



زمان مورد انتظار آزمایش، برآوردیابی و پیش بینی برای توزیع لیندلی توانی بر اساس داده های سانسور شده ی فزاینده ی نوع دو با برداشت های دو جمله ای

اسماعیل عزیزی، سید محمد تقی کامل میرمصطفائی*

گروه آمار، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۷/۲۹

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۸/۲۴

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

چکیده: در این مقاله، مسأله ی برآوردیابی و پیش بینی برای توزیع لیندلی توانی بر اساس داده های سانسور شده ی فزاینده ی نوع دو با برداشت های دو جمله ای مورد مطالعه قرار می گیرد. ابتدا به برآوردیابی پارامترهای توزیع لیندلی توانی به کمک روش های درست نمایی ماکسیمم و بیزی می پردازیم. برآوردیابی بیزی پارامترها بر اساس تابع زیان متقارن توان دوم خطا و تابع زیان نامتقارن آنتروپی عمومی صورت می پذیرد. از آن جا که برآوردهای بیزی شامل انتگرال هایی است که به نظر می رسند فرم صریحی ندارند، برای تقریب این انتگرال ها از الگوریتم متروپولیس-هستینگس بهره می گیریم. یک مطالعه ی شبیه سازی برای بررسی عملکرد برآوردهای پارامترها ارائه شده است. در ادامه، مسأله ی پیش بینی بیزی یک نمونه ای و دونمونه ای مورد بحث قرار می گیرد. یک مثال واقعی برای نشان دادن کاربرد روش های نظری ارائه شده در مقاله ارائه می گردد. همچنین، مسأله ی زمان مورد انتظار آزمایش با کمک رسم نمودارهایی مورد مطالعه قرار می گیرد. مقاله با چندین نتیجه گیری پایان می پذیرد.

واژه های کلیدی: الگوریتم متروپولیس-هستینگس، تابع زیان آنتروپی عمومی، زمان مورد انتظار آزمایش، روش دلتا، سانسور فزاینده با برداشت دو جمله ای، شبیه سازی.

رده بندی ریاضی: 62F10; 62F15; 65C40

۱) مقدمه

در بسیاری از آزمایش های طول عمر، بهره گیری از سانسور در راستای صرفه جویی در زمان و هزینه وسوسه کننده بوده است. دو نوع از سانسورهای ساده ی شناخته شده عبارتند از سانسور نوع یک و سانسور نوع دو. در سانسور نوع یک، زمان آزمایش از قبل تعیین می گردد، در حالی که در سانسور نوع دو، تعداد واحدهایی که باید مشاهده گردند، از قبل مشخص می شود. تعمیمی از سانسور نوع دو، سانسور فزاینده ی نوع دو می باشد. فرض کنید n واحد آزمایشی مستقل در زمان صفر به کار گرفته می شوند و تصمیم بر آن است که m زمان شکست ثبت گردند که $1 \leq m \leq n$. در سانسور فزاینده ی نوع دو، بلافاصله بعد از مشاهده ی اولین زمان شکست، R_1 واحد از $n - 1$ واحد آزمایشی باقیمانده

*نویسنده مسئول مقاله

به‌طور تصادفی حذف می‌شوند و بلافاصله بعد از مشاهده‌ی دومین زمان شکست، R_2 واحد به تصادف از $2 - R_1 - n$ واحد باقیمانده سانسور می‌شوند و این روند ادامه می‌یابد تا آن که m زمان شکست مشاهده گردند و آزمایش با سانسور کردن $m = n - R_1 - R_2 - \dots - m$ واحد باقیمانده پایان می‌پذیرد. برای مطالعه‌ی مجموعه‌ی جامعی از مباحث مربوط به تئوری و کاربردهای سانسور فزاینده‌ی نوع دو به کتاب بالا کریشن و آگاروالا [۱] مراجعه نمایید.

با وجود این، در برخی از موقعیت‌ها، تعداد واحدهای مورد آزمایش که در هر مرحله باید سانسور گردند، نمی‌تواند از قبل تعیین گردد. برای مثال، در برخی از مطالعات قابلیت اعتماد، ممکن است ادامه‌ی آزمایش بر برخی از واحدهای آزمایشی خطرناک یا نامناسب باشد که تعداد این واحدها از قبل مشخص نیست. ایده‌ی استنباط بر اساس نمونه‌های سانسور شده‌ی فزاینده با برداشت‌های تصادفی اولین بار توسط یوان و تسه [۳۹] مطرح گردید که آن‌ها از این ایده برای برآوردیابی پارامترهای توزیع وایبل بهره بردند. در ادامه، تسه و همکاران [۳۵] تحلیل آماری داده‌های طول عمر دارای توزیع وایبل را تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو که برداشت‌های آن دارای توزیع دوجمله‌ای باشند، بررسی کردند. از این تاریخ به بعد، آماردانان بسیاری تحلیل آماری بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های تصادفی را برای توزیع‌های گوناگون طول عمر مورد توجه قرار دادند که از میان آن‌ها می‌توان به تسه و خیانگ [۳۴]، وو و همکاران [۳۸]، سینگ و همکاران [۳۳]، دی و دی [۷]، سینگ و همکاران [۳۲] و دی و همکاران [۸] اشاره کرد.

یکی از توزیع‌های طول عمر که اخیراً مورد توجه قرار گرفته است، توزیع لیندلی توانی است که توسط قیتانی و همکاران [۱۱] معرفی گردیده است. تابع چگالی احتمال توزیع لیندلی توانی به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^2}{\beta+1} (1+x^\alpha)x^{\alpha-1}e^{-\beta x^\alpha}, \quad x > 0, \quad (1.1)$$

که α و β پارامترهای شکل مثبت می‌باشند. تابع توزیع تجمعی متناظر با آن نیز به‌صورت زیر می‌باشد

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{\beta x^\alpha}{\beta+1}\right) e^{-\beta x^\alpha}, \quad x > 0. \quad (2.1)$$

توزیع لیندلی توانی در سال‌های اخیر مورد توجه برخی از آماردانان بوده است. قیتانی و همکاران [۱۰] به برآوردیابی پارامتر تنش-مقاومت بر اساس نمونه‌های تصادفی ساده از این توزیع پرداختند. ولی الهی و همکاران [۳۶] به مطالعه‌ی مسأله‌ی برآوردیابی و پیش‌بینی در توزیع لیندلی توانی بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو پرداختند. پاک و دی [۱۹] استنباط آماری برای توزیع لیندلی توانی بر اساس رکوردها و زمان بین رکوردها را مورد توجه قرار دادند. جوکار و همکاران [۱۶] مسأله‌ی برآوردیابی پارامتر تنش-مقاومت را در این توزیع بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله، به مسأله‌ی برآوردیابی، پیش‌بینی یک‌نمونه‌ای و دونمونه‌ای و بررسی زمان مورد انتظار آزمایش برای توزیع لیندلی توانی بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای می‌پردازیم که برداشت‌های دوجمله‌ای دارای پارامتر مشترک احتمال موفقیت p می‌باشند. برآوردگرهای نقطه‌ای کلاسیک به کمک روش درست‌نمایی ماکسیمم به‌دست می‌آیند. برای برآوردیابی بیزی از دو تابع زیان متقارن و نامتقارن بهره می‌گیریم. از آن‌جا که به‌نظر می‌رسد انتگرال‌های مربوط به برآوردهای بیزی دارای فرم بسته‌ای نیستند، الگوریتم متروپولیس-هستینگس را برای تقریب این انتگرال‌ها پیشنهاد می‌کنیم. یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای ارزیابی انواع برآوردگرهای پیشنهادی ارائه می‌گردد. همچنین، نگاهی بر پیش‌بینی یک‌نمونه‌ای و دونمونه‌ای می‌اندازیم و با ارائه‌ی یک مثال شامل داده‌های واقعی، کاربردی از روش‌های پیشنهادی برای برآوردیابی و پیش‌بینی را نشان می‌دهیم. سپس به مطالعه‌ی زمان مورد انتظار آزمایش تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای می‌پردازیم و نمودارهایی در راستای مقایسه‌ی زمان‌های مورد انتظار آزمایش تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای و آزمایش تحت نمونه‌ی کامل ارائه می‌دهیم. مقاله با چند نتیجه‌گیری پایان می‌پذیرد.

۲ برآوردیابی پارامترهای توزیع لیندلی توانی بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای

فرض کنید $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای به حجم m باشد که از نمونه‌ای به حجم n استخراج شده است، به‌طوری‌که طول عمرها از توزیع لیندلی توانی با تابع چگالی احتمال (۱.۱) پیروی می‌کنند. همچنین فرض می‌کنیم $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ نمونه‌ی مشاهده شده‌ی این آماره‌های ترتیبی سانسور شده باشد و $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ طرح سانسور باشد. از این رو تابع درست‌نمایی شرطی، به شرط داشتن $\mathbf{R} = \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)$ برابر

است با (به بالا کریشان و آگاروالا [۱] مراجعه کنید)

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{R} = \mathbf{r}) &= C \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{r_i} \\ &= \frac{C \alpha^m \beta^m}{(\beta + 1)^n} e^{-\beta \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (1+r_i)} \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha-1} (1 + x_i^\alpha) (1 + \beta + \beta x_i^\alpha)^{r_i}, \end{aligned}$$

که $C = n(n-1-r_1)(n-2-r_1-r_2)\dots(n-m+1-r_1-\dots-r_m)$ فرض می کنیم هر واحدی که به طور جداگانه از آزمون حذف می شود، از سایر واحدهای آزمایشی مستقل است. همچنین تعداد واحدهای برداشت شده در هر مرحله دارای توزیع احتمالی دو جمله ای با تابع های احتمال زیر هستند

$$P(R_1 = r_1) = \binom{n-m}{r_1} p^{r_1} (1-p)^{n-m-r_1}; \quad 0 \leq r_1 \leq n-m, \quad (1.2)$$

9

$$P(R_i = r_i | R_{i-1} = r_{i-1}, \dots, R_1 = r_1) = \binom{n-m - \sum_{k=1}^{i-1} r_k}{r_i} p^{r_i} (1-p)^{n-m - \sum_{k=1}^i r_k}, \quad (2.2)$$

که در آن $0 \leq r_i \leq n-m - \sum_{k=1}^{i-1} r_k, i = 2, 3, \dots, m-1$ همچنین فرض می کنیم که R_i ها از توزیع طول عمرها مستقل هستند. بنابراین تابع درست نمایی توأم $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ و $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$L(\theta, p; \mathbf{x}, \mathbf{r}) = L(\theta | p, \mathbf{x}, \mathbf{R} = \mathbf{r}) P(\mathbf{R} = \mathbf{r}), \quad (3.2)$$

که $\theta = (\alpha, \beta)$ به طوری که

$$P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) = P(R_{m-1} = r_{m-1} | R_{m-2} = r_{m-2}, \dots, R_1 = r_1) \dots P(R_2 = r_2 | R_1 = r_1) P(R_1 = r_1). \quad (4.2)$$

با جایگذاری (۱.۲) و (۲.۲) در رابطه ی (۳.۲) و سرانجام از جایگذاری (۴.۲) در (۳.۲) داریم

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, p; \mathbf{x}, \mathbf{r}) &= L(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{R} = \mathbf{r}) P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) \\ &= C^* L_1(\alpha, \beta) L_2(p), \end{aligned} \quad (5.2)$$

که

$$C^* = \frac{C(n-m)!}{(n-m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i)! \prod_{i=1}^{m-1} r_i!}$$

9

$$\begin{aligned} L_1(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha^m \beta^m}{(\beta + 1)^n} e^{-\beta \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (1+r_i)} \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha-1} (1 + x_i^\alpha) (1 + \beta + \beta x_i^\alpha)^{r_i}, \\ L_2(p) &= p^{\sum_{i=1}^{m-1} r_i} (1-p)^{(m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i}. \end{aligned}$$

در این بخش، ابتدا روش درست نمایی ماکسیمم را برای به دست آوردن برآوردگرهای نقطه ای و فاصله ای پارامترهای مجهول به کار می بریم، سپس در ادامه به برآوردیابی بیزی این پارامترها توجه می کنیم.

۱.۲ برآوردیابی درست‌نمایی ماکسیمم

با توجه به (۵.۲)، لگاریتم تابع درست‌نمایی پارامترها عبارت است از

$$\ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{x}, \mathbf{r}) \equiv \ell(\alpha, \beta, p) = \log L(\alpha, \beta, p; \mathbf{x}, \mathbf{r}) = \log C^* + \ell_1(\alpha, \beta) + \ell_2(p),$$

که $\ell_1(\alpha, \beta) = \log L_1(\alpha, \beta)$ و $\ell_2(p) = \log L_2(p)$. توجه کنید که $\log C^*$ به پارامتر وابسته نیست، $\ell_1(\alpha, \beta)$ به پارامتر p بستگی ندارد و $\ell_2(p)$ نیز بستگی به پارامترهای α و β ندارد.

