



روش عددی برای یک کلاس از معادله کسری انتگرال-دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر با مشتقات کسری آتانگانا-بالینو-کاپوتو

حاجی محمد محمدی نژاد^{۱*}، حسن خسروی^۲

(۱)،(۲) دانشکده علوم، دانشگاه بیرجند، ایران.

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۱

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۳

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

چکیده: هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر شامل مشتقات کسری آتانگانا-بالینو-کاپوتو به صورت

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t) \cdot g(x, t)] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, Y) dY + \int_0^t u(x, Y) \cdot k(x, Y) dY = f(x, t),$$

است. سعی کردیم با استفاده از یک روش عددی مبتنی بر عملگرهای ماتریسی شامل چندجمله‌ای چبیشف به حل عددی این معادله پردازیم. این عملگرهای ماتریسی باعث تبدیل معادله انتگرال-دیفرانسیلی مرتبه کسری به یک سیستم جبرخطی خواهد شد که با حل کردن این معادلات، جواب عددی معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری فوق را به دست می‌آوریم. برای نشان دادن دقت و کارایی این روش چند مثال عددی را که توسط نرم افزار متلب محاسبه شده است، بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری آتانگانا-بالینو-کاپوتو، چندجمله‌ای چبیشف، ماتریس‌های عملیاتی، معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری.

رده‌بندی ریاضی: 26A33; 34A08; 65N35

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل، توسعه روش های تحلیلی و عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات کسری مرتبه متغیر کاربردهای مهمی در زمینه های فیزیک، زیست شناسی، ریاضیات، شیمی، سیستم های مهندسی، الکترونیک، اقتصاد، مهندسی و غیره در سال های اخیر داشته اند [۶]. همچنین مطالعه و بحث در مورد این نوع معادلات دیفرانسیل برای برخی از مشکلات مدل سازی معادلات دیفرانسیل حاوی ریمان-لیوویل و تعریف مشتق کاپوتو مفیدترین ابزار در حساب کسری اند [۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۷]. از آنجا که عملگرهای دیفرانسیل مرتبه کسری، عملگرهای غیرموضعی اند، بنابراین می توانند برخی از پدیده های طبیعی و فرایندهای سیستم های دینامیکی را بهتر توصیف کنند. اخیراً روش ها و تکنیک های عددی برای حل یک کلاس از معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر و راه حل های معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات کسری مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال روش تکرار تغییراتی [۱۶]، روش تجزیه آدومیان [۳]، روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته [۱۴]، روش موجک هار [۲]، روش تفاضلات متناهی [۲۶]، روش هم محلی طیفی [۲۸]، درون یابی به روش اسپلاین مکعب [۱۳]، روش عددی مدل کسری کلاین-کرامرز [۱۵]، روش های عددی با استفاده از رویکرد موجک های مونتنز-لژاندر [۱۲] و روش های دیگر [۵، ۸، ۲۰-۲۲، ۲۵، ۲۷] که می بایست در مطالعات مورد استفاده قرار گیرند. در این مقاله می خواهیم با جایگزین کردن انتگرال های کسری ریمان-لیوویل با انتگرال آتانگانا-بالینو در تعریف مشتقات ریمان-لیوویل استفاده کنیم. به علاوه به معرفی تعمیم جدیدی از مشتقات انواع ریمان-لیوویل و کاپوتو می پردازیم که با اصلاح عملگر انتگرال ریمان-لیوویل با تعمیم هسته آن با یک پارامتر تابع میتاگ-لفلر، تابعی که تابع نمایشی شناخته شده را گسترش می دهد، به دست می آید. هدف اصلی ما در این مقاله، ارائه حل یک کلاس از معادله دیفرانسیل-انتگرالی کسری از مرتبه متغیر به شکل زیر است:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, Y)dY + \int_0^t u(x, Y).k(x, Y)dY = f(x, t), \quad (1.1)$$

که در آن شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر است:

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = h(t), \quad t \in [0, 1],$$

به علاوه $0 < \alpha(t) \leq 1$ و $u(x, t)$ ، $f(x, t)$ ، $g(x, t)$ و $k(x, t)$ توابع تصادفی بر حسب زمان اند که $g(x, t)$ و $k(x, t)$ معلوم اند و $u(x, t)$ مجهول است. $\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC}$ مقدار مشتق کسری زمان مرتبه متغیر را به معنای کاپوتو تعریف شده توسط آتانگانو بیان می کند.

