



تعیین توابع منبع و شار مرزی مجهول در یک مساله نفوذ کسری-زمانی

صدیقه طوبائی^۱، مرتضی گرشاسبی^{۲*}، پرستو ریحانی اردبیلی^۳

(۱) گروه ریاضی، پردیس علوم تحقیقات خوزستان، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
(۱) گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اهواز، اهواز، ایران
(۲) دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱/۷

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۱۴

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

چکیده: در این مقاله یک مساله سهموی کسری زمانی که کاربردهای متنوعی در توجیه پدیده‌های مختلف دارد، در نظر گرفته شده است. تعیین هم‌زمان توابع منبع و شار مرزی مجهول هدف اصلی این تحقیق است که برای نخستین بار مطرح می‌شود. وجود و یکتایی جواب مساله با اعمال شرط فوق اضافی و استفاده از قضیه دوهمال و اصل برهمنهی، اثبات می‌شود در ادامه از روش منظم‌سازی مولیفیکیشن بر پایه یک روش تفاضلات متناهی مارچینگ برای تعیین توابع مجهول در مساله استفاده شده است. برای روش عددی ارائه‌شده پایداری و همگرایی جواب‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در پایان برای بررسی دقت و کارایی الگوریتم عددی روش مارچینگ، به حل دو مثال که دارای جواب دقیق هستند، پرداخته می‌شود. نتایج عددی حاصل نشان‌دهنده توانایی روش ارائه‌شده در حل عددی مسائل معکوس می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: کسری زمانی، مساله معکوس، مولیفیکیشن، روش مارچینگ.

رده‌بندی ریاضی: 65M32; 65M12; 65M06

۱ مقدمه

محاسبات کسری در چند سال اخیر بازتاب خوبی در علوم و مهندسی داشته است و کارهای قابل ملاحظه‌ای در زمینه کاربردها و حل عددی معادلات شامل مشتق از مرتبه کسری انجام شده است. از جمله این معادلات، می‌توان به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری $(FPDEs)$ اشاره کرد که در زمینه‌های متفاوتی از جمله زمین‌شناسی، پزشکی، اقتصاد و علوم مهندسی دارای کاربردهای زیادی هستند. با گسترش دامنه دانش بشر، کاربردهای متنوعی از مسائل مقدار اولیه-مرزی کسری $(FIBVP)$ توسط دانشمندان علوم مختلف کشف

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: stoobaei@yahoo.com (S. Toubaei), m_garshasbi@iust.ac.ir (M. Garshasbi), p_reihani@pnu.ac.ir (P. Reihani Ardabili)

[†]Fractional Partial Differential Equations

[‡]Fractional Initial-Boundary Value Problems

شده است و امروزه این نوع مسائل به‌عنوان ابزارهای بسیار توانمند در توجیه پدیده‌های مختلف به‌حساب می‌آیند [۱۱، ۱۴، ۱۹]. در زمینه مسائل مقدار اولیه-مرزی مرتبط با مشتقات کسری، نیگما تولین[§] از نخستین دانشمندانی است که به بررسی نظری مسائل پرداخته است [۱۷]. نتایج تئوری و عددی متعددی توسط محققان در زمینه این مسائل ارائه شده است. به‌عنوان مثال در [۱۰]، لوچکو[¶] وجود و یکتایی جواب برخی (FIBVP) را مورد بررسی قرار داده است و در [۲۰]، وجود و یکتایی جواب ضعیف برخی از این نوع مسائل FIBVP به همراه تحلیل رفتار مجانبی جواب هنگامی که زمان به صفر میل می‌کند، بررسی شده است. حل عددی FIBVP مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. به‌عنوان مثال روش تفاضلات متناهی توسط بعضی نویسندگان به‌عنوان یک روش کارآمد برای حل مسائل مقدار اولیه-مرزی کسری استفاده شده است [۱۳، ۲۱]. علاوه بر این، روش‌های تقریبی دیگر مانند روش طیفی و عناصر متناهی برای حل برخی از رده‌های FIBVP به کار گرفته شده است [۳، ۷، ۹، ۱۸].

برخلاف مسائل مستقیم مقدار اولیه-مرزی کسری، که اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، مسائل معکوس مقدار اولیه-مرزی کسری هنوز در گام‌های ابتدایی‌اند [۲۳، ۲۴]. فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری معکوس، نقش مهمی در بررسی بسیاری از پدیده‌ها و سیستم‌های فیزیکی و شیمیایی بازی می‌کند. در بسیاری از پدیده‌هایی که در آنها روابط علی-معلولی مشخص‌کننده رفتار سیستم مورد بحث هستند، بیان ریاضی روابط علی-معلولی به‌صورت یک مساله معکوس امکان تجزیه و تحلیل هرچه بهتر آنها را میسر خواهد کرد. یکی از پدیده‌های مهم که اغلب در زمینه‌های مختلف مانند انتقال حرارت و انتقال جرم با آن مواجه‌ایم، پدیده نفوذ است. مدل ریاضی این پدیده قابل بیان به‌صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی است و بیان این مدل‌ها به‌صورت مسائل معکوس اخیراً بسیار مورد توجه بوده است. بر اساس اهمیت مسائل معکوس سهموی و کاربردهای متنوع این نوع مسائل، در این تحقیق به بررسی یک مساله معکوس سهموی از مرتبه کسری که از پدیده نفوذ ناشی می‌گردد، خواهیم پرداخت. هرگاه فرایند نفوذ یک سیال در یک محیط به‌صورت آهسته و پیوسته رخ دهد، یک دسته مهم از معادلات نفوذ کسری که این فرایند را به‌خوبی توجیه می‌کنند به‌صورت معادله زیر در نظر گرفته می‌شوند [۷، ۱۱، ۱۴]:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + f(x, t) \quad (1.1)$$

که در آن $p(x)$ نمایان‌گر ناهمگونی متوسط و ∂_t^α نشان‌دهنده مشتق کسری است که در این تحقیق به‌صورت مشتق کاپوتو در نظر گرفته می‌شود [۱۹]:

$$\partial_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

اخیراً این معادله با شرایط اولیه و مرزی متناسب به‌عنوان یک مساله معکوس تعیین یکتای تابع $p(x)$ توسط چنگ[□] و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. همچنین ژانگ^{**} در [۲۳] به مساله تخمین تابع منبع $f(x, t)$ برای حالتی که $p(x) = 1$ است، پرداخته است. در تحقیق حاضر با توجه به اهمیت و کاربرد مدل ارائه‌شده فوق، یک مساله مقدار اولیه-مرزی معکوس بر اساس این مدل معرفی و مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل در نظر گرفته‌شده در این مقاله حالتی خاص از مدل (۱.۱) به ازای $p(x) = 1$ است. در مساله مورد بحث فرض بر آن است که تابع منبع و نیز تابع توجیه‌کننده شار در یکی از نقاط مرزی مجهول اند. با توجه به این که اغلب مسائل معکوس مرتبط با مسائل سهموی بدووضع اند، در این تحقیق از یک روش تفاضلات متناهی مبتنی بر مولیفیکیشن استفاده شده است. ملاحظه خواهیم کرد که روش ذکرشده در حقیقت یک روش منظم‌سازی است و در کاهش تاثیر اختلال داده‌های ورودی بر خروجی مساله بسیار مناسب عمل می‌کند. روش مولیفیکیشن توسط محققین مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است و کارایی آن در عمل به اثبات رسیده است [۲، ۴-۶، ۱۲]. این روش برای حل مساله معکوس موردنظر در این تحقیق بسیار مناسب بوده و با حجم عملیاتی نه‌چندان زیادی منتج به خروجی‌های مناسب می‌گردد. ساختار این مقاله به‌صورت زیر است:

