



تحلیل دینامیکی سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر

شهناز محمدی، فریدون مرادلو^{*}، مجتبی حاجی پور

دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۹/۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱/۸

دبیر مسئول: منصور سراج

چکیده: در این مقاله، رفتار دینامیکی یک سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر بررسی شده است. در ابتدا وجود، یکتایی، نامنفی بودن و کراننداری جواب این سیستم مرتبه کسری را مطالعه می کنیم. سپس نشان می دهیم که این سیستم دارای دو نقطه تعادل مجزا است. همچنین با استفاده از تابع لیاپانوف، برخی شرایط کافی برای اطمینان از پایداری مجانبی سراسری این نقاط ارائه می شود. در نهایت، برخی شبیه سازی های عددی را به منظور تأیید نتایج تحلیلی ارائه می کنیم.

واژه های کلیدی: سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری، مشتق کاپوتو، تابع میتاگ-لفلر، پایداری مجانبی.

رده بندی ریاضی: 26A33; 93D05

۱ مقدمه

مشتقات کسری به دلیل داشتن ماهیت ذخیره کردن تاریخچه و حافظه سیستم ها، کارایی بیشتری برای توصیف پدیده های غیرخطی نسبت به مشتقات صحیح دارند. ماهیت بسیاری از سیستم ها باعث می شود که با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری بتوان آن ها را دقیق تر مدل سازی کرد. به علاوه سیستم های مرتبه کسری به دلیل آن که پارامترهای بیشتری نسبت به سیستم های مرتبه صحیح دارند برای توصیف پدیده های فیزیکی از تنوع رفتاری و دینامیکی بالاتری برخوردار هستند. به طور خاص سیستم هایی که دارای حافظه دراز مدت می باشند، یعنی سیستمی که حالت فعلی اش به مقادیر حالت در چندین لحظه ی قبلی خود وابسته است، با سیستم های مرتبه کسری بهتر از مرتبه صحیح مدل سازی می شوند [۱]. برای مثال می توان به فرایند انتشار در باتری ها [۲]، برخی فرآیندهای انتقال حرارت [۳]، اثر فرکانس در دستگاه القایی [۴] و دیگر موارد اشاره کرد. به این ترتیب، بررسی پایداری این سیستم ها که اهمیت ویژه ای در تحلیل رفتار دینامیکی اش دارد می بایست با استفاده از تکنیک هایی انجام شود که مختص سیستم های مرتبه کسری طراحی شده اند. مشتق کسری کلاسیک در مفهوم کاپوتو از مرتبه α برای تابع f به صورت زیر تعریف می شود [۱]:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d}{dt} f(t), & \alpha = 1, \end{cases}$$

^{*} نویسنده مسئول مقاله (F. Moradlou) moradlou@sut.ac.ir

رایانامه: (M. Hajipour) hajipour@sut.ac.ir (S. Mohammadi) sh_mohammadi@sut.ac.ir

که Γ نشان‌دهنده تابع گاما است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مشتق کاپوتوی تابع f از مرتبه α در نقطه t ، به همه مقادیر مشتق اول تابع در سرتاسر بازه $[t_0, t]$ وابسته است. همچنین انتگرال فوق دارای تکیگی در نقطه t است. در طی دو دهه اخیر تعاریف مختلفی از مشتقات کسری به منظور توصیف بهتر پدیده‌های غیرخطی ارائه شده است. در سال ۲۰۱۶ در مرجع [۵]، مشتق کسری جدیدی در مفهوم ریمان-لیوویل و کاپوتو معرفی شده است که هسته انتگرالی آن فاقد جمله تکیگی است و مبتنی بر تابع میتاگ-فلر می‌باشد. برخی ویژگی‌های این مشتقات در [۶] ارائه شده است. اخیراً در سال ۲۰۱۸، وجود و منحصربفردی جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری در مفهوم مشتق کاپوتوی مبتنی بر تابع میتاگ-فلر بررسی شده است و یک روش عددی مناسب برای حل این معادله نیز ارائه شده است [۷]. در مقاله حاضر، یک سیستم شکار-شکارچی کسری در مفهوم مشتق کاپوتو مبتنی بر تابع میتاگ-فلر مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا وجود، منحصربفردی، نامنفی بودن و کرانداری جواب این سیستم کسری بررسی می‌شود و سپس پایداری نقاط تعادلش نیز مطالعه می‌گردد. در نهایت، برخی شبیه‌سازی‌های عددی به منظور تایید نتایج تحلیلی فراهم می‌شود. همچنین، نتایج عددی حاصل از حل سیستم دینامیکی مورد نظر در مفهوم مشتق کاپوتوی کلاسیک و مشتق کسری جدید مقایسه شده‌اند.

۲ سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری مبتنی بر تابع میتاگ-فلر

سیستم‌هایی که در زیست‌شناسی مطرح می‌شوند، به وسیله برهم‌کنش (تعامل) گونه‌ها با یکدیگر و با محیط زیستشان مشخص می‌شوند و معمولاً توصیف‌کننده توزیع و ساختار جمعیت جامعه‌ها می‌باشند. چنین تعاملاتی ممکن است در محدوده‌های گسترده‌تر از نظر مقیاس فضایی و زمانی شکل گیرد. یکی از مهمترین انواع تعاملات که بر رفتار کیفی تمامی گونه‌ها اثر می‌گذارد، شکار است. به همین دلیل، سیستم‌های شکار-شکارچی در مرکز توجه همه مطالعات مربوط به علم زیست‌شناسی قرار گرفته است. مطالعه پناه شکار در یک سیستم دینامیکی شکار-شکارچی به عنوان یک مسئله مهم در ریاضیات کاربردی و زیست‌شناسی نظری شناخته شده است. اکنون، سیستم دینامیکی شکار-شکارچی همراه با پناه شکار مرتبه کسری مبتنی بر تابع میتاگ-فلر را به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y, \\ {}^{ABC}D_t^\alpha y(t) = ca\varphi(x)y - dy, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (2.2)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ ، $t_0 \geq 0$ زمان اولیه، $x(t)$ و $y(t)$ به ترتیب نشان‌دهنده تراکم جمعیت شکار و شکارچی در زمان t می‌باشند. پارامترهای r نشان‌دهنده میزان رشد طبیعی، k ظرفیت حمل محیط، c میزان حمله از طرف شکارچی به جمعیت شکار، e نشان‌دهنده ضریب تبدیل شکارچیان تازه متولد شده برای هر شکار و d میزان مرگ و میر جمعیت شکار است. در این سیستم عبارت $r\left(1 - \frac{x}{k}\right)$ بیان‌گر آهنگ تولد سالانه است که به x بستگی دارد. همچنین نماد ${}^{ABC}D_t^\alpha f(t)$ بیان‌گر مشتق کسری کاپوتو مبتنی بر تابع میتاگ-فلر از مرتبه α برای تابع f است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۶، ۷]

$${}^{ABC}D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_{t_0}^t E_\alpha(-\alpha \frac{(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha}) f'(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