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)](t) = \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \int_0^t \frac{\partial (u(x, \sigma).g(x, \sigma))}{\partial \sigma} E_{\alpha(t)} \left(\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)} (t - \sigma)^{\alpha(t)} \right) d\sigma,$$

$$t > 0, \quad u(x, t).g(x, t) \in H^1(0, 1),$$

که در آن $M(\alpha(t))$ در رابطه $M(0) = M(1) = 1$ صدق می کند و E_{α} تابع تک پارامتری میتاگ-لفلر $(M - L)$ تعریف شده توسط سری توانی به شرح زیر است:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است. مطالعه روی تابع $(M - L)$ نیز به طور گسترده ای در مقالات و مراجع معتبر گسترش یافته است [۴، ۱۰، ۱۸، ۱۹]. به عنوان یک نتیجه ساده داریم:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} (t^m) = \begin{cases} \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\alpha(t))^p \Gamma(m + 1)}{(1 - \alpha(t))^p \Gamma(\alpha(t)p + m + 1)} & m = 1, 2, \dots, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

یا

$$\mathcal{D}_{\alpha(t)}^{ABC}(t^m) = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),m+1}\left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}\right) & m = 1, 2, \dots, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

که $\mathcal{E}_{\alpha(t),m+1}$ تابع میتاگ-فلر را با دو پارامتر مشخص می‌کند که با سری زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

هدف ما در این مقاله بررسی تقریب عددی کلاسی از معادلات انتگرال-دیفرانسیلی کسری با مرتبه متغیر است. ما روش چندجمله‌ای چیشف را برای حل معادله دیفرانسیل انتگرال کسری مرتبه متغیر پیشنهاد می‌کنیم. این روش مبتنی بر تبدیل معادله به سیستم معادلات جبری برای به‌دست آوردن یک روش تقریبی با استفاده از چندجمله‌ای تبدیل‌یافته چیشف است. در بخش ۲ به یادآوری برخی تعاریف لازم از حساب کسری پرداخته‌ایم. در بخش ۳ برخی از خصوصیات مهم چندجمله‌ای تبدیل‌یافته چیشف و بردار چیشف تبدیل‌یافته را به شکل ماتریس نشان می‌دهیم و همچنین در این بخش، تابع تقریب را معرفی می‌کنیم. در بخش ۴ برای حل معادله دیفرانسیل (۱.۱) یک روش عددی ارائه می‌کنیم و این بخش را با آنالیز همگرایی به پایان می‌بریم. در بخش ۵، اثربخشی و دقت روش بیان شده را با ارائه دو مثال نشان می‌دهیم.

۲ حساب کسری

در این بخش، ابتدا تعریف انتگرال کسری و مشتق از مرتبه $\alpha > 0$ را یادآوری می‌کنیم و سپس مقدمات ریاضی حساب‌های کسری مرتبه متغیر را معرفی و چندجمله‌ای چیشف را تعریف می‌کنیم. همچنین چندجمله‌ای چیشف و ویژگی‌های آنها را تغییر می‌دهیم.

تعریف ۱.۲ ([۴، ۹، ۱۰، ۲۳]). فرض کنیم $0 < \alpha \leq 1$ ، $f \in L^1[a, b]$ و $0 < t < b \leq \infty$. در این صورت انتگرال‌های کسری سمت چپ و راست ریمان-لیوویل از درجه‌ی α به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{\alpha-1} d\tau.$$

همچنین تعریف مشتقات کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه α به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{-\alpha} d\tau,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b f(\tau) (\tau - t)^{-\alpha} d\tau.$$

برای تابع مطلقاً پیوسته f ، تعریف مشتقات کسری کاپوتو سمت چپ و راست از مرتبه α به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^\alpha f(t) &= I_{a^+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^C D_{b^-}^\alpha f(t) &= -I_{b^-}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

تعریف ۲.۲ ([۱]). فرض کنیم $m-1 < \alpha \leq m$ و $f \in L^1[0, b]$ و $0 < t < b \leq \infty$. در این صورت انتگرال آتانگانا-بالینو از مرتبه α برای تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbb{I}_\alpha^{AB} f(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} I_{a^+}^\alpha f(t).$$

تعریف ۳.۲ ([۱]). فرض کنیم تابع $f \in L^1[0, b]$. در این صورت عملگر آتانگانا-بالینو-ریمان برای تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbb{D}_\alpha^{ABR} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) E_\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right) d\tau,$$

که در آن $m-1 < \alpha \leq m$. به علاوه برای تابع مطلقاً پیوسته f ، مشتقات آتانگانا-بالینو-کاپوتو نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbb{D}_\alpha^{ABC} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (f(\tau)) E_\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right) d\tau.$$

۱.۲ حساب کسری مرتبه متغیر

در این قسمت، ما مرتبه کسری α را با یک تابع کران دار $m-1 < \alpha(t) \leq m$ که $m \in \mathbb{N}$ جایگزین می کنیم و چند تعریف برای مشتقات و انتگرال کسری مرتبه متغیر به صورت های زیر بیان می کنیم.