در بخش دوم مساله معکوس موردنظر معرفی می‌گردد و وجود و یکتایی جواب آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش سوم به رویکرد عددی حل مساله اختصاص دارد که در آن یک روش عددی بر پایه روش مارچینگ و نیز روش مولیفیکیشن معرفی و پایداری و همگرایی جواب روش عددی ارائه‌شده اثبات خواهد شد. در بخش چهارم به‌منظور نشان دادن کارایی روش عددی مورد استفاده در این مقاله، دو مثال که جواب تحلیلی برای آنها وجود دارد را در نظر گرفته‌ایم و نتایج حاصل از جواب‌های عددی و تحلیلی مقایسه شده‌اند.

[§]Nigmatullin

[¶]Luchko

[□]Cheng

^{**}Zhang

۲ مدل ریاضی مساله معکوس

در این مقاله مساله معکوس نفوذ کسری زمانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1 \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = p(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = q(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.2)$$

که در آن تابع شار مرزی $q(t)$ و جمله منبع $f(x, t)$ مجهول اند. تابع $f(x, t)$ تابعی کران‌دار است به عبارتی دیگر ثابت مثبتی مانند M_F وجود دارد که

$$\max_{0 \leq x, t \leq 1} |f(x, t)| \leq M_F.$$

به منظور تخمین توابع منبع مجهول $f(x, t)$ و شار مرزی مجهول $q(t)$ و همچنین برای اثبات وجود و یکتایی جواب مساله (۱.۲) - (۴.۲) شرط فوق اضافی زیر را در نظر می‌گیریم

$$u(0, t) = \psi(t). \quad (5.2)$$

در مساله (۱.۲) - (۵.۲) فرض کنیم $u = u_1 + u_2$ که در آن

$$u_2(x, t) = \frac{q(t) - p(t)}{2} x^2 + p(t)x$$

و u_1 جواب مساله زیر است:

$$\partial_t^\alpha u_1(x, t) = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1, \quad (6.2)$$

$$u_1(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (9.2)$$

$$u_1(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (10.2)$$

که در آن

$$F(x, t) = f(x, t) + \{(q(t) - p(t)) - \partial_t^\alpha(q(t) - p(t))\} \frac{x^2}{2} - \partial_t^\alpha p(t)x,$$

و

$$\Phi(x) = \phi(x) - \frac{q(0) - p(0)}{2} x^2 - p(0)x.$$

تعیین $(u_1(x, t), F(x, t), \Phi(x))$ در (۶.۲) - (۱۰.۲) معادل با تعیین (u, f, q) در مساله (۱.۲) - (۵.۲) است. حال با به‌کارگیری اصل برهمنهی می‌توان گفت: $u_1 = v + w$ که در آن v جواب مساله

$$\partial_t^\alpha v(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + F(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1, \quad (11.2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (13.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (14.2)$$

$$v(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (15.2)$$

و w جواب مساله زیرند:

$$\partial_t^\alpha w(x, t) = \frac{\partial^\gamma w}{\partial x^\gamma}(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1, \quad (16.2)$$

$$w(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (17.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (18.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (19.2)$$

$$w(0, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (20.2)$$

واضح است که با دو مساله معکوس مواجه‌ایم. هدف اصلی از این بخش این است که نشان دهیم مساله (۶.۲) - (۱۰.۲) دارای جواب یکتا است. با به کار بردن اصل دوهامل^{††} می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد: [۲۳]:

گزاره ۱.۲. فرض کنیم $c(x, t; \tau)$ به ازای هر پارامتر مثبت τ ، جواب مساله زیر باشد

$$\frac{\partial^\alpha c(x, t, \tau)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\gamma c}{\partial x^\gamma}(x, t; \tau), \quad (x, t) \in (0, 1] \times (\tau, T), \quad (21.2)$$

$$c|_{t=\tau} = \frac{\partial^{1-\alpha} f(x, t)}{\partial t^{1-\alpha}}|_{t=\tau} \quad (22.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(0, t, \tau) = 0, \quad (23.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(1, t, \tau) = 0. \quad (24.2)$$

آن‌گاه $v(x, t) = \int_0^t c(x, t, \tau) d\tau$ جواب مساله (۱۱.۲) - (۱۵.۲) است.

□

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۳] مراجعه شود.

به منظور بررسی یکتایی جواب در مسائل (۱۱.۲) - (۱۵.۲) و (۱۶.۲) - (۲۰.۲) لم زیر بسیار سودمند خواهد بود [۲۳].

لم ۲.۲. فرض کنیم

$$w_1(x, t), w_2(x, t) \in C((0, T], L^\gamma(I) \cap C(0, T), H^\gamma(I) \cap H^1(I))$$

جواب‌های مساله (۱۶.۲) - (۲۰.۲) به ترتیب با شرایط اولیه $\Phi_1(x)$ و $\Phi_2(x)$ باشند. در این صورت اگر

$$w_1(0, t) = w_2(0, t) = \Psi(t) (t \in (0, T]),$$

آن‌گاه

$$\Phi_1(x) = \Phi_2(x) \in L^\gamma(I).$$

□

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۳] مراجعه شود.

با استفاده از این لم، می‌توان نتیجه گرفت که مساله معکوس (۱۶.۲) - (۲۰.۲) دارای جواب یکتاست. همچنین با استفاده از گزاره ۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت که افزودن $c(0, t, \tau) = 0$ به عنوان شرط اضافی به مساله (۲۱.۲) - (۲۴.۲) منجر به تعیین $c(x, t, \tau)$ می‌گردد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با توجه به این که مسائل فوق دارای جواب یکتا هستند، مساله (۶.۲) - (۱۰.۲) نیز دارای جواب یکتا است. با بیان قضیه زیر بحث وجود و یکتایی جواب را به پایان می‌بریم.

