوژیکی شکل ۲ است. تفسیر زیستی این پدیده دارای اهمیت خاصی است که در بخش آخر به آن خواهیم پرداخت.



شکل ۲: مدارهای (۱.۳) وقتی که E^* نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده است. همان‌طور که در تصویر ملاحظه می‌شود، بقا و پایداری نسبت به وضعیت تعادل E^* در سمت راست $W^s(E^*)$ حفظ می‌شود در حالی که در سمت چپ آن وجود بقا و پایداری نسبت به تعادل E^* وجود ندارد.

۴ انشعاب‌های موضعی نقطه‌ی تعادل درونی

در این بخش به بررسی امکان وجود انشعاب‌های موضعی در اطراف نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده‌ی E^* خواهیم پرداخت. برای این منظور، فرض کنیم $E^* = (u^*, C(u^*))$ یک نقطه‌ی تعادل درونی ناهذلولوی باشد. در این صورت، قسمت خطی مدل (۱.۳) در E^* به صورت زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} -b - Q'(u^*) - C'(u^*) \frac{\partial P}{\partial u}(u^*, C(u^*)) & -P(u^*, C(u^*)) - C'(u^*) \frac{\partial P}{\partial v}(u^*, C(u^*)) \\ C'(u^*) & -1 \end{pmatrix}.$$

از این که E^* ناهذلولوی است و قسمت «ج» قضیه‌ی ۲.۳ و روابط (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} b &= -1 - Tr(u^*) - Q'(u^*) - C'(u^*) \frac{\partial P}{\partial u}(u^*, C(u^*)), \\ Q(u^*) &= b(1 - u^*) - C(u^*)P(u^*, C(u^*)), \\ \frac{\partial P}{\partial v}(u^*, C(u^*)) &= \left(\Delta(u^*) - b - Q'(u^*) - C'(u^*)P(u^*, C(u^*)) \right. \\ &\quad \left. - C'(u^*) \frac{\partial P}{\partial u}(u^*, C(u^*)) \right) \left(C'(u^*)C'(u^*) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

از جای‌گذاری روابط بالا در ماتریس A به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + Tr(u^*) & -\frac{Tr(u^*) + \Delta(u^*) + 1}{C'(u^*)} \\ C'(u^*) & -1 \end{pmatrix}.$$

این به ما این امکان را می‌دهد تا $\Delta(u^*)$ را به عنوان پارامتر انشعاب دستگاه در نظر بگیریم. در حقیقت، با این کار تأثیر همه‌ی پارامترهای موجود در دستگاه را در پارامتر $\Delta(u^*)$ خلاصه کرده‌ایم. دقت کنیم که در بالا، اگر E^* یک نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده باشد، آنگاه $\Delta(u^*) = 0$. از آنجا که انشعاب‌های موضعی در اطراف نقاط تعادل ناهذلولوی اتفاق می‌افتند، لذا ما در ادامه، ماتریس A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و انشعاب‌های موضعی دستگاه (۱.۳) را در $\delta = 0$ مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

$$A = \begin{pmatrix} 1 + Tr(u^*) & -\frac{Tr(u^*) + \delta + 1}{C'(u^*)} \\ C'(u^*) & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

دقت کنیم که در اینجا δ و $Tr(u^*)$ به ترتیب دترمینان و اثر ماتریس A هستند و δ به عنوان پارامتر دستگاه در نظر گرفته می‌شود. در این حالت E^* نقطه‌ی تعادل تباهیده‌ی دستگاه است، هرگاه $\delta = \Delta(u^*) = 0$. برای محاسبه‌ی تصویر دستگاه (۱.۳) بر روی منیفلد مرکزی آن در نقطه‌ی E^* ، نخست باید دستگاه را در قالب استاندارد آن بنویسیم. برای این منظور، فرض کنیم

$$f(u, v) = b(1 - u) - P(u, v)v - Q(u), \quad g(u, v) = v \left(1 - \frac{v}{C(u)} \right)$$

و قرار می‌دهیم

$$\tilde{f}(u, v) = f(u + u^*, v + C(u^*)), \quad \tilde{g}(u, v) = g(u + u^*, v + C(u^*)).$$

با این کار، نقطه‌ی تعادل درونی E^* را به مبدأ مختصات منتقل کرده‌ایم. در این حالت

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}(u, v) \\ \tilde{G}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(u, v) \\ \tilde{g}(u, v) \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