تعریف ۴.۲. انتگرال کسری آتانگانا-بالینو از مرتبه $\alpha(t)$ برای تابع داده شده f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathfrak{J}_{\alpha(t)}^{AB} f(t) = \frac{1-\alpha(t)}{M(\alpha(t))} f(t) + \frac{\alpha(t)}{M(\alpha(t))} I_{a^+}^{\alpha(t)} f(t).$$

همچنین عملگر کسری آتانگانا-بالینو-ریمان از مرتبه $\alpha(t)$ برای تابع داده شده f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathfrak{D}_\alpha^{ABR} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) E_\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right) d\tau.$$

تعریف ۵.۲. برای تابع مطلقاً پیوسته f ، مشتق آتانگانا-بالینو-کاپوتو از درجه $\alpha(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} f(t) = \frac{M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (f(\tau)) E_{\alpha(t)}\left(\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}(t-\tau)^{\alpha(t)}\right) d\tau.$$

۳ چندجمله‌ای تبدیل یافته چیشف

چندجمله‌ای‌های چیشف در بسیاری از مطالعات علوم پایه و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و به‌ازای هر $x \in [-1, 1]$ با فرمول بازگشتی زیر معرفی می‌شوند:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

که در آن $T_n(x)$ شکل تحلیلی چندجمله‌ای چیشف از درجه n و به‌صورت زیر است:

$$T_n(x) = n \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i 2^{n-2i-1} \frac{(n-i-1)!}{(i)!(n-2i)!} x^{n-2i}.$$

توابع چندجمله‌ای چیشف خواص عادی و متعامد بودن را دارند. پس

$$\int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

با اعمال تغییر متغیر $x = 2t - 1$ ، می‌توانیم چندجمله‌ای‌های تبدیل یافته چیشف را در بازه $[0, 1]$ بیان کنیم و همچنین x را با $T_i(x)$ که $i = 0, 1, 2, \dots$ متعلق به اعداد حسابی است، جای‌گزین می‌کنیم. چندجمله‌ای تبدیل یافته چیشف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$T_0^*(t) = 1,$$

$$T_1^*(t) = 2t - 1,$$

$$T_{n+1}^*(t) = 2(2t - 1)T_n^*(t) - T_{n-1}^*(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

که چندجمله‌ای تبدیل یافته چیشف $T_n^*(x)$ از درجه n به صورت زیر است:

$$T_n^*(t) = n \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^k \frac{(n+k-1)!}{(2k)!(n-k)!} t^k.$$

این چندجمله‌ای‌ها متعامد هستند، پس

$$\int_0^1 T_i^*(x)T_j^*(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & i = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i = j \neq 0, \\ 0 & j \neq i, \end{cases}$$

که $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ تابع وزن است. فرض کنیم

$$\Phi(t) = [T_0^*(t), T_1^*(t), \dots, T_n^*(t)],$$

در این حالت می توان بردار چیشف تبدیل یافته را به شکل ماتریس زیر تعریف کرد:

$$\Phi(t) = AT_n(t), \tag{۱.۳}$$

که A و $T_n(t)$ عبارت اند از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2(-1)^2 \frac{1!}{2!} & 2(-1)^1 \frac{2^2 2!}{2!} & 2(-1)^0 \frac{1!}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n(-1)^n \frac{(n-1)!}{n!} & n(-1)^{n-1} \frac{2^2(n)!}{2!(n-1)!} & n(-1)^{n-2} \frac{2^4(n+1)!}{4!(n-2)!} & \dots & n(-1)^0 \frac{2^{2n}(2n-1)!}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

$$T_n(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}.$$

بدیهی است که $T_n(t) = A^{-1}\Phi(t)$ تابع $u(t) \in L^2(0, 1)$ را می توان با چند جمله ای تبدیل یافته چیشف به صورت زیر بیان کرد:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T_i^*(t). \tag{۲.۳}$$

با محدود کردن سری بی نهایت در معادله (۲.۳)، می توان $u(t)$ را به صورت زیر تقریب زد:

$$u(t) \cong \sum_{i=0}^n c_i T_i^*(t) = c^T \Phi(t),$$

که در آن بردار ضریب چیشف تبدیل یافته به صورت زیر است:

$$c = [c_0, c_1, \dots, c_n], \quad c = Q^{-1}(u, \Phi(t)),$$

که در آن Q عبارت است از یک ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ که به آن ماتریس دوگانه $\Phi(t)$ گفته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \Phi(t) \Phi^T(t) dt \\ &= \int_0^1 (AT_n(t))(AT_n(t))^T dt \\ &= A \left(\int_0^1 T_n(t) T_n^T(t) dt \right) A^T \\ &= AHA^T, \end{aligned}$$

که در آن ماتریس H برابر است با

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}.$$

حال می‌توانیم تقریبی از $u(x, t) \in (L^2[0, 1] \times L^2[0, 1])$ را به دست آوریم. بنابراین

$$u(x, t) \cong \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij} T_i^*(x) T_j^*(t) = \Phi^T(x) U \Phi(t),$$

که

$$U = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix},$$

و U را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$U = Q^{-1}(\Phi(x), (\Phi(t), u(x, t)))Q^{-1}.$$

۴ تبدیل عملگرهای دیفرانسیل

ما در این بخش هر دو عملگر دیفرانسیل مرتبه کسری و صحیح را به شکل ماتریسی و معادله (۱.۱) را با استفاده از روند بخش ۳ گسسته‌سازی و به سیستم جبری تبدیل می‌کنیم. سپس به کمک آن جواب عددی را معرفی می‌نماییم. حال با استفاده از مشتق بردار Φ در رابطه (۱.۳)،