برای به دست آوردن برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول مدل کافی است لگاریتم تابع درست‌نمایی را ماکسیمم سازی کنیم. بنابراین برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای α و β با حل دو معادله‌ی غیر خطی زیر به‌طور هم‌زمان به دست می‌آیند

$$\frac{\partial \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha} - \beta \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (\mathbf{1} + r_i) \log x_i + \sum_{i=1}^m \frac{x_i^\alpha \log x_i}{\mathbf{1} + x_i^\alpha} + \sum_{i=1}^m \log x_i + \sum_{i=1}^m \frac{r_i \beta x_i^\alpha \log x_i}{\mathbf{1} + \beta + \beta x_i^\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\mathbf{2}m}{\beta} - \frac{n}{\beta + \mathbf{1}} - \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (\mathbf{1} + r_i) + \sum_{i=1}^m \frac{r_i (\mathbf{1} + x_i^\alpha)}{\mathbf{1} + \beta + \beta x_i^\alpha} = 0.$$

همچنین، برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامتر p عبارت است از

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} r_i}{(m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i-1)r_i}.$$

برای به دست آوردن فاصله‌ی اطمینان تقریبی پارامترهای α ، β و p از خواص مجانبی برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم (MLE[†]) استفاده می‌کنیم. MLE های α ، β و p را به ترتیب با $\hat{\alpha}_M$ ، $\hat{\beta}_M$ و \hat{p}_M نشان می‌دهیم. تحت برخی شرایط نظم، توزیع توأم مجانبی برآوردها به‌صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_M - \alpha \\ \hat{\beta}_M - \beta \\ \hat{p}_M - p \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_{\mathfrak{r}}(\mathbf{0}, \mathbf{J}_F^{-1}(\alpha, \beta, p)),$$

که در آن \xrightarrow{D} نشان‌دهنده‌ی همگرایی در توزیع و $\mathbf{J}_F^{-1}(\alpha, \beta, p)$ معکوس ماتریس اطلاع فیشر، $\mathbf{J}_F(\alpha, \beta, p)$ می‌باشد. در کاربرد، می‌توان به جای ماتریس اطلاع فیشر از برآوردها آن بهره برد. ماتریس زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{I}_F(\alpha, \beta, p) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \beta \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial p \partial \alpha} \\ -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \alpha \partial \beta} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \beta^2} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial p \partial \beta} \\ -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \alpha \partial p} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial \beta \partial p} & -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p; \mathbf{X}, \mathbf{R})}{\partial p^2} \end{pmatrix},$$

که درایه‌های مشاهده شده‌ی آن به‌صورت زیر می‌باشند

$$-\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \alpha^2} = \frac{m}{\alpha^2} + \beta \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (\mathbf{1} + r_i) (\log x_i)^2 - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^\alpha (\log x_i)^2}{(\mathbf{1} + x_i^\alpha)^2} - \sum_{i=1}^m \frac{r_i \beta (\mathbf{1} + \beta) x_i^\alpha (\log x_i)^2}{(\mathbf{1} + \beta + \beta x_i^\alpha)^2},$$

$$-\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \beta \partial \alpha} = \sum_{i=1}^m x_i^\alpha (\mathbf{1} + r_i) \log x_i - \sum_{i=1}^m \frac{r_i x_i^\alpha \log x_i}{(\mathbf{1} + \beta + \beta x_i^\alpha)^2},$$

$$-\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \beta^2} = \frac{\mathbf{2}m}{\beta^2} - \frac{n}{(\beta + \mathbf{1})^2} + \sum_{i=1}^m \frac{r_i (\mathbf{1} + x_i^\alpha)^2}{(\mathbf{1} + \beta + \beta x_i^\alpha)^2},$$

[†] maximum likelihood estimator

$$-\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial p^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} r_i}{p^2} + \frac{(m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i}{(1-p)^2},$$

$$-\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \beta \partial p} = -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial \alpha \partial p} = -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial p \partial \beta} = -\frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta, p)}{\partial p \partial \alpha} = 0.$$

می توان با جایگذاری MLE متناظر هر پارامتر در درایه های ماتریس $I_F(\alpha, \beta, p)$ ماتریس اطلاع فیشر را برآورد نمود. اگر ماتریس $I_F^{-1}(\alpha, \beta, p)$ نمایانگر معکوس ماتریس $I_F(\alpha, \beta, p)$ باشد، آن گاه یک برآوردگر برای ماتریس واریانس-کوواریانس مجانبی بردار $(\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M, \hat{p}_M)^T$ به صورت زیر است

$$I_F^{-1}(\alpha, \beta, p) \Big|_{(\alpha, \beta, p) = (\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M, \hat{p}_M)} = \begin{pmatrix} \widehat{Var}(\hat{\alpha}_M) & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_M, \hat{\alpha}_M) & \widehat{Cov}(\hat{p}_M, \hat{\alpha}_M) \\ \widehat{Cov}(\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M) & \widehat{Var}(\hat{\beta}_M) & \widehat{Cov}(\hat{p}_M, \hat{\beta}_M) \\ \widehat{Cov}(\hat{\alpha}_M, \hat{p}_M) & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_M, \hat{p}_M) & \widehat{Var}(\hat{p}_M) \end{pmatrix}.$$

در نتیجه، فاصله های اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای این پارامترها به صورت زیر به دست می آید

$$\hat{\alpha}_M \pm z_{\tau/2} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\alpha}_M)}, \quad \hat{\beta}_M \pm z_{\tau/2} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_M)}, \quad \hat{p}_M \pm z_{\tau/2} \sqrt{\widehat{Var}(\hat{p}_M)},$$

که $z_{\tau/2}$ نشان دهنده ی چندک $\tau/2$ بالایی توزیع نرمال استاندارد می باشد. ممکن است که فاصله ی اطمینان به دست آمده برای α در فضای پارامتر قرار نگیرد. لذا تبدیل $\varphi(\alpha) = \log \alpha$ را در نظر می گیریم. با استفاده از روش دلتا (برای مثال به کتاب شائو [۳۱] صفحه های ۴۳ تا ۴۵ مراجعه کنید)، توزیع مجانبی MLE ی $\varphi(\alpha)$ که $\varphi(\hat{\alpha}_M)$ می باشد، عبارت است از

$$(\varphi(\hat{\alpha}_M) - \varphi(\alpha)) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{Var(\hat{\alpha}_M)}{\alpha^2}\right).$$

در نتیجه فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای $\varphi(\alpha)$ عبارت است از

$$\varphi(\hat{\alpha}_M) \pm z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\alpha}_M)}}{\hat{\alpha}_M} \equiv (L_\alpha, U_\alpha).$$

در نهایت فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای α به صورت زیر به دست می آید

$$(e^{L_\alpha}, e^{U_\alpha}) \equiv \left(\hat{\alpha}_M \exp \left\{ -z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\alpha}_M)}}{\hat{\alpha}_M} \right\}, \hat{\alpha}_M \exp \left\{ z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\alpha}_M)}}{\hat{\alpha}_M} \right\} \right).$$

به طور مشابه فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای β نیز به صورت زیر به دست می آید

$$\left(\hat{\beta}_M \exp \left\{ -z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_M)}}{\hat{\beta}_M} \right\}, \hat{\beta}_M \exp \left\{ z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_M)}}{\hat{\beta}_M} \right\} \right).$$

برای به دست آوردن فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای p که در فضای پارامتر قرار گیرد، از تبدیل $\varphi^*(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ استفاده می کنیم. با استفاده از روش دلتا، توزیع مجانبی MLE ی $\varphi^*(p)$ که $\varphi^*(\hat{p}_M)$ می باشد، عبارت است از

$$(\varphi^*(\hat{p}_M) - \varphi^*(p)) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{Var(\hat{p}_M)}{p^2(1-p)^2}\right).$$

در نتیجه فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای $\varphi^*(p)$ عبارت است از

$$\varphi^*(\hat{p}_M) \pm z_{\tau/2} \frac{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{p}_M)}}{\hat{p}_M(1-\hat{p}_M)} \equiv (L_p, U_p).$$

در نهایت فاصله ی اطمینان تقریبی $100(1-\tau)\%$ برای p به صورت زیر به دست می آید

$$\left(\frac{e^{L_p}}{1+e^{L_p}}, \frac{e^{U_p}}{1+e^{U_p}} \right).$$

۲.۲ برآوردیابی بیزی پارامترها

در این بخش، می‌خواهیم از روش‌های بیزی برای به‌دست آوردن برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترها استفاده کنیم. برای پارامترهای α و β توزیع پیشین را توزیع گاما و برای پارامتر p توزیع پیشین را توزیع بتا پیشنهاد می‌دهیم. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\pi_1(\alpha) &\propto \alpha^{a_1-1} e^{-b_1\alpha}; \quad \alpha, a_1, b_1 > 0, \\ \pi_2(\beta) &\propto \beta^{a_2-1} e^{-b_2\beta}; \quad \beta, a_2, b_2 > 0, \\ \pi_3(p) &\propto p^{a_3-1} (1-p)^{b_3-1}; \quad 0 < p < 1, a_3, b_3 > 0,\end{aligned}$$

که $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ ابرپارامترهای مدل می‌باشند که به‌طور مثال می‌توان آن‌ها را از میانگین‌ها و واریانس‌های توزیع‌های پیشین پارامترها انتخاب نمود. فرض می‌کنیم پیشین‌ها از یکدیگر مستقل باشند، بنابراین توزیع پیشین توأم پارامترها به‌صورت زیر است

$$\pi(\alpha, \beta, p) \propto \alpha^{a_1-1} e^{-b_1\alpha} \beta^{a_2-1} e^{-b_2\beta} p^{a_3-1} (1-p)^{b_3-1}.$$

با توجه به (۵.۲)، توزیع پسین توأم α, β و p تحت سانسور فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای به فرم زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha, \beta, p|\mathbf{x}, \mathbf{r}) &= \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{\alpha-1} (1+x_i^\alpha)(1+\beta+\beta x_i^\alpha)^{r_i}}{C_0(\beta+1)^n} \\ &\times \alpha^{m+a_1-1} e^{-b_1\alpha} \beta^{m+a_2-1} e^{-\beta[b_2+\sum_{i=1}^m x_i^\alpha(1+r_i)]} \\ &\times \frac{p^{\sum_{i=1}^{m-1} r_i+a_3-1} (1-p)^{(m-1)(n-m)-\sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i+b_3-1}}{B(\sum_{i=1}^{m-1} r_i+a_3, (m-1)(n-m)-\sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i+b_3)},\end{aligned}\quad (۶.۲)$$

که $\alpha, \beta > 0$ و $0 < p < 1$ و $B(\cdot, \cdot)$ تابع بتای کامل می‌باشد و

$$\begin{aligned}C_0 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{\alpha-1} (1+x_i^\alpha)(1+\beta+\beta x_i^\alpha)^{r_i}}{(\beta+1)^n} \alpha^{m+a_1-1} e^{-b_1\alpha} \\ &\times \beta^{m+a_2-1} e^{-\beta[b_2+\sum_{i=1}^m x_i^\alpha(1+r_i)]} d\alpha d\beta.\end{aligned}\quad (۷.۲)$$

برای برآوردیابی بیزی نقطه‌ای از تابع زیان توان دوم خطا (SEL[‡]) و تابع زیان آنتروپی عمومی (GEL[§]) استفاده می‌کنیم. تابع متقارن SEL به‌صورت $Loss_1(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ تعریف می‌شود که θ پارامتر مجهول توزیع مورد نظر و $\hat{\theta}$ برآوردگر θ است. برآوردگر نقطه‌ای بیز تحت تابع SEL را با BPES[¶] نشان می‌دهیم. تابع SEL وزن‌های یکسانی به بیش‌برآوردی و کم‌برآوردی اختصاص می‌دهد که در برخی از موقعیت‌های کاربردی که بیش‌برآوردی و کم‌برآوردی اهمیت یکسانی ندارند، ممکن است مطلوب نباشد. به‌عنوان مثال، مسأله‌ی تعیین مدت زمان گارانتی محصولات توسط تولیدکنندگان را در نظر بگیرید. اگر تولیدکننده مدت زمان گارانتی را بیشتر از مقدار مورد انتظار آن برآورد کند، ممکن است دچار ضرر اقتصادی گردد زیرا با حجم زیادی از محصولات خراب مواجه می‌گردد که باید تعمیر گردند و از طرفی اگر آن را کمتر برآورد کند، تأثیر سوء بر رضایت مشتریان و عدم استقبال بازار خرید می‌گردد. مسلماً نمی‌توان گفت میزان ضرری که از بیش‌برآوردی عاید تولیدکننده می‌گردد با میزان ضرر متناظر با کم‌برآوردی یکسان است. در چنین موقعیت‌هایی بهره‌گیری از یک تابع زیان نامتقارن مناسب مفید خواهد بود. تابع نامتقارن GEL به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$Loss_2(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^c - c \log(\hat{\theta}/\theta) - 1, \quad c \neq 0.$$

این تابع زیان توسط کالابریا و پولسینی [۳، ۴] معرفی گردید. با قرار دادن $c = 1$ تابع زیان آنتروپی معمولی به‌دست می‌آید. علامت و مقدار پارامتر c باید با دقت انتخاب شود. مقادیر مثبت c بیانگر این هستند که بیش‌برآوردی جدی‌تر و زیان‌بارتر از کم‌برآوردی است و برعکس. برآوردگر نقطه‌ای بیز تحت تابع GEL برای α در صورت وجود به‌صورت زیر است

$$\hat{\alpha}_{BG} = (E(\alpha^{-c}|\mathbf{x}, \mathbf{r}))^{-\frac{1}{c}},$$

که $E(\alpha^{-c}|\mathbf{x}, \mathbf{r})$ امید ریاضی پسین α^{-c} به شرط در اختیار داشتن نمونه‌ی سانسور شده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای و طرح سانسور $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ می‌باشد. برآوردگر نقطه‌ای بیز تحت تابع GEL را با BPEG[¶] نشان می‌دهیم.

[‡]squared error loss

[§]general entropy loss

[¶]Bayes point estimator under the SEL function

[□]Bayes point estimator under the GEL function

۱.۲.۲ برآوردیابی بیزی برای p

با توجه به (۶.۲)، تابع چگالی احتمال پسین حاشیه‌ای برای پارامتر p به فرم زیر می‌باشد

$$\Pi(p|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{p^{\sum_{i=1}^{m-1} r_i + a_3 - 1} (1-p)^{(m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i + b_3 - 1}}{B(\sum_{i=1}^{m-1} r_i + a_3, (m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i + b_3)}, \quad 0 < p < 1.$$

بنابراین $p|\mathbf{x}, \mathbf{r} \sim \text{Beta}(\lambda_1, \lambda_2)$ که $\lambda_1 = \sum_{i=1}^{m-1} r_i + a_3$ و $\lambda_2 = (m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i + b_3$ می‌باشند. حال برآورد نقطه‌ای بیز برای p تحت تابع SEL برابر است با

$$\hat{p}_{BS} = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} r_i + a_3}{(m-1)(n-m) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i + a_3 + b_3}.$$

همچنین برآورد نقطه‌ای بیز برای p تحت تابع GEL نیز به فرم زیر می‌باشد

$$\hat{p}_{BG} = \left(\frac{\Gamma(\lambda_1 - c)\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 - c)} \right)^{-\frac{1}{c}}, \quad \lambda_1 > c.$$

برای برآوردیابی فاصله‌ای بیزی، ابتدا فاصله‌ی باورپذیری بالاترین چگالی پسین (HPD CrI^{xx}) برای p را پیشنهاد می‌کنیم. اگر تابع چگالی احتمال پسین p تک‌مدی باشد، آن‌گاه یک HPD CrI $\gamma\%$ (۱ - γ)^o به فرم (p_L, p_U) برای p با حل هم‌زمان معادله‌های زیر به دست می‌آید

$$p_L^{\lambda_1 - 1} (1 - p_L)^{\lambda_2 - 1} = p_U^{\lambda_1 - 1} (1 - p_U)^{\lambda_2 - 1}, \quad \frac{1}{B(\lambda_1, \lambda_2)} \int_{p_L}^{p_U} y^{\lambda_1 - 1} (1 - y)^{\lambda_2 - 1} dy = 1 - \gamma.$$

اما در برخی حالات، تابع چگالی احتمال پسین p تک‌مدی نیست. در این موارد، فاصله‌ی باورپذیری بیزی دوطرفه با دمه‌های برابر (ETB CrI^{††}) را برای p پیشنهاد می‌کنیم. یک ETB CrI $\gamma\%$ (۱ - γ)^o برای p به صورت زیر می‌باشد

$$(B_{1-\gamma/2}(\lambda_1, \lambda_2), B_{\gamma/2}(\lambda_1, \lambda_2)),$$

به طوری که $B_\gamma(a, b)$ چندک γ ام بالایی توزیع بتا با پارامترهای a و b می‌باشد، یعنی اگر $Y \sim \text{Beta}(a, b)$ ، آن‌گاه $P(Y > B_\gamma(a, b)) = \gamma$

برآوردیابی بیزی برای α و β

تابع چگالی احتمال پسین توأم برای α و β به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) &= \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{\alpha-1} (1+x_i^\alpha)(1+\beta+\beta x_i^\alpha)^{r_i}}{C_0(\beta+1)^n} \\ &\times \alpha^{m+a_1-1} e^{-b_1\alpha} \beta^{2m+a_2-1} e^{-\beta[b_2+\sum_{i=1}^m x_i^\alpha(1+r_i)]}, \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

که $\alpha, \beta > 0$ و C_0 در (۷.۲) داده شده است. به نظر می‌رسد که تابع‌های چگالی احتمال پسین حاشیه‌ای برای α و β فرم صریحی ندارند. همچنین می‌دانیم امید ریاضی هر تابعی از α و β که آن را با $g(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم، در صورت وجود به فرم زیر است

$$E(g(\alpha, \beta)|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(\alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\alpha d\beta. \quad (۹.۲)$$

یک روش برای تقریب عبارت (۹.۲)، تولید یک نمونه‌ی بزرگ از تابع چگالی احتمال پسین توأم α و β با استفاده از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو (MCMC^{‡‡}) می‌باشد. با این حال به نظر می‌رسد نمی‌توان به طور مستقیم از $\Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r})$ نمونه تولید نمود زیرا تابع

^{xx}highest posterior density credible interval

^{††}equi-tailed two-sided Bayes credible interval

^{‡‡}Markov chain Monte Carlo

چگالی احتمال پسین توأم پیچیده می‌باشد. به همین دلیل روش متروپولیس-هستینگس (MH^*) با توزیع پیشنهادی نرمال دو متغیره به منظور تولید نمونه از (۸.۲) را به کار برده‌ایم و در این راستا از الگوریتم زیر برای انجام این کار استفاده می‌کنیم.