قسمت غیرخطی دستگاه منتقل شده را تشکیل می‌دهد. با محاسبه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی قسمت خطی دستگاه (۱.۳) در E^* ، مشخص می‌شود که تغییر متغیر

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-C'(u^*)}{\sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}} & \frac{1 + Tr(u^*) + \sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}}{2\sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}} \\ \frac{C'(u^*)}{\sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}} & -\frac{1 + Tr(u^*) - \sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}}{2\sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta}} \end{pmatrix}}_{:=M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

دستگاه را به قالب استاندارد آن در زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(x, y, \delta) \\ \psi(x, y, \delta) \end{pmatrix} \quad (۲.۴)$$

که در اینجا $\lambda_{1,2} = \left(Tr(u^*) \mp \sqrt{Tr^2(u^*) - 4\delta} \right) / 2$ مقادیر ویژه‌ی دستگاه در E^* هستند و

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi(x, y, \delta) \\ \psi(x, y, \delta) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

در این حالت، برای $\delta = 0$ نقطه‌ی تعادل $E^* = (0, 0)$ یک نقطه‌ی تعادل تباهیده‌ی دستگاه (۲.۴) است و چون $Tr(u^*) \leq -1$ پس منیفلد مرکزی آن در مبدأ بر محور y ها مماس است.

برای پیاده‌سازی روش منیفلد مرکزی، فرض کنیم $W^c(E^*)$ به‌طور موضعی نمودار تابع h در زیر باشد:

$$x = h(y, \delta) = a_1 y^2 + a_2 \delta y + a_3 \delta^2 + o^3(y, \delta).$$

با جایگذاری تابع h در دستگاه (۲.۴) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial h}{\partial y}(y, \delta) \left(\lambda_2 y + \psi(y, h(y, \delta), \delta) \right) - \left(\lambda_1 h(y, \delta) + \phi(y, h(y, \delta), \delta) \right) = 0.$$

پس از دسته‌بندی جملات در رابطه‌ی بالا و حل این معادله، مشخص می‌شود که:

$$a_1 = -\frac{\phi_{xx}}{2Tr(u^*)}, \quad a_2 = \frac{2a_1\psi_\delta - \phi_{x\delta}}{Tr(u^*)}, \quad a_3 = \frac{2a_2\psi_\delta - \phi_{\delta\delta}}{2Tr(u^*)}.$$

در بالا اندیس‌ها نشان دهنده‌ی مشتقات جزئی هستند و همه‌ی مشتقات در نقطه‌ی $(x, y, \delta) = (0, 0, 0)$ محاسبه شده‌اند. دست آخر این که، با جایگذاری تابع $x = h(y, \delta)$ در معادله‌ی دوم دستگاه استاندارد (۲.۴)، سرانجام معادله‌ی تصویر شده بر روی منیفلد مرکزی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$y' = F(y, \delta) := (A_3 + B_3\delta) \delta^2 + (A_2 + B_3\delta) \delta y + (A_1 + B_2\delta) y^2 + B_1 y^3 + o^4(y, \delta) \quad (۳.۴)$$

که در اینجا

$$A_1 = \frac{\psi_{xx}}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{Tr(u^*)} + \psi_{x\delta}, \quad A_3 = \frac{\psi_{\delta\delta}}{2}, \quad (۴.۴)$$

$$B_1 = \frac{6a_1\psi_{xy} + \psi_{xxx}}{6}, \quad B_2 = \frac{2a_1\psi_{y\delta} + 2a_2\psi_{xy} + \psi_{xx\delta}}{2}, \quad (۵.۴)$$

$$B_3 = \frac{2 + (Tr(u^*))^2 (a_2\psi_{y\delta} + \psi_{x\delta\delta} + 2a_3\psi_{xy})}{2(Tr(u^*))^3}, \quad B_4 = \frac{\psi_{\delta\delta\delta} + 6a_3\psi_{y\delta}}{6}.$$

در اینجا نیز همانند قبل، اندیس‌ها نشان دهنده‌ی مشتقات جزئی هستند که همگی در نقطه‌ی $(x, y, \delta) = (0, 0, 0)$ محاسبه شده‌اند. معادله‌ی (۳.۴) را می‌توان برای بررسی انشعاب‌های موضعی در اطراف نقطه‌ی تعادل درونی تباهیده‌ی E^* مورد استفاده قرار داد. برای این منظور، ابتدا قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم که نقشی اساسی در بررسی انشعاب‌های موضعی دستگاه بالا دارد.