که در آن $B(\alpha)$ تابع حقیقی مقدار عادی است که $B(\alpha) > 0$ ، $B(\alpha) = B(1) = 1$ ، $B(0) = B(1) = 1$ و تابع $E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ موسوم به تابع میتاگ-فلر است. تمامی پارامترهای r ، k ، a ، d و c مثبت هستند، φ تابعی حقیقی مقدار است به طوری که $\varphi(0) = 0$ و $\varphi'(x) > 0$.

در سال ۱۹۲۶ والتر اولین و ساده‌ترین مدل شکار-شکارچی موسوم به لوتکا-والترا را برای شکار یک گونه توسط گونه‌های دیگر پیشنهاد کرد تا بتواند نوسانات جمعیت ماهی‌های یک رودخانه را توضیح دهد [۸]. پس از آن انواع مختلف از مدل لوتکا-والترا معرفی و رفتار دینامیکی آن‌ها بررسی شده است [۹]. اخیراً رفتار دینامیکی یک سیستم دینامیکی شکار-شکارچی مرتبه صحیح همراه با پناه شکار در [۱۰، ۱۱] بررسی شده است. در [۱۲، ۱۳] وجود و یکتایی جواب‌ها و همچنین پایداری مجانبی سراسری نقاط تعادل یک سیستم دینامیکی شکار-شکارچی مرتبه کسری بررسی شده است. همچنین در [۱۴، ۱۵] رفتار دینامیکی برخی سیستم‌های دینامیکی مبتنی بر مدل شکار-شکارچی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

در این بخش به بررسی وجود، یکتایی، نامنفی بودن و کرانداری جواب سیستم غیرخطی (۱.۲) می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. (وجود و یکتایی جواب) اگر M یک عدد حقیقی مثبت باشد و قرار دهیم

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |\varphi(x)|, |y|\} \leq M\}.$$

آن‌گاه سیستم دینامیکی شکار-شکارچی مرتبه کسری (۲.۲)-(۱.۲) برای هر $(x_{t_0}, \varphi(x_{t_0}), y_{t_0}) \in \Omega$ دارای جواب منحصربفرد $(x(t), \varphi(x_t), y(t)) \in \Omega$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $X = (x, \varphi(x), y) \in \Omega$ تابع $H(X) = (H_1(X), H_2(X))$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که

$$H_1(X) = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y, \quad H_2(X) = ca\varphi(x)y - dy.$$

در این صورت برای $X, \bar{X} \in \Omega$ داریم

$$\begin{aligned} \|H(X) - H(\bar{X})\| &= |H_1(X) - H_1(\bar{X})| + |H_2(X) - H_2(\bar{X})| \\ &= \left| rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y - r\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{k}\right) + a\varphi(\bar{x})\bar{y} \right| \\ &\quad + |ca\varphi(x)y - dy - ca\varphi(\bar{x})\bar{y} + d\bar{y}| \\ &= \left| r(x - \bar{x}) - \frac{r}{k}(x^2 - \bar{x}^2) - a(\varphi(x)y - \varphi(\bar{x})\bar{y}) \right| \\ &\quad + |ca(\varphi(x)y - \varphi(\bar{x})\bar{y}) - d(y - \bar{y})| \\ &\leq \left| r - \frac{2rM}{k} \right| |x - \bar{x}| + (2Ma(1+c) + d) |y - \bar{y}| \leq L \|X - \bar{X}\|, \end{aligned}$$

که $L = \max \left\{ r \left(1 - \frac{2M}{k}\right), aM(1+c) + d \right\}$. بنابراین $H(X)$ در شرط لیب‌شیتز صدق می‌کند. لذا طبق قضیه ۱ از مرجع [۶]، سیستم مرتبه کسری داده شده در (۲.۲)-(۱.۲) دارای یک جواب منحصرنفرده می‌باشد \square

برای اثبات نامنفی بودن و کران‌داری جواب سیستم دینامیکی شکار-شکارچی مرتبه کسری، ابتدا دو لم زیر را در نظر بگیرید.

لم ۲.۲. فرض کنید تابع $u(t)$ روی $[t_0, \infty)$ پیوسته باشد و رابطه

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^\alpha u(t) \leq -\lambda u(t) + \mu, \\ u(t_0) = u_{t_0}, \end{cases} \quad (4.2)$$

برقرار باشد که $0 < \alpha < 1$ و $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ و $\lambda \neq 0$. آن‌گاه

$$u(t) \leq -\frac{(u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda})B(\alpha)}{B(\alpha) - \lambda + \lambda\alpha} E_\alpha \left(-\frac{\lambda\alpha}{B(\alpha) - \lambda + \lambda\alpha} (t - t_0)^\alpha \right) + \frac{\mu}{\lambda}, \quad t \geq t_0.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $U(t) = u(t) - \frac{\mu}{\lambda}$. آن‌گاه سیستم (۴.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$${}^{ABC}D_t^\alpha U(t) \leq -\lambda U(t), \quad U(t_0) = u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda}.$$

بنابراین تابع نامنفی $m(t)$ چنان وجود دارد که در سیستم زیر صدق کند

$${}^{ABC}D_t^\alpha U(t) = -\lambda U(t) - m(t), \quad U(t_0) = u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda}. \quad (5.2)$$

حال طبق قضیه ۲ از [۶]، جواب سیستم (۵.۲) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$\begin{aligned} U(t) &= b\theta B(\alpha) E_\alpha \left(-\lambda\alpha\theta(t - t_0)^\alpha \right) - (1 - \alpha)\theta \int_{t_0}^t (t - s)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta} \left(-\lambda\alpha\theta(t - s)^\alpha \right) m(s) ds \\ &\quad - \frac{\alpha}{bB(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\lambda\alpha\theta(t - s)^\alpha \right) m(s) ds. \end{aligned}$$