قضیه ۳.۲. برای $\phi(x) \in L^\gamma(I), p(t), \psi(t) \in L^\gamma(0, t)$ جواب مساله (۱.۲) - (۵.۲) یکتا است.

□

اثبات. به آنالیز قبل از قضیه مراجعه شود.

۳ روند عددی حل مساله معکوس

در این بخش یک الگوریتم کارا براساس روش مارچینگ مکانی و روش مولیفیکیشن برای تعیین جواب مساله (۱.۲) - (۵.۲) را معرفی می‌کنیم. در مورد مولیفیکیشن و ویژگی آن در منابع [۲، ۴-۶، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۲۲] مطالب کامل آورده شده است. به همین منظور در بخش بعد با مرور مختصری بر مولیفیکیشن، مولیفیکیشن مشتق کسری و ویژگی‌های آن را که در روند حل مساله معکوس به کار می‌آیند، بیان می‌کنیم.

۱.۳ مولیفیکیشن و مشتق کسری

برای یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی مانند f تعریف‌شده بر بازه $I = [0, 1]$ و به‌ازای $a > 0, p > 0$ ، δ -مولیفیکیشن f بر $I_\delta = [p\delta, 1 - p\delta]$ برای $p < \frac{1}{3\delta}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_\delta f(x) = (\rho_\delta * f)(x),$$

که در آن

$$\rho_\delta(x) = \begin{cases} A_p \delta^{-1} \exp(-\frac{|x|}{\delta}), & |x| < p\delta, \\ 0, & |x| > p\delta. \end{cases}$$

و $A_p = (\int_{-p}^p \exp(-s) ds)^{-1}$ حال برای بیان مولیفیکیشن گسسته، مجموعه

$$K = \{x_j : x_{j+1} - x_j > d > 0, j \in Z\}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $G = \{g_j\}_{j \in Z}$ یک تابع گسسته تعریف‌شده روی K باشد. قرار می‌دهیم:

$$s_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}), \quad j \in Z.$$

δ -مولیفیکیشن گسسته از G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_\delta G(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) ds \right) g_j.$$

واضح است که

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} \rho_\delta(x-s) ds \right) = \int_{-\rho_\delta}^{-\rho_\delta} \rho_\delta(s) ds = 1.$$

قبل از بررسی عملگر مشتق کسری کاپوتو، عملگر مشتق تفاضل مرکزی D را با نماد زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(f(x)) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x},$$

و همچنین عملگر مشتق پیشرو D_+ و پسرو D_- را به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$D_+(f(x)) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$D_-(f(x)) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}.$$

در ادامه δ -مولیفیکیشن را برای تخمین مشتق از مرتبه کسری کاپوتو شرح می‌دهیم. برای این منظور مشتق کسری کاپوتو تابع $g(t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\partial_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{g'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.3)$$

رابطه (۱.۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\partial_t^\alpha g(t) = k * g'$$

که در آن تابع هسته k به صورت زیر تعریف می گردد:

$$k(t) = \begin{cases} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

حال اگر نسخه مختل شده g یعنی g^ε را در نظر بگیریم، آن گاه

$$J_\delta(\partial_t^\alpha(g^\varepsilon))(t) = \partial_t^\alpha g^\varepsilon(t) * \rho_\delta = k * (g^\varepsilon * \rho_\delta)'(t) = k * (J_\delta g^\varepsilon)'(t)$$

بنابراین می توان گفت:

$$J_\delta(\partial_t^\alpha(g^\varepsilon))(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{(J_\delta g^\varepsilon)'(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \quad (2.3)$$

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $g'(t)$ و $g^\varepsilon(t)$ بر $I = [0, 1]$ به طور یکنواخت لیبشیتز بوده و $\|g - g^\varepsilon\|_{\infty, I} \leq \varepsilon$. در این صورت ثابتی مانند C مستقل از δ وجود دارد که

$$\|J_\delta(\partial_t^\alpha(g^\varepsilon))(t) - \partial_t^\alpha(g)(t)\|_{\infty, I} \leq \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (\delta + \frac{\varepsilon}{\delta}). \quad (3.3)$$

□

اثبات. برای اثبات به [۱۶] رجوع شود.

برای محاسبه $J_\delta(\partial_t^\alpha(g)(t))$ ، به صورت عددی عملگر زیر را در نظر می گیریم:

$$J_\delta(\partial_t^\alpha(g^\varepsilon))(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{(J_\delta g^\varepsilon)'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (4.3)$$

که در آن g^ε نسخه مختل شده g است. برای عدد صحیح مثبت n ، فرض کنیم $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ یک افراز از I باشد، که در آن

$$t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \Delta t = \frac{T}{n},$$

آن گاه برای گسسته سازی انتگرال با استفاده از روش تفاضل متناهی ارائه شده در [۳، ۸]، مقدار معادله (۴.۳) را در نقطه گره های $t = t_i$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} J_\delta(\partial_t^\alpha(g^\varepsilon))(t_i) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_i} \frac{(J_\delta g^\varepsilon)'(s)}{(t_i-s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(J_\delta g^\varepsilon)'(s)}{(t_i-s)^\alpha} ds \\ &\simeq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(J_\delta G^\varepsilon)'(t_{k+1}) - (J_\delta G^\varepsilon)'(t_k)}{k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{(t_i-s)^\alpha} ds \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} D_+(J_\delta G^\varepsilon)(t_k) A_{i,k} = D^\alpha(G^\varepsilon)_\delta(t_i), \end{aligned} \quad (5.3)$$

که در آن D_+ عملگر تفاضل متناهی پیشرو و

$$A_{i,k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{ds}{(t_i-s)^\alpha}.$$

قضیه ۲.۳. فرض کنیم g^ε و g' بر $I = [0, 1]$ به طور یکنواخت لپشیتز بوده و G^ε و G به ترتیب نسخه گسسته از g^ε و g باشند که $\|G - G^\varepsilon\|_{\infty, K} \leq \varepsilon$. در این صورت ثابتی مانند C مستقل از δ وجود دارد که

$$\|J_\delta(D^\alpha(g^\varepsilon)) - J_\delta(D^\alpha(G^\varepsilon))\|_{\infty, I} \leq \frac{C\Delta t}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}, \quad (۶.۳)$$

و

$$\|J_\delta(D^\alpha(G^\varepsilon)) - D^\alpha(g)\|_{\infty, I} \leq \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(\delta + \frac{\varepsilon}{\delta} + \Delta t). \quad (۷.۳)$$

اثبات. برای اثبات به [۱۶] رجوع شود.