قضیه ۱.۴. (قضیه‌ی آماده‌سازی مالگارانج، [۲۱]) فرض کنیم $F(y, \delta)$ تابع حقیقی همواری باشد و $y, \delta \in \mathbb{R}$. همچنین فرض کنیم

$$F(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{k-1} F}{\partial y^{k-1}}(0, 0) = 0, \quad H \quad \frac{\partial^k F}{\partial y^k}(0, 0) \neq 0.$$

در این صورت، توابع هموار $U_0(\delta), \dots, U_{k-1}(\delta)$ و $V(y, \delta)$ وجود دارند به‌طوری که $V(0, 0) \neq 0$ و

$$F(y, \delta) = (y^k + U_{k-1}(\delta) y^{k-1} + \dots + U_0(\delta)) V(y, \delta).$$

اکنون می توانیم قضیه ی اصلی این بخش را بیان و اثبات کنیم.

قضیه ۲.۴. (انشعاب های موضعی مدل (۱.۳)) فرض کنیم E^* یک نقطه ی تعادل درونی تباهیده ی مدل (۱.۳) باشد. با در نظر گرفتن تصویر دستگاه بر روی منیفلد مرکزی آن (دستگاه (۳.۴) و روابط (۴.۴) و (۵.۴)) داریم:
 الف) اگر $A_1, A_2 \neq 0$ ، آنگاه وقتی که δ از صفر عبور می کند، مدل (۱.۳) یک انشعاب تبادل پایداری در E^* دارد.
 ب) اگر $A_1 = 0$ و $A_2, B_1 \neq 0$ ، آنگاه وقتی δ از صفر عبور می کند، مدل (۱.۳) یک انشعاب چنگال در E^* دارد.
 ج) اگر روابط زیر برقرار باشند، آنگاه وقتی δ از صفر عبور می کند مدل (۱.۳) یک انشعاب گره زینی در E^* دارد.

$$A_1 \neq 0, \quad A_2^2 - 4A_1A_3 = 0, \\ K := A_2^3B_1 - A_1A_2^2B_2 + A_1A_2(A_1B_3 - 3A_3B_1) + 2A_1^2(A_3B_2 - A_1B_4) \neq 0. \quad (6.4)$$

اثبات. نخست دقت کنیم که اگر E^* نقطه ی تعادل درونی و تباهده ی دستگاه باشد، آنگاه تصویر مدل (۱.۳) بر روی $W^c(E^*)$ به صورت دستگاه (۳.۴) است. در این حالت شرایط انشعاب تبادل پایداری و انشعاب چنگال را می توان به راحتی از روی مشتقات جزئی تابع $F(y, \delta)$ در مبدأ بررسی کرد. این قسمت های «الف» و «ب» قضیه را ثابت می کند. برای اثبات قسمت «ج»، دقت کنیم که $F(0, 0) = 0$ و $F_y(0, 0) = 0$ ولی $F_{yy}(0, 0) = A_1 \neq 0$ بنابراین قضیه ی آماده سازی مالگرنج، توابع $U_0(\delta)$ ، $U_1(\delta)$ و $V(y, \delta)$ وجود دارند به طوری که

$$F(y, \delta) = (y^2 + U_1(\delta)y + U_0(\delta))V(y, \delta).$$

با جای گذاری بسط تیلور توابع U_0 ، U_1 و V در رابطه ی بالا و مقایسه ی آن با ضرایب جملات هم توان در $F(y, \delta)$ ، مشاهده می کنیم که

$$U_0(\delta) = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\delta^2 + \left(\frac{A_2^2B_4 - A_3A_1B_2 + A_2A_3B_1}{A_1^3}\right)\delta^3 + o^4(\delta), \\ U_1(\delta) = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\delta + \left(\frac{A_2^2B_3 - A_3A_1B_1 - A_2A_1B_2 + A_2^2B_1}{A_1^3}\right)\delta^2 + o^3(\delta).$$

از طرفی، از حل معادله ی $F(y, \delta) = 0$ نتیجه می گیریم که

$$y = \frac{1}{2} \left(-U_1(\delta) \pm \sqrt{U_1^2(\delta) - 4U_0(\delta)} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(-U_1(\delta) \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{A_2^2}{A_1}\right)\delta^2}_{=0} + \left(\frac{2K}{A_1^4}\right)\delta^3 + o^4(\delta)} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(-U_1(\delta) \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{A_1^4}\right)\delta^3 + o^4(\delta)} \right).$$