که $b = (u_{t_0} - \frac{\mu}{\lambda})$ و $\theta = \frac{1}{B(\alpha) - \lambda + \lambda\alpha}$. اکنون مسأله مقدار اولیه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^\alpha V(t) = -\lambda V(t), \\ V(t_0) = U(t_0), \end{cases} \quad (6.2)$$

که $0 < \alpha < 1$ ، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\lambda \neq 0$ و $t \geq t_0$ زمان اولیه باشد. طبق قضیه ۲ از [۶]، جواب سیستم (۶.۲) عبارتست از:

$$V(t) = b\theta B(\alpha) E_{\alpha} \left(-\lambda \alpha \theta (t - t_0)^{\alpha} \right), \quad t \geq t_0. \quad (7.2)$$

طبق (۶.۲) و (۷.۲) داریم:

$$U(t) - V(t) = -(\lambda - \alpha)\theta \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-\lambda \alpha \theta (t-s)^{\alpha}) m(s) ds \\ - \frac{\alpha}{bB(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda \alpha \theta (t-s)^{\alpha}) m(s) ds.$$

از آنجا که برای هر $0 < \alpha, \beta < 1$ داریم $E_{\alpha, \alpha} > 0$ و $E_{\alpha, \beta} > 0$ و چون $m(t)$ تابعی نامنفی است، می‌توان نوشت

$$U(t) \leq V(t) = -b\theta B(\alpha) E_{\alpha}(-\lambda \alpha \theta (t - t_0)^{\alpha}), \quad t \geq t_0.$$

□

لذا با توجه به اینکه $U(t) = u(t) - \frac{t}{\lambda}$ نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

لم ۳.۲. فرض کنید $x(t)$ تابعی مثبت و مشتق‌پذیر باشد و $x^* \in \mathbb{R}^+$ آن‌گاه برای $0 < \alpha < 1$ و برای هر $t \geq t_0$ داریم:

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} \left(x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*} \right) \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)} \right) {}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t).$$

اثبات. با استفاده از خاصیت خطی بودن مشتق کسری کاپوتو داریم

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t) - {}^{ABC}D_t^{\alpha} x^* - x^* {}^{ABC}D_t^{\alpha} \left(\ln \frac{x(t)}{x^*} \right) \leq \frac{x(t) - x^*}{x(t)} {}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t),$$

حال با توجه به اینکه مشتق کاپوتوی تابع ثابت برابر با صفر است، داریم [۶]:

$$x(t) {}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t) - x(t) x^* {}^{ABC}D_t^{\alpha} \left(\ln \frac{x(t)}{x^*} \right) \leq (x(t) - x^*) {}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t),$$

با بازنویسی نامساوی بالا داریم:

$${}^{ABC}D_t^{\alpha} x(t) - x(t) {}^{ABC}D_t^{\alpha} \left(\ln \frac{x(t)}{x^*} \right) \leq 0. \quad (8.2)$$

با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو رابطه (۸.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{t_0}^t \frac{x(\tau) - x(t)}{x(\tau)} \dot{x}(\tau) E_{\alpha} \left(-\alpha \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) d\tau \leq 0, \quad (9.2)$$

و با استفاده از تغییر متغیر $w(\tau) = \frac{x(\tau) - x(t)}{x(t)}$ که $\dot{w}(\tau) = \frac{\dot{x}(\tau)}{x(t)}$ نامساوی (۹.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\int_{t_0}^t x(t) \left(1 - \frac{1}{w(\tau) + 1} \right) \dot{w}(\tau) E_{\alpha} \left(-\alpha \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) d\tau \leq 0.$$

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$-x(t) \left(w(t_0) - \ln(w(t_0) + 1) \right) E_{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t - t_0)^{\alpha} \right) \\ - \int_{t_0}^t \frac{x(t) \left(w(\tau) - \ln(w(\tau) + 1) \right) E_{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t - t_0)^{\alpha} \right)}{(t - \tau)^{\alpha}} d\tau \leq 0.$$

□

لذا حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۴.۲. به ازای هر شرط اولیه نامنفی، سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری (۱.۲)-(۲.۲) دارای جواب نامنفی و کراندار است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم جواب $x(t)$ از معادله (۱.۲) نامنفی هستند. یعنی برای $t \geq t_0$ داریم $x(t) \geq 0$. با برهان خلف فرض کنید که تابع نامنفی نباشد، بنابراین ثابت $t_1 > t_0$ که وجود دارد که

$$\forall t, t_0 \leq t < t_1, \quad x(t) > 0, \quad x(t_1) = 0, \quad x(t_1^+) < 0.$$

بنابراین با استفاده از معادله اول سیستم (۱.۲) نتیجه می‌شود که ${}^{ABC}D_{t_0}^\alpha x(t_1)|_{x(t_1)=0} = 0$. لذا می‌بایست داشته باشیم $x(t_1^+) = 0$ که با فرض خلف تناقض دارد. پس برای هر $t \geq t_0$ داریم $x(t) \geq 0$. به طور مشابه، می‌توان ثابت کرد که برای تمام $t \geq t_0$ داریم $y(t) \geq 0$. حال باید نشان داد جواب سیستم (۱.۲) یک تابع برداری کراندار یکنواخت است. برای این منظور تابع $V(t) = x(t) + \frac{1}{c}y(t)$ را در نظر بگیرید، لذا داریم:

$$\begin{aligned} {}^{ABC}D_t^\alpha V(t) + dV(t) &= \left({}^{ABC}D_t^\alpha x(t) + \frac{1}{c} {}^{ABC}D_t^\alpha y(t) \right) + dV(t) \\ &= \left(rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y + \frac{1}{c}(yc a\varphi(x) - yd) \right) + dx + \frac{d}{c}y \\ &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y + a\varphi(x)y - \frac{d}{c}y + dx + \frac{d}{c}y \\ &= rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) + dx = rx - \frac{r}{k}x^2 + dx = (r+d)x - \frac{r}{k}x^2 \\ &= -\frac{r}{k}\left(x - \frac{k(r+d)}{2r}\right)^2 + \frac{k(r+d)^2}{4r} \leq \frac{k(r+d)^2}{4r}. \end{aligned}$$

طبق لم ۲.۲ داریم:

$$V(t) \leq \frac{bB(\alpha)}{d(B(\alpha) - \lambda + \lambda\alpha)} E_\alpha(-d(t - t_0)^\alpha) + \frac{k(r+d)^2}{4rd} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{k(r+d)^2}{4rd}.$$

بنابراین تمام جواب‌های سیستم (۱.۲) متعلق به Γ می‌باشند، که

$$\Gamma = \left\{ (x, \varphi(x), y) \in \Omega_+ \mid x + \frac{y}{c} \leq \frac{k(r+d)^2}{4rd} + \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}.$$

□

۳ بررسی پایداری سیستم شکار-شکارچی کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر

در این بخش به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری نقاط تعادل سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری (۱.۲)-(۲.۲) می‌پردازیم. لذا ابتدا مفهوم یک نقطه تعادل و پایداری‌اش معرفی می‌شود [۱۶].

