



## باله متخلخل همرفت طبیعی با هدایت حرارتی و گرمای داخلی وابسته به دما با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف بهینه‌شده با الگوریتم نقطه درونی

الیاس شیوانیان<sup>۱\*</sup>، مهدی کشتکار<sup>۲</sup>، هدایت فتاحی<sup>۳</sup>

(<sup>۱</sup>) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی، قزوین، ایران

(<sup>۲</sup>) گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

(<sup>۳</sup>) گروه ریاضی، واحد مریوان، دانشگاه آزاد اسلامی، مریوان، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۸

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۶/۲۵

دبیر مسئول: محمد هادی فراهی

چکیده: در این مقاله، تجزیه و تحلیل رفتار حرارتی باله متخلخل همرفت طبیعی با تولید گرمای داخلی هدایت حرارتی وابسته به درجه حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل‌های انتقال گرمای نمادین توسعه‌یافته، به منظور بررسی اثرات پارامترهای مختلف عملکرد حرارتی باله متخلخل در نظر گرفته شده است. با توجه به فرمول‌بندی مساله، یک رویکرد محاسباتی هوشمندانه جدید برای جستجوی جواب، ایجاد شده است. برای رسیدن به این هدف، معادله دیفرانسیل غیرخطی مساله، به یک مساله معادل تبدیل شده است که شرایط مرزی آن به گونه‌ای است که به راحتی می‌توان از چندجمله‌ای چبیشف اصلاح شده نوع اول استفاده نمود. توابع مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف، سری جواب تقریبی با وزن‌های مجهول را ایجاد می‌نماید. فرمول ریاضی مساله بهینه‌سازی شامل یک خطای قابل کنترل است که با تنظیم وزن‌ها با استفاده از روش نقطه درونی به حداقل می‌رسد. جواب تقریبی آزمایشی با تحمیل تلورانس محدود شده در مساله بهینه‌سازی اعتبارسنجی شده است. به علاوه نتایج به دست آمده دقیق‌تر از نتایج گزارش شده در تحقیقات قبلی است.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای چبیشف نوع اول، روش نقطه درونی، همرفت طبیعی، باله متخلخل، عملکرد حرارتی، هدایت حرارتی وابسته به دما، تولید گرمای داخلی.

رده‌بندی ریاضی: 34-XX, 34BXX, 90-XX

### ۱ مقدمه

بسیاری از مواقع در کاربردهای مهندسی با افزایش انتقال گرما روبرو می‌شویم، به همین خاطر بسیاری از محققان کارهای خود را به عملیات انتقال گرما باله‌ها اختصاص داده‌اند. با ثابت در نظر گرفتن هدایت حرارتی و ضرایب انتقال گرما به راحتی جواب به دست می‌آید. با این حال اگر اختلاف دمای زیادی به روش مشخصی در بین نوک و پایه باله اتفاق بیفتد، در این صورت هدایت حرارتی، ثابت نخواهد بود، اما وابسته به

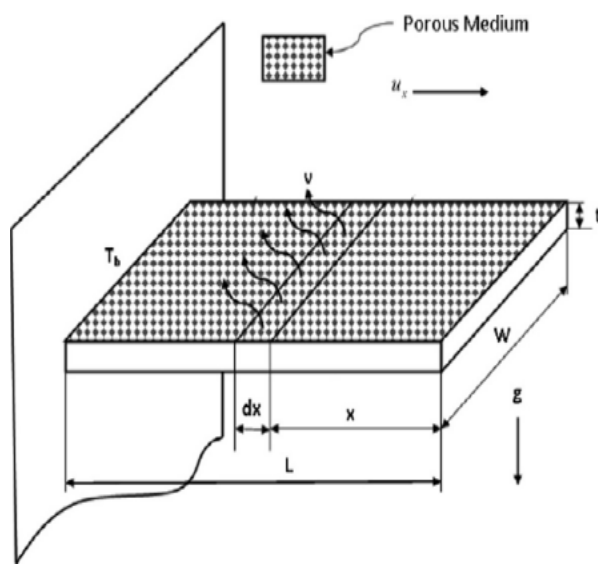
\*نویسنده مسئول مقاله (E. Shivanian) [shivanian@sci.ikiu.ac.ir](mailto:shivanian@sci.ikiu.ac.ir)

رایانامه: (H. Fatahi) [fatahi\\_iau@yahoo.com](mailto:fatahi_iau@yahoo.com) (M. Keshtkar) [keshtkarmahdi@gmail.com](mailto:keshtkarmahdi@gmail.com)

درجه حرارت است. برخی محققان اشاره کرده‌اند که هدایت حرارتی موثر، با افزایش دما در باله‌های متخلخل برای بیشتر مواد افزایش می‌یابد [۷، ۱۲، ۲۸]. چنین ملاحظاتی بیانگر تصویر بهتری از عملکرد حرارتی یا رفتار باله متخلخل است. بنابراین باید اثرات هدایت حرارتی وابسته به درجه حرارت هنگام تحلیل باله مورد توجه قرار گیرد. در ادامه با چنین تجزیه و تحلیلی با استفاده از وابستگی خطی بر روی درجه حرارت ممکن است هدایت حرارتی برای کاربردهای مهندسی مدل‌سازی شده باشد. چنین وابستگی هدایت حرارتی به درجه حرارت، مساله را بسیار غیرخطی و چالش برانگیز می‌نماید. از طرف دیگر، در نظر گرفتن تولید گرمای داخلی وابسته به درجه حرارت در باله همانند حمل جریان الکتریکی هادی، میله‌های هسته‌ای یا سایر اجزای تولید گرمای سیستم‌های حرارتی، بسیار واقع‌گرایانه است [۴، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱۹، ۲۰، ۲۵، ۲۹، ۳۷، ۳۹].

## ۲ فرمول‌بندی مساله

یک باله متخلخل مستقیم به طول  $L$  با ضخامت  $t$  را در نظر بگیرید که محیط همرفت در هر دو وجه با دمای  $T_\infty$  در شکل ۱ نشان داده شده است، بعد  $x$  مختصات ارتفاع را نشان می‌دهد که جهت مثبت آن از نوک باله تا پایه باله می‌باشد. برای تحلیل مدل، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. شماتیک هندسه باله متخلخل طولی با تولید گرمای داخلی [۳۷]

- خصوصیات فیزیکی جامد و همچنین مایعات، به جز تغییر چگالی مایعات ثابت می‌باشد، البته ممکن است در شناوری، جایی که تقریب بوسنیسکو به کار برده می‌شود تاثیرگذار باشد.
- محیط متخلخل با یک مایع تک‌فاز، همگن، ایزوتروپیک و اشباع شده است.
- با توجه به اینکه همرفت سطح، انتقال تابشی و تاثیرات غیر داری بسیار ناچیز است فقط همرفت طبیعی در نظر گرفته شده است. گرما فقط از طریق منافذ انتقال گرمای همرفتی به داخل باله منتقل می‌شود و به محیط اطراف انتقال داده نمی‌شود.
- رسانه‌های سیال و متخلخل به صورت محلی در تعادل ترمودینامیکی دامنه قرار دارند.
- مقاومت تماس حرارتی در پایه باله وجود ندارد و نوک باله از نوع آدیاباتیک است.
- تغییر دما در درون باله یک بعدی است، یعنی دما فقط در طول متفاوت و با زمان ثابت است.