این تضمین می کند که، بسته به علامت K در رابطه ی (۶.۴)، وقتی که δ از صفر عبور می کند، دستگاه (۳.۴) از عدم وجود نقطه ی تعادل، به طور پیوسته، به وجود دو نقطه ی تعادل تغییر وضعیت می دهد. ما این وضعیت را به عنوان انشعاب گره زینی می شناسیم و این اثبات قسمت «ج» قضیه را کامل می کند. \square

۵ وابستگی به زمان

در بخش های قبل به بررسی وضعیتی پرداختیم که در آن میزان آب دریافتی در هر دوره ی زمانی و همین طور توابع پاسخ، وابستگی و هدررفت مستقل از زمان بودند. در حقیقت در بسیاری از مطالعات دراز مدت از تاثیر متقابل جمعیت بر منابع آبی، با در نظر گرفتن مقادیر میانگین زمانی برای این توابع، آنها را مستقل از زمان فرض می کنیم. در این بخش، ما با در نظر گرفتن وابستگی این توابع به زمان، به بررسی تاثیر تغییرات فصلی بر روند تاثیرات متقابل جمعیت و منابع آبی خواهیم پرداخت. برای شروع، مدل (۱.۲) را در حالتی در نظر بگیریم که در آن میزان آب دریافتی در هر دوره ی زمانی به صورت $(1 - x/K)(b_0 + b_1(t, x, y))$ است که در اینجا b_0 نشان دهنده ی میانگین دراز مدت آب

دریافتی و $b_1(t, x, y)$ نشان دهنده تغییرات فصلی میزان آب دریافتی است. همچنین می‌توانیم در صورت لزوم توابع پاسخ، وابستگی و هدررفت را نیز وابسته به زمان در نظر بگیریم. همانند آنچه که پیش‌تر دیدیم، می‌توانیم مدل (۱.۲) را با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب بی‌بُعد کنیم. در این حالت مدل بدون بعد به دست آمده، به صورت زیر خواهد بود:

$$u' = (b + \beta(t, u, v))(\lambda - u) - vP(t, u, v) - Q(t, u), \quad v' = v \left(\lambda - \frac{v}{C(t, u)} \right) \quad (۱.۵)$$

که در اینجا $\beta(t, u, v)$ بی‌بُعد شده $b_1(t, x, y)$ است. از آنجا که تغییرات فصلی در هر دوره‌ی زمانی دامنه‌ای متناهی دارند، پس می‌توانیم فرض کنیم ثابت‌های مناسبی وجود دارند به طوری که

$$0 < b_{\min} < b + \beta(t, u, v) < b_{\max}.$$

با همین منطقی می‌توان فرض کرد که توابع مناسبی وجود دارند که در شرایط معرفی شده در بخش ۲ صدق می‌کنند و برای $u, v > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 < P_{\min}(u, v) \leq P(t, u, v) \leq P_{\max}(u, v), \\ 0 \leq Q_{\min}(u) \leq Q(t, u) \leq Q_{\max}(u), \\ 0 < C_{\min}(u) < C(t, u) < C_{\max}(u). \end{aligned}$$

به این ترتیب، در زیر به دو دستگاه مستقل از زمان می‌رسیم که ما آن‌ها را به ترتیب معادلات کمینه و بیشینه‌ی وابسته به دستگاه (۱.۵) می‌نامیم.

$$u' = \underbrace{b_{\min}(\lambda - u) - vP_{\max}(u, v) - Q_{\max}(u)}_{F_m(u, v)}, \quad v' = v \left(\lambda - \frac{v}{C_{\max}(u)} \right). \quad (۲.۵)$$

$$u' = b_{\max}(\lambda - u) - vP_{\min}(u, v) - Q_{\min}(u), \quad v' = v \left(\lambda - \frac{v}{C_{\min}(u)} \right). \quad (۳.۵)$$

یک نکته مهم در بالا این است که ناحیه‌ی $0 < u \leq \lambda$ برای (۱.۵)، (۲.۵) و (۳.۵) یک ناحیه‌ی جاذب و به طور مثبت پایا است. به علاوه، همه‌ی نقاط تعادل درونی (۲.۵) و (۳.۵) نیز در این ناحیه قرار دارند. لذا منطقی است که مطالعه‌ی خود را به درون این ناحیه (یعنی ناحیه‌ی $0 < u < \lambda$) محدود کنیم.