تعریف ۱.۳. سیستم مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_{t_0}^\alpha u(t) = f(u), & t > t_0. \\ u(t_0) = u_{t_0}, \end{cases} \quad (۱.۳)$$

نقطه u^* را نقطه تعادل سیستم مرتبه کسری گویند هرگاه $f(u^*) = 0$. به‌علاوه این نقطه‌ی تعادل را

• پایدار گویند اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد حقیقی $\delta > 0$ به قسمی موجود باشد که برای هر جواب $u(t)$ که

$$\|u(t_0) - u^*\| < \delta, \quad \|\dot{u}(t_0)\| < \delta,$$

و هر $t > t_0$ داشته باشیم $\|u(t) - u^*\| < \varepsilon$

• پایدار مجانبی سراسری است هرگاه پایدار باشد و $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^*$.

• ناپایدار است هرگاه پایدار نباشد.

در قضیه ۲ از [۱۶] نشان داده شده است که پایداری یک نقطه‌ی تعادل به مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین تابع $f(u)$ در این نقطه یعنی $\left. \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right|_{u=u^*}$ وابسته است. حال طبق تعریف ۱.۳ نقاط تعادل سیستم کسری (۱.۲)-(۲.۲) از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید

$$rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\varphi(x)y = 0, \quad yca\varphi(x) - dy = 0.$$

در نتیجه نقاط تعادل سیستم (۱.۲) عبارتند از:

$$E_0 = (0, 0), \quad E_1 = (k, 0), \quad E_2 = (x^*, y^*).$$

که در آن $x^* = \varphi^{-1}\left(\frac{d}{ca}\right)$ و $y^* = \frac{c}{d}\left(r\varphi^{-1}\left(\frac{d}{ca}\right)\left(1 - \frac{\varphi^{-1}\left(\frac{d}{ca}\right)}{k}\right)\right)$ است. نقطه تعادل E_2 را نقطه تعادل همزیستی گویند. در قضیه زیر پایداری سراسری نقطه تعادل E_1 بررسی شده است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{d}{ack}$. در این صورت نقطه تعادل $E_1(k, 0)$ از سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری (۱.۲) پایدار مجانبی سراسری است.

اثبات. تابع لیاپانوف $V(x, y)$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$V(x, y) = \left(x - k - k \ln \frac{x}{k}\right) + \frac{1}{c}y.$$

با محاسبه مشتق مرتبه α تابع $V(x, y)$ همراه با جواب سیستم (۱.۲) و طبق لم ۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} {}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) &\leq \frac{x-k}{x} {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) + \frac{1}{c} {}^{ABC}D_t^\alpha y(t) \\ &= r(x-k)\left(1 - \frac{x}{k}\right) - (x-k)\frac{a}{x}\varphi(x)y + a\varphi(x)y - \frac{d}{c}y \\ &= (x-k)\left[r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{a}{x}\varphi(x)y\right] + a\varphi(x)y - \frac{d}{c}y \\ &= -\frac{r}{k}(x-k)^2 + ak\frac{\varphi(x)}{x}y - \frac{d}{c}y \leq -\frac{r}{k}(x-k)^2. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $ack\varphi(x) \leq dx$ ، آن‌گاه ${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) \leq 0$ در نتیجه نقطه تعادل E_1 پایدار مجانبی سراسری است. در حالتی که ${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) = 0$ به وضوح داریم $x = -k$. لذا با جایگذاری در معادله اول سیستم (۱.۲) داریم:

$${}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = {}^{ABC}D_t^\alpha k = 0 = -a\varphi(x)y.$$

در نتیجه $y = 0$. پس اگر $ack\varphi(x) \leq dx$ ، آن‌گاه $x = k$ ، $y = 0$ بنابراین تنها در نقطه $E_1 = (k, 0)$ داریم

$${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, t) = 0.$$

□

ملاحظه ۳.۳. طبق قضیه ۲.۳ اگر $\frac{\varphi(x)}{x} \leq \frac{d}{ack}$ ، یعنی $\frac{\varphi(x)}{x} \in \left[0, \frac{d}{cak}\right)$ ، آن‌گاه نقطه تعادل E_1 پایدار مجانبی سراسری است اما اگر $\frac{\varphi(x)}{x} \in \left[\frac{d}{cak}, 1\right)$ ، آن‌گاه نقطه تعادل $E_1(k, 0)$ ناپایدار است، در حقیقت طبق ماتریس ژاکوبی سیستم (۱.۲) در نقطه تعادل E_1 داریم:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -r & a\varphi(k) \\ 0 & ca\varphi(k) - d \end{bmatrix},$$

لذا مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی $J(E_1)$ عبارت است از، $\lambda_1 = -r$ و $\lambda_2 = ca\varphi(k) - d$. در نتیجه که برای $0 < \alpha < 1$ داریم $|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{\varphi}$ اگر $\frac{\varphi(x)}{x} > \frac{d}{ack}$ آن‌گاه برای همه $0 < \alpha < 1$ داریم $|\arg(\lambda_2)| = 0 < \frac{\alpha\pi}{\varphi}$ پس نقطه تعادل شکار-شکارچی $E_1(k, 0)$ از سیستم (۱.۲) ناپایدار است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید که $\frac{\varphi(x)}{x} > \frac{d}{ack}$ باشد، آن گاه نقطه تعادل همزیستی $E_2(x^*, y^*)$ از سیستم (۱.۲) پایدار مجانبی سراسری است.