الگوریتم متروپولیس-هستینگس :

- مرحله ۱: با حدس اولیه‌ی $(\alpha_0, \beta_0) = \xi_0$ شروع کنید.
- مرحله ۲: قرار بدهید $q = 1$.
- مرحله ۳: با در اختیار داشتن نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای \mathbf{x} با طرح سانسور $\mathbf{r}, \xi_q = \Pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{r})$ با توزیع پیشنهادی $N_2(\xi_{q-1}, \Sigma)$ به روش MH تولید کنید.
- مرحله ۴: قرار بدهید $q = q + 1$.
- مرحله ۵: مراحل ۳ و ۴ را N بار تکرار کنید تا $(\alpha_N, \beta_N), \dots, (\alpha_1, \beta_1)$ به دست آیند.

اکنون می‌توانیم مقدار تقریبی (۹.۲) را با استفاده از تکنیک MCMC به صورت زیر به دست آوریم

$$\widehat{E}(g(\alpha, \beta) | \mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{N - K} \sum_{q=K+1}^N g(\alpha_q, \beta_q),$$

که در آن K نقطه‌ی سوخت می‌باشد.

بنابراین برآورد نقطه‌ای بیزی تقریبی برای پارامتر α تحت تابع‌های زیان SEL و GEL به ترتیب به فرم زیر می‌باشند

$$\widehat{\alpha}_{BS}^* = \frac{1}{N - K} \sum_{q=K+1}^N \alpha_q,$$

9

$$\widehat{\alpha}_{BG}^* = \left[\frac{1}{N - K} \sum_{q=K+1}^N \alpha_q^{-c} \right]^{-\frac{1}{c}}.$$

به طور مشابه می‌توانیم برآوردهای نقطه‌ای بیزی تقریبی برای پارامتر β تحت تابع‌های زیان SEL و GEL که آن‌ها را به ترتیب با $\widehat{\beta}_{BS}^*$ و $\widehat{\beta}_{BG}^*$ نشان می‌دهیم، به دست آوریم.

با توجه به نمونه‌ی $\{(\alpha_q, \beta_q); q = K + 1, \dots, N\}$ که از روش MCMC به دست آمده است، می‌توانیم کوتاه‌ترین فاصله‌های باورپذیری ($CSS CrI^\dagger$) را به روش چن و شائو [۵] برای α و β به دست آوریم. فرض می‌کنیم $\alpha(1), \dots, \alpha(N-K)$ نمونه‌ی مرتب شده‌ی $\{\alpha_q; q = K + 1, \dots, N\}$ باشد. آن‌گاه یک $CSS CrI$ $\% (1 - \gamma)$ برای α به صورت $(\alpha_{(j)}, \alpha_{(j+[(N-K)(1-\gamma)])})$ می‌باشد که در آن پهنای فاصله‌ی J ام به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\alpha_{(j+[(N-K)(1-\gamma)])} - \alpha_{(j)} = \min_{1 \leq i \leq M} \{ \alpha_{(i+[(N-K)(1-\gamma)])} - \alpha_{(i)} \},$$

که $[z]$ نشان دهنده‌ی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی z می‌باشد و $M = N - K - [(N - K)(1 - \gamma)]$ می‌باشد و z به طور مشابه می‌توان $CSS CrI$ را برای پارامتر β نیز به دست آورد.

*Metropolis Hastings

†Chen and Shao shortest credible interval

۳ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی را به منظور ارزیابی کردن کارایی برآوردگرهای پیشنهادی ارائه می‌دهیم و برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم و بیزی تقریبی را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. در ابتدا الگوریتم تولید نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای را از توزیع لیندلی توانی با تابع چگالی احتمال (۱.۱) شرح می‌دهیم. توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p را با نماد $Bin(n, p)$ نشان می‌دهیم.

الگوریتم تولید نمونه‌ی سانسور شده:

- مرحله‌ی ۱: مقادیر m, n, α, β و p را ثابت در نظر بگیرید.
- مرحله‌ی ۲: عدد تصادفی R_1 را از توزیع $Bin(n - m, p)$ و به ازای $i = 2, \dots, m - 1$ عدد تصادفی $R_i | R_1 = r_1, \dots, R_{i-1} = r_{i-1}$ را از توزیع $Bin(n - m - \sum_{j=1}^{i-1} r_j, p)$ تولید کنید و در نهایت قرار دهید $r_m = n - m - \sum_{k=1}^{m-1} r_k$ تا طرح سانسور $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{m-1}, r_m)$ به دست بیاید.
- مرحله‌ی ۳: متغیر تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت استاندارد تولید کنید که آن‌ها را W_1, \dots, W_m نشان می‌دهیم.
- مرحله‌ی ۴: با $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ داده شده، به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ قرار دهید $V_i = W_i^{1/(i + \sum_{j=m-i+1}^m r_j)}$.
- مرحله‌ی ۵: به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ قرار دهید

$$U_{i:m:n} = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1}.$$

آن‌گاه $U_{1:m:n}, \dots, U_{m:m:n}$ یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو از توزیع یکنواخت استاندارد را تشکیل می‌دهند.

- مرحله‌ی ۶: اکنون با توجه به (۲.۱)، نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای از توزیع لیندلی توانی یعنی $(X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ را می‌توان با حل معادله‌های غیرخطی زیر به دست آورد

$$\left(1 + \frac{\beta X_{i:m:n}^\alpha}{\beta + 1}\right) e^{-\beta X_{i:m:n}^\alpha} = 1 - U_{i:m:n}, \quad i = 1, \dots, m.$$

در این شبیه‌سازی، مقادیر پارامترهای توزیع لیندلی توانی را $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ در نظر گرفته‌ایم. همچنین چهار مقدار برای p که $p = 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ هستند را به منظور تولید طرح‌های سانسور مختلف، در نظر گرفته‌ایم. به علاوه، $n = 25$ و دو مقدار 16 و 22 را برای m در نظر گرفتیم تا تأثیر m بر نتایج شبیه‌سازی بررسی کنیم. برای برآوردیابی بیزی، سه حالت مختلف را برای توزیع پیشین در نظر گرفتیم که به صورت زیر می‌باشند.

حالت I: پیشین‌های بسیار نزدیک به پیشین ناآگاهی بخش برای α, β و p را با $a_i = b_i = 0.001$ برای $i = 1, 2, 3$ در نظر گرفتیم.
حالت II: پیشین‌های آگاهی بخش برای α و β با توجه به اطلاعات پیشین $E(\alpha) = 2$ و $E(\beta) = 1$ و همچنین $Var(\alpha) = 4$ اختیار کردیم. بنابراین $a_1 = 1, b_1 = 0.5$ و $a_2 = b_2 = 0.25$ به دست می‌آیند. ابرپارامترهای توزیع پیشین بتا برای p را نیز به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که $E(p)$ برابر با مقدار واقعی پارامتر باشد و $Var(p) = 0.88$.

حالت III: پیشین‌های آگاهی بخش برای α و β با توجه به اطلاعات پیشین $E(\alpha) = 2$ و $E(\beta) = 1$ و $Var(\alpha) = Var(\beta) = 0.25$ اختیار کردیم. بنابراین $a_1 = 16, b_1 = 8$ و $a_2 = b_2 = 4$ به دست می‌آیند. ابرپارامترهای توزیع پیشین بتا برای p را نیز به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که $E(p)$ برابر با مقدار واقعی پارامتر باشد و $Var(p) = 0.33$.

مقادیر ابرپارامترهای a_3 و b_3 برای حالت II و حالت III در جدول ۱ آورده شده‌اند. این نکته لازم به ذکر است که حالت III آگاهی‌بخش‌ترین حالت در بین حالت‌های دیگر می‌باشد زیرا دارای کمترین واریانس در بین تمام حالات است. الگوریتم زیر به منظور اجرا کردن شبیه‌سازی استفاده شده است.

الگوریتم شبیه‌سازی:

- مرحله‌ی ۱: یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای را ($n = 25$ و همچنین $16, 22$ و m) از توزیع لیندلی توانی با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ با استفاده از الگوریتم تولید نمونه‌ی سانسور شده با $p = 0.2, 0.5, 0.7, 0.9$ تولید کنید.
- مرحله‌ی ۲: برای پارامترهای α, β, p مقادیر MLE، BPES، BPEG و BPEG با $(c = -1/5, 1/5)$ به دست بیاورید.

• مرحله‌ی ۳: مراحل ۱ و ۲ را به تعداد $M = ۱۰۰۰۰$ بار تکرار کنید تا برآوردهای ریسک‌های (ER^{\ddagger} ها) برآوردهای نقطه‌ای محاسبه شوند.

فرض کنید $\hat{\alpha}(i)$ برآورد به‌دست آمده برای α (در هر یک از روش‌های MLE ، $BPES$ و $BPEG$) در i امین تکرار از مرحله‌ی ۲ باشد. آن‌گاه ER های $\hat{\alpha}$ نسبت به توابع SEL و GEL به ترتیب به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند

$$ER_S(\hat{\alpha}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\alpha}(i) - \alpha)^2,$$

$$ER_G(\hat{\alpha}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left[\left(\frac{\hat{\alpha}(i)}{\alpha} \right)^c - c \log \left(\frac{\hat{\alpha}(i)}{\alpha} \right) - 1 \right].$$

9

به‌طور مشابه می‌توانیم ER ها را برای برآوردهای β و p نیز محاسبه کنیم. برای به‌دست آوردن برآوردهای نقطه‌ای بیز برای α و β از روش MH استفاده کرده‌ایم. لذا از الگوریتم متروپولیس-هستینگس با توزیع پیشنهادی $N_2(\xi_{q-1}, \Sigma)$ استفاده شده است که Σ می‌بایست با دقت انتخاب شود زیرا در نرخ همگرایی تأثیرگذار است. یک ایده‌ی مناسب بهره‌گیری از معکوس ماتریس اطلاع برآورده‌شده حول پارامترهای α و β می‌باشد، به عبارت دیگر (در هر تکرار) قرار می‌دهیم

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc} -\frac{\partial^2 \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta \partial \alpha} \\ -\frac{\partial^2 \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} & -\frac{\partial^2 \ell_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} \end{array} \right)^{-1} \Bigg|_{(\alpha, \beta) = (\hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M)},$$

که $\ell_1(\alpha, \beta)$ در زیربخش ۱.۲ معرفی شد. همچنین مقادیرهای اولیه‌ی α و β را در روش MH را به ترتیب برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم α و β در نظر گرفتیم.

برای بررسی همگرایی زنجیره‌های مارکوف مونت کارلوی تولید شده توسط روش MH از سه معیار بهره بردیم که عبارتند از: الف) آزمون گوک[§] (گوک [۹])، ب) معیار تشخیص رافتری و لویس[¶] (رافتری و لویس [۲۴]) و رافتری و لویس [۲۵])، ج) معیار تشخیص همگرایی هیدلبرگر و ولج[□] (هیدلبرگر و ولج، [۱۵]). همچنین لازم به ذکر است که هیدلبرگر و ولج [۱۵] کارهای هیدلبرگر و ولج [۱۳]، هیدلبرگر و ولج [۱۴]، اشروین و همکاران [۲۹]، اشروین و همکاران [۳۰] را ترکیب نموده‌اند.

به‌عنوان نمونه، نمودارهای زنجیره‌های مارکوف تولید شده توسط روش MH برای پارامترها برای $m = ۱۶$ ، $p = ۰/۵$ و حالت I رسم شده، در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند که می‌توان مشاهده کرد که این الگوریتم به خوبی به همگرایی رسیده است. برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر درباره تکنیک‌های $MCMC$ به رابرت و کسلا [۲۷] رجوع کنید. ER_S و ER_G ها برای همه‌ی برآوردها محاسبه شده‌اند و نتایج در جداول ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب برای $p = ۰/۲$ ، $p = ۰/۵$ ، $p = ۰/۷$ و $p = ۰/۹$ بیان شده‌اند.

در این شبیه‌سازی، برای $p = ۰/۲$ و $m = ۲۲$ در حالت‌های I و II در سه تکرار از $M = ۱۰۰۰۰$ تکرار، برآوردهای بیز پارامتر p تحت GEL با $c = +۱/۵$ وجود نداشت زیرا $\lambda_1 \leq ۱/۵$ گردید، بنابراین تعداد $BPEG$ های به‌دست آمده برای پارامتر p با $c = +۱/۵$ در موارد مذکور برابر با ۹۹۹۷ در نظر گرفته شد.

در جداول ۲ تا ۵ مشاهده می‌کنیم که در اکثر موارد برآوردهای بیزی بهتر از MLE های متناظرشان عمل کرده‌اند، زیرا برآوردهای بیزی ER های کوچک‌تری دارند. به خصوص وقتی واریانس توزیع پیشین کاهش یابد، ER ها نیز کوچک‌تر می‌شوند و کوچک‌ترین ER ها مربوط به حالت III می‌باشد (حالت III کوچک‌ترین واریانس پیشین را دارا می‌باشد). همچنین انتظار می‌رود که $BPES$ ها کمترین ER_S ها را داشته باشند. این نکته قابل مشاهده است زیرا که در اکثر موارد ER_S های $BPES$ ها یا کوچک‌ترین مقادیر را دارند یا نزدیک به کوچک‌ترین مقادیر هستند. می‌توان نتیجه‌ی مشابهی را برای ER_G های $BPEG$ ها نیز گرفت. ER های برآوردهای α و β نسبت به m کاهشی است اما این موضوع برای برآوردهای p صحیح نمی‌باشد. همچنین ER ها رفتار خاصی نسبت به p زمانی که سایر مؤلفه‌ها ثابت در نظر گرفته می‌شوند، ندارند.