□

لم ۳.۳. ثابت‌هایی مانند $C_{1\alpha} > 0$ و $C_{2\alpha} > 0$ وجود دارند که

(i)

$$|D^\alpha(G^\varepsilon)_\delta(t_i)| \leq \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|} \|G^\varepsilon\|_\infty, \quad i = 1, \dots, N,$$

(ii)

$$|W_i^n - \partial_t^\alpha v(ih, nk)| \leq C_{2\alpha} \frac{\varepsilon}{\delta} + O(\Delta t).$$

اثبات. اثبات قسمت (i)، با توجه به رابطه زیر (قضیه ۴ - ۶ مرجع [۱۵])

$$|D_+(G)| \leq \frac{C}{|\delta|} \|G\|_\infty, \quad (۸.۳)$$

که در آن C عددی ثابتی است، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} |D^\alpha(G^\varepsilon)_\delta(t_i)| &\leq \sum_{k=0}^{i-1} |D_+(J_\delta G^\varepsilon)(t_k)| |A_{i,k}| \\ &\leq \frac{C}{|\delta|} \|G^\varepsilon\|_\infty \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_i} |(t_i - s)^{-\alpha}| ds \\ &= \frac{C t_i^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)|\delta|} \|G^\varepsilon\|_\infty \\ &\leq \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)|\delta|} \|G^\varepsilon\|_\infty = \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|} \|G^\varepsilon\|_\infty, \end{aligned}$$

که در آن

$$C_{1\alpha} = \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

اثبات قسمت (ii)، با توجه به روابط

$$W_i^n = D_t^\alpha v(ih, nk) = \partial_t^\alpha J_\delta u^\varepsilon(ih, nk) + O(\Delta t),$$

و

$$\partial_t^\alpha v(ih, nk) = \partial_t^\alpha J_\delta u(ih, nk) + O(\Delta t),$$

می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} |W_i^n - \partial_t^\alpha v(ih, nk)| &= |\partial_t^\alpha J_\delta u^\varepsilon(ih, nk) - \partial_t^\alpha J_\delta u(ih, nk) + O(\Delta t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{nk} \frac{C_\delta^\varepsilon}{(nk-s)^\alpha} ds + O(\Delta t) \\ &\leq \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\varepsilon (nk)^{1-\alpha}}{\delta^{1-\alpha}} + O(\Delta t) \\ &\leq C_{r\alpha} \frac{\varepsilon}{\delta} + O(\Delta t), \end{aligned}$$

که در آن

$$C_{r\alpha} = \frac{C}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

□

۲.۳ منظم‌سازی مساله و روش مارچینگ

در این بخش فرض کنیم داده‌های مساله معرفی شده در بخش قبل دارای اختلال باشند و هدف حل مساله زیر باشد:

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + f(x, t) \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1 \quad (9.3)$$

$$u(x, 0) = \phi^\varepsilon(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (10.3)$$

$$u_x(0, t) = p^\varepsilon(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11.3)$$

$$u(0, t) = \psi^\varepsilon(t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (12.3)$$

که در آن توابع p^ε ، ϕ^ε و ψ^ε که به ترتیب مختل شده p ، ϕ و ψ هستند، در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\|\varphi^\varepsilon - \varphi\| \leq \varepsilon, \|p^\varepsilon - p\| \leq \varepsilon, \|\psi^\varepsilon - \psi\| \leq \varepsilon.$$

به دلیل وجود خطا در داده‌های اولیه، ابتدا مساله را منظم‌سازی می‌کنیم. مساله منظم‌سازی شده به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود و در آن $v(x, t)$ و $v_x(x, t)$ در بازه $[0, 1]$ به گونه‌ای به دست می‌آیند که جواب مساله زیر باشد:

$$\partial_t^\alpha v(x, t) = v_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1, \quad (13.3)$$

$$v(x, 0) = J_\delta \phi^\varepsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (14.3)$$

$$v_x(0, t) = J_{\delta^*} p^\varepsilon(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (15.3)$$

$$v(0, t) = J_{\delta'} \psi^\varepsilon(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (16.3)$$

که در آن $v = J_\delta u$ نسخه مولیفایر شده u است و همه شعاع‌های مولیفیکیشن δ_0^* ، δ_0 و δ'_0 به طور خودکار توسط روش GCV انتخاب می‌شوند (برای جزئیات بیشتر به منابع [۴-۶، ۱۵، ۱۶] رجوع شود). برای ارائه تقریب عددی فرض کنیم M و N دو عدد صحیح مثبت باشند و

$$h = \Delta x = 1/M, k = \Delta t = 1/N,$$

پارامترهای گسسته‌سازی تفاضلات متناهی از بازه $[0, 1]$ باشند. بنابراین تابع‌های گسسته زیر را تعریف می‌کنیم:

$$U_i^n: \text{مقادیر محاسبه شده تقریبی از } v(x_i, t_n)$$

$$Q_i^n: \text{مقادیر محاسبه شده تقریبی از } v_x(ih, nk)$$

$$W_i^n: \text{مقادیر محاسبه شده تقریبی از } \partial_t^\alpha v(ih, nk)$$

$$F_i^n: \text{مقادیر محاسبه شده تقریبی از } f(ih, nk)$$

برای حل مساله (۱۳.۳) - (۱۶.۳) روش تفاضلات متناهی مارچینگ مکانی الگوریتم زیر ارائه می‌دهیم. الگوریتم روش مارچینگ برای مساله مولیفای شده:

$$۱. \delta'_0, \delta_0^*, \delta_0^* \text{ را انتخاب می‌کنیم}$$

۲. مولیفیکیشن توابع ϕ^ε و p^ε به ترتیب نسبت به x و t را در بازه $[0, 1]$ به دست می‌آوریم. قرار می‌دهیم:

$$U_i^0 = J_\delta(\phi^\varepsilon(ih)), \quad Q_i^0 = J_{\delta_0^*}(p(nk))$$

۳. مولیفیکیشن نسبت به t ، تابع ψ^ε را انجام می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$W_i^0 = D_t^\alpha J_{\delta_0'} \psi^\varepsilon(nk)$$

۴. قرار می‌دهیم $i = 0$ و تا زمانی که $i \leq M - 1$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم

$$U_{i+1}^n = U_i^n + hQ_i^n, \quad (۱۷.۳)$$

$$Q_{i+1}^n = Q_i^n + h(W_i^n - F_i^n), \quad (۱۸.۳)$$

$$W_{i+1}^n = W_i^n + hD_t^\alpha(J_{\delta_0^*}Q_i^n), \quad (۱۹.۳)$$

$$F_{i+1}^n = W_{i+1}^n - D_-(J_{\delta_0^*}Q_i^n). \quad (۲۰.۳)$$

۳.۳ پایداری و آنالیز همگرایی

در این بخش، پایداری و همگرایی روش مارچینگ ذکر شده در بخش قبل را بررسی می‌کنیم. قضیه زیر پایداری روش مارچینگ - (۱۷.۳) (۲۰.۳) را نشان می‌دهد.