معادله دیفرانسیل حاکم بر باله داده شده است.

$$\frac{d}{dX} \left( k_{eff}(T) \frac{dT}{dX} \right) - \frac{\rho c_p g \beta' K (T - T_\infty)^2}{t v_f} + q_{int}(T) = 0, \quad 0 < X < L, \quad (1.2)$$

با شرایط مرزی

$$X = L, T = T_b; \quad X = 0, \frac{dT}{dX} = 0, \quad (۲.۲)$$

که هدایت حرارتی و تولید گرمای داخلی به صورت زیر غیر ثابت فرض شده است.

$$k_{eff}(T) = k_{eff,a} [\lambda + \lambda (T - T_\infty)], \quad q_{int}(T) = q_a [\lambda + \psi (T - T_\infty)]. \quad (۳.۲)$$

با جایگذاری معادله (۳.۲) در معادله (۱.۲) داریم:

$$\frac{d}{dX} \left( [\lambda + \lambda (T - T_\infty)] \frac{dT}{dX} \right) - \frac{\rho c_p g \beta' K (T - T_\infty)^\gamma}{k_{eff,a} t v_f} + \frac{q_a}{k_{eff,a}} [\lambda + \psi (T - T_\infty)] = 0. \quad (۴.۲)$$

حال با معرفی متغیرهای بدون بعد

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad Ra = \left( \frac{\beta' g T_b t^\gamma}{v_f^\gamma} \right) \left( \frac{\rho c_p v_f}{k_{eff,a}} \right), \quad Q = \frac{q v_f t}{\rho c_p \beta' g K (T_b - T_\infty)^\gamma},$$

$$Da = \frac{K}{t^\gamma}, \quad Sh = \frac{Ra Da}{k_{eff,a}} \left( \frac{L}{t} \right)^\gamma, \quad \gamma = \psi (T_b - T_\infty), \quad \beta = \lambda (T_b - T_\infty), \quad (۵.۲)$$

معادله انرژی زیر به دست می‌آید.

$$(\lambda + \beta \theta) \theta'' + \beta (\theta')^\gamma - Sh \theta^\gamma + Sh Q \gamma \theta + Sh Q = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (۶.۲)$$

به طوری که شرایط مرزی در نوک باله و در پایه باله به صورت زیر می‌باشد.

$$\theta'(0) = 0, \quad (۷.۲)$$

$$\theta(1) = 1. \quad (۸.۲)$$

در تحقیقات اخیر برای حل مسایل انتقال گرما در باله متخلخل، کاندو<sup>†</sup> در مورد تجزیه و تحلیل طراحی بهینه از باله‌ها روش تجزیه آدومیان را به کار برد [۲۵]. سعدالدین<sup>‡</sup>، صادقی<sup>§</sup> [۳۳] و کیوان<sup>¶</sup> [۲۱-۲۴، ۳۸] روشهای رانگ کوتا را برای آنالیز حرارتی اتخاذ کردند. گولار<sup>□</sup>، باکر<sup>××</sup> [۳۸] و گولار و همکاران [۱۲] تجزیه و تحلیل اثرات تغییرپذیری هدایت حرارتی بر همرفت طبیعی و تابش را با استفاده از روش جفت طیفی مورد بررسی قرار دادند. سعدالدین و شهاب آبادی روش اختلال هموتوبی را برای مطالعه انتقال حرارت در باله‌های متخلخل طولی به کار بردند [۳۴] در حالی که درویش [۸] و مرادی و همکاران [۲۸] و هاو<sup>††</sup> و همکاران [۱۷] روش آنالیز هموتوبی را برای نمایش جواب نیمه تحلیلی برای همرفت طبیعی و تابش در باله‌های متحرک متخلخل به کار برده‌اند. (علاقمندان به مطالعه بیشتر می‌توانند به منابع [۱-۳، ۲۶، ۲۷، ۳۵، ۴۰] رجوع کنند). حاتمی و گنجی روش کمترین مربعات را برای رفتار تجزیه و تحلیل حرارتی تابش همرفتی در باله متخلخل با مقاطع مختلف و مواد سرامیکی اقتباس کرده‌اند [۱۵]. به علاوه رستمیان و همکاران روش تکرار تغییرات (VIM) را برای ارایه جواب تقریبی نیمه تحلیلی برای انتقال گرما در باله متخلخل استفاده نموده‌اند [۳۲]. قاسمی و همکاران برای مطالعه گرما از روش تبدیلات دیفرانسیلی برای مطالعه تجزیه و تحلیل انتقال گرما در باله متخلخل و جامد استفاده کرده‌اند [۱۱].

مساله (۶.۲)-(۸.۲) به طور دقیق در حالات  $Q = 0$  و  $Sh = 0$  به ترتیب در مرجع [۵] و [۳۷] حل شده است. به علاوه سابوموو و همکاران [۳۷] با استفاده از روش گالرکین باقیمانده وزن دار مساله (۶.۲)-(۸.۲) را به طور عددی دنبال کرده‌اند. در این مقاله هدف ما یک روش محاسباتی هوشمند جدید برای به دست آوردن جواب برای مساله مقدار مرزی مرتبه دوم غیرخطی (۶.۲)-(۸.۲) است. ابتدا معادله اصلی را به یک معادله معادل با شرایط مرزی در بازه  $[-1, 1]$  تبدیل می‌کنیم. از این طریق به راحتی می‌توان از چندجمله‌ای‌های چپیشف نوع اول استفاده کرد. سپس چندجمله‌ای‌های نوع اول را با ساختن سری‌های تقریبی با وزن‌های مجهول بهینه‌سازی می‌کنیم. این یک مساله بهینه‌سازی بر اساس خطای بدون نظارت به عنوان تابع هدف به طوری که محدودیت آن نیز اختلاف خطا است. این مساله بهینه‌سازی با استفاده از تنظیم وزن توسط روش نقطه درونی کمینه شده است. به علاوه اثرات پارامترهای هدایت حرارتی غیرخطی روی توزیع دما بدون بعد و توسعه روی نرخ انتقال گرما با دقت بیشتری مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

Kundu<sup>†</sup>  
Saedodin<sup>‡</sup>  
Sadeghi<sup>§</sup>  
Kiwani<sup>¶</sup>  
Golar<sup>□</sup>  
Baker<sup>××</sup>  
Ha<sup>††</sup>

### ۳ مشتقات مراتب بالاتر توابع پایه‌ای

چندجمله‌ای‌های چیبیشف به‌عنوان توابع متعامد در بازه  $[-1, 1]$  روی محور حقیقی خیلی مفید هستند [۳۱]. این چندجمله‌ای‌ها ویژگی‌های خیلی خوبی در تقریب توابع در زمینه‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی دارند.

#### ۱.۳ ویژگی‌های پایه‌ای چندجمله‌ای‌های چیبیشف

چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول به‌صورت زیر تعریف می‌شود  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  که می‌توان به‌وسیله فرمول رودریگز به‌صورت زیر

$$T_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-2)^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

به‌دست آورد [۶]. چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول به‌وسیله تابع مولد به شرح زیر قابل توسعه است.

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)t^n. \quad (2.3)$$

در چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول  $T_n(x) = x$  و  $T_n(x) = 1$  از رابطه (۱.۳) معلوم هستند و چندجمله‌ای‌های دیگر  $n \geq 2$  را می‌توان با استفاده از فرمول بازگشتی زیر به‌دست آورد.

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (3.3)$$

مشتق  $T_n(x)$  نسبت به  $x$  از روابط زیر حاصل می‌شود.

$$(1-x^2) T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x), \quad x \neq \pm 1, \quad (4.3)$$

$$T_n'(-1) = n^2(-1)^{n+1}, \quad T_n'(1) = n^2. \quad (5.3)$$

برخی مقادیر خاص و ویژگی‌های  $T_n(x)$  که مفید خواهند بود، در زیر آورده شده است.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \quad T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0. \quad (6.3)$$

می‌توان ویژگی‌های تعامدی را برای چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول براساس تعامد توابع کسینوسی به‌صورت

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0; \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

بیان کرد. همانطور که دیده می‌شود چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول یک مجموعه متعامد روی بازه  $[-1, 1]$  را با تابع وزنی  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  تشکیل می‌دهند.

#### ۲.۳ مشتقات مراتب بالاتر چندجمله‌ای‌های چیبیشف

فرمول لاینیتز: برای تابع  $f(x) = g(x)h(x)$  مشتقات  $f(x)$  را می‌توان به‌صورت مجموع مشتقات  $g(x)$  و  $h(x)$  نمایش داد

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} g^{(n)}(x) h^{(k-n)}(x), \quad (8.3)$$

که در آن ضرایب دوجمله‌ای هستند.