فرض کنیم $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ ، $\gamma_m(t) = (u_m(t), v_m(t))$ و $\gamma_M(t) = (u_M(t), v_M(t))$ به ترتیب جواب‌های قابل قبول معادلات (۱.۵)، (۲.۵) و (۳.۵) در ناحیه‌ی $0 < u < \lambda$ باشند. از آنجا که (۲.۵) و (۳.۵) خودگردان هستند، پس با در نظر گرفتن یک نقطه‌ی دلخواه مثل $p = \gamma(T)$ در این ناحیه، همواره می‌توان دو مدار $\gamma_m(t)$ و $\gamma_M(t)$ یافت که $p = \gamma_m(T) = \gamma_M(T)$ در این صورت

$$u'_m(T) < u'(T) < u'_M(T), \quad v'_m(T) < v'(T) < v'_M(T). \quad (۴.۵)$$

لذا $0 < t_0$ وجود دارد که برای هر $T \leq t < T + t_0$ داریم:

$$u_m(t) < u(t) < u_M(t), \quad v_m(t) < v(t) < v_M(t). \quad (۵.۵)$$

این نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن هر نقطه مثل p بر روی یک مدار از (۱.۵)، مؤلفه‌های این مدار به طور موضعی در محدوده‌ی بین مؤلفه‌های متناظر از دو مدار دستگاه‌های کمینه و بیشینه که از نقطه‌ی p عبور می‌کنند قرار دارند و این محدوده توسط رابطه‌ی (۵.۵) مشخص می‌شود. با استفاده از این موضوع می‌توان دید که چون برای هر $0 < v < C_{\min}(u)$ و $0 < u < \lambda$ داریم $u'_M > u' > u'_m = F_m(u, v) > b_m/2$ چون برای هر $0 < u < \lambda$ و $0 < v < C_{\min}(u)$ داریم $0 < v' < v'_M < v'_m$ ، پس مدارهای (۱.۵) در حال دور شدن از محور u هستند. این موضوع به همراه لم ۱.۲، ما را به گزاره‌ی زیر می‌رساند.

گزاره ۱.۵. یک زیر مجموعه‌ی کران‌دار در ناحیه‌ی اول صفحه (u, v) وجود دارد که در فاصله‌ی مثبت از محورهای مختصات قرار دارد و هر مدار (۱.۵) به آن جذب می‌شود.

از طرفی، یک محاسبه‌ی مستقیم نشان می‌دهد که در بالای گراف $C_{\max}(u)$ و در زیر نمودار $C_{\min}(u)$ به ترتیب داریم $v'_M < 0$ و $v'_m < 0$. پس زیرمجموعه‌ی کران‌دار معرفی‌شده در گزاره‌ی ۱.۵ باید در ناحیه‌ی بین نمودار توابع $C_{\min}(u)$ و $C_{\max}(u)$ قرار داشته باشد. دست‌آخر این که چون برای $u \geq 1$ ، $u'_M \leq 0$ پس ناحیه‌ی مورد نظر در فاصله‌ی $1 \leq u < \infty$ قرار دارد. مطالب بالا را می‌توان در قضیه‌ی زیر جمع‌بندی کرد.

قضیه ۲.۵. با نمادگذاری‌های معرفی‌شده در قبل، هر جواب از (۱.۵) به یک زیرمجموعه‌ی کران‌دار در ناحیه‌ی محدود به $1 \leq u < \infty$ و بین نمودار توابع $C_{\min}(u)$ و $C_{\max}(u)$ جذب می‌شود.

برای مثال، مدل (۱.۵) را در حالتی در نظر بگیریم که در آن

$$\beta(t, u, v) = \frac{b}{\sqrt{t}} \sin t, \quad P(t, u, v) = \frac{\alpha u}{(\beta v + u)}, \quad Q(t, u) = h u, \quad C(t, u) = k \left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right) u.$$