داریم

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= D\Phi(t) = D(AT_n(t)) \\
&= AD(T_n(t)) \\
&= AD \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \\
&= AD \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= AV_{(n+1) \times n} T_n^*(t),
\end{aligned}$$

که $V_{(n+1) \times n}$ و $T_n^*(t)$ به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$V_{(n+1) \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad T_n^*(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

بردار $T_n^*(t)$ را بر حسب $\Phi(t)$ گسترش می‌دهیم و داریم $T_n^*(t) = B^* \Phi(t)$ که

$$B^* = \begin{bmatrix} A_{[1]}^{-1} \\ A_{[2]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n]}^{-1} \end{bmatrix},$$

و $A_{[k]}^{-1}$ عبارت است از k -امین ردیف A^{-1} ، که در آن $k = 1, 2, 3, \dots, n$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Phi'(t) = AV_{(n+1) \times n} B^* \Phi(t).$$

همچنین مشتق $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ دارای نمایش ماتریسی زیر است:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Phi^T(x) \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{V}_{(n+1) \times n} \mathbf{B}^* \Phi(t).$$

قضیه ۱.۴. فرض کنیم $0 < \alpha(t) \leq 1$ و $u(x, t), g(x, t) \in L^2[0, 1]$. در این صورت ماتریس عملیاتی مشتقات کسری آتانگانا-بالینو-کاپوتو از مرتبه متغیر $\alpha(t)$ برای $u(x, t), g(x, t)$ بر حسب چندجمله‌ای چیشف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)] = \Phi(x) \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}^T \mathbf{G} \Phi(x),$$

که \mathbf{M} ماتریس $\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)]$ نامیده می‌شود و عبارت است از:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(2)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), 2} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \\ \frac{\Gamma(2)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), 2} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \frac{\Gamma(3)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), 3} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\Gamma(n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \frac{\Gamma(n+2)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), n+2} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \\ & \frac{\Gamma(n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \\ & \frac{\Gamma(n+2)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), n+2} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \\ & \vdots & \\ & \frac{\Gamma(2n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t), 2n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \end{bmatrix}$$

اثبات. اگر توابع $u(x, t)$ و $g(x, t)$ را با چندجمله‌ای‌های چیشف تقریب کنیم، آن‌گاه $u(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{U} \Phi(t)$ و $g(x, t) = \Phi^T(x) \mathbf{G} \Phi(x)$ که در آن \mathbf{U} نامعلوم و \mathbf{G} معلوم است. بنابراین

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)] \\ &= \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [\Phi^T(x) \mathbf{U} \Phi(t). \Phi^T(x) \mathbf{G} \Phi(x)] \\ &= \Phi^T(x) \mathbf{U} \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [\Phi(t) \Phi^T(t)] \mathbf{G} \Phi(x) \\ &= \Phi^T(x) \mathbf{U} \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [\mathbf{A} \Gamma_n^*(t) (\mathbf{A} \Gamma_n^*(t))^T] \mathbf{A}^T \mathbf{G} \Phi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi^T(x)UA\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[\mathbf{T}_n^*(t) (\mathbf{T}_n^*(t))^T \right] A^T G \Phi(x) \\
 &= \Phi^T(x)UA\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \cdot (1 \ t \ \dots \ t^n) \right) A^T G \Phi(x) \\
 &= \Phi^T(x)UA\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left(\begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^n \\ t & t^\nu & \dots & t^{n+\nu} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ t^n & t^{\nu n} & \dots & t^{\nu n} \end{pmatrix} \right) A^T G \Phi(x) \\
 &= \Phi^T(x)UA \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \circ & \frac{\Gamma(\nu)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),\nu} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \\ \frac{\Gamma(\nu)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),\nu} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \frac{\Gamma(\nu)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),\nu} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\Gamma(n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \frac{\Gamma(n+\nu)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),n+\nu} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) & \dots \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) \\ \frac{\Gamma(n+\nu)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),n+\nu} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) \\ \vdots \\ \frac{\Gamma(\nu n+1)M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \mathcal{E}_{\alpha(t),\nu n+1} \left(-\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)} \right) \end{bmatrix} \times A^T G \Phi(x) \\
 &= \Phi^T(x)UAMA^T G \Phi(x).
 \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۴ ([۲۴]). فرض کنیم $u(x, t) \in L^2[0, 1]$. در این صورت ماتریس عملیاتی $\int_0^1 u(x, T)dT$ بر حسب چندجمله‌ای چیشف به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^1 u(x, T)dT = \Phi^T(x)U A_p P_1 \Phi(t),$$

که در آن

$$A_p = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} A_{[2]}^{-1} \\ A_{[3]}^{-1} \\ \vdots \\ A_{[n+1]}^{-1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix}, \quad c_{n+1} = Q^{-1} \int_0^1 t^{n+1} \Phi(t) dt.$$