قضیه ۱.۳. (Slevinsky-Safouhi) فرض کنید  $G(x)$  یک تابع دیفرانسیل‌پذیر  $k$ ام باشد و با جمله‌ی  $\left(\frac{d}{x dx}\right)^k G(x)$  خوش‌تعریف باشد. جمله  $\frac{d^k G}{dx^k}$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d^k G}{dx^k} = \sum_{i=\lfloor \frac{k+1}{\gamma} \rfloor}^k \hat{A}_k^i x^{\gamma i - k} \left(\frac{d}{x dx}\right)^k G(x), \quad (9.3)$$

با ضرایب

$$\hat{A}_k^i = \begin{cases} 1, & i=k; \\ \gamma \hat{A}_{k-1}^i + \hat{A}_{k-1}^{i-1}, & i = \lfloor \frac{k+1}{\gamma} \rfloor, k \text{ odd}; \\ \hat{A}_{k-1}^i, & i = \lfloor \frac{k+1}{\gamma} \rfloor, k \text{ even}; \\ (\gamma i - k + 1) \hat{A}_{k-1}^i + \hat{A}_{k-1}^{i-1}, & \lfloor \frac{k+1}{\gamma} \rfloor < i < k, k > 3. \end{cases} \quad (10.3)$$

که  $[\alpha]$  تابع حد پایین صحیح آرگومان  $\alpha$  است [۳۶].

بدیهی است که با کمک فرمول لایبنتز و رودریگز مشتقات مراتب بالاتر  $T_n(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\frac{d^i}{dx^i} T_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{(-\gamma)^n \Gamma(n + \frac{1}{\gamma})} \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} \frac{d^l}{dx^l} \sqrt{1-x^\gamma} \frac{d^{n+i-l}}{dx^{n+i-l}} (1-x^\gamma)^{n-\frac{1}{\gamma}}. \quad (11.3)$$

بدون اینکه وارد جزئیات شویم اگر نتیجه قضیه ۱.۳ را در معادله فوق اعمال کنیم در این صورت یک فرمول خطی موثر را به عنوان نتیجه نهایی توسعه می‌دهیم [۳۶]:

$$\frac{d^k}{dx^k} T_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma})}{(-\gamma)^n \Gamma(n + \frac{1}{\gamma})} \sum_{l=0}^k \left\{ \binom{k}{l} \left[ \sum_{i=\lfloor \frac{l+1}{\gamma} \rfloor}^l \hat{A}_l^i x^{\gamma i - l} (-\gamma)^i (1-x^\gamma)^{\frac{1}{\gamma} - i} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{1}{\gamma} - j\right) \right] \times \right. \\ \left. \left[ \sum_{i=\lfloor \frac{n+k-l+1}{\gamma} \rfloor}^{n+k-l} \hat{A}_{n+k-l}^i x^{\gamma i - n - k + l} (-\gamma)^i (1-x^\gamma)^{n-\frac{1}{\gamma} - i} \prod_{j=0}^{i-1} \left(n - \frac{1}{\gamma} - j\right) \right] \right\} \quad (12.3)$$

با ضرایب  $\hat{A}_k^i$  داده شده در (۱۰.۳).

#### ۴ روش پیشنهادی

با تغییر متغیر  $x \mapsto \frac{1}{\gamma}x + \frac{1}{\gamma}$  مساله مقدار مرزی معادله (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\gamma \frac{d^\gamma \theta}{dx^\gamma} + \gamma \beta \theta \frac{d^\gamma \theta}{dx^\gamma} + \gamma \beta \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^\gamma - s_h \theta^\gamma + s_h Q \gamma \theta + s_h Q = 0, \quad (1.4)$$

$$\theta'(-1) = 0, \theta(1) = 1. \quad (2.4)$$

حال به راحتی با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول می‌توان مساله را پیش برد. به علاوه با تغییر تابع  $\theta \mapsto \theta + 1$  مساله به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\gamma \frac{d^\gamma \theta}{dx^\gamma} + \gamma \beta (\theta + 1) \frac{d^\gamma \theta}{dx^\gamma} + \gamma \beta \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^\gamma - s_h (\theta + 1)^\gamma + s_h Q \gamma (\theta + 1) + s_h Q = 0, \quad (3.4)$$

$$\theta'(-1) = 0, \theta(1) = 0, \quad (4.4)$$

به طوری که شرایط مرزی همگن می‌شود.

## ۱.۴ نسخه اصلاح شده چندجمله‌ای‌های چیشف

به ازای  $n \geq 1$ ،  $\hat{T}_n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{T}_n(x) = T_n(x) - (-1)^{n+1}n^2x + (-1)^{n+1}n^2 - 1, \quad n \geq 1, \quad (5.4)$$

در این صورت به وضوح از (۶.۳) داریم:

$$\hat{T}_n(1) = 0, \quad n \geq 1. \quad (6.4)$$

معادله (۵.۳) ایجاب می‌کند

$$\hat{T}'_n(-1) = T'_n(-1) - (-1)^{n+1}n^2 = 0 \quad n \geq 1. \quad (7.4)$$

بنابراین از معادله (۶.۴)-(۷.۴) نتیجه می‌گیریم شرایط مرزی (۴.۴) برقرار است. به علاوه مشتق دوم نسخه اصلاح شده چندجمله‌ای‌های چیشف نوع اول به صورت زیر داده شده است

$$\hat{T}'_n(x) = T'_n(x) - (-1)^{n+1}n^2, \quad n \geq 1, \quad (8.4)$$

$$\hat{T}''_n(x) = T''_n(x), \quad n \geq 1, \quad (9.4)$$

که سمت راست به ازای  $k = 1, 2$  با استفاده از فرمول (۱۲.۳) به دست خواهد آمد.

## ۲.۴ مساله بهینه‌سازی متناظر

جواب سری تقریبی مرتبه  $M$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Theta_M(x) = \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}_n(x), \quad (10.4)$$

و عدد  $N$  را نقاط گره‌ای توزیع شده به طور منظم در بازه  $[-1, 1]$  در نظر می‌گیریم، یعنی  $N$ ،  $2, \dots, N$ ،  $i = 1, 2, \dots, N$  در این صورت خطای بدون قید را به صورت مجموع خطای میانگین مربعات تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \epsilon(N, \alpha) = & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \beta \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}''_n(x_i) + \beta \left( \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}_n(x_i) + 1 \right) \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}''_n(x_i) + \beta \left( \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}'_n(x_i) \right)^2 \right. \\ & \left. - s_h \left( \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}_n(x_i) + 1 \right)^2 + s_h Q \gamma \left( \sum_{n=1}^M \alpha_n \hat{T}_n(x_i) + 1 \right) + s_h Q \right\}. \quad (11.4) \end{aligned}$$

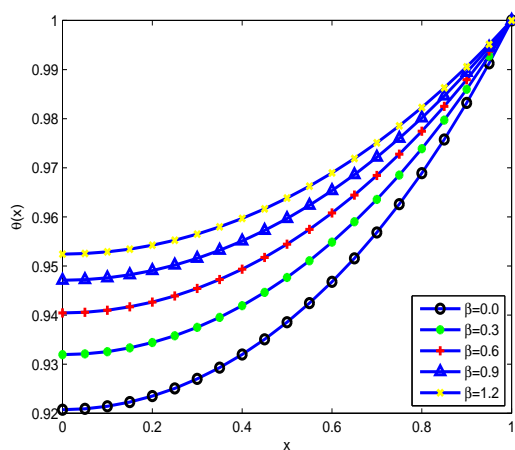
شایان ذکر است که  $\Theta_M(x)$  در شرایط مرزی معادله (۴.۴) به طور خودکار صدق می‌کند، حال مساله بهینه‌سازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha} \epsilon(N, \alpha) \\ & \text{to subject } \epsilon(N, \alpha) - \epsilon \leq 0, \quad (12.4) \end{aligned}$$