[‡]estimated risk

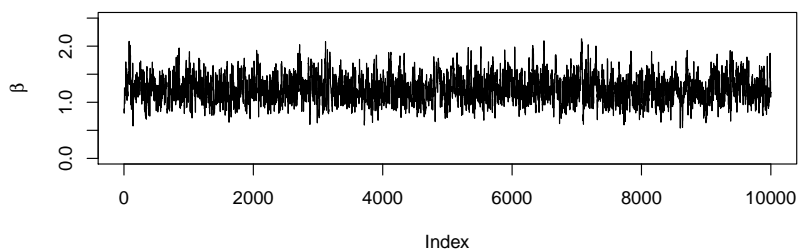
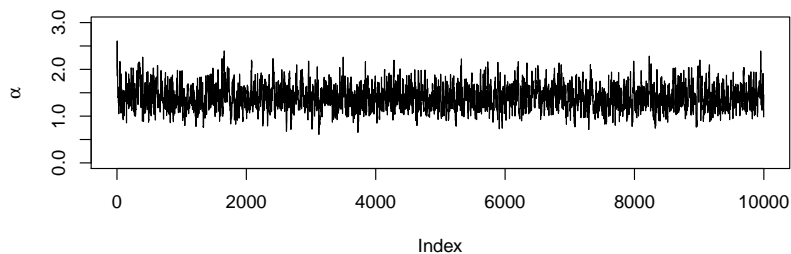
[§]Geweke's test

[¶]Raftery and Lewis's diagnostic

[□]Heidelberger and Welch's convergence diagnostic

جدول ۱: مقادیر ابرپارامترهای a_3 و b_3 برای حالت II و حالت III.

p	حالت II		حالت III	
	a_3	b_3	a_3	b_3
۰/۲	۰/۱۶۳۶۳۶۴	۰/۶۵۴۵۴۵۵	۰/۷۶۹۶۹۷	۳/۰۷۸۷۸۸
۰/۵	۰/۹۲۰۴۵۴۵	۰/۹۲۰۴۵۴۵	۳/۲۸۷۸۷۹	۳/۲۸۷۸۷۹
۰/۷	۰/۹۷۰۴۵۴۵	۰/۴۱۵۹۰۹۱	۳/۷۵۴۵۴۵	۱/۶۰۹۰۹۱
۰/۹	۰/۰۲۰۴۵۴۵۴۵	۰/۰۰۲۲۷۲۷۲۷	۱/۵۵۴۵۴۵۵	۰/۱۷۲۷۲۷۳



شکل ۱: نمودارهای زنجیره‌های مارکوف MH برای α و β .

جدول ۲: ER ها برای برآوردهای نقطه‌ای پارامترها زمانی که $m = 16$ و $m = 25$ برای $n = 2$ و $p = 0.2$.

برآوردهای α	$m = 16$			$m = 22$		
	MLE	BPES	BPEG	MLE	BPES	BPEG
	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$
حالت I	ERS	0.1809	0.1665	0.1565	0.14256	0.14704
	ERG (c = -1/5)	0.4115	0.428	0.426	0.4316	0.4316
	ERG (c = +1/5)	0.5133	0.4881	0.492	0.4994	0.4994
حالت II	ERS	0.18031	0.1885	0.1514	0.13318	0.13726
	ERG (c = -1/5)	0.3786	0.3782	0.3742	0.3929	0.3929
	ERG (c = +1/5)	0.448	0.447	0.447	0.447	0.447
حالت III	ERS	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444
	ERG (c = -1/5)	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444
	ERG (c = +1/5)	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444
برآوردهای β	$m = 16$			$m = 22$		
	MLE	BPES	BPEG	MLE	BPES	BPEG
	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$
حالت I	ERS	0.5166	0.516	0.514	0.514	0.514
	ERG (c = -1/5)	0.517	0.517	0.518	0.518	0.518
	ERG (c = +1/5)	0.517	0.517	0.517	0.517	0.517
حالت II	ERS	0.4883	0.4810	0.4877	0.4863	0.4816
	ERG (c = -1/5)	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491
	ERG (c = +1/5)	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491
حالت III	ERS	0.3391	0.3384	0.338	0.338	0.338
	ERG (c = -1/5)	0.339	0.339	0.339	0.339	0.339
	ERG (c = +1/5)	0.339	0.339	0.339	0.339	0.339
برآوردهای p	$m = 16$			$m = 22$		
	MLE	BPES	BPEG	MLE	BPES	BPEG
	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$	$c = -1/5$	$c = 1/5$	$c = 1/5$
حالت I	ERS	0.0522	0.0533	0.0526	0.0529	0.0529
	ERG (c = -1/5)	0.1163	0.1161	0.1169	0.1161	0.1161
	ERG (c = +1/5)	0.1269	0.1269	0.1269	0.1269	0.1269
حالت II	ERS	0.052	0.0529	0.0522	0.052	0.052
	ERG (c = -1/5)	0.1175	0.1175	0.1175	0.1175	0.1175
	ERG (c = +1/5)	0.1203	0.1203	0.1203	0.1203	0.1203
حالت III	ERS	0.0412	0.0433	0.0425	0.0425	0.0425
	ERG (c = -1/5)	0.0912	0.0925	0.0925	0.0925	0.0925
	ERG (c = +1/5)	0.1013	0.1013	0.1013	0.1013	0.1013

جدول ۵: ER ها برای پارامترهای نقطه ای پارامترها زمانی که $m = ۱۶$ و $m = ۲۵$ برای $n = ۹$ ، $p = ۰/۹$.

برآوردهای α	$m = ۱۶$						$m = ۲۲$					
	MLE		BPES		BPEG		MLE		BPES		BPEG	
	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$	$c = -۱/۵$	$c = ۱/۵$
حالت I	ERS	-۰/۴۸۳	-۰/۱۹۵۰۴	-۰/۲۰۵۹	-۰/۱۶۶۰۱	-۰/۱۴۱۲۷	-۰/۱۳۳۷۶	-۰/۱۸۸۰۵	-۰/۱۱۷۴۱			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۴۰۷۹	-۰/۴۰۰۶	-۰/۴۰۴۳	-۰/۴۰۵۴	-۰/۳۰۱۹	-۰/۳۵۵۹	-۰/۳۹۸۴	-۰/۳۹۷۷		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۵۰۱۱	-۰/۴۸۱۶	-۰/۴۹۶۰	-۰/۴۹۳۱	-۰/۳۵۶۲	-۰/۳۳۰۸	-۰/۳۳۹۳	-۰/۳۱۱۲		
حالت II	ERS		-۰/۱۷۷۸۵	-۰/۱۸۴۰	-۰/۱۵۱۷۱	-۰/۱۲۵۰۹	-۰/۱۲۵۰۹	-۰/۱۲۹۰۸	-۰/۱۰۹۹۸			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۳۳۰	-۰/۳۳۰	-۰/۳۳۶	-۰/۳۳۶	-۰/۲۸۰۰	-۰/۲۸۱۲	-۰/۲۸۱۲	-۰/۲۸۱۲		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۴۳۱	-۰/۴۳۱	-۰/۴۵۶۳	-۰/۴۳۸۰	-۰/۳۲۰۳	-۰/۳۲۸۲	-۰/۳۲۸۲	-۰/۲۹۳۶		
حالت III	ERS		-۰/۶۵۳۳	-۰/۶۷۷۷	-۰/۵۷۵۲	-۰/۵۶۱۸	-۰/۵۶۱۸	-۰/۵۷۵۲	-۰/۵۰۳۳			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۱۶۰۰	-۰/۱۶۲۲	-۰/۱۵۸۵	-۰/۱۵۸۵	-۰/۱۳۹۵	-۰/۱۳۹۵	-۰/۱۳۹۵	-۰/۱۳۹۵		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۱۷۴۶	-۰/۱۷۸۴	-۰/۱۵۸۹	-۰/۱۵۸۹	-۰/۱۵۰۳	-۰/۱۵۰۳	-۰/۱۵۳۹	-۰/۱۳۹۰		
برآوردهای β												
حالت I	ERS	-۰/۵۷۱۳	-۰/۵۴۷۰	-۰/۵۵۵۵	-۰/۵۲۶۹	-۰/۴۹۱۹	-۰/۳۷۹۳	-۰/۲۸۴۲	-۰/۳۷۹۵			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۶۵۴۱	-۰/۶۰۹۴	-۰/۵۸۹۸	-۰/۷۷۶۶	-۰/۴۸۴۶	-۰/۴۵۱۹	-۰/۴۴۷	-۰/۵۵۶۵		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۶۱۵۸	-۰/۵۸۵۷	-۰/۵۸۸۸	-۰/۶۱۹۵	-۰/۴۴۰۴	-۰/۴۲۱۶	-۰/۴۲۱۲	-۰/۴۵۵۵		
حالت II	ERS		-۰/۵۲۷۵	-۰/۵۳۹۸	-۰/۵۰۶۵	-۰/۳۶۸۴	-۰/۳۶۸۴	-۰/۳۷۳۲	-۰/۳۶۶۸			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۵۷۹۳	-۰/۵۶۲۰	-۰/۷۳۱۴	-۰/۴۳۲۴	-۰/۴۳۲۴	-۰/۴۲۱۴	-۰/۵۳۰۸			
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۵۶۴۶	-۰/۵۶۳۳	-۰/۵۹۲۷	-۰/۵۹۲۷	-۰/۴۰۷۵	-۰/۴۰۷۵	-۰/۴۰۷۵	-۰/۴۳۵۹		
حالت III	ERS		-۰/۳۳۴۴	-۰/۳۵۱۷	-۰/۳۳۱۶	-۰/۲۵۷۵	-۰/۲۵۷۵	-۰/۲۵۷۵	-۰/۲۵۷۵			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۳۳۹۸	-۰/۳۳۵۲	-۰/۴۰۵۴	-۰/۳۳۵۲	-۰/۲۸۱۵	-۰/۲۸۱۵	-۰/۲۸۱۵	-۰/۳۳۵۱		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۳۶۳۷	-۰/۳۶۹۰	-۰/۳۶۶۳	-۰/۳۶۶۳	-۰/۲۸۱۴	-۰/۲۸۱۴	-۰/۲۸۱۴	-۰/۲۹۱۰		
برآوردهای p												
حالت I	ERS	-۰/۰۷۶۵	-۰/۰۷۶۴	-۰/۰۷۳۸	-۰/۰۹۵۲	-۰/۱۷۵۰	-۰/۱۷۴۶	-۰/۱۶۰۹	-۰/۳۳۹۹			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۱۱۷۱	-۰/۱۱۷۱	-۰/۱۱۱۶	-۰/۱۵۲۲	-۰/۳۳۲۹	-۰/۳۳۲۶	-۰/۲۸۴۶	-۰/۹۱۴۰		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۱۰۸۹	-۰/۱۰۸۸	-۰/۱۰۴۷	-۰/۱۲۸۸	-۰/۱۶۶۱۸	-۰/۱۶۶۲۲	-۰/۲۳۷۵	-۰/۵۷۳۰		
حالت II	ERS		-۰/۰۷۶۱	-۰/۰۷۳۵	-۰/۰۹۲۸	-۰/۱۷۳۹	-۰/۱۷۳۹	-۰/۱۵۹۴	-۰/۳۳۳۷			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۱۱۶۶	-۰/۱۱۶۶	-۰/۱۱۱۱	-۰/۱۵۶۴	-۰/۳۳۸۸	-۰/۳۳۸۸	-۰/۲۸۱۵	-۰/۸۹۳۸		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۱۰۸۴	-۰/۱۰۸۳	-۰/۱۰۳۳	-۰/۱۲۸۲	-۰/۱۶۵۸۶	-۰/۱۶۵۸۶	-۰/۲۳۶۲	-۰/۵۶۳۴		
حالت III	ERS		-۰/۰۵۶۲	-۰/۰۵۶۶	-۰/۰۶۷۸	-۰/۰۸۳۳	-۰/۰۸۳۳	-۰/۰۷۷۸	-۰/۱۷۸۴			
	ERG	($c = -۱/۵$)	-۰/۰۸۵۶	-۰/۰۸۵۶	-۰/۰۸۱۲	-۰/۱۱۰۱	-۰/۱۶۵۲	-۰/۱۶۵۲	-۰/۱۳۳۲	-۰/۳۳۹۹		
	ERG	($c = +۱/۵$)	-۰/۰۸۰۱	-۰/۰۷۷۴	-۰/۰۹۰۶	-۰/۱۱۵۸	-۰/۱۳۳۸	-۰/۱۳۳۸	-۰/۱۱۵۸	-۰/۲۰۴۰		

۴ پیش‌بینی فاصله‌ای یک‌نمونه‌ای و دونمونه‌ای

در این بخش، می‌خواهیم فاصله‌های پیش‌بینی مشاهدات آینده را بر اساس نمونه‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای در طرح‌های یک‌نمونه‌ای و دونمونه‌ای، مورد بررسی قرار دهیم.

۱.۴ پیش‌بینی یک‌نمونه‌ای

در بسیاری از آزمون‌های قابلیت اطمینان، ممکن است آزمایشگر علاقه‌مند باشد تا واحدهای مشاهده نشده‌ای را که در هر مرحله از آزمایش حذف شده‌اند، پیش‌بینی کند. فرض کنید که واحدهای طول عمر از توزیع لیندلی توانی تبعیت می‌کنند. همچنین فرض کنید که طرح سانسور ثابت باشد. اگر نمایانگر $X_{j:r_k}$ زمان شکست مرتب شده‌ی مستخرج از r_k واحدی باشد که در مرحله‌ی k ام حذف شده‌اند، آن‌گاه توزیع شرطی $X_{j:r_k}$ به شرط داشتن نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ، به صورت زیر می‌باشد (به باساک و همکاران [۲] مراجعه کنید)

$$f_{X_{j:r_k}}(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) = \frac{r_k!}{(j-1)!(r_k-j)!} \frac{[1-F(z)]^{r_k-j}}{[1-F(x_k)]^{r_k}} [F(z) - F(x_k)]^{j-1} f(z), \quad z > x_k. \quad (1.4)$$

با جایگذاری (۱.۱) و (۲.۱) در (۱.۴) برای $z > x_k > 0$ داریم

$$\begin{aligned} f_{X_{j:r_k}}(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) &= \frac{r_k!}{(j-1)!(r_k-j)!} \frac{\left[\left(1 + \frac{\beta z^\alpha}{\beta+1}\right) e^{-\beta z^\alpha} \right]^{r_k-j}}{\left[\left(1 + \frac{\beta x_k^\alpha}{\beta+1}\right) e^{-\beta x_k^\alpha} \right]^{r_k}} \frac{\alpha \beta^\beta}{(\beta+1)} (1+z^\alpha) z^{\alpha-1} e^{-\beta z^\alpha} \\ &\times \left[\left(1 + \frac{\beta x_k^\alpha}{\beta+1}\right) e^{-\beta x_k^\alpha} - \left(1 + \frac{\beta z^\alpha}{\beta+1}\right) e^{-\beta z^\alpha} \right]^{j-1} \\ &= \frac{r_k! \alpha \beta^\beta (1+z^\alpha) z^{\alpha-1} (\beta+1 + \beta z^\alpha)^{r_k-j}}{(j-1)!(r_k-j)! \left[(\beta+1 + \beta x_k^\alpha) e^{-\beta x_k^\alpha} \right]^{r_k}} \\ &\times \left[(\beta+1 + \beta x_k^\alpha) e^{-\beta x_k^\alpha} - (\beta+1 + \beta z^\alpha) e^{-\beta z^\alpha} \right]^{j-1} e^{-\beta(r_k-j+1)z^\alpha}. \end{aligned}$$

با دو دفعه به‌کارگیری بسط دوجمله‌ای برای عبارت $\left[(\beta+1 + \beta x_k^\alpha) e^{-\beta x_k^\alpha} - (\beta+1 + \beta t^\alpha) e^{-\beta t^\alpha} \right]^{j-1}$ و سپس برای عبارت $\left[1 + \beta(1+t^\alpha) \right]^{r_k-j+i_1}$ ، تابع بقای پیش‌بینی (PSF^{xx}) برای $X_{j:r_k}$ به فرم زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} S(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) &= \int_z^\infty f_{X_{j:r_k}}(t|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) dt \\ &= \frac{r_k!}{(j-1)!(r_k-j)!} \sum_{i_1=0}^{j-1} \sum_{i_2=0}^{r_k-j+i_1} \frac{(-1)^{i_1} \binom{j-1}{i_1} \binom{r_k-j+i_1}{i_2}}{\left[(\beta+1 + \beta x_k^\alpha) e^{-\beta x_k^\alpha} \right]^{i_1}} \\ &\times \frac{e^{\beta(r_k-j+i_1+1)}}{(r_k-j+i_1+1)^{i_2+2}} \Gamma\left(i_2+2, (z^\alpha+1)\beta(r_k-j+i_1+1)\right), \quad z > x_k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

که $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ همان تابع گامای ناقص است.