قضیه ۳.۴. فرض کنیم $u(x, t), k(x, t) \in L^2[0, 1]$. در این صورت ماتریس عملیاتی $\int_0^1 u(x, T)k(x, T)dT$ بر حسب چندجمله‌ای چیشف به شکل زیر است:

$$\int_0^1 u(x, T)k(x, T)dT = \Phi^T(x)U A R A^T K \Phi(x),$$

که در آن R ماتریس عملیاتی $\int_0^1 u(x, T)k(x, T)dT$ بر حسب چندجمله‌ای چیشف است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \begin{bmatrix} t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{n+1}t^{n+1} \\ \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3}t^3 & \dots & \frac{1}{n+2}t^{n+2} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1}t^{n+1} & \frac{1}{n+2}t^{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1}t^{2n+1} \end{bmatrix}.$$

بنابراین معادله (۱.۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \Phi(x)U A M A^T G \Phi(x) + \Phi^T(x)U A_p P_1 \Phi(t) + \Phi^T(x)U A V_{(n+1) \times n} B^* \Phi(t) + \Phi^T(x)U A R A^T K \Phi(x) \\ & = f(x, t). \end{aligned}$$

این بخش را با بیان قضیه‌ای برای آنالیز همگرایی به پایان می‌بریم.

قضیه ۴.۴. فرض کنیم $\sum_{n=i+1}^{\infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} |u_{i,j}|^2 < \infty$ و همچنین S_1 و S_2 به صورت زیر باشند:

$$S_1 : \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u_n(x, t).g(x, t)] + \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u_n(x, Y)dY + \int_0^t u_n(x, Y).k(x, Y)dY,$$

$$S_2 : \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} [u(x, t).g(x, t)] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, Y)dY + \int_0^t u(x, Y).k(x, Y)dY,$$

که $u(x, t)$ جواب دقیق و $u_n(x, t)$ جواب عددی معادله (۱.۱) است. در این صورت داریم:

$$|S_1 - S_2| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.4)$$

اثبات. با توجه به تعریف S_1 و S_2 داریم:

$$S_1 - S_2 = \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[u_n(x, t) \cdot g(x, t) \right] + \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u_n(x, Y) dY + \int_0^t u_n(x, Y) \cdot k(x, Y) dY \\ - \left[\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[u(x, t) \cdot g(x, t) \right] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, Y) dY + \int_0^t u(x, Y) \cdot k(x, Y) dY \right],$$

بنابراین

$$|S_1 - S_2| \leq \left| \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[[u_n(x, t) - u(x, t)] g(x, t) \right] \right| \\ + \left| \frac{\partial}{\partial t} (u_n(x, t) - u(x, t)) \right| \\ + \left| \int_0^t [u_n(x, Y) - u(x, Y)] dY \right| \\ + \left| \int_0^t [u_n(x, Y) - u(x, Y)] k(x, Y) dY \right|,$$

برای اثبات رابطه (۱.۴) نشان می دهیم $|u_n(x, Y) - u(x, Y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. برای اثبات این مطلب داریم:

$$|u_n(x, Y) - u(x, Y)| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} T_i^*(x) T_j^*(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij} T_i^*(x) T_j^*(t) \right| \\ = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} u_{ij} T_i^*(x) T_j^*(t) \right| \quad (2.4)$$

با استفاده از نابرابری کوشی-شوارتز برای معادله (۲.۴) داریم:

$$|u_n(x, Y) - u(x, Y)| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |u_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |T_i^*(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} |T_j^*(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |T_i^*(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{j=0}^{\infty} |T_j^*(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

لذا $|u_n(x, Y) - u(x, Y)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ، هرگاه

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |T_i^*(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{t \in (\cdot, 1)} 0, \\ \left(\sum_{j=0}^{\infty} |T_j^*(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{t \in (\cdot, 1)} 0. \end{cases}$$

□

بنابراین رابطه (۱.۴) برقرار و حکم اثبات گردید.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش با استفاده از الگوریتم‌های معرفی شده در این مقاله، دو مثال عددی ارائه می‌کنیم و کارا و قابل قبول بودن روش پیشنهادی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چیشیف را نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۵. فرض کنیم معادله انتگرال-کسری به شرح زیر باشد:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[u(x, t)(x + t + 1) \right] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, T) dT + \int_0^t u(x, T)(x + t) dT = f(x, t),$$

$$\alpha(t) = \frac{t}{3}, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = t^2, \quad [x, t] \in [0, 1] \times [0, 1],$$

که تابع معلوم عبارت است از:

$$f(x, t) = 2t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^2 x}{3} + tx^2 + \frac{t^2 x^2}{3} + tx^3 - \frac{3t^{1-\frac{t}{3}} \left[6t(9 + 8t) - 6(-9 + t)tx \right]}{(-9 + t)(-6 + t)(-3 + t)\Gamma(1 - \frac{t}{3})}.$$

به علاوه فرض کنیم جواب دقیق به صورت $u(x, t) = x^2 + t^2$ باشد و به ازای $n = 2$ متغیر گسسته عبارت است از: $x_i = \frac{k_i}{3} - \frac{1}{6}$ و $t_j = \frac{k_j}{3} - \frac{1}{6}$. که برای سایر مقادیر n ، x_i و t_j توسط رابطه زیر تعریف شده‌اند:

$$x_i = \frac{k_i}{n+1} - \frac{1}{2n+2}, \quad t_j = \frac{k_j}{n+1} - \frac{1}{2n+2}, \quad (k_i, k_j = 1, 2, 3, \dots, n+1).$$

در شکل ۱ راه حل عددی و راه حل دقیق به ازای $n = 2$ برای مثال ۱.۵ نشان داده شده است.