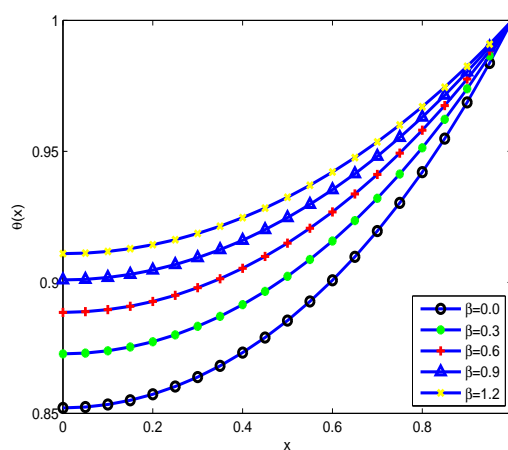
که  $\epsilon$  یک تلورانس است. در رویکرد ما روش نقطه درونی برای تنظیم وزن‌های جواب سری‌های تقریبی (۱۰.۴) استفاده شده است. روش نقطه درونی متعلق به دسته الگوریتم‌هایی است که برای مسایل بهینه‌سازی مقید به کار برده می‌شود. تکنیک آن مبتنی بر الگوریتم کارماکار است که توسط ناریندرا کارماکار در سال ۱۹۸۴ برای حل مسایل برنامه ریزی خطی ارائه شد [۱۸]. جزئیات بیشتر درباره الگوریتم در مراجع [۴۱، ۴۲] قابل دسترس است. روش نقطه درونی در بسیاری از مسایل بهینه‌سازی در مهندسی، علوم کاربردی همچون جریان بهینه واکنش چندمنطقه‌ای [۴۳] مسایل توزیع اقتصادی [۹] به کار برده می‌شود. ویژگی اساسی روش نقطه درونی مبتنی بر توابع مانع خودسازگار است که نقش مهمی در رمزگذاری مجموعه محدب دارد. برخلاف روش سیمپلکس، روش نقطه درونی با جستجو در درون ناحیه شدنی، جواب بهینه را از حل دنباله‌ای از زیر مساله‌ها به دست می‌آورد [۳۰].

## ۵ مثال‌های عددی و مقایسه آن

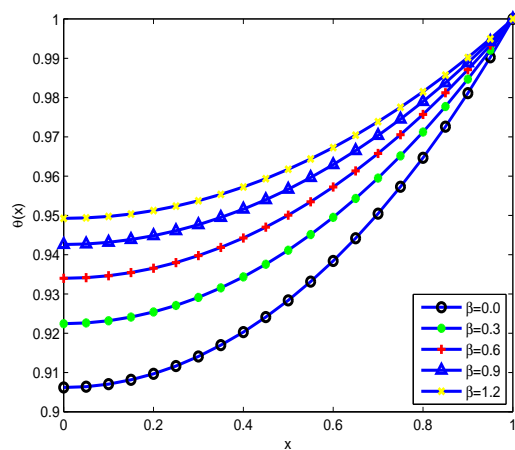
در این بخش نتایج به‌دست آمده برای بعضی حالت‌ها که از مرجع [۳۷] اقتباس شده است را با استفاده از روش پیشنهاد شده که در بخش قبل شرح داده‌ایم بیان خواهیم کرد. در این مثال‌ها  $N = 50$  تعداد نقاط گره‌ای در بازه  $[-1, 1]$  است که به‌طور منظم توزیع شده است. به‌علاوه تعداد تابع پایه در تقریب حل سری در معادله  $M = 14$  (۱۰.۴) در نظر گرفته شده است. جواب‌های به‌دست آمده را می‌توان با مرجع [۳۷] مقایسه کرد. مقایسه انجام شده نشان می‌دهد که نتایج حاصله دقت و اطمینان بیشتری دارد. همه جواب‌های تقریبی گزارش شده با نرم افزار متلب به‌دست آمده است، نرم افزار متلب یک جعبه‌ابزار بهینه‌سازی موثر را فراهم می‌کند که شامل توابعی برای یافتن می‌نیمم یک تابع چندمتغیره است در حالی که همزمان در محدودیت صدق می‌کند و این جعبه‌ابزار شامل حل‌کننده‌هایی است که بهینه‌سازی را روی انواع مختلف مسایل خطی و غیرخطی اجرا می‌کند. تابع  $fmincon(\cdot)$  از این جعبه‌ابزار یک بهینه‌ساز چند هدفه است که به‌خوبی آزمایش می‌کند و به‌طور مکرر برای حل مسایل برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت‌های کراندار، مساوی یا نامساوی با مقیاس بزرگ، متوسط و کوچک به‌کار برده می‌شود. برای رسیدگی به مساله بهینه‌سازی (۱۲.۴) از تابع  $fmincon(\cdot)$  مطرح شده برای روش نقطه درونی که در بخش قبل تشریح شده استفاده می‌کنیم.



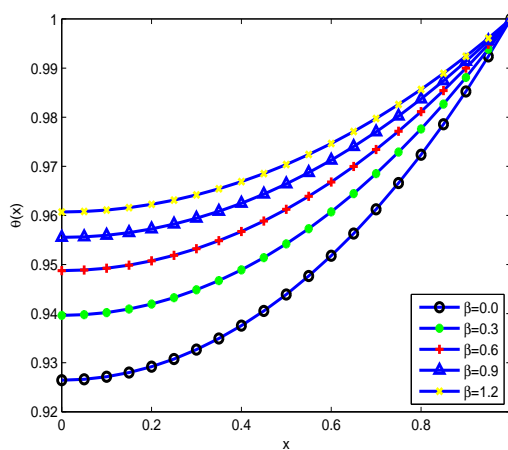
(b)



(a)



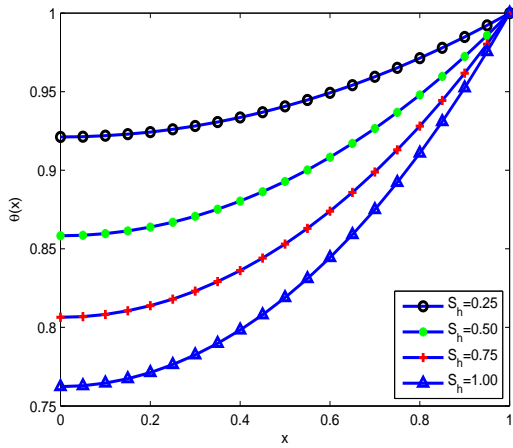
(c)



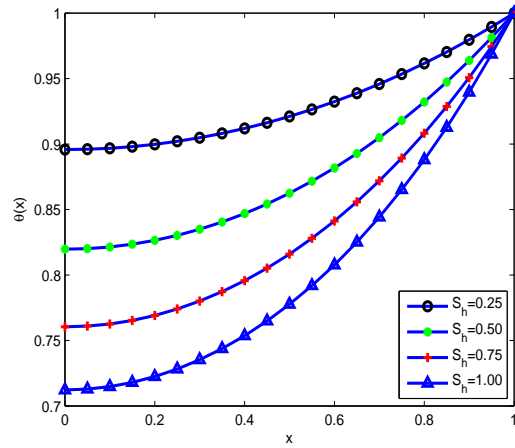
(d)

شکل ۲. توزیع دمایی بدون بعد در پارامترهای باله با تغییر پارامتر ترمو-ژئومتریکی وقتی

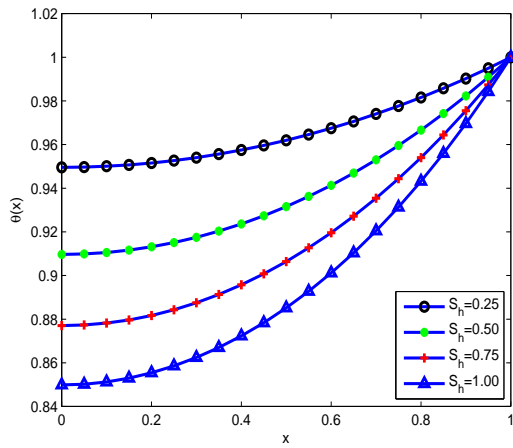
(a) :  $S_h = 1, Q = 0.4, \gamma = 0.2$  (b) :  $S_h = 1, Q = 0.6, \gamma = 0.2$  (c) :  $S_h = 0.5, Q = 0.4, \gamma = 0.5$  (d) :  $S_h = 0.5, Q = 0.4, \gamma = 0.2$ .