اکنون می‌توانیم PSF برای $X_{j:r_k}$ را با جایگذاری MLE ها به جای پارامترهای مجهول متناظرشان تقریب بزنیم. بنابراین یک تقریب برای فاصله‌ی پیش‌بینی یک‌نمونه‌ای کلاسیک دو طرفه $\% (1-\gamma)(1-\gamma)$ با دم‌های برابر (ETC OPI^{††}) که با (L_C, U_C) نشان داده می‌شود، با حل هم‌زمان دو معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$S_{X_{j:r_k}}(L_C|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \text{و} \quad S_{X_{j:r_k}}(U_C|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M) = \frac{\gamma}{2}.$$

^{xx} predictive survival function

^{††} equi-tailed two-sided classical one-sample prediction interval

در ادامه می‌خواهیم فاصله‌ی پیش‌بینی بیزی را برای $X_{j:r_k}$ مورد بررسی قرار دهیم. تابع چگالی پیش‌بین بیزی برای $X_{j:r_k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f_{X_{j:r_k}}^*(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{X_{j:r_k}}(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\alpha d\beta.$$

بنابراین تابع بقای بیزی برای $X_{j:r_k}$ به ازای $z > x_k$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$S_{X_{j:r_k}}^*(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = P(X_{j:r_k} > z|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_z^\infty f_{X_{j:r_k}}^*(t|\mathbf{x}, \mathbf{r}) dt. \quad (3.4)$$

می‌توانیم رابطه‌ی (۳.۴) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$S_{X_{j:r_k}}^*(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty S(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\alpha d\beta,$$

که $S(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta)$ در رابطه‌ی (۲.۴) داده شده است.

اکنون به کمک نمونه‌ی MCMC که با استفاده از روش MH از توزیع پسین (۸.۲) تولید شده است، می‌توانیم یک برآوردگر شبیه‌سازی برای $S_{X_{j:r_k}}^*(z|\mathbf{x}, \mathbf{r})$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\tilde{S}_{X_{j:r_k}}^*(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{N-K} \sum_{q=K+1}^N S(z|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha_q, \beta_q).$$

بنابراین یک تقریب برای فاصله‌ی پیش‌بینی یک نمونه‌ای بیزی دوطرفه $(1-\gamma)\% (1-\gamma)$ با دم‌های برابر (ETB OPI^{##}) که با (L_B, U_B) نشان داده می‌شود، با حل دو معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$\tilde{S}_{X_{j:r_k}}^*(L_B|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \text{و} \quad \tilde{S}_{X_{j:r_k}}^*(U_B|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{\gamma}{2}.$$

۲.۴ پیش‌بینی دونمونه‌ای

فرض می‌کنیم Y_1, \dots, Y_l یک نمونه‌ی آینده به حجم l باشد که از نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای $\mathbf{X} = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ مستقل باشد، به طوری که هر دو نمونه از توزیع لیندلی توانی با پارامترهای α و β تبعیت کنند. همچنین فرض می‌کنیم $Y_{s:l}$ آماره‌ی ترتیبی s ام باشد که $1 \leq s \leq l$. از این رو تابع چگالی احتمال $Y_{s:l}$ به فرم زیر است

$$\begin{aligned} f_{Y_{s:l}}(y|\alpha, \beta) &= \frac{l!}{(s-1)!(l-s)!} [F(y)]^{s-1} [1-F(y)]^{l-s} f(y) \\ &= \frac{l!}{(s-1)!(l-s)!} \left[1 - \left(1 + \frac{\beta y^\alpha}{\beta + 1} \right) e^{-\beta y^\alpha} \right]^{s-1} \left(1 + \frac{\beta y^\alpha}{\beta + 1} \right)^{l-s} \\ &\quad \times \frac{\alpha \beta^\gamma}{\beta + 1} (1 + y^\alpha) y^{\alpha-1} e^{-(l-s+1)\beta y^\alpha}, \quad y > 0. \end{aligned}$$

بنابراین PSF برای $Y_{s:l}$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} G(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) &= \int_y^\infty f_{Y_{s:l}}(t|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) dt \\ &= \frac{l!}{(s-1)!(l-s)!} \sum_{i_1=0}^{s-1} \sum_{i_2=0}^{i_1+l-s} \binom{s-1}{i_1} \binom{i_1+l-s}{i_2} \left(\frac{e^\beta}{\beta+1} \right)^{i_1+l-s+1} \\ &\quad \times \frac{(-1)^{i_1} \Gamma(i_2+2, (y^\alpha+1)\beta(i_1+l-s+1))}{(i_1+l-s+1)^{i_2+2}}, \quad y > 0. \quad (4.4) \end{aligned}$$

^{##}equi-tailed two-sided Bayes one-sample prediction interval

اکنون یک تقریب برای فاصله‌ی پیش‌بینی دونمونه‌ای کلاسیک دوطرفه $\gamma\%(1 - \gamma)$ با دم‌های برابر $(ETC\ TPI^*)$ که آن را به صورت (L_C^*, U_C^*) نشان می‌دهیم، با حل دو معادله‌ی زیر حاصل می‌شود

$$G(L_C^*|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \text{و} \quad G(U_C^*|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \hat{\alpha}_M, \hat{\beta}_M) = \frac{\gamma}{2}.$$

علاوه بر این، تابع چگالی پیش‌بین بیزی برای $Y_{s:l}$ به فرم زیر است

$$f_{Y_{s:l}}^*(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{Y_{s:l}}(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\alpha d\beta.$$

در نتیجه تابع بقای بیزی برای $Y_{s:l}$ برای $y > 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} G_{Y_{s:l}}^*(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}) &= \int_y^\infty f_{Y_{s:l}}^*(t|\mathbf{x}, \mathbf{r}) dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty G(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta) \Pi(\alpha, \beta|\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

که $G(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha, \beta)$ در (۴.۴) داده شده است.

اکنون به کمک نمونه‌ی MCMC که با استفاده از روش MH از توزیع پسین (۸.۲) تولید شده است، می‌توانیم یک برآوردگر شبیه‌سازی برای $G_{Y_{s:l}}^*(y|\mathbf{x}, \mathbf{r})$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\tilde{G}_{Y_{s:l}}^*(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{1}{N - K} \sum_{q=K+1}^N G(y|\mathbf{x}, \mathbf{r}, \alpha_q, \beta_q).$$

در نتیجه، یک تقریب برای فاصله‌ی پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی دوطرفه $\gamma\%(1 - \gamma)$ با دم‌های برابر $(ETB\ TPI^\dagger)$ که آن را به صورت (L_B^*, U_B^*) نشان می‌دهیم، با حل دو معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$\tilde{G}_{Y_{s:l}}^*(L_B^*|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \text{و} \quad \tilde{G}_{Y_{s:l}}^*(U_B^*|\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \frac{\gamma}{2}.$$

۳.۴ مثال کاربردی

در این بخش، دو مجموعه داده‌ی واقعی را که توسط پروشان [۲۲] گزارش شده‌اند، در نظر می‌گیریم که مربوط به زمان‌های (بر حسب ساعت) فاصله‌های خرابی پی در پی سیستم‌های تهویه هوایی در هواپیماها می‌باشند. داده‌های مورد نظر به صورت زیر هستند.

هواپیمای ۷۹۱۲: ۱۱، ۱۲، ۵، ۲۰، ۴۲، ۲۱، ۲۴۶، ۷۱، ۲۲۵، ۴۷، ۶۲، ۱۴، ۱۲۰، ۷، ۸۷، ۲۶۱، ۲۳

۳، ۱۴، ۷۱، ۱۱، ۱۴، ۱۱، ۱۶، ۹۰، ۱، ۱۶، ۵۲، ۹۵

هواپیمای ۸۰۴۴: ۱۳۰، ۳، ۲۳۰، ۴۳، ۹۱، ۵، ۸۵، ۹۸، ۷، ۱۰۰، ۱۸، ۴۸۷

با برآزش دادن توزیع لیندلی توانی با پارامترهای α و β روی هر دو مجموعه داده و با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف داریم (D) نمایانگر آماره آزمون KS است

هواپیمای ۷۹۱۲: $\hat{\alpha}_M = 0.6309494$ ، $\hat{\beta}_M = 0.1634146$ ، $D = 0.1517$ و p -مقدار

هواپیمای ۸۰۴۴: $\hat{\alpha}_M = 0.573316$ ، $\hat{\beta}_M = 0.1506608$ ، $D = 0.1931$ و p -مقدار

بنابراین، توزیع لیندلی توانی برای مدل بندی هر دو مجموعه داده مناسب به نظر می‌رسد. حال، مقادیر پارامترهای

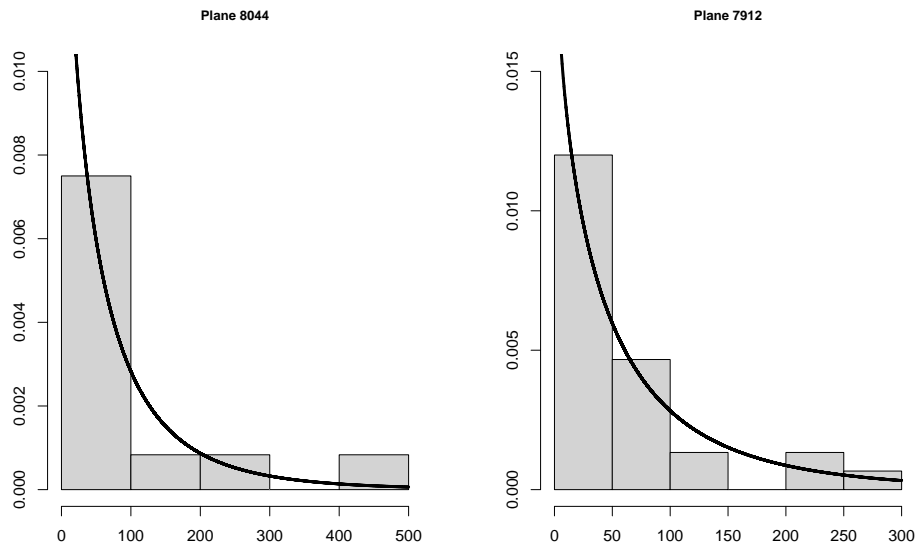
$$\alpha^* = \frac{0.6309494 + 0.573316}{2} = 0.6021327 \quad \text{و} \quad \beta^* = \frac{0.1634146 + 0.1506608}{2} = 0.1570377$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی، فرض زیر را آزمون می‌کنیم

$$H_0: \alpha = \alpha^* \quad \& \quad \beta = \beta^*$$

*equi-tailed two-sided classical two-sample prediction interval

†equi-tailed two-sided Bayes two-sample prediction interval



شکل ۲: هیستوگرام تجربی و نمودار توابع چگالی احتمال برازش شده برای مجموعه داده‌های هواپیمای ۷۹۱۲ (راست) و هواپیمای ۸۰۴۴ (چپ).

آماره‌ی کی دو و p -مقدار متناظر به صورت زیر به دست می‌آیند

هواپیمای ۷۹۱۲: $۱/۵۰۶۳۵۴ =$ آماره‌ی کی دو، $۰/۴۷۰۸۶۸۱ = p$ -مقدار

هواپیمای ۸۰۴۴: $۰/۸۳۱۳۰۸۳ =$ آماره‌ی کی دو، $۰/۶۵۹۹۰۸۵ = p$ -مقدار

از این رو فرض H_0 (که بیان می‌کند هر مجموعه داده دارای توزیع لیندلی توانی با پارامترهای α^* و β^* است) را می‌پذیریم. هیستوگرام‌های تجربی و نمودارهای برازش داده شده توابع چگالی احتمال لیندلی توانی با پارامترهای α^* و β^* برای مجموعه داده‌ها در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. با توجه به شکل ۲، توابع چگالی احتمال برازش داده شده به هیستوگرام‌های تجربی نزدیک هستند و لذا توزیع لیندلی توانی یک برازش خوب برای هر دو مجموعه داده است.

حال، مجموعه داده‌ها را از دیدگاه سانسور فزاینده با برداشت‌های دوجمله‌ای تحلیل می‌کنیم. در برآوردیابی و پیش‌بینی بیزی، توزیع‌های پیشین را برای α و β بسیار نزدیک به توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش با ابرپارامترهای $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = ۰/۰۰۱$ در نظر می‌گیریم. برای p نیز توزیع پیشین $Beta(۰/۰۰۱, ۰/۰۰۱)$ را در نظر می‌گیریم که بسیار نزدیک به توزیع پیشین ناآگاهی بخش هالدان است (به مقاله‌ی کرمان [۱۷] مراجعه نمایید).

۱.۳.۴ برآوردیابی

به منظور روشن ساختن نتایج مرتبط با مسأله‌ی برآوردیابی، داده‌های هواپیمای ۷۹۱۲ را در نظر گرفته‌ایم. چهار طرح سانسور با اندازه‌ی نمونه‌ی $m = ۲۲$ و چهار مقدار p ($۰/۲, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹$) تولید کردیم. جدول ۶ طرح‌های سانسور تولید شده و واحدهای سانسور شده در هر مرحله را نشان می‌دهد. زنجیره‌های مارکف تولید شده توسط روش MH در هر یک از طرح‌ها توسط سه معیار آزمون گوک، معیار تشخیص رافتری و لویس و معیار تشخیص همگرایی هیدلبرگر و ولج مورد بررسی قرار گرفته، تأیید شدند. انواع برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای یعنی MLE، BPES، BPEG، c (فاصله‌های اطمینان کلاسیک CCI^{\ddagger} ها) و فاصله‌های باورپذیری ۹۵٪ را برای پارامترها تحت چهار طرح سانسور محاسبه کرده‌ایم و نتایج در جدول ۷ خلاصه شده‌اند.