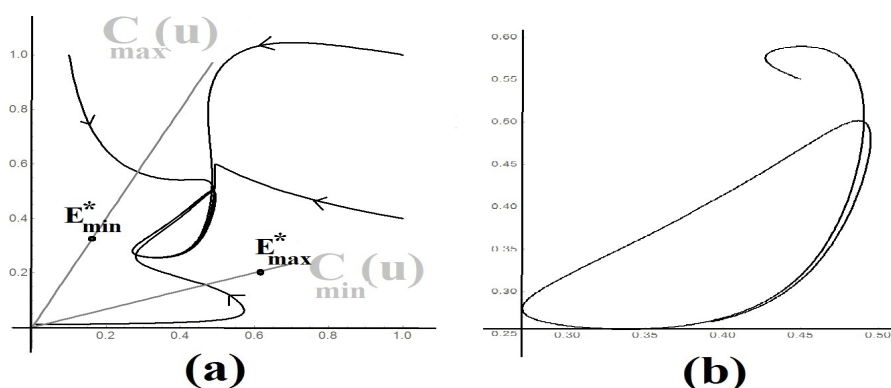
در این صورت، با انتخاب

$$b_{\min} = b/\sqrt{3}, \quad b_{\max} = \sqrt{2}b, \quad C_{\min}(u) = k u/\sqrt{3}, \quad C_{\max}(u) = \sqrt{2}k u,$$

معادلات کمینه و بیشینه‌ی متناظر با (۱.۵) به صورت دستگاه‌های (۲.۵) و (۳.۵) همراه با توابع پاسخ و هدررفت مستقل از زمان در زیر هستند:

$$P_{\min}(u, v) = P_{\max}(u, v) = \frac{\alpha u}{\beta v + u}, \quad Q_{\min}(u) = Q_{\max}(u) = h u.$$

بنابر قسمت «الف» قضیه‌ی ۲.۳، دستگاه‌های بیشینه و کمینه‌ی مورد نظر فقط یک نقطه‌ی تعادل درونی از نوع جاذب هذلولوی دارند. این نقاط تعادل، برای $b = \alpha = \beta = h = k = 1$ ، به ترتیب برابرند با $E_{\min}^* = (1/6, 1/3)$ و $E_{\max}^* = (1/3, 1/3)$. در نظر گرفتن قضیه‌ی ۲.۵، انتظار داریم که هر مدار از (۱.۵) به یک زیرمجموعه‌ی کران‌دار در ناحیه‌ی بین دو خط $v = 2u$ و $v = u/3$ و محدود به $1 \leq u < \infty$ جذب شود. شکل ۳(a) نشان‌دهنده‌ی مدارهای مدل (۱.۵) و رفتار آن‌ها نسبت به دو نقطه‌ی تعادل E_{\min}^* و E_{\max}^* می‌باشد. همان‌طور که در تصویر پیداست، به نظر می‌رسد که مدارهای (۱.۵) در حال جذب شدن به یک دور حدی جاذب هستند. در حقیقت، یک حدس منطقی این است که جاذب‌های E_{\min}^* و E_{\max}^* با یک دور حدی جاذب جای‌گزین شده‌اند. شکل ۳(b) نمای دقیق‌تری از آنچه که مدارهای (۱.۵) را به خود جذب می‌کند، نشان می‌دهد.



شکل ۳: (a) مدارهای مدل (۱.۵) برای مقادیر $b = \alpha = \beta = h = k = 1$ و موقعیت مدارهای دستگاه وابسته به زمان نسبت به نقاط تعادل دستگاه‌های بیشینه و کمینه. (b): نمایی نزدیک‌تر از جاذب مدارهای دستگاه وابسته به زمان.

۶ نتیجه‌گیری، بررسی پایداری و بقا

احتمالاً مهم‌ترین موضوع در مطالعه‌ی مدل‌های شکار و شکارچی، مسئله‌ی پایداری جمعیت شکار و بقای گونه‌ی شکارچی است. در مدل معرفی‌شده در این مقاله، گونه‌ی شکار، منابع آبی و گونه‌ی شکارچی، جمعیتی است که از طریق تابع $c(t, x)$ وابستگی حیاتی به منابع آبی دارد. اگر یک جمعیت اولیه وجود داشته باشد، آنگاه پایداری در منابع آبی متضمن بقای جمعیت است و بقای جمعیت نشان‌دهنده‌ی پایداری منابع آبی است. به همین دلیل، نوع نقاط تعادل درونی مدل (۱.۲)، در بررسی این پایداری و بقا اهمیت پیدا می‌کند.