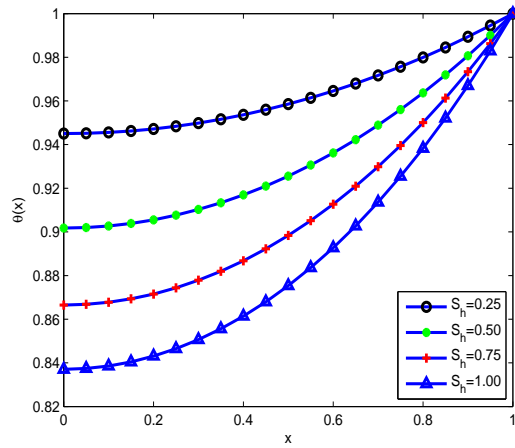
(b)



(a)

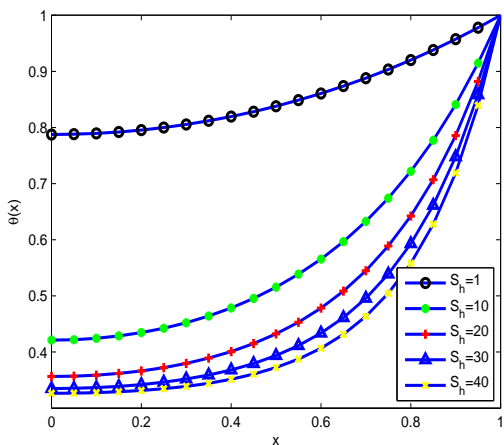


(d)

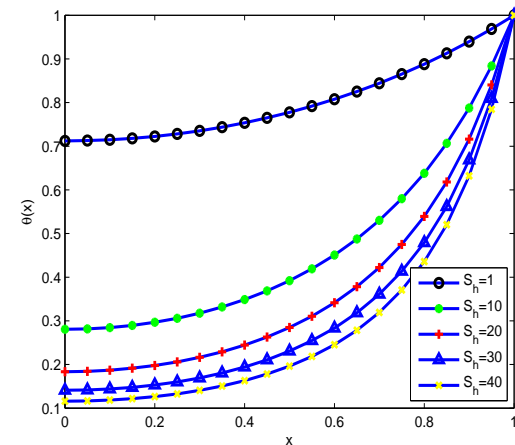


(c)

شکل ۳. توزیع دمای بدون بعد در پارامترهای باله با تغییر پارامتر ترمو-ژئومتریکی وقتی  
 (a) :  $\beta = 0, Q = 0, \gamma = 0$  (b) :  $\beta = 0.4, Q = 0, \gamma = 0$  (c) :  $\beta = 0.4, Q = 0.3, \gamma = 0$  (d) :  $\beta = 0.4, Q = 0.3, \gamma = 0.2$ .



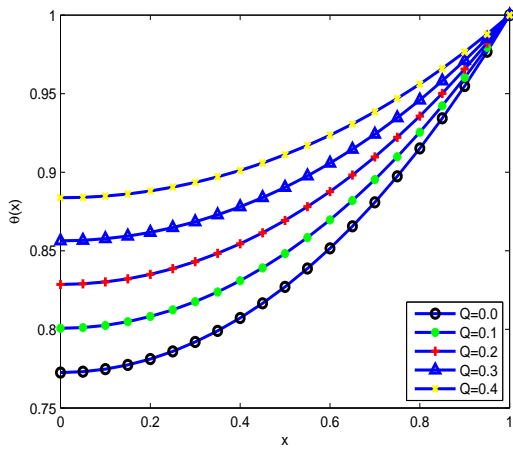
(b)



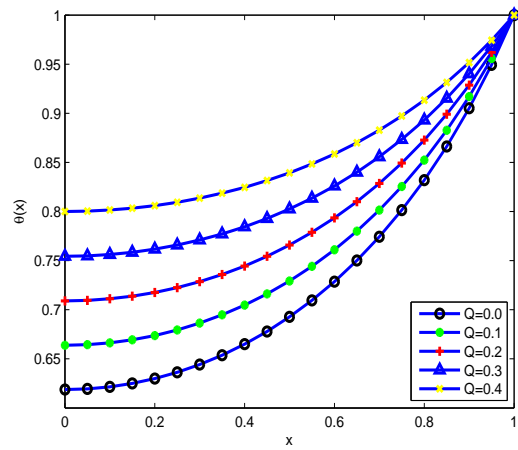
(a)

شکل ۴. اثر پارامتر متخلخل بر توزیع دما در پارامترهای باله وقتی.  $(a) : \beta = 0, Q = 0, \gamma = 0$  (b) :  $\beta = 0.4, Q = 0.1, \gamma = 0$ .

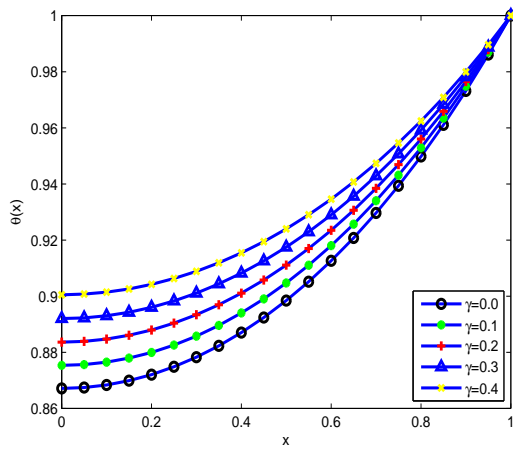




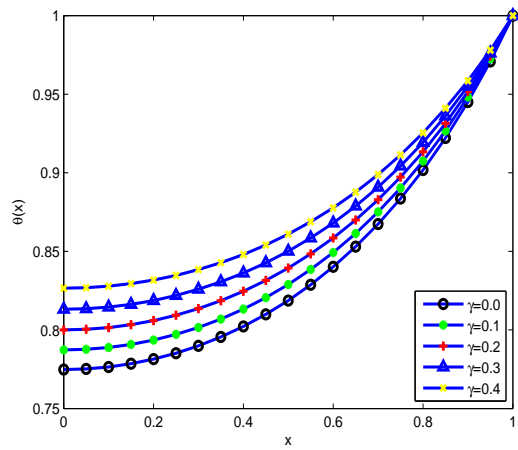
(b)



(a)

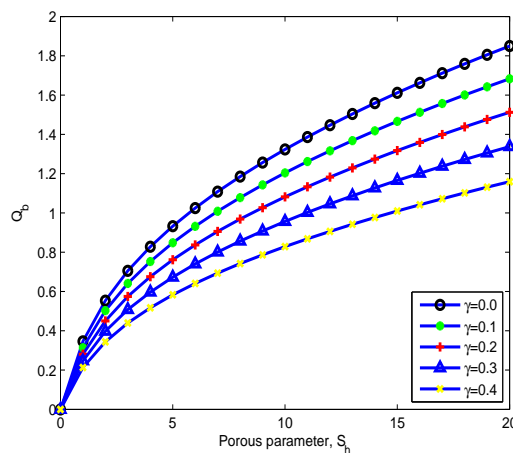


(d)

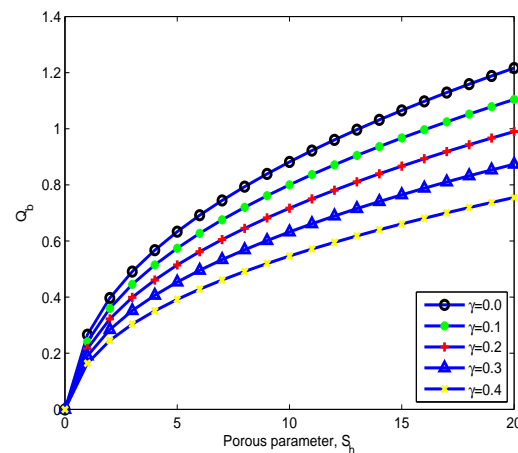


(c)