توجه داشته باشید که تابع‌های چگالی پسین p برای همه طرح‌ها تک‌مدی است (شکل ۳ را ببینید) و به همین دلیل، به جای فاصله‌های باورپذیری دو طرفه با دم‌های برابر، فاصله‌های باورپذیری HPD را برای p محاسبه کرده‌ایم. اگر فرض کنیم که α^* و β^* مقادیر واقعی α و β هستند، آن‌گاه می‌بینیم که همه‌ی برآوردهای نقطه‌ای به‌طور نسبتاً رضایت‌بخشی نزدیک به مقادیر واقعی هستند و فاصله‌های اطمینان و باورپذیری به دست آمده، مقادیر واقعی متناظر را پوشش می‌دهند. طول CSS CrI ها برای α و β از فاصله‌های اطمینان کلاسیک کوتاه‌تر شده است. فاصله‌های باورپذیری HPD برای p نیز به جز در طرح‌های سانسور ۲ و ۳ کوتاه‌تر از فاصله‌های اطمینان کلاسیک متناظر هستند.

[‡]classical confidence interval

۴.۳.۴ پیش‌بینی دونمونه‌ای

حال، داده‌های هواپیمای ۸۰۴۴ را به‌عنوان نمونه‌ی آینده در نظر می‌گیریم. پذیرفتیم که هر دو مجموعه داده دارای توزیع لیندلی توانی با پارامترهای α^* و β^* هستند. در این‌جا می‌خواهیم فاصله‌های پیش‌بینی را برای مشاهدات مرتب‌شده‌ی نمونه‌ی آینده یعنی هواپیمای ۸۰۴۴ بر اساس اطلاعات موجود تحت طرح‌های سانسور مذکور در جدول ۶ به‌دست آوریم. جدول ۹ شامل فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای ۹۵ درصد کلاسیک و بیزی (ETC TPI ها و ETB TPI ها) برای $s = 1, 12, 1000$ می‌باشد (حجم نمونه‌ی آینده برابر با ۱۲ است). از جدول ۹ مشاهده می‌کنیم که فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای کلاسیک طول کمتری نسبت به فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای بیز دارند. اکثر فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای به خصوص فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی، مقادیر واقعی $Y_{s:12}$ متناظر را پوشش می‌دهند. توجه کنید که فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای کلاسیک برای $Y_{7:12}$ که تحت طرح ۱ و برای $Y_{12:12}$ که تحت طرح‌های ۱ و ۳ به‌دست آمده‌اند، مقادیر واقعی متناظر را پوشش نمی‌دهند. همچنین، فاصله‌ی پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی تحت طرح ۱ و همه‌ی فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای کلاسیک برای $Y_{6:12}$ مقدار واقعی را پوشش نمی‌دهند.

جدول ۸: فاصله‌های پیش‌بینی یک‌نمونه‌ای بی‌ری و کلاسیک ۹۵٪ تحت طرح‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ برای داده‌های مثال واقعی، LC و UC به ترتیب نمایانگر کران‌های پایینی و بالایی ETC OPI ها و LB و UB به ترتیب نمایانگر کران‌های پایینی و بالایی ETB OPI ها می‌باشند.

طرح ۱						طرح ۲											
k	j	$X_{j:T:k}$	ETC OPI			ETB OPI			k	j	$X_{j:T:k}$	ETC OPI			ETB OPI		
			LC	UC	UB	LC	UC	UB				LC	UC	UB	LC	UC	UB
۱	۵	۱/۳۵۲۵۲	۶۴/۶۹۸۶۶	۱/۳۲۵۵۸	۷۲/۱۰۲۴۴	۱/۳۲۶۶۵	۷۱/۳۲۴۵۱	۱/۳۰۹۷۰	۸۰/۱۳۳۸۸	۱	۵	۱/۳۲۶۶۵	۷۱/۳۲۴۵۱	۱/۳۰۹۷۰	۸۰/۱۳۳۸۸		
۲	۱۶	۵/۳۸۶۶۵	۱۳۵/۹۸۱۹۶	۵/۳۲۴۶	۱۵۸/۳۲۷۱۴	۵/۳۲۸۲۱	۱۵۶/۵۸۷۲۹	۵/۳۰۰۰۷	۱۸۵/۹۱۰۱۵	۲	۱۶	۵/۳۲۸۲۱	۱۵۶/۵۸۷۲۹	۵/۳۰۰۰۷	۱۸۵/۹۱۰۱۵		
۳	۱۲۰	۱۷/۱۱۰۰۸۰	۳۱۸/۸۶۸۸۰	۱۶/۳۰۴۵۲	۳۹۹/۶۸۶۶۴	۱۷/۴۸۹۲۳	۳۸۶/۰۰۲۷۹	۱۶/۹۸۹۸۹	۴۹۵/۳۹۲۷۲	۳	۱۲۰	۱۷/۴۸۹۲۳	۳۸۶/۰۰۲۷۹	۱۶/۹۸۹۸۹	۴۹۵/۳۹۲۷۲		
۳	۱۴	۷/۵۸۱۴۱	۱۱۰/۷۱۵۹۲	۷/۵۸۹۸۴	۱۲۵/۳۴۰۴۱	۳/۳۶۶۱۷	۷۴/۶۷۱۴۹	۳/۳۶۶۴۹	۸۴/۵۲۸۳۴	۲	۱۴	۳/۳۶۶۱۷	۷۴/۶۷۱۴۹	۳/۳۶۶۴۹	۸۴/۵۲۸۳۴		
۲	۲۲۵	۱۵/۱۷۳۴۷	۲۹۶/۶۸۶۸۹	۱۵/۰۹۸۸۲	۳۶۵/۹۲۴۶۶	۷/۵۱۹۲۳	۱۶۰/۶۳۳۳۹	۷/۴۳۲۷۵	۱۹۱/۵۹۱۴۳	۲	۵۲	۷/۵۱۹۲۳	۱۶۰/۶۳۳۳۹	۷/۴۳۲۷۵	۱۹۱/۵۹۱۴۳		
۴	۷۱	۱۲/۲۰۶۶۸	۳۶۸/۶۹۰۴۷	۱۲/۲۳۳۷۵	۲۹۴/۳۶۶۶۴	۲۰/۱۰۶۳۳	۳۹۱/۳۳۸۰۳	۱۹/۸۵۴۱۲	۵۰۵/۰۰۶۱۱	۳	۱۲۰	۲۰/۱۰۶۳۳	۳۹۱/۳۳۸۰۳	۱۹/۸۵۴۱۲	۵۰۵/۰۰۶۱۱		
۶	۶۲	۱۲/۲۰۶۶۸	۳۶۸/۶۹۰۴۷	۱۲/۲۳۳۷۵	۲۹۴/۳۶۶۶۴	۷/۶۰۰۷۸	۱۲۶/۱۹۷۷۹	۷/۶۱۳۸۶	۱۴۴/۹۸۵۱۷	۲	۴۲	۷/۶۰۰۷۸	۱۲۶/۱۹۷۷۹	۷/۶۱۳۸۶	۱۴۴/۹۸۵۱۷		
۸	۱۲۰	۱۵/۲۲۶۷۰	۲۵۳/۵۸۴۴۰	۱۵/۳۴۸۰۳	۳۰۰/۶۰۹۰۹	۱۵/۵۶۷۱۳	۳۵۷/۹۵۳۴۱	۱۵/۶۲۰۱۸	۴۵۰/۷۵۳۴۹	۲	۹۰	۱۵/۵۶۷۱۳	۳۵۷/۹۵۳۴۱	۱۵/۶۲۰۱۸	۴۵۰/۷۵۳۴۹		

طرح ۳						طرح ۴											
k	j	$X_{j:T:k}$	ETC OPI			ETB OPI			k	j	$X_{j:T:k}$	ETC OPI			ETB OPI		
			LC	UC	UB	LC	UC	UB				LC	UC	UB	LC	UC	UB
۱	۳	۱/۳۳۳۷۲	۵۲/۹۲۱۵۳	۱/۲۹۶۴۳	۵۷/۸۸۹۹۰	۱/۳۳۳۷۲	۵۲/۹۲۱۵۳	۱/۳۳۳۷۲	۵۲/۹۲۱۵۳	۱	۱۱	۱/۳۳۳۷۲	۵۲/۹۲۱۵۳	۱/۳۳۳۷۲	۵۲/۹۲۱۵۳		
۲	۵	۴/۷۶۲۰۶	۹۷/۹۵۷۷۷	۴/۲۸۸۸۹	۱۱۰/۳۲۵۶۷	۴/۷۶۲۰۶	۹۷/۹۵۷۷۷	۴/۷۶۲۰۶	۹۷/۹۵۷۷۷	۲	۲۳	۴/۷۶۲۰۶	۹۷/۹۵۷۷۷	۴/۷۶۲۰۶	۹۷/۹۵۷۷۷		
۳	۱۶	۱۲/۶۴۷۳۷	۱۷۱/۰۳۴۹۱	۱۱/۵۳۰۱۹	۲۰۰/۸۶۵۳۳	۱۲/۶۴۷۳۷	۱۷۱/۰۳۴۹۱	۱۲/۶۴۷۳۷	۱۷۱/۰۳۴۹۱	۳	۴۷	۱۲/۶۴۷۳۷	۱۷۱/۰۳۴۹۱	۱۲/۶۴۷۳۷	۱۷۱/۰۳۴۹۱		
۴	۱۲۰	۲۸/۷۴۸۱۶	۳۶۰/۱۸۹۱۹	۲۶/۹۷۷۷۸	۴۵۲/۵۶۳۷۰	۲۸/۷۴۸۱۶	۳۶۰/۱۸۹۱۹	۲۸/۷۴۸۱۶	۳۶۰/۱۸۹۱۹	۴	۶۲	۲۸/۷۴۸۱۶	۳۶۰/۱۸۹۱۹	۲۸/۷۴۸۱۶	۳۶۰/۱۸۹۱۹		
۲	۱۴	۷/۴۵۵۵۱	۷۸/۷۴۰۱۵	۷/۴۴۸۴۹	۸۶/۴۴۴۴۴	۷/۴۵۵۵۱	۷۸/۷۴۰۱۵	۷/۴۴۸۴۹	۸۶/۴۴۴۴۴	۲	۵	۷/۴۵۵۵۱	۷۸/۷۴۰۱۵	۷/۴۴۸۴۹	۸۶/۴۴۴۴۴		
۲	۶۲	۱۲/۳۵۷۷۰	۱۵۵/۰۶۸۲۰	۱۲/۱۷۹۲۵	۱۷۹/۳۴۵۵۹	۱۲/۳۵۷۷۰	۱۵۵/۰۶۸۲۰	۱۲/۱۷۹۲۵	۱۷۹/۳۴۵۵۹	۲	۷۱	۱۲/۳۵۷۷۰	۱۵۵/۰۶۸۲۰	۱۲/۱۷۹۲۵	۱۷۹/۳۴۵۵۹		
۳	۲۲۵	۲۵/۹۶۰۳۲	۳۳۵/۱۶۴۰۰	۲۵/۳۴۶۰۹	۴۳۹/۹۳۳۱۲	۲۵/۹۶۰۳۲	۳۳۵/۱۶۴۰۰	۲۵/۳۴۶۰۹	۴۳۹/۹۳۳۱۲	۳	۲۲۵	۲۵/۹۶۰۳۲	۳۳۵/۱۶۴۰۰	۲۵/۳۴۶۰۹	۴۳۹/۹۳۳۱۲		
۳	۴۷	۱۲/۳۷۲۹۰	۲۶۱/۱۹۹۱۰	۱۲/۳۷۰۹۳	۳۰۳/۱۹۹۶۱	۱۲/۳۷۲۹۰	۲۶۱/۱۹۹۱۰	۱۲/۳۷۰۹۳	۳۰۳/۱۹۹۶۱	۳	۴۷	۱۲/۳۷۲۹۰	۲۶۱/۱۹۹۱۰	۱۲/۳۷۰۹۳	۳۰۳/۱۹۹۶۱		

۴.۴ زمان مورد انتظار آزمایش

از آنجا که در کاربرد، مدت زمان طول کشیدن یک آزمایش به طور مستقیم با هزینه مرتبط می باشد، به طور طبیعی ایده ی بررسی این که آزمایش طول عمر تا چه مدت طول می کشد، بسیار مفید است. در نتیجه، محاسبه ی زمان مورد انتظار آزمایش (EET[§]) برای اتمام آزمایش اغلب الزامی می باشد. تحت سانسور فزاینده ی نوع دو با برداشت های دوجمله ای، زمان مورد انتظار اتمام آزمایش برابر با امید ریاضی m امین زمان شکست یعنی $X_{m:m:n}$ می باشد. با استفاده از تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع لیندلی توانی، امید شرطی $X_{m:m:n}$ به شرط معلوم بودن طرح سانسور $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} E[X_{m:m:n} | \mathbf{R} = \mathbf{r}] &= C(\mathbf{r}) \sum_{l_1=0}^{r_1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m} (-1)^A \frac{\binom{r_1}{l_1} \dots \binom{r_m}{l_m}}{\prod_{i=1}^{m-1} h(l_i)} \\ &\times \int_0^\infty \frac{\alpha \beta^\gamma}{\beta + 1} (1 + x^\alpha) x^\alpha e^{-\beta x^\alpha} \left[1 - \frac{\beta + 1 + \beta x^\alpha}{\beta + 1} e^{-\beta x^\alpha} \right]^{h(l_m)-1} dx \\ &= C(\mathbf{r}) \sum_{l_1=0}^{r_1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m} \sum_{k_1=0}^{h(l_m)-1} \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{\binom{r_1}{l_1} \dots \binom{r_m}{l_m}}{\prod_{i=1}^{m-1} h(l_i)} \binom{h(l_m)-1}{k_1} \binom{k_1}{k_2} (-1)^{k_1+A} \\ &\times \left[\frac{\beta(k_1+1)\Gamma(k_2+\frac{1}{\alpha}+1) + \Gamma(k_2+\frac{1}{\alpha}+2)}{(\beta+1)^{k_2+1} (k_1+1)^{k_2+\frac{1}{\alpha}+2} \beta^{\frac{1}{\alpha}}} \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

که در آن $A = \sum_{i=1}^{m-1} l_i$ ، $C(\mathbf{r}) = n(n-r_1-1)(n-r_1-r_2-2)\dots(n-\sum_{i=1}^{m-1}(r_i+1))$ ، $h(l_i) = l_1 + l_2 + \dots + l_i + i$ می باشند و $i = 1, 2, \dots, m$ و به ازای $m = n$ قرار دهیم EET، $x_i = 0$ قرار دهیم $i = 1, 2, \dots, m$ به صورت زیر به دست می آید

$$E(X_{n:n}) = n \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_1} (-1)^{k_1} \binom{n-1}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \frac{\beta(k_1+1)\Gamma(k_2+\frac{1}{\alpha}+1) + \Gamma(k_2+\frac{1}{\alpha}+2)}{(\beta+1)^{k_2+1} (k_1+1)^{k_2+\frac{1}{\alpha}+2} \beta^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (6.4)$$

برای سانسور فزاینده ی نوع دو با برداشت های دوجمله ای، EET به صورت زیر به دست می آید

$$E(X_{m:m:n}) = E_{\mathbf{R}}[E(X_{m:m:n} | \mathbf{R})] = \sum_{r_1=0}^{g(r_1)} \dots \sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})} P(\mathbf{R} = \mathbf{r}) [E(X_{m:m:n} | \mathbf{R} = \mathbf{r})], \quad (7.4)$$

که در (۴.۲) داده شده است. اکنون با استفاده از (۶.۴) و (۷.۴) می توانیم نسبت زمان مورد انتظار آزمایش (REET[¶]) را به فرم زیر بیابیم

$$\text{REET} = \frac{E(X_{m:m:n})}{E(X_{n:n})}.$$

نمودار REET برای مقایسه ی نقطه ی اتمام مورد انتظار آزمایش تحت سانسور فزاینده ی نوع دو با برداشت های دوجمله ای، با نمونه ی کامل مفید است. شکل های ۴ و ۵ شامل نمودارهای REET برای مقادیر مختلف n و m با مقادیر گوناگون p می باشد. نمودارها نشان می دهند که REET نسبت به m افزایشی است. همچنین نقش p به وضوح قابل مشاهده است. REET برای مقادیر بزرگ تر p سریع تر به ۱ نزدیک می شوند. اگر n و m را ثابت در نظر بگیریم، آن گاه REET تابعی افزایشی نسبت به p است.