قضیه ۴.۳. (پایداری الگوریتم) عدد ثابتی مانند C ، وجود دارد به طوری که

$$\max_{1 \leq i \leq M} \{|U_i^N|, |Q_i^N|, |F_i^N|\} \leq C \max\{|U_0^N|, |Q_0^N|, |M_F|\}.$$

اثبات. فرض کنیم

$$M_i = \max_{1 \leq n \leq M} \{|U_i^n|, |Q_i^n|, |F_i^n|\}, \quad |\delta|_{-\infty} = \min_i \{\delta_0, \delta_0^*, \delta_0'\},$$

با توجه به (۱۷.۳) و (۱۸.۳) داریم

$$|U_{i+1}^n| \leq |U_i^n| + h|Q_i^n| \leq (1+h)M_i, \quad (۲۱.۳)$$

$$|Q_{i+1}^n| \leq |Q_i^n| + h(|W_i^n| + |F_i^n|), \quad (۲۲.۳)$$

با به کارگیری لم ۳.۳ برای W_i^n کران بالای زیر را به دست می‌آوریم:

$$|W_i^n| \leq \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|_{-\infty}} |U_i^n|, \quad (۲۳.۳)$$

با جای گذاری (۲۳.۳) در (۲۲.۳)، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$|Q_{i+1}^n| \leq (1 + C_1 h) M_i, \quad (۲۴.۳)$$

که در آن

$$C_1 = \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|_{-\infty}} + 1,$$

با توجه به لم ۳.۳ و (۱۹.۳) خواهیم داشت:

$$|W_{i+1}^n| \leq |W_i^n| + h|D_t^\alpha(J_{\delta_*} Q_i^n)| = \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|_{-\infty}}(\lambda + h)M_i. \quad (25.3)$$

حال با به کارگیری (۸.۳) در رابطه (۲۰.۳) نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$|F_{i+1}^n| \leq |W_{i+1}^n| + |D_-(J_{\delta_i} Q_{i+1}^n)| = (C_\Upsilon + C_\Upsilon h)M_i, \quad (26.3)$$

که در آن

$$C_\Upsilon = \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|_{-\infty}} + \frac{C}{|\delta|_{-\infty}}, \quad C_\Upsilon = \frac{C_{1\alpha}}{|\delta|_{-\infty}}.$$

از روابط (۲۱.۳)، (۲۴.۳) و (۲۶.۳)، رابطه زیر نتیجه گرفته می شود:

$$M_{i+1} = \max\{|U_{i+1}^n|, |Q_{i+1}^n|, |F_{i+1}^n|\} \leq (A_\lambda + A_\Upsilon h)M_i = A_\lambda(\lambda + \frac{A_\Upsilon h}{A_\lambda})M_i, \quad (27.3)$$

که در آن

$$A_\lambda = \max\{\lambda, C_\Upsilon\}, \quad A_\Upsilon = \max\{\lambda, C_\lambda, C_\Upsilon\}.$$

با توجه به رابطه تکراری (۲۷.۳) رابطه زیر حاصل می شود:

$$M_i \leq (A_\lambda + A_\Upsilon h)^i M_0 \leq A_\lambda \exp(\frac{A_\Upsilon h}{A_\lambda}) M_0.$$

□

از رابطه به دست آمده می توان نتیجه گرفت که روش پایدار است.

قضیه ۵.۳. (همگرایی الگوریتم) برای λ ثابت، هرگاه h, k و ε به صفر میل کنند جواب مولیفایر شده گسسته از مساله (۱۷.۳) - (۲۰.۳) به جواب دقیق مساله (۱۳.۳) - (۱۶.۳) همگرا است.

اثبات. اگر به ازای $i = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, \dots, N$ توابع خطای گسسته را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Delta U_i^n = U_i^n - v(ih, nk), \quad \Delta Q_i^n = Q_i^n - v_x(ih, nk),$$

$$\Delta W_i^n = D_t^\alpha(v(ih, nk) - W_i^n), \quad \Delta F_i^n = F_i^n - f(ih, nk),$$

آن گاه با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta U_{i+1}^n &= U_{i+1}^n - v((i+1)h, nk) \\ &= U_{i+1}^n - U_i^n + U_i^n + v(ih, nk) - v(ih, nk) - v((i+1)h, nk) \\ &= \Delta U_i^n + (U_{i+1}^n - U_i^n) - (v((i+1)h, nk) - v(ih, nk)) \\ &= \Delta U_i^n + hQ_i^n - hv_x(ih, nk) + O(h^2) \\ &= \Delta U_i^n + h\Delta Q_i^n + O(h^2), \end{aligned} \quad (28.3)$$

و

$$\begin{aligned} \Delta Q_{i+1}^n &= Q_{i+1}^n - v_x((i+1)h, nk) + Q_i^n - Q_i^n + v_x(ih, nk) \\ &+ v_x(ih, nk) - v_x(ih, nk) \\ &= \Delta Q_i^n + Q_{i+1}^n - Q_i^n - (v_x((i+1)h, nk) - v_x(ih, nk)) \\ &= \Delta Q_i^n + Q_{i+1}^n - Q_i^n - hv_{xx}(ih, nk) + O(h^2) \\ &= \Delta Q_i^n + h(W_i^n - D_t^\alpha v(ih, nk)) - h(F_i^n - f(ih, nk)) + O(h^2). \end{aligned} \quad (29.3)$$

با توجه به روابط (۲۸.۳) و (۲۹.۳) و لم ۳.۳، روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$|\Delta U_{i+1}^n| \leq |\Delta U_i^n| + h|\Delta Q_i^n| + O(h^2), \quad (۳۰.۳)$$

9

$$\begin{aligned} |\Delta Q_{i+1}^n| &\leq |\Delta Q_i^n| + h|W_i^n - D_t^\alpha v(ih, nk)| + h|(f(ih, nk) - F_i^n)| + O(h^2) \\ &\leq |\Delta Q_i^n| + C_{r\alpha} h \left(\frac{\varepsilon}{|\delta|_{-\infty}} \right) + h|\Delta F_i^n| + O(h^2), \end{aligned} \quad (۳۱.۳)$$

با توجه به (۲۰.۳) و تعریف ΔF_{i+1}^n می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta F_{i+1}^n &= F_{i+1}^n - f((i+1)h, nk) \\ &= W_{i+1}^n - D_-(J_\delta Q_{i+1}^n) - (D_t^\alpha v((i+1)h, nk) - \frac{\partial}{\partial x} v_x(ih, nk)) \\ &= (W_{i+1}^n - D_t^\alpha v((i+1)h, nk)) + (D_-(J_\delta Q_{i+1}^n) - \frac{\partial}{\partial x} v_x(ih, nk)). \end{aligned} \quad (۳۲.۳)$$