اثبات. چون (x^*, y^*) یک نقطه تعادل همزیستی برای سیستم (۱.۲) است، لذا

$$rx^*\left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - a\varphi(x^*)y^* = 0, \quad ca\varphi(x^*)y^* - \mu y^* = 0. \quad (2.3)$$

حال برای نشان دادن پایداری مجانبی سیستم در نقطه تعادل E_2 تابع لیاپانوف $V(x, y)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$V(x, y) = (x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*}) + \frac{1}{c}(y - y^* - y^* \ln \frac{y}{y^*}).$$

با محاسبه مشتقات کسری کاپوتوی مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر (۳.۲) از مرتبه α تابع $V(x, y)$ از سیستم (۱.۲) و طبق لم ۳.۲ و فرض قضیه داریم

$$\begin{aligned} {}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) &\leq \frac{x - x^*}{x} {}^{ABC}D_t^\alpha x(t) + \frac{1}{c} \frac{y - y^*}{y} {}^{ABC}D_t^\alpha y(t) \\ &= (x - x^*) \left[r\left(1 - \frac{x}{k}\right) - a\frac{\varphi(x)}{x}y \right] + (y - y^*) \left[a\varphi(x) - \frac{d}{c} \right] \\ &= -(x - x^*) \left[\frac{r}{k}(x - k) + \frac{a}{x}\varphi(x)y \right] + \frac{d}{ck}(y - y^*)(x - x^*) \\ &= (x - x^*) \left[-\frac{r}{k}(x - x^*) - \frac{d}{ck}(y - y^*) \right] + \frac{d}{ck}(x - x^*)(y - y^*) \\ &= -\frac{r}{k}(x - x^*)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه، برای تمامی جواب‌های مثبت (x, y) داریم ${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) \leq 0$. اگر ${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) = 0$ ، آن گاه از معادله اول سیستم (۱.۲) می‌توان نتیجه گرفت $(x, y) = (x^*, y^*)$. بنابراین تنها مجموعه‌ی پایایی که در آن ${}^{ABC}D_t^\alpha V(x, y) = 0$ مجموعه منحصر بفرد $\{E_2\}$ می‌باشد. لذا اگر $ack\varphi(x) > dx$ نقطه تعادل همزیستی $E_2(x^*, y^*)$ پایدار مجانبی سراسری است. \square

ملاحظه ۵.۳. به منظور ارائه شبیه‌سازی‌های عددی از یک روش پیشگو-اصلاحگر برای حل عددی سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری (۱.۲)-(۲.۲) استفاده شده است. در حالت کلی یک سیستم معادلات دیفرانسیل کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر را روی بازه $[0, T]$ به فرم مسئله مقدار اولیه (۴.۲) در نظر بگیرید. فرض کنید $t_i = ih$ که $h = \frac{T}{N+1}$ و $i = 0, 1, \dots, N$. همچنین فرض کنید u_i نشان‌دهنده مقدار تقریبی $u(t_i)$ باشد. در این صورت برای هر i که $i = 0, 1, \dots, N$ ، مقدار تقریبی u_i با استفاده از روش پیشگو-اصلاحگر زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{cases} u_{i+1}^p = u_0 + \frac{h^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^i \hat{b}_{i+1,j}^{(\alpha)} f(u_j), \\ u_{i+1} = u_0 + \frac{\alpha h^\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha+2)} \left(\hat{a}_{i+1,i+1}^{(\alpha)} f(u_{i+1}^p) + \sum_{j=0}^i a_{i+1,j}^{(\alpha)} f(u_j) \right), \end{cases}$$

که در آن

$$\hat{a}_{i+1,i+1}^{(\alpha)} = 1 + \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{\alpha h^\alpha}, \quad \hat{b}_{i+1,j}^{(\alpha)} = \begin{cases} a_{i+1,j}^{(\alpha)}, & j = 0, \dots, i-1, \\ 1 + \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{h^\alpha}, & j = i. \end{cases}$$

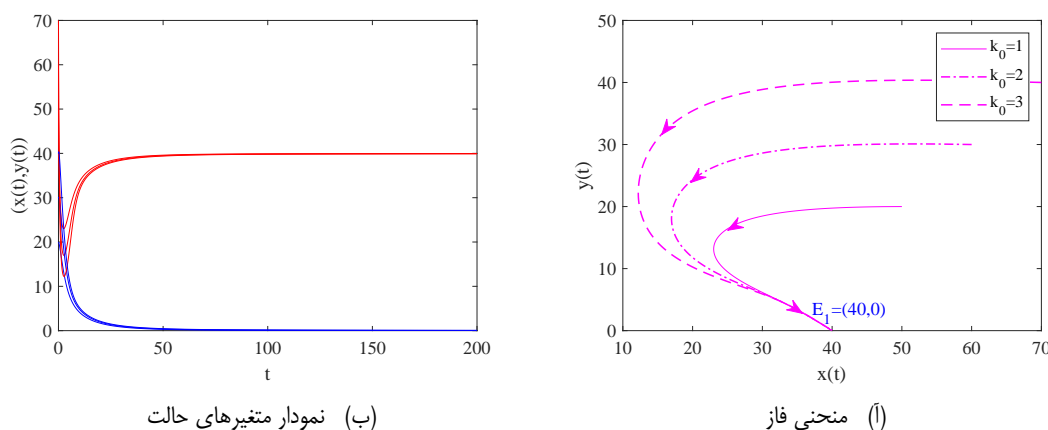
همگرایی و پایداری این روش پیشگو-اصلاحگر در [۶] بررسی شده است.

۴ شبیه‌سازی عددی

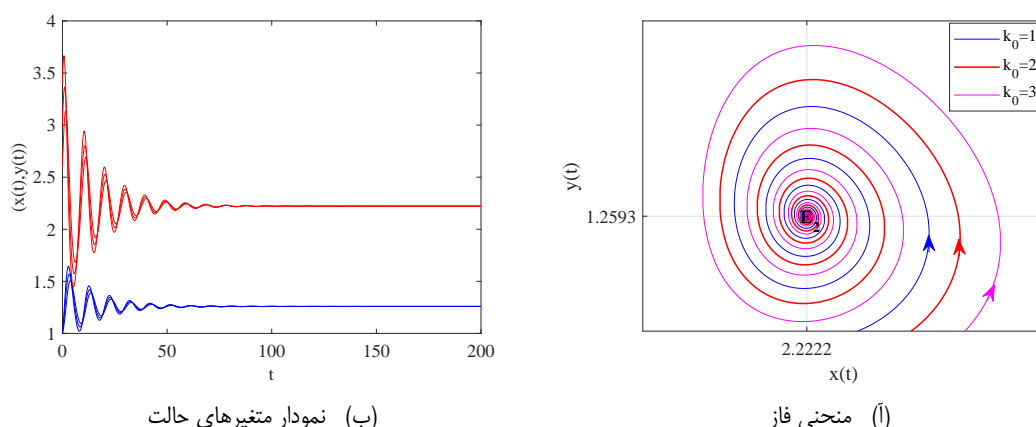
در این بخش، شبیه‌سازی‌های عددی سیستم شکار-شکارچی مرتبه کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر بررسی شده است. با استفاده از این شبیه‌سازی‌ها تاثیر مشتق کسری جدید را بر پایداری نقاط تعادل این سیستم نشان خواهیم داد. به‌علاوه رفتار پناه شکار که از دیدگاه زیست