مثال ۲.۵. معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[u(x, t)(xt) \right] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, T) dT + \int_0^t u(x, T)(x + t) dT = f(x, t),$$

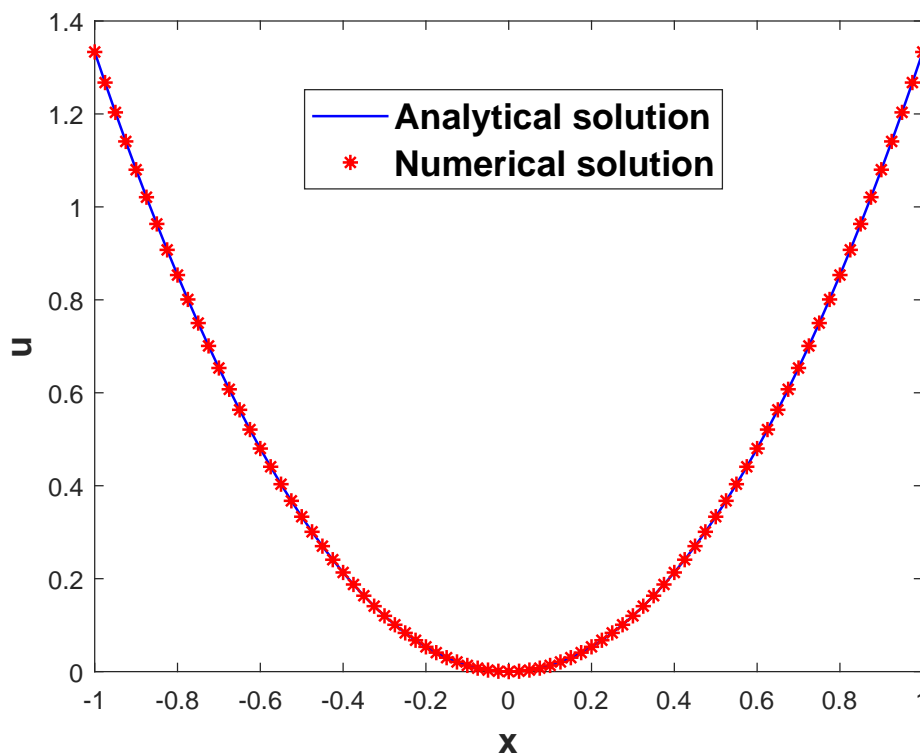
$$\alpha(t) = \sin\left(\frac{t}{3}\right), \quad u(x, 0) = (1 + x)^2, \quad u(0, t) = (1 + t)^2, \quad [x, t] \in [0, 1] \times [0, 1],$$

که

$$f(x, t) = 2(1 + x + t) + t + \frac{3t^2}{2} + t^3 + \frac{t^4}{4} + 3tx + tx^2 + 3t^2x + t^3x + \frac{3t^2x^2}{2} + tx^3 - \frac{3t^{1-\sin(\frac{t}{3})} x \left[6(1 + x + t)^2 + (1 + x) \sin t (-3(5 + 4t + 5x) + (1 + x) \sin t) \right]}{(-9 + \sin t)(-6 + \sin t)(-3 + \sin t)\Gamma(1 - \sin(\frac{t}{3}))}.$$

همچنین فرض کنیم جواب دقیق به صورت $u(x, t) = (1 + x + t)^2$ داده شده است. با در نظر گرفتن $n = 2$ متغیر گسسته عبارت است از:

$$x_i = \frac{k_i}{3} - \frac{1}{6}, \quad t_j = \frac{k_j}{3} - \frac{1}{6}, \quad (k_i, k_j = 1, 2, 3).$$