با به‌کارگیری لم ۳.۳ در (۳۲.۳)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\Delta F_{i+1}^n| &\leq |W_{i+1}^n - D_t^\alpha v((i+1)h, nk)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} v_x((i+1)h, nk) - D_-(J_\delta Q_{i+1}^n) \right| \\ &\leq C_{r\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{|\delta|_{-\infty}} \right) + C \frac{(\varepsilon + h)}{|\delta|_{-\infty}} + O(h), \end{aligned} \quad (۳۳.۳)$$

با جای‌گذاری (۳۳.۳) در (۳۱.۳) به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$\begin{aligned} |\Delta Q_{i+1}^n| &\leq |\Delta Q_i^n| + C_{r\alpha} h \left(\frac{\varepsilon}{|\delta|_{-\infty}} \right) \\ &\quad + h \left(C_{r\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{|\delta|_{-\infty}} \right) + C \frac{(\varepsilon + h)}{|\delta|_{-\infty}} \right) + O(h^2). \end{aligned} \quad (۳۴.۳)$$

با تعریف $\Delta_{i+1} = \max\{|\Delta U_{i+1}^n|, |\Delta Q_{i+1}^n|\}$ ، ثابت‌هایی مانند C و C' وجود دارند به طوری که

$$\Delta_{i+1} \leq (1 + C \cdot h)\Delta_i + C'h + O(h^2) \leq (1 + hC) (\Delta_i + C') + O(h^2),$$

بعد از l تکرار، خواهیم داشت:

$$\Delta_l \leq (1 + C \cdot h)^l (\Delta_0 + C').$$

□

بنابراین هرگاه h ، ε و δ به صفر میل می‌کند، Δ_l به صفر میل خواهد نمود.

۴ نتایج عددی

در این بخش، روش عددی مطرح‌شده در بخش ۳ را برای دو مثال از مسائل معکوس به‌کار می‌بریم. این معادلات دارای جواب دقیق‌اند. برای تحلیل و بررسی دقت الگوریتم عددی، جواب تقریبی به دست آمده را با جواب دقیق مساله مقایسه خواهیم کرد. همچنین برای روش عددی مولفیکیشن در این بخش فرض می‌کنیم $p = 3$. شعاع مولفیکیشن همیشه به‌طور خودکار توسط الگوریتم GCV انتخاب می‌شود با افزودن خطای متغیر تصادفی گاوسی به داده‌های ورودی مساله مانند شرایط مرزی و اولیه می‌توان داده‌های مختل‌شده را به دست آورد. به‌عنوان مثال نسخه مختل‌شده گسسته تابع $\beta(x_i, t_j)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\beta^\varepsilon_j, n = \beta(x_j, t_n) + \varepsilon_{j,n}, \quad j = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots, T,$$

جدول ۱: خطای نسبی نرم l_2 برای $u(x, t)$ و $f(x, t)$ به ازای اختلال های $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ در مثال ۱.۴.

$M = N$	ε	40	80	120	160	200
u	$\varepsilon = 0.01$	0.0924604	0.0586993	0.0544712	0.0446477	0.0356181
	$\varepsilon = 0.001$	0.0361546	0.0204527	0.0104739	0.0100474	0.0084491
	$\varepsilon = 0.0001$	0.0362434	0.0214453	0.0104747	0.0087487	0.0071497
f	$\varepsilon = .01$	0.6738696	0.5603235	0.4595709	0.1359193	0.0950129
	$\varepsilon = .001$	0.5600621	0.1159482	0.0581105	0.0859341	0.0559227
	$\varepsilon = .0001$	0.5600747	0.1059491	0.0845936	0.0525927	0.0465922

که در $\varepsilon_{j,n}$ ها متغیر تصادفی گاوسی با واریانس ε^2 است. برای مقایسه جواب های دقیق و جواب های عددی، نرم خطای l_2 را که به صورت زیر تعریف می شود، به کار می بریم:

$$\frac{[(1/(M+1)(N+1))\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |u(ih, jl) - U_{i,j}|^2]^{1/2}}{[(1/(M+1)(N+1))\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N |u(ih, jl)|^2]^{1/2}}$$

که در آن $u(ih, jl)$ و $U_{i,j}$ به ترتیب مقادیر جواب دقیق و جواب عددی تابع u هستند.

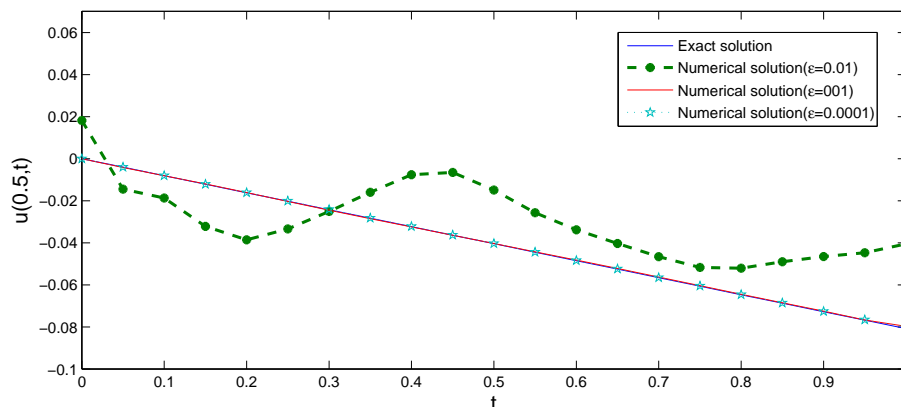
مثال ۱.۴. در مساله (۱.۲) - (۵.۲)، فرض کنیم

$$\phi(x) = 0, \quad p(t) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

با مفروضات فوق، جواب دقیق مساله به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)t, \quad q(t) = 0, \quad f(x, t) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - (2x-1)t.$$

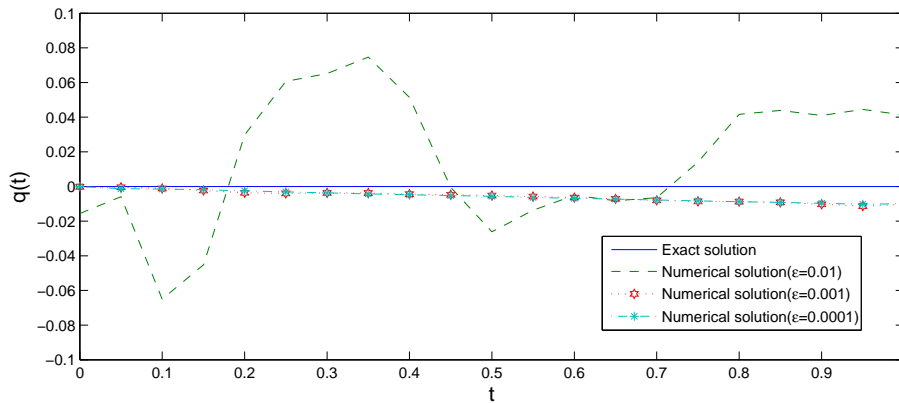
خطای نسبی نرم l_2 بین جواب های تقریبی و جواب های دقیق $u(x, t)$ و $f(x, t)$ به ازای اختلال های $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ در جدول ۱ آورده شده است. شکل های ۱، ۲ و ۳ نشان دهنده نتایج دقیق و تقریبی برای $u(0.5, t)$ و $f(0.5, t)$ است. از نتایج عددی می توان دریافت که با استفاده از طول گام کوچک مکانی و زمانی و همچنین اختلال های کوچک، روش این توانایی را دارد که با دقت مناسب مقادیر مجهول مرزی و تابع منبع مجهول را تقریب بزند.