جدول ۱: مقادیر پارامترهای مورد استفاده در شبیه‌سازی سیستم شکار-شکارچی

حالت	α	m	a	d	c	k	r
۱	۰/۹۸	۰/۹۶	۱	۰/۴	۰/۲	۴۰	۱/۲
۲	۰/۹۸	۰/۱	۱	۰/۴	۰/۲	۴۰	۱/۲

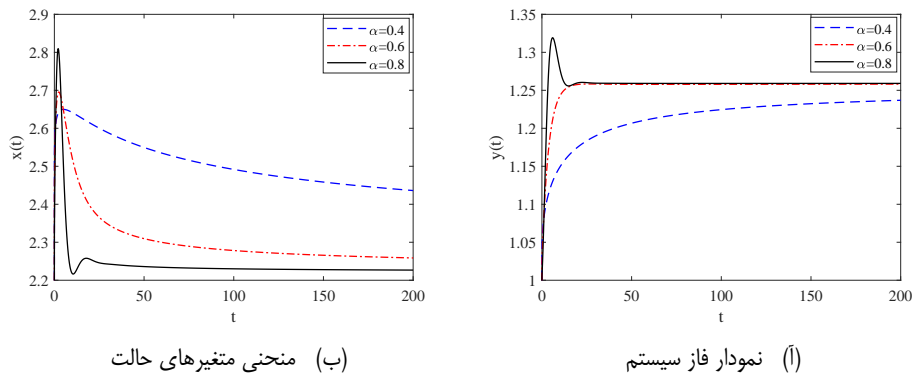


شکل ۱: . پایداری نقطه تعادل شکار-شکارچی برای شرایط اولیه مختلف با پارامترهای داده شده در حالت ۱ از جدول ۱.

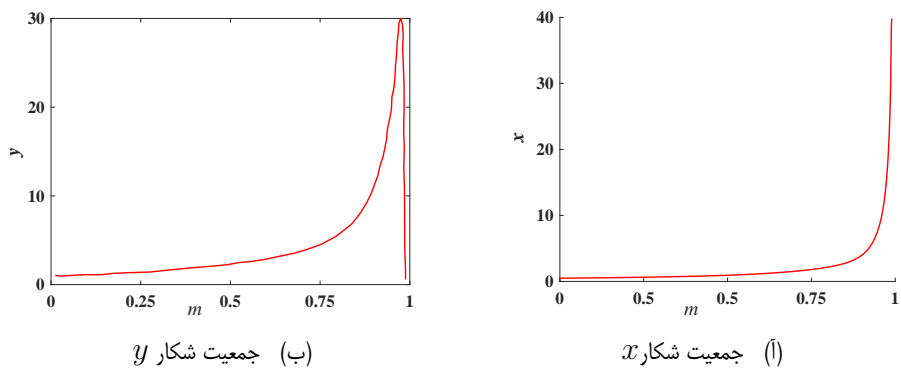


شکل ۲: پایداری مجانبی نقطه تعادل همزیستی E_2 همراه با شرایط اولیه مختلف و مقادیر پارامترهای داده شده در حالت ۲ از جدول ۱.

شناسی اهمیت ویژه‌ای دارد را با استفاده از این شبیه‌سازی‌ها مطالعه خواهیم کرد. برای شبیه‌سازی‌های عددی، مقادیر پارامترهای ثابت سیستم (۱.۲) از جدول ۱ انتخاب شده‌اند و همچنین تابع φ به صورت $\varphi(x) = (1 - m)x$ انتخاب شده است. در این حالت سیستم از تعداد $m \cdot x$ شکار محافظت می‌کند که در آن $m \in [0, 1)$ و همچنین تعداد $(1 - m)x$ شکار را در اختیار شکارچی قرار می‌دهد؛ به عبارتی دیگر مدل دارای یک پناه شکار با نرخ m است. در حالت ۱ از جدول ۱، مقادیر پارامترها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شرایط قضیه ۲.۳ برآورده شده است یعنی $\frac{d}{c \cdot a \cdot k} = 0.05 < 1 - m = 0.04$. در این قضیه نشان داده شده است که نقطه تعادل شکار-شکارچی $E_1(40, 0)$ پایدار مجانبی سراسری است. به منظور تأیید رفتار پایدار مجانبی سیستم در نقطه E_1 ، نتایج عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۱.۲) همراه با شرایط اولیه $(x_0, y_0) = (40 + 10 \cdot k_0, 10 + 10 \cdot k_0)$ که $k_0 = 1, 2, 3$ در شکل ۱ رسم شده است. همان‌طور که در شکل ۱(ب) ملاحظه می‌شود متغیرهای حالت سیستم برای زمان‌های $t \geq 10$ با شرایط اولیه‌های متفاوت میرا می‌شوند. همچنین شکل ۱(ا) نشان می‌دهد که سیستم پایدار مجانبی است. در حالت ۲ از جدول ۱، مقادیر پارامترها به گونه‌ای انتخاب شده است که شرایط قضیه ۴.۳ برآورده شود. طبق این قضیه نقاط تعادل همزیستی $E_2(2222, 12593)$ برای سیستم (۱.۲) نیز پایدار مجانبی سراسری است. نتایج عددی در شکل ۲ همراه با شرایط اولیه $(x_0, y_0) = (2/2 + 0.4 \cdot k_0, 1)$ که $k_0 = 1, 2, 3$ نشان داده شده است. همان‌طور ملاحظه می‌شود نتایج عددی نشان‌دهنده پایداری مجانبی سیستم برای نقطه تعادل E_2 است (شکل ۲(ا)) را ملاحظه نمایید). در شکل ۳، تاثیر مرتبه مشتق کسری را بر تراکم جمعیت سیستم با استفاده از مقادیر پارامتر داده شده در حالت ۲ از جدول



شکل ۳: پایداری مجانبی نقطه تعادل همزیستی E_2 همراه با شرایط اولیه مختلف و مقادیر پارامترهای داده شده در حالت ۲ از جدول جدول ۱.