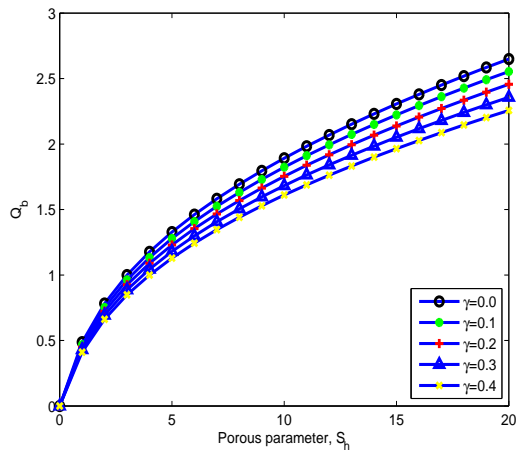
شکل ۵. توزیع دمایی بدون بعد در پارامترهای باله با تغییر پارامتر ترمو-ژئومتریکی وقتی  
 (a) :  $S_h = 1, \beta = -0.5, \gamma = 0.2$  (b) :  $S_h = 1, \beta = 0.5, \gamma = 0.2$  (c) :  $S_h = 1, \beta = -0.5, Q = 0.4$  (d) :  $S_h = 1, \beta = 0.5, Q = 0.4$ .



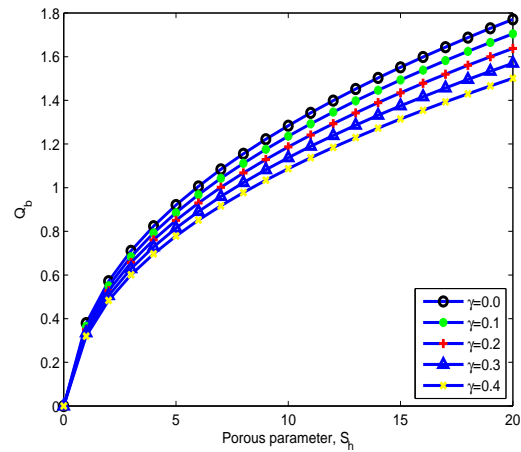
(b)



(a)

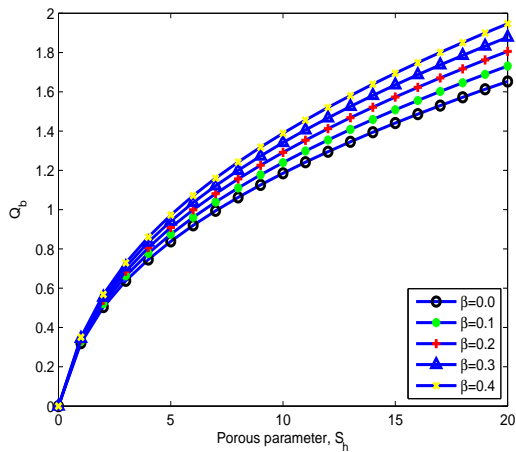


(d)

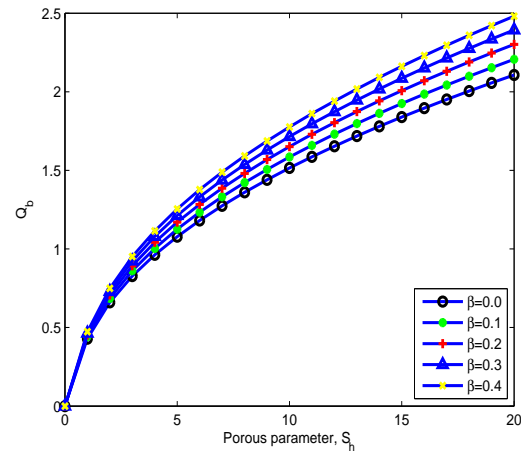


(c)

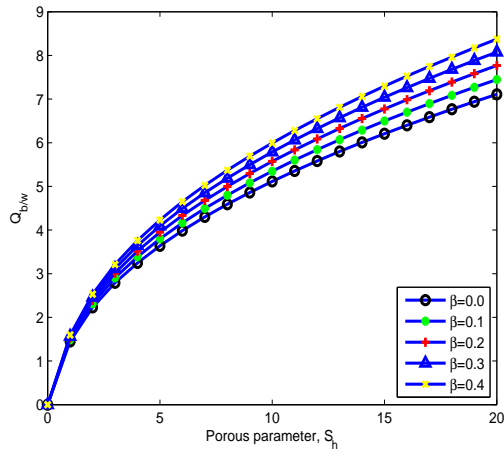
شکل ۶ اثر پارامتر تولید گرمای داخلی وابسته به دما بر میزان انتقال گرما بدون بعد در باله وقتی  
 (a) :  $\beta = -0.4, Q = 0.5$  (b) :  $\beta = 0.4, Q = 0.5$ , (c)  $\beta = -0.4, Q = 0.3$  (d) :  $\beta = 0.4, Q = 0.3$ .



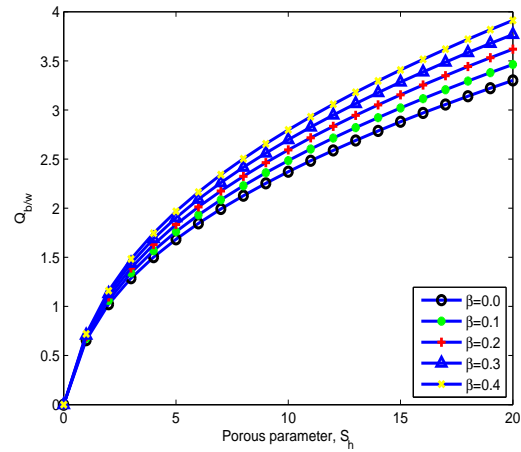
(b)



(a)