ساده‌ترین حالت ممکن زمانی اتفاق می‌افتد که دستگاه دارای یک نقطه‌ی تعادل درونی منحصر به فرد است. وجود یک نقطه‌ی تعادل درونی منحصر به فرد در بسیاری از مدل‌های شکار و شکارچی مشاهده شده است (مراجعه مقاله، ملاحظه شوند). در اینجا قسمت «الف» قضیه‌ی ۲.۳، شرایط برای وجود یک نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد از نوع جاذب هذلولوی را تضمین می‌کند؛ که به معنی پایداری منابع آبی و بقای جمعیت حول این نقطه‌ی تعادل است. به علاوه، اگر $b \geq 1$ ، (به‌طور معادل، در مدل (۱.۲)، $b \geq Ka$)، آنگاه این نقطه‌ی تعادل یک جاذب سراسری است. نکته‌ی جالب (شاید عجیب) این که، در قسمت «الف» قضیه‌ی ۲.۳، فقط تابع پاسخ و تابع وابستگی دخالت دارند و این نشان می‌دهد که صرف نظر از تابع هدررفت، می‌توان سرانه‌ی مصرف (تابع پاسخ) را بر حسب وابستگی حیاتی طوری تنظیم کرد که منابع آبی و جمعیت در نهایت به یک وضعیت تعادل برسند. شاید دلیل ضمنی این موضوع این باشد که با شرایط در نظر گرفته شده برای تابع هدر رفت، کم شدن منابع آبی، به خودی خود باعث کم شدن مقادیر تابع هدررفت نیز خواهد شد و این در نهایت باعث ایجاد یک تعادل بین جمعیت و منابع آبی خواهد شد.

یک تغییر در تعادل دستگاه می‌تواند در اثر این باشد که نقطه‌ی تعادل درونی دستگاه از جاذب هذلولوی به زینی ناهذلولوی تغییر کند. در این صورت ضریب a_2 در قضیه‌ی ۴.۳ که در قضیه‌ی ۶ مورد محاسبه قرار گرفته است، اهمیت پیدا می‌کند. به‌ویژه در قضیه‌ی ۶، اگر $F(u^*) \neq F'(u^*)$ ، آنگاه E^* نقطه‌ی تعادل ناهذلولوی است و فضای حالت دستگاه هم ارز توپولوژیکی شکل ۲ است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، منیفلد پایدار E^* یک جدا کننده‌ی رفتار تعادلی دستگاه است و مدارهایی که در سمت چپ این منیفلد قرار دارند نمی‌توانند به تعادل E^* برسند. این وضعیت نشان‌دهنده‌ی عدم بقای جمعیت در اثر عدم پایداری منابع آبی است و وضعیتی را توصیف می‌کند که در آن جمعیت و منابع آبی به‌طور همزمان از وضعیت تعادل E^* خارج می‌شوند. بنابراین برای بقای همزمان جمعیت و منابع آبی (نسبت به تعادل E^*)، شرایط اولیه دستگاه باید طوری تنظیم شود که نقطه‌ی شروع جواب در سمت راست منیفلد پایدار E^* قرار داشته باشد. ادامه‌ی تغییر در وضعیت بالا موجب می‌شود که E^* به یک زین هذلولوی تغییر وضعیت دهد. در این صورت قضیه‌ی ۳.۳ تضمین می‌کند که دستگاه حداقل دو تعادل درونی از نوع جاذب نیز پیدا خواهد کرد (قضیه‌ی ۳.۳ و شکل ۱، ملاحظه شود). در حقیقت تغییر E^* از یک جاذب هذلولوی به یک زین هذلولوی باعث به‌وجود آمدن یک انشعاب موضعی در دستگاه خواهد شد.

از جمع بندی مطالب بالا به این نتیجه می‌رسیم، که بهترین راه برای حفظ پایداری و بقا در یک وضعیت تعادلی این است که پارامترهای دستگاه به‌صورتی تنظیم شوند که دستگاه فقط یک جاذب هذلولوی داشته باشد، و اگر دستگاه دچار یک زینی ناهذلولوی شود، بهترین راه برای بازگرداندن بقا به دستگاه این است که با عبور از یک انشعاب موضعی، این زین توپولوژیکی ناهذلولوی را به یک زین هذلولوی یا یک جاذب هذلولوی تبدیل کنیم.