[§]expected experimentation time

[¶]ratio of expected experiment time

جدول ۹: فاصله‌های پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی و کلاسیک ۹۵٪ تحت طرح‌های ۱ تا ۴ برای داده‌های مثال واقعی، L_C^* و U_C^* به ترتیب نمایانگر کران‌های پایینی و بالایی ETC TPI و L_B^* و U_B^* به ترتیب نمایانگر کران‌های پایینی و بالایی ETB TPI ها می‌باشند.

نمونه‌ی مرتب شده‌ی آینده (مقادیر واقعی ۱۲: Y_s)

s	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$Y_{s:12}$	۳	۵	۷	۱۸	۴۳	۸۵	۹۱	۹۸	۱۰۰	۱۳۰	۲۳۰	۴۸۷

طرح ۱

s	ETC TPI		ETB TPI		s	ETC TPI		ETB TPI	
	L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*		L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*
۱	۰/۰۲۷۵۴	۱۳/۸۰۲۳۴	۰/۰۱۳۸۴	۱۶/۱۶۹۶۷	۷	۱۴/۵۹۹۲۲	۸۲/۳۷۹۹۹	۱۲/۱۹۰۳۱	۹۸/۹۴۶۵۷
۲	۰/۰۶۶۰۰۶	۲۲/۶۰۱۲۲	۰/۰۳۹۵۶۲	۲۶/۳۷۶۷۹	۸	۱۹/۷۶۱۴۲	۱۰۲/۹۰۹۰۲	۱۶/۹۸۸۹۲	۱۲۵/۵۹۶۳۶
۳	۲/۱۴۸۰۰	۳۱/۶۴۵۸۱	۱/۴۴۳۲۵	۳۶/۹۰۴۰۰	۹	۲۶/۳۱۱۶۶	۱۳۰/۵۶۵۷۱	۲۳/۱۶۴۱۵	۱۶۲/۶۱۱۴۶
۴	۴/۲۹۲۸۲	۴۱/۵۸۰۶۹	۳/۱۱۹۵۶	۴۸/۶۱۳۵۴	۱۰	۳۴/۹۸۸۱۷	۱۷۱/۴۸۷۸۱	۳۱/۴۰۳۷۱	۲۱۹/۰۹۱۹۷
۵	۷/۰۳۹۴۱	۵۲/۸۹۹۱۱	۵/۴۲۰۷۸	۶۲/۲۰۲۴۷	۱۱	۴۷/۴۳۰۰۵	۲۴۳/۴۰۸۶۸	۴۳/۲۴۳۷۰	۳۲۱/۲۶۳۴۰
۶	۱۰/۴۳۳۲۸	۶۶/۲۰۲۷۶	۸/۴۰۴۱۰	۷۸/۵۴۴۵۶	۱۲	۶۸/۸۰۷۶۸	۴۳۶/۵۶۳۵۲	۶۳/۵۸۸۴۰	۶۰۲/۵۱۰۲

طرح ۲

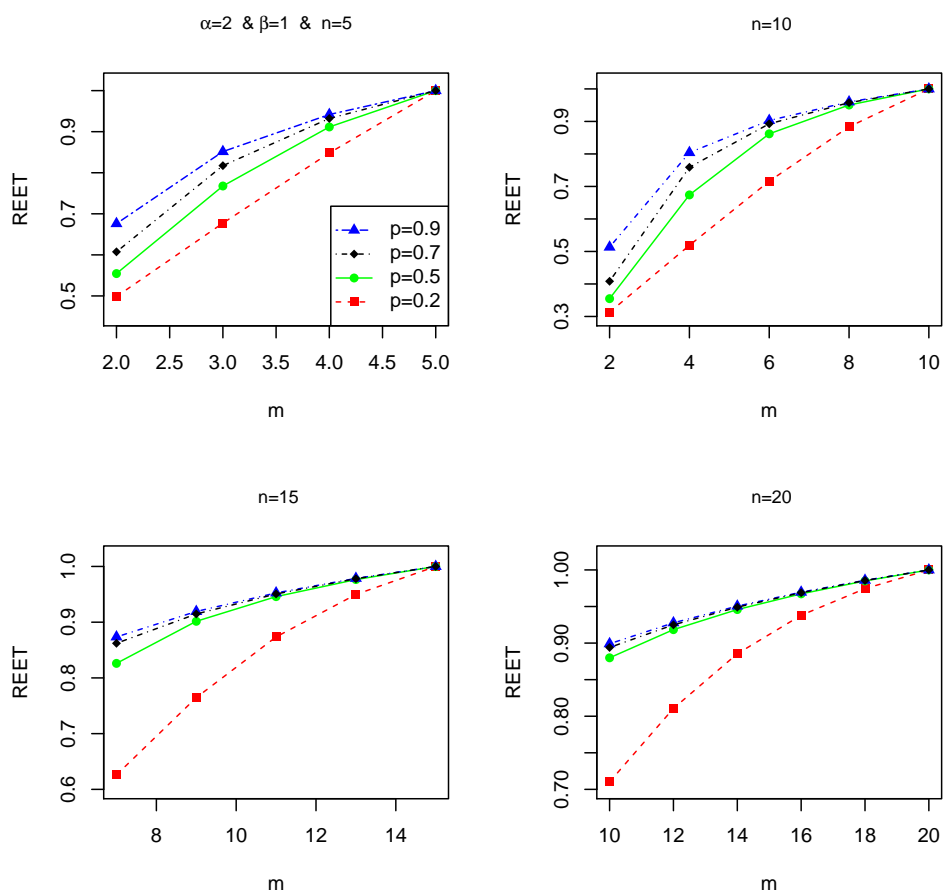
s	ETC TPI		ETB TPI		s	ETC TPI		ETB TPI	
	L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*		L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*
۱	۰/۰۱۷۴۲	۱۳/۶۹۵۲۱	۰/۰۰۹۴۶	۱۶/۴۳۲۰۶	۷	۱۴/۵۴۱۴۲	۹۱/۷۵۴۲۵	۱۲/۴۳۳۰۴	۱۱۲/۵۴۳۵۶
۲	۰/۰۵۲۲۲۲	۲۳/۱۸۰۸۰	۰/۰۳۳۰۵۶	۲۷/۶۲۳۱۸	۸	۲۰/۰۸۸۴۲	۱۱۶/۲۰۰۳۵	۱۷/۶۱۸۶۰	۱۴۵/۰۸۰۸۰
۳	۱/۸۶۱۶۴	۳۳/۱۷۹۵۸	۱/۳۰۶۳۲	۳۹/۴۵۱۸۷	۹	۲۷/۲۵۷۴۵	۱۴۹/۵۸۸۰۴	۲۴/۳۹۳۲۴	۱۹۱/۰۳۰۴۸
۴	۳/۹۱۹۸۹	۴۴/۳۶۷۴۲	۲/۹۵۵۳۸	۵۲/۸۶۱۸۶	۱۰	۳۶/۹۲۲۴۴	۱۹۹/۷۴۵۰۰	۳۳/۵۶۷۵۷	۲۶۲/۴۲۲۶۸
۵	۶/۶۶۳۵۷	۵۷/۳۱۲۴۰	۵/۲۹۷۴۱	۶۸/۶۸۱۱۹	۱۱	۵۱/۰۳۳۹۷	۲۸۹/۵۴۷۴۷	۴۶/۹۶۱۵۳	۳۹۴/۲۷۲۷۵
۶	۱۰/۱۵۴۴۹	۷۲/۷۴۱۸۸	۸/۴۰۸۳۱	۸۸/۰۲۴۸۵	۱۲	۷۵/۷۸۶۱۷	۵۳۷/۶۸۴۳۶	۷۰/۴۳۱۰۰	۷۶۷/۵۳۲۱۰

طرح ۳

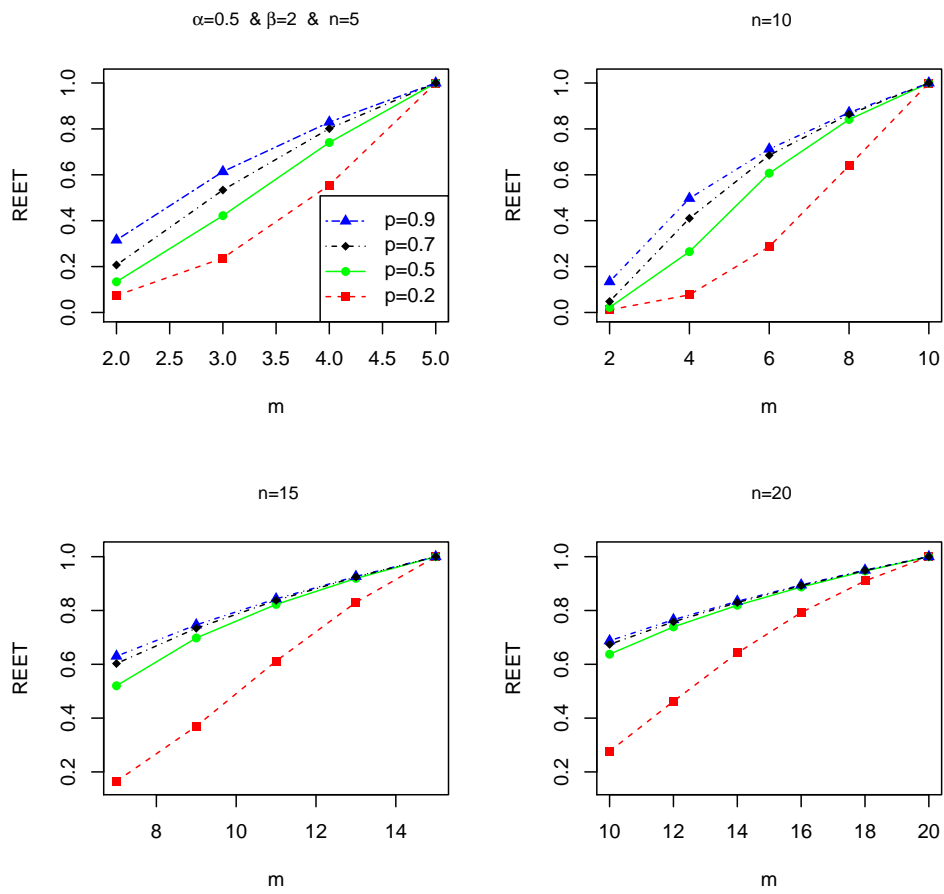
s	ETC TPI		ETB TPI		s	ETC TPI		ETB TPI	
	L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*		L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*
۱	۰/۰۴۶۰۹	۱۶/۴۲۰۵۳	۰/۰۲۲۵۳	۱۸/۸۵۱۴۵	۷	۱۷/۳۲۳۶۴	۹۱/۰۸۲۷۷	۱۴/۲۱۸۵۱	۱۰۷/۳۹۸۳۱
۲	۰/۰۹۳۲۷۰	۲۶/۳۰۲۸۲	۰/۰۵۴۹۳۱	۳۰/۰۸۷۵۷	۸	۲۳/۱۳۲۵۲	۱۱۲/۸۶۲۴۱	۱۹/۵۵۶۵۶	۱۳۵/۳۱۸۳۳
۳	۲/۸۲۲۰۳	۳۶/۳۱۱۲۸	۱/۸۶۶۴۴	۴۱/۵۱۱۳۱	۹	۳۰/۴۲۳۴۱	۱۴۱/۹۸۲۶۹	۲۶/۳۶۲۴۳	۱۷۳/۸۵۳۸۶
۴	۵/۴۱۹۱۳	۴۷/۱۸۸۱۱	۳/۸۷۴۶۷	۵۴/۰۹۳۸۰	۱۰	۳۹/۹۸۲۲۸	۱۸۴/۷۱۲۶۴	۳۵/۳۶۹۶۱	۲۳۲/۲۰۱۲۱
۵	۸/۶۵۴۸۴	۵۹/۴۷۰۶۲	۶/۵۵۳۴۰	۶۸/۵۸۴۹۶	۱۱	۵۳/۵۴۸۳۱	۲۵۹/۰۵۲۸۸	۴۸/۲۱۰۱۴	۳۳۶/۶۳۴۸۲
۶	۱۲/۵۷۸۰۲	۷۳/۷۹۴۱۲	۹/۹۵۸۷۷	۸۵/۹۰۲۰۴	۱۲	۷۶/۵۸۶۷۲	۴۵۵/۶۴۷۱۹	۷۰/۰۶۸۹۸	۶۱۸/۹۹۲۲۸

طرح ۴

s	ETC TPI		ETB TPI		s	ETC TPI		ETB TPI	
	L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*		L_C^*	U_C^*	L_B^*	U_B^*
۱	۰/۰۱۳۶۰	۱۳/۰۴۷۴۴	۰/۰۰۶۸۸	۱۵/۶۲۵۷۴	۷	۱۳/۸۷۶۷۶	۹۱/۷۸۶۴۳	۱۱/۵۰۶۱۲	۱۱۲/۹۸۷۶۷
۲	۰/۰۴۴۸۸۴	۲۲/۴۰۲۹۰	۰/۰۲۶۷۴۶	۲۶/۶۲۸۰۸	۸	۱۹/۳۴۰۱۸	۱۱۶/۸۹۲۸۰	۱۶/۵۲۴۶۵	۱۴۶/۷۶۲۶۵
۳	۱/۶۶۸۵۳	۳۲/۳۶۷۷۲	۱/۱۱۰۴۶	۳۸/۳۹۵۵۴	۹	۲۶/۴۵۵۳۸	۱۵۱/۳۶۹۶۱	۲۳/۱۶۴۲۳	۱۹۴/۷۳۶۳۵
۴	۳/۵۹۸۳۹	۴۳/۶۰۲۲۱	۲/۵۸۹۹۴	۵۱/۸۷۱۷۱	۱۰	۳۶/۱۱۷۶۱	۲۰۳/۴۷۵۱۹	۳۲/۲۵۷۵۷	۲۶۹/۶۶۴۸۴
۵	۶/۲۱۷۴۴	۵۶/۶۸۳۲۰	۴/۷۴۵۶۳	۶۷/۹۲۴۷۱	۱۱	۵۰/۳۲۹۲۳	۲۹۷/۴۵۳۴۱	۴۵/۶۶۶۸۸	۴۰۸/۸۶۴۰۰
۶	۹/۵۹۲۵۴	۷۲/۳۶۲۸۴	۷/۶۶۵۸۶	۸۷/۷۰۷۶۷	۱۲	۷۵/۴۶۵۹۹	۵۶۰/۰۵۴۷۶	۶۹/۳۷۲۱۱	۸۰۶/۹۷۱۸۴



شکل ۴: نمودارهای REET برای داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای وقتی که $\alpha = 2$ و $\beta = 1$.