شکل ۱: راه حل عددی و راه حل دقیق به‌ازای $n = ۲$ و $\alpha(t) = \frac{t}{۳}$

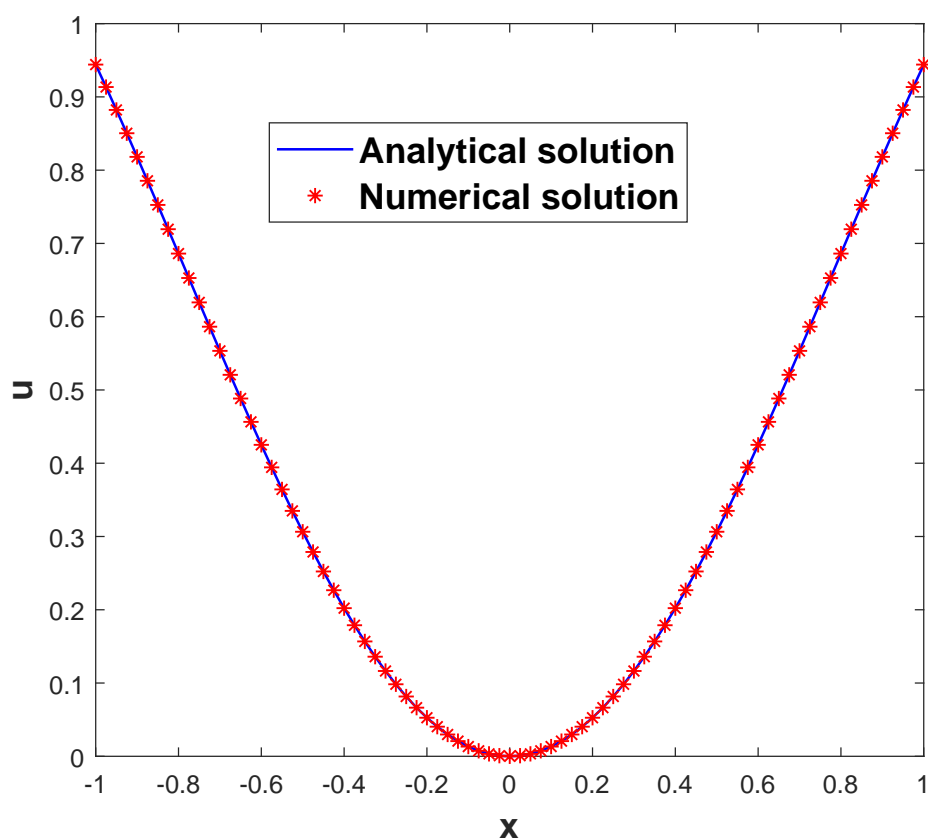
لذا می‌توان ماتریس U را به‌شکل زیر به‌دست آورد:

$$U = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۵}{۲} & \frac{۸}{۳} \\ \frac{۵}{۲} & ۴,۰۰۰۷۶۵ & ۵,۰۸۶۶۵ \\ \frac{۸}{۳} & ۷,۰۰۰۳۴۶۲ & ۸,۰۰۰۶۲۴۳ \end{bmatrix}$$

در شکل ۲ راه حل عددی و راه حل دقیق به‌ازای $n = ۲$ ، برای مثال ۲.۵ نشان داده شده است.

۶ نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر، برخی از محققان مطالعات خود را بر روی مسائل دیفرانسیلی کسری مرتبه متغیر متمرکز کرده‌اند. در این مقاله، یک الگوریتم جدید مبتنی بر چندجمله‌ای تبدیل‌یافته چیشف برای حل معادله دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر با مشتقات کسری آتانگانا-بالینو-کاپوتو ارائه کردیم و نتیجه گرفتیم که این روش بر اساس چندجمله‌ای‌های تبدیل‌یافته چیشف یک تکنیک مناسب برای حل معادله دیفرانسیلی کسری معرفی شده با مرتبه متغیر است. همچنین معادله دیفرانسیلی کسری با مرتبه متغیر را به برخی عملگرهای ماتریسی وابسته تبدیل کردیم. ماتریس‌های عملیاتی این رویکرد برای تبدیل معادله دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر مورد مطالعه به سیستم معادلات جبری مشتق شده است. مثال‌های عددی دقت روش پیشنهادی را نشان می‌دهند. از اشکال حاصل در این مقاله می‌توان دریافت در روش پیشنهادی جواب‌های عددی با جواب‌های دقیق بسیار مطابقت دارند.



شکل ۲: راه حل عددی و راه حل دقیق به ازای $n = ۲$ و $\alpha(t) = \sin(\frac{t}{\pi})$

فهرست منابع

- [1] Atangana A. and Baleanu D., *New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model*, (2016).
- [2] Chen Y., Yi M. and Yu C., *Error analysis for numerical solution of fractional differential equation by Haar wavelets method* Journal of Computational Science, **3**(5) (2012), 367–373.
- [3] El-Kalla I. L., *Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations*, Applied Mathematics Letters, **21**(4) (2008), 372–376.
- [4] Garra R., Gorenflo R., Polito F. and Tomovski Ž., *Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications*, Applied mathematics and computation, **242** (2014), 576–589.
- [5] Han W., Chen Y. M., Liu D. Y., Li X. L. and Boutat D., *Numerical solution for a class of multi-order fractional differential equations with error correction and convergence analysis*, Advances in Difference Equations, (1) (2018), 241-253.
- [6] Hasib Khan., Gómez Aguilar J. F., Aziz Khan. and Tahir Saeed Khan, *Stability analysis for fractional order advection–reaction diffusion system*, Physica A., **521** (2019), 737-751.
- [7] Ichise M., Nagayanagi Y. and Kojima T., *An analog simulation of non-integer order transfer functions*