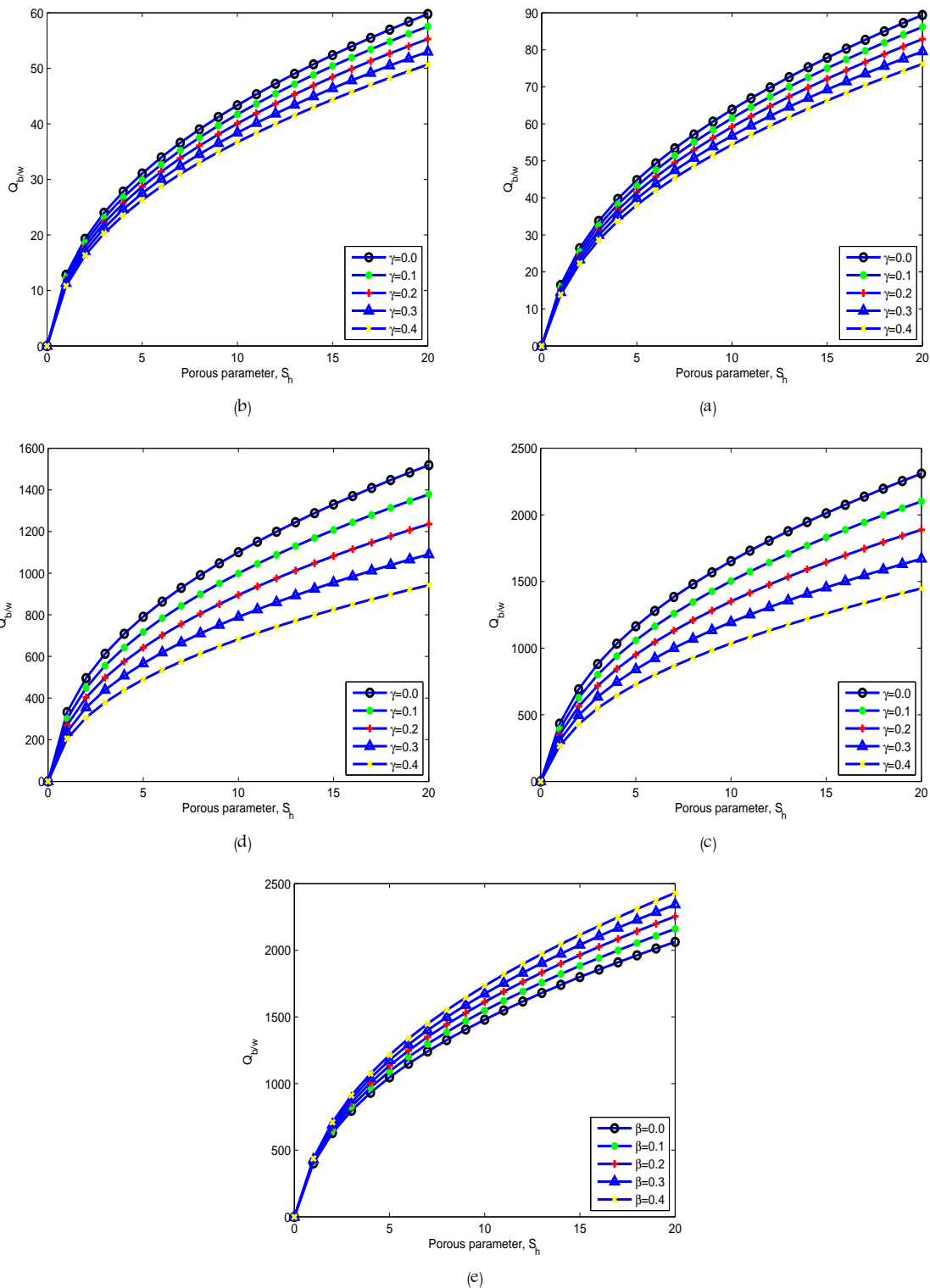


(d)



(c)

شکل ۷ اثر پارامتر هدایت حرارتی وابسته به دما و نسبت ضخامت به طول باله بر میزان انتقال گرما بدون بعد در پایه باله وقتی  
 (a) :  $\gamma = -0.4, Q = 0.5$  (b) :  $\gamma = 0.4, Q = 0.3$ , (c)  $t/L = 1/1000, k = 45W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \gamma = 0.4, Q = 0.5$  (d) :  $t/L = 1/1000, k = 45W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \gamma = -0.4, Q = 0.5$ .



شکل ۸. تاثیر تولید گرمای داخلی وابسته به دما و نسبت ضخامت به طول باله بر میزان انتقال گرما بدون بعد در باله وقتی  $(a) t/L = 1/100, k = 45W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \beta = 0.4, Q = 0.3$  (b) :  $t/L = 1/100, k = 45W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \beta = -0.4, Q = 0.3$  (c)  $t/L = 0.102/0.125, k = 204W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \beta = 0.4, Q = 0.5$  (d) :  $t/L = 0.102/0.125, k = 204W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \beta = -0.4, Q = 0.5$  (e) :  $t/L = 0.102/0.125, k = 204W/mK, T_b = 373K, T_\infty = 298K, \gamma = 0.7, Q = 0.3$ .

اینک، اثرات پارامتر هدایت حرارتی  $\beta$  را مطالعه می‌کنیم، پارامتر تولید گرمای درونی  $\gamma$  و پارامتر متخلخل  $S_h$  و سرعت انتقال حرارت در واحد سطح  $Q$  بر دمای بدون بعد  $\theta$  شکل‌های ۲، ۳، ۴، ۵ پروفایل توزیع دما را برای پارامترهای مختلف نشان می‌دهد. در حالت کلی افزایش دما با افزایش طول باله  $x$  افزایش می‌یابد. همچنین وقتی پارامتر هدایت حرارتی افزایش می‌یابد دما افزایش می‌یابد و دما کاهش می‌یابد وقتی پارامتر متخلخل افزایش می‌یابد. به‌علاوه دما با افزایش پارامتر تولید گرمای درونی بدون بعد یعنی  $\gamma$  افزایش می‌یابد. ما نرخ انتقال حرارت بدون بعد را در پایه باله متخلخل و میزان انتقال حرارت در واحد عرض حذف شده به‌وسیله یک باله متخلخل در مقابل پارامتر متخلخل را در

شکل های ۶، ۷، ۸ ترسیم کرده‌ایم. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش پارامتر متخلخل منجر به افزایش نرخ انتقال حرارت در پایه باله متخلخل می‌شود. به علاوه نرخ انتقال حرارت در پایه باله متخلخل کاهش می‌یابد در حالی که پارامتر هدایت حرارتی بدون بعد در حال افزایش است همچنین بدیهی است که نرخ انتقال حرارت در عرض واحد افزایش می‌یابد در حالی که پارامتر هدایت حرارتی افزایش می‌یابد.

## ۶ نتیجه گیری

به منظور ارایه جواب دقیق تر و تفسیر فیزیکی بیشتر، پژوهش حاضر به حل آنالیز حرارتی یک باله متخلخل همرفت طبیعی با تولید گرما و هدایت حرارتی وابسته به دمای داخلی اختصاص یافته است. در مورد مساله در نظر گرفته شده فرضیاتی لحاظ شده است، مانند، مقاومت تماس حرارتی در پایه باله وجود ندارد، نوک باله از نوع آدیاباتیک است، ویژگی‌های بدنی جامد همچنین مایع بجز چگالی مایع ثابت فرض شده است و محیط متخلخل همگن، ایزوتروپیک و با یک مایع تک‌فاز اشباع می‌شود. یک تکنیک هوشمند جدید که تا حدی وابسته به انتخاب و ساخت پایه‌های مناسب است، برای به دست آوردن جواب تقریبی مساله پیشنهاد شده است. ابتدا معادله اصلی به یک مساله معادل با شرایط مرزی همگن در بازه  $[-1, 1]$  تبدیل می‌شود، سپس چندجمله‌ای بهینه‌شده چپیشف نوع اول که برای جواب به صورت سری تقریبی با وزن‌های مجهول ساخته می‌شود. به علاوه با تعریف یک مساله بهینه‌سازی و می‌نیم‌سازی آن، همه وزن‌های مجهول با روش نقطه درونی به دست می‌آید. همچنین ما اثرات دقیق پارامترهای مختلف روی عملکرد حرارتی باله متخلخل را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

## فهرست منابع

- [1] S. Abbasbandy, E. Magyari, and E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **14** (2009) 3530–3536.
- [2] S. Abbasbandy and E. Shivanian, Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **15** (2010) 3830–3846.
- [3] S. Abbasbandy and E. Shivanian, Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **16** (2011) 2456–2468.
- [4] A. Akgül and M.S. Hashemi, Group preserving scheme and reproducing kernel method for the Poisson–Boltzmann equation for semiconductor devices, *Nonlinear Dynamics* **88(4)** (2017) 2817–2829.
- [5] M. Anbarloei and E. Shivanian, Exact closed-form solution of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient, *Journal of Heat Transfer*, **138(11)** (2016) 114501.
- [6] N.H. Asmar, *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*, Courier Dover Publications, (2016).
- [7] D. Bhanja and B. Kundu, Thermal analysis of a constructal t-shaped porous fin with radiation effects. *international journal of refrigeration*, **34(6)** (2011) 1483–1496.
- [8] M.T. Darvishi, R. Subba, R. Gorla, F. Khani, and A. Aziz, Thermal performance of a porous radial fin with natural convection and radiative heat losses, *Thermal Science*, **19(2)** (2015) 669–678.
- [9] N. Duvvuru and K.S. Swarup, A hybrid interior point assisted differential evolution algorithm for economic dispatch, *IEEE Transactions on Power Systems*, **26(2)** (2011) 541–549.
- [10] D.D. Ganji, The application of he's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Phys. Lett. A*, **335** (2006) 337–341.