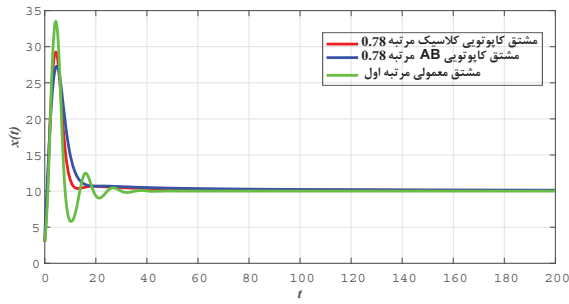


شکل ۴: اثر نرخ پناهگاه شکار در سیستم (۱.۲) با مقدار اولیه و مقادیر پارامتر داده شده در حالت ۲ از جدول ۱.

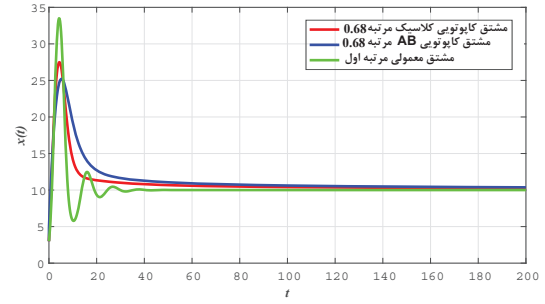
۱ همراه با شرط اولیه $(1, 2)$ و با $\alpha = 0.8$ و $\alpha = 0.6$ و $\alpha = 0.4$ نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که مشتق مرتبه کسری عامل مهمی است که بر سرعت همگرایی جواب‌های سیستم (۱.۲) تاثیر می‌گذارد. در شکل ۳ نشان داده شده است که سرعت همگرایی برای $\alpha = 0.98$ سریع‌تر از $\alpha = 0.3$ و سرعت همگرایی $\alpha = 0.3$ سریع‌تر از $\alpha = 0.2$ است و به این معنی است که سرعت همگرایی جواب‌های سیستم (۱.۲) با افزایش مرتبه کسری α سریع‌تر می‌شود. همان‌طور که در توصیف این سیستم بیان شده است پارامتر m نشان‌دهنده نسبت تاثیر پناه شکار است. به منظور بررسی تاثیر پناه شکار، شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از پارامترهای داده شده در حالت ۲ از جدول ۱ برای مقادیر $0 < m < 1$ در شکل ۴ نشان داده شده است. سمت چپ شکل ۴ نشان می‌دهد که متغیر حالت x^* یک تابع اکیداً صعودی نسبت به m است در حالی که متغیر y^* در بازه $[0, 0.96]$ اکیداً نزولی می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که برای $m = 0.96$ متغیر x^* حداکثر مقدار ۴۰ را اختیار می‌کند و برای متغیر y^* در $m = 0.98$ حداکثر مقدار ۳۰ را دارد. سمت راست شکل ۴ نشان می‌دهد که هرگاه میزان پناه شکار $m = 0.96$ باشد جمعیت شکارچی رو به انقراض می‌رود.

۵ نتیجه‌گیری

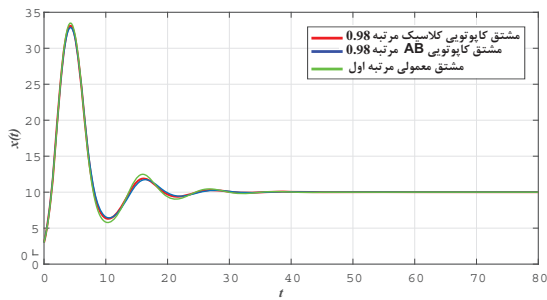
تأثیر حافظه نقش مهمی در تحلیل و مطالعه سیستم‌های دینامیکی غیرخطی ایفا می‌کند. حساب کسری که اساساً دارای حافظه است، می‌تواند پدیده‌های مختلف را با دقت بیشتری نسبت به حساب صحیح بررسی و سیستم‌های طبیعی و بشری را توصیف کند. به منظور توصیف بهتر دینامیک دنیای واقعی، بسیاری از دانشمندان سعی داشتند حساب کسری جدیدی را با هسته غیرخطی و غیرعادی معرفی کنند. در میان تعاریف گوناگون حساب کسری مدل جدید با هسته میتاگ-لفلر پیشنهاد شده است که برای بعضی از سیستم‌های واقع‌گرایانه استفاده می‌شود و برای توصیف پدیده‌های طبیعی مناسب‌تر است. هسته پیشنهادی، نامنفرد و ناموضعی است؛ به‌علاوه رفتار مجانبی آن از رفتار مجانبی مشتق کسری کلاسیک متفاوت است. شبیه‌سازی عددی متغیرها حالت x و y به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. در این شکل‌ها نتایج عددی برای سیستم شکار-شکارچی با مشتق کسری مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر و مشتق کسری کاپوتوی کلاسیک و مشتق صحیح $\alpha = 1$ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که این شکل‌ها نشان می‌دهند هرگاه مرتبه کسری α به عدد ۱ نزدیک می‌شود رفتار دینامیکی سیستم با مشتق کسری جدید و مشتق کسری کلاسیک و همچنین با رفتار دینامیکی سیستم همراه با مشتق صحیح (معمولی مرتبه اول) یکسان است. به‌علاوه اندازه نوسانات جواب سیستم مبتنی بر مشتق کسری جدید نسبت به مشتق کلاسیک و صحیح کمتر است.



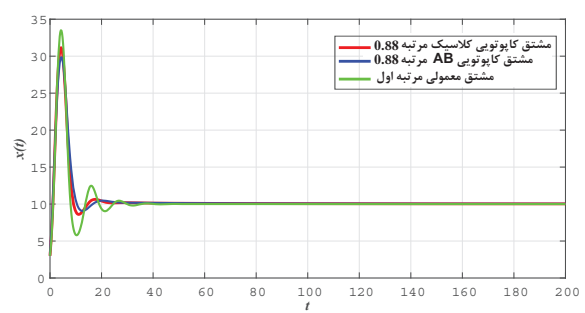
$\alpha = 0.78$ (ب)



$\alpha = 0.68$ (ا)

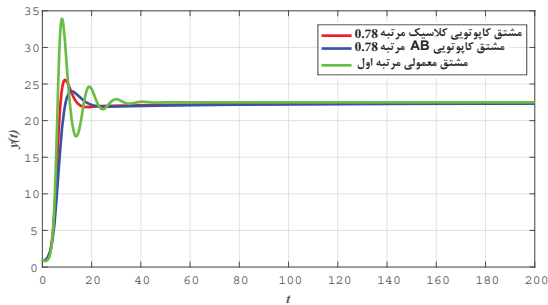


$\alpha = 0.98$ (ت)