فهرست منابع

- [1] P.H. Leslie, *Some further notes on the use of matrices in population mathematics*, *Biometrika*, **35** (1948) 213–245.
- [2] R.K. Upadhyay and S.R.K. Iyengar, *Introduction to mathematical modeling and chaotic dynamics*, CRC Press, First Edition. A Chapman and Hall Book, 2014.
- [3] Y. Cia, C. Zhao, and W. Wang, *Dynamics of a leslie-gower predator-prey model with additive allee effect*, *Applied Mathematical Models*, **39** (2015) 2092–2106.
- [4] J.B. Collings, *The effect of the functional response on the bifurcation behavior of a mite predator-prey interaction model*, *Journal of Mathematical Biology*, **36** (1997) 149–168.
- [5] P.M. Dolman, *The intensity of interference varies with resource density: evidence from a field study with snow buntings, plectrophenax nivalis*, *Oecologia*, **102** (1995) 511–514.
- [6] C. Jost and R. Arditi, *From pattern to process: identifying predator-prey interactions*, *Population Ecosystems*, **43** (2001) 229–243.
- [7] R. KhoshshiarGhazian, J. Alidoust and A. BayatiEshkaftakib, *Stability and dynamics of a fractional order leslie-gower prey-predator model*, *Applied Mathematical Modelling*, **40** (2016) 2075–2086.
- [8] R.E. Koiji and A. Zegelning, *Qualitative properties of two-dimensional predator-prey system*, *Journal of Nonlinear Analysis*, **29** (1997) 693–715.

- [9] Y. Kuang and H.I. Freedman, *Uniqueness of limit cycles in gause type models of predator-prey systems*, mathematical Bioscience, **88** (1988) 67–84.
- [10] R. Arditi and L.R. Ginzburg, *Coupling in predator-prey dynamics: ratio dependence*, Journal of Theoretical Biology, **139** (1989) 311–326.
- [11] H. Baek, *A food chin system with holling type iv functional response and impulsive perturbations*, Computers and Mathematics with Applications, **60** (2010) 1152–1163.
- [12] J. Huang, S. Ruan, and J. Song, *Bifurcations in a predator-prey system of leslie type with generalized holling type iii functional response*, Journal of Differential Equations, **257** (2014) 1721–1752.
- [13] SH. Li, J. Wu, and H. Nie, *Positive steady state solutions of a leslie-gower predator-prey model with holling type ii functional response and density dependent diffusion*, Journal of Nonlinear Analysis, **82** (2013) 47–65.
- [14] Y. Li and D. Xiao, *Bifurcations of a predator prey system of holling and leslie types*, Chaos, Solitons and Fractals, **34** (2007) 606–620.
- [15] Z. Liang and H. Pan, *Qualitative analysis of a ratio-dependent holling- tanner model*, Journal of Mathematical Analysis and Application, **334** (2007) 954–962.
- [16] H. Qulizadeh, O. RabieiMotlagh, and H.M. Mohammadinejad, *Permanency in predator–prey models of leslie type with ratio-dependent simplified holling type-iv functional response*, Mathematics and Computers in Simulation, **157** (20198) 63–76.
- [17] S. Ruan and D. Xiao, *Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response*, SIAM Journal of Applied Mathematics, **61** (2001) 1445–1472.
- [18] G.T. Skalski and J.F. Gilliam, *Functional responses with predator interference: viable alternatives to the holling type ii model*, Ecology, **82** (2001) 3083–3092.
- [19] Y. Tzung-shin, *Classiffication of bifurcation diagram for a multiparameter diffusive logistic problem with holling type iv functional response*, Journal of Mathematical Analysis and Application, **418** (2014) 283–304.
- [20] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, First Edition. New York, (1996).
- [21] P. Milman, *The malgrange-mather division theorem*, Topology, **16** (1977) 395–401.



Stability and Permanency in a mathematical model for reciprocal effect of water resources and population

O. RabieiMotlagh [‡], H.M. Mohammadinejad [§]

Dept. of Mathematics, University of Birjand, Birjand, Iran

Received: 2019/9/2

Accepted: 2020/10/1

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: In this paper, we will introduce a mathematical model, based on prey-predator models, to study reciprocal effects of water resources and population. First, we will construct the model and introduce the parameters and variables of the system. Next we will study local behaviors around inner equilibrium points and global behaviors in the admissible region of the system. Especially we will see that how changes of the parameters might cause simultaneous permanency/impermanency of population and water resources through local bifurcations and changes in the structure of solutions.

Keywords: Permanency, Prey-predator systems, Local bifurcations, Water resources.

Mathematics Subject Classification (2010): 92B06, 34C60.



©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[‡]Corresponding author. *E-mail addresses:* orabieimotlagh@birjand.ac.ir (O. RabieiMotlagh),

[§]Coauthor. *E-mail addresses:* hmohammadin@birjand.ac.ir (H.M. Mohammadinejad),