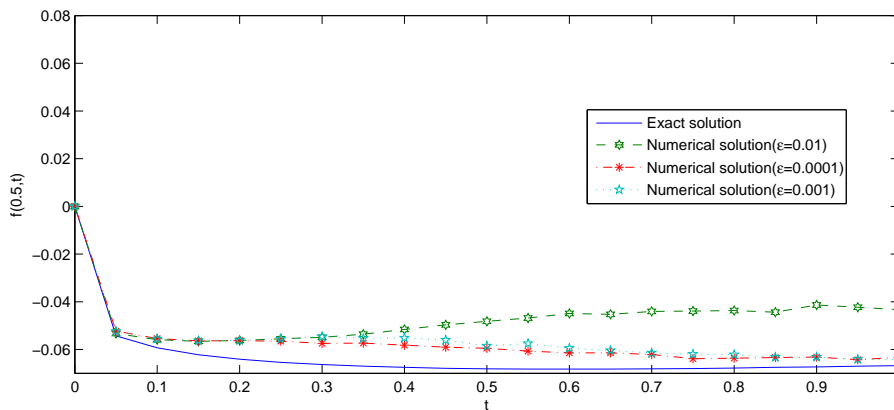
شکل ۱: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی $u(0.5, t)$ به ازای سه مقدار اختلال در مثال ۱.۴.

مثال ۲.۴. برای مثال دیگری در این بخش، در مساله (۱.۲) - (۵.۲) فرض کنیم

$$\phi(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad p(t) = 0, \quad \psi(x) = \frac{1}{2 + t},$$



شکل ۲: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی تابع کرانه‌ای $q(t)$ به‌ازای سه مقدار اختلال در مثال ۱.۴.



شکل ۳: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی تابع منبع $f(0.5, t)$ به‌ازای سه مقدار اختلال در مثال ۱.۴.

با داده‌های فوق، جواب‌های دقیق این مساله به‌صورت زیرند:

$$u(x, t) = \frac{1}{x^2 + t + 1}, \quad q(t) = \frac{-2t}{(2 + t)^2},$$

9

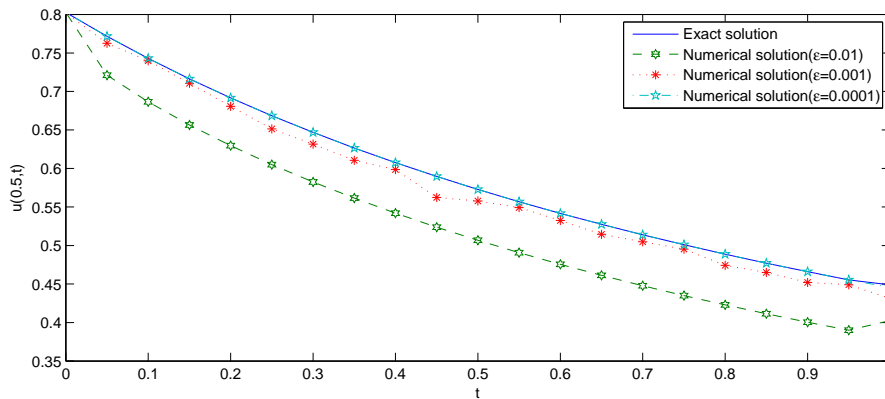
$$f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{t^{1-\alpha}}{x^2 + t + 1} - \frac{\lambda x^2}{(x^2 + t + 1)^2} + \frac{2}{(x^2 + t + 1)^2}.$$

خطای نسبی نرم l_2 بین جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق $u(x, t)$ و $f(x, t)$ به‌ازای اختلال‌های $\varepsilon = 0.01, 0.001, 0.0001$ در جدول ۲ آورده شده است.

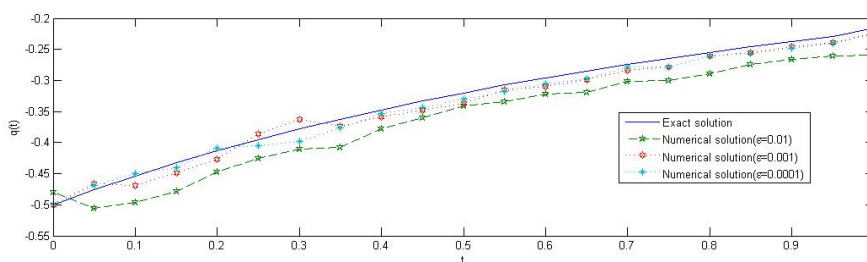
جدول ۲: خطای نسبی نرم l_2 برای $u(x, t)$ و $f(x, t)$ به‌ازای اختلال‌های $\varepsilon = 0.01, 0.001, 0.0001$ در مثال ۲.۴.

$M = N$	ε	40	80	120	160	200
u	$\varepsilon = 0.01$	0.0225863	0.0197079	0.0056283	0.0029337	0.0018519
	$\varepsilon = 0.001$	0.0175332	0.0102657	0.0017728	0.0016598	0.0014816
	$\varepsilon = 0.0001$	0.0159385	0.0085664	0.0025854	0.0015664	0.0012044
f	$\varepsilon = .01$	0.0722489	0.0412402	0.0312589	0.0138023	0.0120499
	$\varepsilon = .001$	0.0518602	0.0200421	0.0051876	0.0046872	0.0029839
	$\varepsilon = .0001$	0.0203311	0.0098159	0.0036533	0.0017074	0.0013984

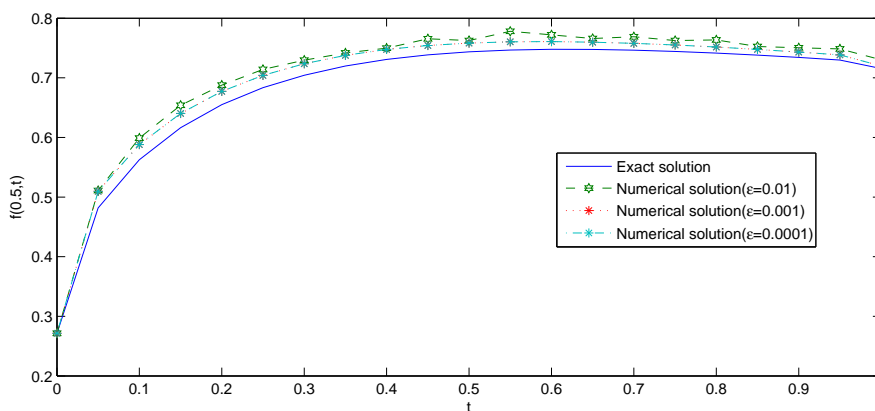
شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان‌دهنده نتایج دقیق و تقریبی برای $q(t)$ ، $u(\omega/\omega, t)$ و $f(\omega/\omega, t)$ است. از نتایج عددی می‌توان دریافت که با استفاده از طول گام کوچک مکانی و زمانی و همچنین اختلال‌های کوچک، روش این توان را دارد با دقت مناسب مقادیر مجهول مرزی و تابع منبع مجهول را تقریب بزند.