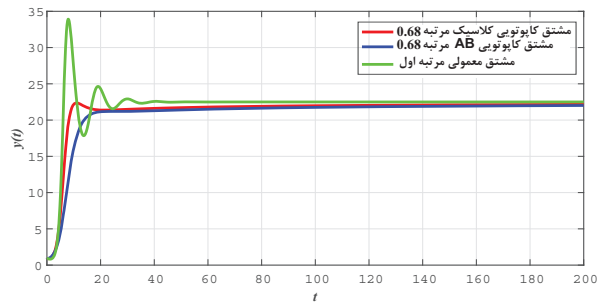


$\alpha = 0.88$ (پ)

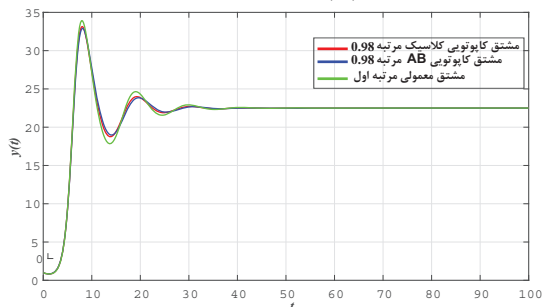
شکل ۵: مقایسه جواب‌های $x(t)$ برای سیستم شکار-شکارچی کسری همراه با مشتق صحیح، مشتق کاپوتوی کلاسیک و مشتق کاپوتوی مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر وقتی که $\alpha = 0.68, 0.78, 0.88, 0.98$.



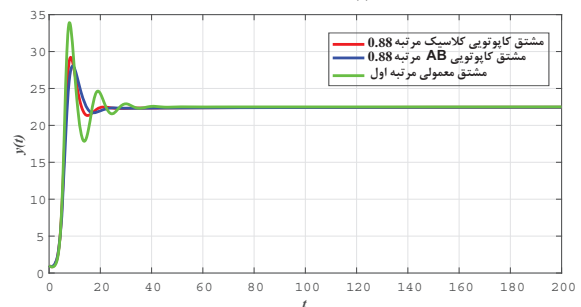
$\alpha = 0.78$ (ب)



$\alpha = 0.68$ (ا)



$\alpha = 0.98$ (ت)



$\alpha = 0.88$ (پ)

شکل ۶: مقایسه جواب‌های $y(t)$ برای سیستم شکار-شکارچی کسری همراه با مشتق صحیح، مشتق کاپوتوی کلاسیک و مشتق کاپوتوی مبتنی بر تابع میتاگ-لفلر وقتی که $\alpha = 0.68, 0.78, 0.88, 0.98$.

فهرست منابع

- [1] I. Podlubny, Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, in: fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Academic Press, New York, 1999 .
- [2] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Gregoire, F. Ragot, P. Roy, Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation, Signal processing **86** (2006) 2645–2657.
- [3] J. D. Gabano, T. Poinot, Fractional modelling and identification of thermal systems, Signal Processing **91** (2011) 531–541.
- [4] D. Baleanu, Fractional calculus: models and numerical methods, World Scientific, 2012.
- [5] A. Atangana, D. Baleanu, New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model, Thermal Science **20** (2016) 763–769.
- [6] D. Baleanu , A. Fernandez, On some new properties of fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **59** (2018) 444–462.
- [7] D. Baleanu, A. Jajarmi, M. Hajipour, On the nonlinear dynamical systems within the generalized fractional derivatives with Mittag–Leffler kernel, Nonlinear Dynamics **94** (2018) 397–414.
- [8] V. Volterra, Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi, Mem. Acad. Lincei Roma. **2** (1926) 31–113.
- [9] J. D. Murray, Mathematical Biology, Spring-Verlag, New York, Berlin, 1993.
- [10] J. P. Tripathi , S. Abbas, M. Thakur, Dynamical analysis of a prey–predator model with Beddington–DeAngelis type function response incorporating a prey refuge, Nonlinear Dynamics **80** (2015) 177–96.
- [11] Y. Huang , F. Chen, L. Zhong, Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge, Applied Mathematics and Computation **182** (2006) 672–83.
- [12] E. Ahmed, A. M. El-Sayed H. A. El-Saka. Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models, Journal of Mathematical Analysis and Applications **325** (2007) 542–553.
- [13] H. L. Li, L. Zhang, C. Hu, Y. L. Jiang Z. Teng, Dynamical analysis of a fractional-order predator-prey model incorporating a prey refuge, Journal of Applied Mathematics and Computing **54** (2016) 435–49.
- [14] A. A. Elsadany, A. E. Matouk, Dynamical behaviors of fractional-order Lotka-Volterra predator-prey model and its discretization, Journal of Applied Mathematics and Computing **49** (2015) 269–83.
- [15] F. A. Rihan, S. Lakshmanan A. H Hashish, Rakkiyappan R. Ahmed E., Fractional-order delayed predator-prey systems with Holling type-II functional response, Nonlinear Dynamics **80** (2015) 777–89.
- [16] B. K. Lenka, S. Banerjee, Sufficient conditions for asymptotic stability and stabilization of autonomous fractional order systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **56** (2018) 365–79.



Dynamic analysis of the fractional predator-prey system based on the Mittag-Leffler function

Shahnaz Mohammadi, Fridoun Moradlou[†], Mojtaba Hajipour

Department of Mathematics, Sahand University of Technology, P.O. Box: 51335-1996, Tabriz, Iran.

Received: 2020/3/27

Accepted: 2020/11/22

Communicated by: M. Seraj

Abstract: In this paper, the dynamic behavior of a fractional-order predator-prey system based on the Mittag-Leffler function is investigated. First, we study the existence, uniqueness, non-negativity, and boundedness for the solution of this fractional-order system. Then, we show that this system has two different equilibrium points. Some sufficient conditions to ensure the global asymmetric stability of these points are also proposed by using the Lyapunov function. Finally, we present some numerical simulations to confirm the analytical results.

Keywords: Fractional-order Predator-prey system, Caputo derivative, Mittag-Leffler function, asymptotic stability.

Mathematics Subject Classification (2010): 93D05, 26A33.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author. moradlou@sut.ac.ir (F. Moradlou)
E-mail addresses: sh_mohammadi@sut.ac.ir (S. Mohammadi), hajipour@sut.ac.ir (M. Hajipour)