- for analysis of electrode processes, *Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry*, **33**(2) (1971), 253–265.
- [8] Jafari H., Tajadodi H. and Ganji R. M., *A numerical approach for solving variable order differential equations based on Bernstein polynomials*, *Computational and Mathematical Methods*, **1**(5) (2019), e1055.
- [9] Khubalkar S., Junghare A., Aware M. and Das S., *Unique fractional calculus engineering laboratory for learning and research*, *International Journal of Electrical Engineering Education*, (2018), 0020720918799509.
- [10] Kilbas A. A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, San Diego, 2006.
- [11] Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z. and Chen, J., *Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering*, *Mathematical Problems in Engineering*, 2016.
- [12] Maleknejad D., Rashidinia J., Eftekhari T., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Numerical solutions of distributed order fractional differential equations in the time domain using the Müntz–Legendre wavelets approach, 2020.
- [13] Moghaddam B. P. and Machado J. A. T., *A computational approach for the solution of a class of variable-order fractional integro-differential equations with weakly singular kernels*, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **20**(4) (2017), 1023–1042.
- [14] Momani S., Odibat Z. and Erturk V. S., *Generalized differential transform method for solving a space and time fractional diffusion wave equation*, *Physics Letters A*, **370**(5–6) (2007), 379–387.
- [15] Nikan O., Tenreiro Machado J. A., Golbabai A. and Rashidinia J., *Numerical evaluation of the fractional Klein–Kramers model arising in molecular dynamics*, *Journal of Computational Physics*, 6 November, (2020), 109983.
- [16] Odibat Z. M., *A study on the convergence of variational iteration method*, *Mathematical and Computer Modelling*, **51**(9-10) (2010), 1181–1192.
- [17] Ortigueira M. D., *Fractional calculus for scientists and engineers*, (Vol. 84), Springer Science & Business Media, 2011.
- [18] Podlubny I., *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, (Vol. 198), Elsevier, 1998.
- [19] Prabhakar T. R., *A singular integral equation with a generalized Mittag Leffler function in the kernel*, 1971.
- [20] Rashidinia J. and Mohmedi E., *Convergence analysis of tau scheme for the fractional reaction-diffusion equation*, *The European Physical Journal Plus*, **133**, (2018), Article number: 402.
- [21] Rashidinia J. and Mohmedi E., *Approximate solution of the multi-term time fractional diffusion and diffusion-wave equations*, *Computational and Applied Mathematics*, (39) (2020) Article number: 216.
- [22] Snyder M. A., *Chebyshev methods in numerical approximation*, (Vol. 2). Prentice-Hall, 1966.

- [23] Srivastava H. M., Saxena R. K., Pogany T. K. and Saxena R., *Integral transforms and special functions*, Applied Mathematics and Computation, **22**(7) (2011), 487–506.
- [24] Sun K. and Zhu M., *Numerical algorithm to solve a class of variable order fractional integral-differential equation based on chebyshev polynomials*, Mathematical Problems in Engineering, 2015.
- [25] Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W. and Chen Y., *A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **64** (2018), 213–231.
- [26] Xu Y. and Ertürk V., *A finite difference technique for solving variable order fractional integro-differential equations*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, **40**(3) (2014).
- [27] Xu Z. and Chen W., *A fractional-order model on new experiments of linear viscoelastic creep of Hami Melon*, Computers & Mathematics with Applications, **66**(5) (2013), 677–681.
- [28] Zayernouri M. and Karniadakis G. E., *Fractional spectral collocation methods for linear and non-linear variable order FPDEs*, Journal of Computational Physics, **293** (2015), 312–338.



Numerical solution for a class of variable order fractional integral-differential equation with Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivative

Haji Mohammad Mohammadi nejad^{1,†}, Hassan Khosravi²

^{(1),(2)} Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Birjand, Birjand, Iran.

Received: 2020/10/14

Accepted: 2021/2/19

Communicated by: Abdolrahman Razani

Abstract: In this paper we consider fractional integral-differential equations of variable order containing Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivatives as follows:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\alpha(t)}^{ABC} \left[u(x, t) \cdot g(x, t) \right] + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \int_0^t u(x, Y) dY \\ + \int_0^t u(x, Y) \cdot k(x, Y) dY = f(x, t), \end{aligned}$$

We try to solve this equation using a numerical method based on matrix operators including Chebyshev polynomials. By using these operational matrixes the fractional order integral-differential equation is transformed into an algebraic system which by solving them, we will obtain the numerical answer of the above fractional integral-differential equation. To show the accuracy and efficiency of this method, we have calculated some numerical examples by MATLAB software.

Keywords: Atangana-Baleanu-Caputo fractional derivative, Chebyshev polynomials, Operational matrixes, Fractional integral-differential equations.

Mathematics Subject Classification (2010): 26A33, 34A08, 65N35.



©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†] Corresponding author: hmohammadin@birjand.ac.ir