شکل ۵: نمودارهای REET برای داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشتهای دوجمله‌ای وقتی که $\alpha = 0.5$ و $\beta = 2$.

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا، مسأله‌ی برآوردیابی کلاسیک و بیزی پارامترهای توزیع لیندلی توانی بر اساس داده‌های سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دو با برداشت‌های دوجمله‌ای مورد مطالعه قرار گرفت. به نظر می‌رسد که برآوردهای بیزی پارامترها دارای فرم بسته‌ای نیستند، بنابراین، یک الگوریتم کارا یعنی روش MH برای تقریب برآوردهای بیزی پیشنهاد گردید. با توجه به نتایج شبیه‌سازی، به‌طور کلی، برآوردهای بیز عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم دارند. لذا به یک پژوهشگر پیشنهاد می‌شود تا از برآوردهای بیز بهره بگیرد زمانی که اطلاعات پیشین در دسترس می‌باشد. چنانچه کم‌برآوردی و بیش‌برآوردی دارای اهمیت یکسانی هستند می‌توان از تابع زیان متقارن توان دوم خطا بهره جست، در غیر این صورت بهره‌گیری از یک تابع زیان نامتقارن مانند تابع زیان آنتروپی عمومی ارجح است.

در ادامه، بر مبحث پیش‌بینی فاصله‌ای برای مشاهدات آینده به کمک تکنیک‌های کلاسیک و بیزی تمرکز کردیم. یک مثال کاربردی برای نشان دادن نتایج نظری دونمونه‌ای ملاحظه شد که مواردی وجود دارد که فاصله‌های پیش‌بینی کلاسیک مقدار واقعی مشاهده‌ی آینده را در بر ندارند. این در حالی بود که تمامی فاصله‌های پیش‌بینی بیزی به غیر از تنها یک مورد، مقدار واقعی مشاهده‌ی آینده را در بر داشتند. لذا در مجموع نمی‌توان نتیجه گرفت کدام فاصله‌ی پیش‌بینی ارجح است.

سرانجام، مدت زمان مورد انتظار آزمایش مورد بررسی قرار گرفت. انتظار می‌رود که سانسور کردن موجب کاهش مدت زمان آزمایش گردد. یک معیار تحت عنوان REET پیشنهاد گردید تا مدت زمان مورد انتظار آزمایش تحت سانسورهای مختلف مورد مقایسه قرار گیرد و ملاحظه گردید پارامتر p نقش مهمی در مدت زمان مورد انتظار آزمایش دارد. با توجه به شکل‌ها می‌توان به یک پژوهشگر که قصد دارد مدت زمان مورد انتظار کمتری داشته باشد، مقادیر کوچک‌تر p را پیشنهاد نمود، به‌گونه‌ای که برای $p = 0$ که معادل با سانسور معمولی نوع دو از راست می‌باشد، مدت زمان مورد انتظار آزمایش به کمترین مقدار خود می‌رسد. لذا اگر معیار مورد نظر پژوهشگر فقط مدت زمان مورد انتظار آزمایش باشد، باید از سانسور معمولی نوع دو از راست معادل با $p = 0$ بهره برد. اما همان‌طور که می‌دانیم سانسور فزاینده‌ی نوع دو دارای مزایایی نسبت به این حالت خاص خود یعنی سانسور معمولی نوع دو از راست می‌باشد، به‌عنوان مثال، می‌توان از واحدهایی قبل از اتمام آزمایش سانسور می‌گردند، در آزمایش‌ها یا موقعیت‌های دیگر استفاده کرد که از لحاظ هزینه می‌توانند مفید واقع گردند، به‌ویژه اگر این واحدهای آزمایشی کمیاب یا گران باشند، یا برخی از موقعیت‌های کاربردی به‌گونه‌ای است که سانسور فزاینده اجتناب‌ناپذیر است، زیرا واحدهای آزمایشی ناخواسته و بنا به دلایلی از آزمایش خارج (و به نوعی سانسور) می‌شوند. برای جزئیات بیشتر در رابطه با مزایای سانسور فزاینده‌ی نوع دو به بالا کریشنان و آگاروالا [۱] صفحات ۲ تا ۴ مراجعه کنید.

از جمله موضوعاتی که در آینده می‌تواند مورد تحقیق قرار گیرد، یافتن طرح سانسور بهینه بر اساس اطلاع فیشر در توزیع لیندلی توانی می‌باشد. ایده‌ی دیگر آن است که بتوان برداشت‌های تصادفی را به‌گونه‌ای در نظر گرفت که احتمال موفقیت p برای برداشت‌های تصادفی یکسان در نظر گرفته نشود. در پایان لازم به ذکر است که تمامی محاسبات این مقاله به کمک نرم افزار آماری R (تیم هسته‌ای R [۲۳]) و بسته‌های نرم‌افزاری nleqslv (هیسلمن [۱۲])، coda (پلامر و همکاران [۲۰]) و پلامر و همکاران [۲۱])، AdequacyModel (مارینهو و همکاران [۱۸]) و MHadaptive (چیورز [۶]) و MASS (ریپلی و همکاران [۲۶]) و ونیلز و ریپلی [۳۷]) انجام شده‌اند. کدهای مربوط به محاسبات می‌تواند در صورت درخواست خوانندگان در اختیار آن‌ها قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران محترم که با ارائه‌ی نظرات و پیشنهادات ارزنده‌ی خود باعث ارتقا و بهبود مقاله شدند و همچنین از زحمات سردبیر محترم مجله تشکر و قدردانی می‌کنند.

فهرست منابع

- [1] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R., *Progressive censoring: theory, methods, and applications*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [2] Basak, I., Basak, P. and Balakrishnan, N., *On some predictors of times to failure of censored items in progressively censored samples*, Comput. Statist. Data Anal., 50 (2006), 1313–1337.
- [3] Calabria, R. and Pulcini, G., *An engineering approach to Bayes estimation for the Weibull distribution*, Microelectron. Reliab., 34 (1994), 789–802.
- [4] Calabria, R. and Pulcini, G., *Point estimation under asymmetric loss functions for left-truncated exponential samples*, Comm. Statist. Theory Methods, 25 (1996), 585–600.

- [5] Chen, M. H. and Shao, Q. M., *Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals*, J. Comput. Graph. Statist., 8 (1999), 69–92.
- [6] Chivers, C., *MHadaptive: General Markov chain Monte Carlo for Bayesian inference using adaptive Metropolis-Hastings sampling*, R package version 1.1-8, (2015), "<https://CRAN.R-project.org/package=MHadaptive>".
- [7] Dey, S. and Dey, T., *Statistical inference for the Rayleigh distribution under progressively Type-II censoring with binomial removal*, Appl. Math. Model., 38 (2014), 974–982.
- [8] Dey, S., Kayal, T. and Tripathi, Y. M., *Statistical inference for the weighted exponential distribution under progressive Type-II censoring with binomial removal*, Amer. J. Math. Management Sci., 37 (2018), 188–208.
- [9] Geweke, J. *Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments*, In Bayesian Statistics 4, Eds. J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M. Smith, Clarendon Press, Oxford, UK, (1992), pp. 169–193.
- [10] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Aboukhamseen, S. M., *Estimation of the reliability of a stress-strength system from power Lindley distributions*, Comm. Statist. Simulation Comput., 44 (2015), 118–136.
- [11] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N. and Al-Enezi, L. J., *Power Lindley distribution and associated inference*, Comput. Statist. Data Anal., 64 (2013), 20–33.
- [12] Hasselman, B., *nleqslv: Solve systems of nonlinear equations*, R package version 3.3.2, (2018), "<https://CRAN.R-project.org/package=nleqslv>".
- [13] Heidelberger, P. and Welch, P. D., *A Spectral method for confidence interval generation and run length control in simulations*, Commun. ACM, 24 (1981), 233–245.
- [14] Heidelberger, P. and Welch, P. D., *Adaptive spectral methods for simulation output analysis*, IBM J. Res. Dev., 25 (1981), 860–876.
- [15] Heidelberger, P. and Welch, P. D., *Simulation run length control in the presence of an initial transient*, Oper. Res., 31 (1983), 1109–1144.
- [16] Joukar, A., Ramezani, M. and MirMostafaei, S. M. T. K., *Estimation of $P(X > Y)$ for the power Lindley distribution based on progressively type II right censored samples*, J. Stat. Comput. Simul., 90 (2020), 355–389.
- [17] Kerman, J. *Neutral noninformative and informative conjugate beta and gamma prior distributions*, Electron. J. Stat., 5 (2011), 1450–1470.
- [18] Marinho, P. R. D., Bourguignon, M. and Dias, C. R. B., *AdequacyModel: Adequacy of probabilistic models and general purpose optimization*, R package version 2.0.0., (2016), "<https://CRAN.R-project.org/package=AdequacyModel>".
- [19] Pak, A. and Dey, S., *Statistical inference for the power Lindley model based on record values and inter-record times*, J. Comput. Appl. Math., 347 (2019), 156–172.
- [20] Plummer, M., Best, N., Cowles, K. and Vines, K., *CODA: Convergence diagnosis and output analysis for MCMC*, R News, 6 (2006), 7–11.

- [21] Plummer, M., Best, N., Cowles, K., Vines, K., Sarkar, D., Bates, D., Almond, R. and Magnusson, A., *coda: Output analysis and diagnostics for MCMC*, R package version 0.19-4, (2020), "<https://CRAN.R-project.org/package=coda>".
- [22] Proschan, F., *Theoretical explanation of observed decreasing failure rate*, *Technometrics*, 5 (1963), 375–383.
- [23] R Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020.
- [24] Raftery, A. E. and Lewis, S. M., *Comment: One long run with diagnostics: Implementation strategies for Markov chain Monte Carlo*, *Statist. Sci.*, 7 (1992), 493–497.
- [25] Raftery, A. E. and Lewis, S. M., *Implementing MCMC*, In *Markov chain Monte Carlo in practice*, Eds. W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, (1996), pp. 115–130.
- [26] Ripley, B., Venables, B., Bates, D. M., Hornik, K., Gebhardt, A. and Firth, D., *MASS: Support functions and datasets for Venables and Ripley's MASS*, R package version 7.3-53, (2020), "<https://CRAN.R-project.org/package=MASS>".
- [27] Robert, C. P. and Casella, G., *Monte Carlo statistical methods*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 2004.
- [28] Schruben, L. W., *Detecting initialization bias in simulation output*, *Oper. Res.*, 30 (1982), 569–590.
- [29] Schruben, L. Singh, H. and Tierney, L., *A test of initialization bias hypotheses in simulation output*, Technical Report 471, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1980.
- [30] Schruben, L. Singh, H. and Tierney, L., *Optimal tests for initialization bias in simulation output*, *Oper. Res.*, 31 (1983), 1167–1178.
- [31] Shao, J., *Mathematical statistics*, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 2003.
- [32] Singh, S. K., Singh, U. and Kumar, M., *Bayesian estimation for Poisson-exponential model under progressive type-II censoring data with binomial removal and its application to ovarian cancer data*, *Comm. Statist. Simulation Comput.*, 45 (2016), 3457–3475.
- [33] Singh, S. K., Singh, U. and Sharma, V. K., *Expected total test time and Bayesian estimation for generalized Lindley distribution under progressively Type-II censored sample where removals follow the Beta-binomial probability law*, *Appl. Math. Comput.*, 222 (2013), 402–419.
- [34] Tse, S. K. and Xiang, L., *Interval estimation for Weibull-distributed life data under Type II progressive censoring with random removals*, *J. Biopharm. Statist.*, 13 (2003), 1–16.
- [35] Tse, S. K., Yang, C. and Yuen, H. K., *Statistical analysis of Weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals*, *J. Appl. Stat.*, 27 (2000), 1033–1043.
- [36] Valiollahi, R., Raqab, M. Z., Asgharzadeh, A. and Alqallaf, F. A., *Estimation and prediction for power Lindley distribution under progressively type II right censored samples*, *Math. Comput. Simulation*, 149 (2018), 32–47.

- [37] Venables, W. N. and Ripley, B. D., *Modern applied statistics with S*, 4th Ed., Springer-Verlag, New York, 2002.
- [38] Wu, C. C., Wu, S. F. and Chan, H. Y. *MLE and the estimated expected test time for the two-parameter Gompertz distribution under progressive censoring with binomial removals*, Appl. Math. Comput., 181 (2006), 1657–1670.
- [39] Yuen, H. K. and Tse, S. K., *Parameters estimation for Weibull distributed lifetimes under progressive censoring with random removals*, J. Stat. Comput. Simul., 55 (1996), 57–71.



Expected Experimentation Time, Estimation and Prediction for the Power Lindley Distribution Based on Progressively Type-II Censored Data With Binomial Removals

Esmael Azizi, S.M.T.K. MirMostafae¹

Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Received: 2019/11/15

Accepted: 2020/10/20

Communicated by: F. Azarpanah

Abstract: In this paper, the problem of estimation and prediction for the power Lindley distribution is studied based on progressively Type-II censored data with binomial removals. First, we work on the estimation of the parameters of the power Lindley distribution with the help of maximum likelihood and Bayesian methods. The Bayesian estimation is done based on the symmetric squared error loss function and the asymmetric general entropy loss function. Since the Bayesian estimates involve integrals that do not seem to have explicit forms, we use the Metropolis-Hastings algorithm to approximate these integrals. A simulation study is presented to evaluate the performance of the estimators of the parameters. In the sequel, the problem of one-sample and two-sample prediction is discussed. A real example is given to illustrate the application of the theoretical methods given in the paper. In addition, the problem of expected experimentation time is studied with the help of drawing plots. The paper ends with several conclusions.

Keywords: Metropolis-Hastings algorithm, General entropy loss function, Expected experimentation time, Delta method, Progressive censoring with binomial removals, Simulation.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

¹Corresponding author.

E-mail addresses: esmaelazizi1369@yahoo.com (E. Azizi), m.mirmostafae@umz.ac.ir (S.M.T.K. Mir-Mostafae).