- [11] S.E. Ghasemi, P. Valipour, M. Hatami, and D.D. Ganji, Heat transfer study on solid and porous convective fins with temperature-dependent heat generation using efficient analytical method, *J. Cent. South Univ.*, **21(12)** (2014) 4592–4598.
- [12] R. Gorla, R.S. Darvishi, and M.T. Khani, Effects of variable thermal conductivity on natural convection and radiation in porous fins, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, **38** (2013) 638–645.
- [13] M.S. Hashemi, A novel simple algorithm for solving the magneto-hemodynamic flow in a semi-porous channel, *European Journal of Mechanics-B/Fluids* **65** (2017) 359-367.
- [14] M.S. Hashemi and S. Abbasbandy, A geometric approach for solving Troesch's problem, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* **40(1)** (2017) 97-116.
- [15] M. Hatami and D.D. Ganji, Thermal performance of circular convective–radiative porous fins with different section shapes and materials, *Energy Conversion and Management*, **76** (2013) 185–193.
- [16] J.P.J. Heemskerk, F.G. Van Kuik, H.F.P. Knaap, and J.J.M. Beenakker, The thermal conductivity of gases in a magnetic field: The temperature dependence, *Physica*, **71(3)** (1974) 484 – 514.
- [17] H.A. Hoshyar, D.D. Ganji, and M. Abbasi, Determination of temperature distribution for porous fin with temperature-dependent heat generation by homotopy analysis method, *J Appl Mech Eng*, **4(153)** (2015) 2.
- [18] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, ACM, (1984) 302–311.
- [19] S. Kim and C.H. Huang, A series solution of the non-linear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **40** (2007) 2979–2987.
- [20] F. Khani, M. A. Raji, and H. Hamed-Nejad, Analytical solutions and efficiency of the nonlinear fin problem with temperature-dependent thermal conductivity and heat transfer coefficient, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **14** (2009) 3327–3338.
- [21] S. Kiwan, Effect of radiative losses on the heat transfer from porous fins, *International journal of thermal sciences*, **46(10)** (2007) 1046–1055.
- [22] S. Kiwan, Thermal analysis of natural convection porous fins, *Transport in porous media*, **67(1)** (2007) 17–29.
- [23] S. Kiwan and M. Al-Nimr, Using porous fins for heat transfer enhancement, *Tc*, **1(2)** (2001).
- [24] S. Kiwan and O. Zeitoun, Natural convection in a horizontal cylindrical annulus using porous fins, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **18(5)** (2008) 618–634.
- [25] B. Kundu, Performance and optimization analysis of src profile fins subject to simultaneous heat and mass transfer, *International journal of heat and mass transfer*, **50(7)** (2007) 1545–1558.
- [26] S.J. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, Chapman & Hall/CRC Press, London/Boca Raton (FL), (2003).
- [27] S.J. Liao, *homotopy analysis method in nonlinear differential equations*, Springer-Verlag, Beijing, (2012).

- [28] A. Moradi, T. Hayat, and A. Alsaedi, Convection-radiation thermal analysis of triangular porous fins with temperature-dependent thermal conductivity by dtm, *Energy Conversion and Management*, **77** (2014) 70–77.
- [29] M. Neek-Amal, R. Moussavi, and H.R. Sepangi, Monte carlo simulation of size effects on thermal conductivity in a two-dimensional ising system, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **371(2)** (2006) 424 – 432.
- [30] M. AZ. Raja and R. Samar, Numerical treatment for nonlinear mhd jeffery–hamel problem using neural networks optimized with interior point algorithm, *Neurocomputing*, **124** (2014) 178–193.
- [31] T.J. Rivlin, *Chebyshev polynomials*, john wiley and sons, New York, (1990).
- [32] Y. Rostamiyan, D.D. Ganji, R.I. Petroudi, and Kh. Mehdi-Nejad, Analytical investigation of nonlinear model arising in heat transfer through the porous fin, *Thermal science*, **18(2)** (2014) 409–417.
- [33] S. Saedodin and A. Sadeghi, Temperature distribution in long porous fins in natural convection condition, *Middle-East J Sci Res*, **13(6)** (2013) 812–827.
- [34] S. Saedodin and M. Shahbabaie, Thermal analysis of natural convection in porous fins with homotopy perturbation method (hpm), *Arabian Journal for Science & Engineering (Springer Science & Business Media BV)*, **38(8)** (2013).
- [35] E. Shivanian, H.H. Alsulami, M.S. Alhuthali, and S. Abbasbandy, Predictor homotopy analysis method (PHAM) for nano boundary layer flows with nonlinear navier boundary condition: Existence of four solutions, *Filomat*, **28(8)** (2014) 1687–1697.
- [36] R.M. Slevinsky and H. Safouhi, New formulae for higher order derivatives and applications, *Journal of computational and applied mathematics*, **233(2)** (2009) 405–419.
- [37] M.G. Sobamowo, O.M. Kamiyo, and O.A. Adeleye, Thermal performance analysis of a natural convection porous fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation, *Thermal Science and Engineering Progress*, **1** (2017) 39–52.
- [38] R. Subba, R. Gorla and A.Y. Bakier, Thermal analysis of natural convection and radiation in porous fins, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **38(5)** (2011) 638–645.
- [39] H. Tari, D.D. Ganji, and H. Babazadeh, The application of he’s variational iteration method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Phys. Lett. A*, **363** (2007) 213–217.
- [40] H. Vosoughi, E. Shivanian, and S. Abbasbandy, Unique and multiple PHAM series solutions of a class of nonlinear reactive transport model, *Numer Algor.*, **61(3)** (2012) 515–524.
- [41] S.J. Wright, *Primal-dual interior-point methods*, SIAM, (1997).
- [42] M. Wright, The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences, *Bulletin of the American mathematical society*, **42(1)** (2005) 39–56.
- [43] W. Yan, L. Wen, W. Li, C.Y. Chung, and K.P. Wong, Decomposition–coordination interior point method and its application to multi-area optimal reactive power flow, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, **33(1)** (2011) 55–60.



## Natural convection porous fin with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation via optimized Chebyshev polynomials with interior point algorithm

Elyas Shivanian<sup>1, ††</sup>, Mahdi Keshtkar<sup>2</sup>, Hedayat Fatahi<sup>3</sup>

(<sup>1</sup>) Department of Applied Mathematics, Imam Khomeini International University, Qazvin, 34148-96818, Iran

(<sup>2</sup>) Department of Mathematics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran

(<sup>3</sup>) Department of Mathematics, Marivan Branch, Islamic Azad University, Marivan, Iran

Received: 2020/9/15

Accepted: 2020/12/28

Communicated by: M. H. Farahi

**Abstract:** In this study, thermal behaviour analysis of a natural convection porous fin with internal heat generation and temperature dependent thermal conductivity is revisited. The developed symbolic heat transfer models are for the purpose of the investigation of the effects of different parameters on the thermal performance of the porous fin. Regarding the problem formulation, a novel intelligent computational approach is developed for searching the solution. In order to achieve this aim, the governing nonlinear differential equation is transformed into an equivalent problem whose boundary conditions are such that they are convenient to apply reformed version of Chebyshev polynomials of the first kind. These Chebyshev polynomials based functions construct approximate series solution with unknown weights. The mathematical formulation of optimization problem consists of an unsupervised error which is minimized by tuning weights via interior point method. The trial approximate solution is validated by imposing tolerance constrained into optimization problem. Furthermore, the obtained results are more accurate than those reported in previous researches.

**Keywords:** Chebyshev polynomial of the first kind; Interior point method; Natural convection; Porous fin; Thermal performance; Temperature-dependent thermal conductivity; Internal heat generation.[10pt]

**Mathematics Subject Classification (2010):**34-XX, 34BXX, 90-XX.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>††</sup>Corresponding author: [shivanian@sci.ikiu.ac.ir](mailto:shivanian@sci.ikiu.ac.ir) (E. Shivanian)  
[keshtkarmahdi@gmail.com](mailto:keshtkarmahdi@gmail.com) (M. Keshtkar) [fatahi\\_iau@yahoo.com](mailto:fatahi_iau@yahoo.com) (H. Fatahi)