شکل ۴: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی $u(\omega/\omega, t)$ به‌ازای سه مقدار اختلال در مثال ۲.۴.



شکل ۵: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی تابع کرانه‌ای $q(t)$ به‌ازای سه مقدار اختلال در مثال ۲.۴.



شکل ۶: مقایسه نتایج جواب دقیق و تقریبی تابع منبع $f(\omega/\omega, t)$ به‌ازای سه مقدار اختلال در مثال ۲.۴.

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله کاربرد روش مولیفیکیشن و روش مارچینگ برای تخمین تابع منبع و شار مرزی مجهول در یک مساله معکوس سهموی از مرتبه کسری زمانی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در ادامه ثابت شد که روش مولیفیکیشن و مارچینگ مکانی پایدار و همگرا است و با حل چند

مثال که دارای جواب دقیق‌اند، دقت و کارایی روش مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. در این مثال‌ها تاثیر اختلال، مرتبه مشتق کسری و طول گام زمانی و مکانی در نتایج عددی بررسی شده است. می‌توان مساله معکوس مورد بحث را برای معادله (۱.۱) نیز تعمیم داد. تعیین ضریب نفوذ $p(x)$ به‌همراه تابع منبع و توابع کرانه‌ای مجهول بر اساس شرط فوق اضافی در نظر گرفته‌شده در این تحقیق از جمله مسائلی است که نویسندگان به‌عنوان کارهای آتی به بررسی آن خواهند پرداخت.

فهرست منابع

- [1] J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto and T. Yamazaki, Uniqueness in an inverse problem for a one dimensional fractional diffusion equation, *Inv. Prob.* **25** (2009) 115002.
- [2] M.D. Echeverry and C.E. Mejía, A two dimensional discrete mollification operator and the numerical solution of an inverse source problem, *AXIOMS* 7(4), **89** (2018).
- [3] A. Fahim, M.A. Fariborzi Araghi, J. Rashidinia and M. Jalalvand, Numerical solution of Volterra partial integro-differential equations based on Sinc-collocation method, *Advances in Difference Equations* **362** (2017) 1–21. DOI 10.1186/s13662-017-1416-7.
- [4] M. Garshasbi and H. Dastour, Estimation of unknown boundary functions in an inverse heat conduction problem using a mollified marching scheme, *Numer. Algor.* **68** (2015) 769–790.
- [5] M. Garshasbi and H. Dastour, A mollified marching solution of an inverse ablation-type moving boundary problem, *Comput. Appl. Math.* **35** (2016) 60–73.
- [6] M. Garshasbi, P. Reihani and H. Dastour, A stable numerical solution of a class of semi-linear Cauchy problems, *J. Adv. Res. Dyn. Cont. Sys.* **4** (2012) 56–67.
- [7] R. Yan, M. Han, Q. Ma and X. Ding, A spectral collocation method for nonlinear fractional initial value problems with a variable-order fractional derivative, *Comput. Appl. Math.* **38**, 66 (2019) 1–25.
- [8] M. Jalalvand, B. Jazbi and M.R. Mokhtarzadeh, A finite difference method for the smooth solution of linear Volterra integral equations, *Int. J. Non-linear Anal. Appl.* **4**(2) (2013) 1–10.
- [9] Y. Lin and C. Xu, Finite difference-spectral approximation for the time-fractional diffusion equation, *J. Comp. Phys.* **225** (2007) 1533-1552.
- [10] Y. Luchko, Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations, *Fract. Calcul. and Appl. Anal.*, **14** (2011) 110-124.
- [11] A. Kumar, A moving boundary problem with space-fractional diffusion logistic population model and density-dependent dispersal rate, *Appl. Math. Model.* **88** (2020) 51-65.
- [12] C.E. Mejía and A. Piedrahita, Solution of a time fractional inverse advection-dispersion problem by discrete mollification, *Rev. Colomb. Mat.* **51** (2017) 83–102.
- [13] C.E. Mejía and A. Piedrahita, finite difference approximation of a two dimensional time fractional advection-dispersion problem, *arXiv* (2018), arXiv:1807.07393v1.
- [14] R. Metzler and J. Klafter, The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, Volume 339, Issue 1, (2000) 1-77.
- [15] D.A. Murio, Mollification and Space Marching, in: K. Woodbury (Ed.), *Inverse Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Florida, (2002).

- [16] D.A. Murio, On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives, *Comput. Math. Appl.* **51** (2006) 1539-1550.
- [17] R.R. Nigmatullin, The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Stat. Sol. B* **133** (1986) 25-30.
- [18] M.A. Zaky, An accurate spectral collocation method for nonlinear systems of fractional differential equations and related integral equations with nonsmooth solutions, *Appl. Numer. Math.* **154** (2020) 205-222.
- [19] C. Milici, G. Drăgănescu and J. T. Machado, *Introduction to fractional differential equations*, Springer, (2019).
- [20] K. Sakamoto and M. Yamamoto, Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, preprint UTMS (2010) 2010–2014.
- [21] Z.Z. Sun and X.N. Wu, A full discrete difference scheme for a diffusion-wave system, *Appl. Numer. Math.* **56** (2006) 193–209.
- [22] T. Wei and Z.Q. Zhang, Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion equation, *Eng Anal Bound Elem* **37** (2013), 23–31.
- [23] Y. Zhang and X. Xu, Inverse source problem for a fractional diffusion equation, *Inv. Prob.* **27** (2011) 035010.
- [24] L. Zhou and H.M. Selim, Application of the fractional advection-dispersion equations in porous media, *Soil Sci. Soc. Am. J.* **64** (4) (2003) 1079–1084.



Determination of unknown source term and boundary flux in a time-fractional inverse diffusion problem

S.Toubaei¹, M. Garshsbi^{2, ††}, P. Reihani Ardabili³

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Khuzestan Science and Research Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran.

⁽¹⁾ Department of Mathematics, Ahvaz Branch, Islamic Azad University, Ahvaz, Iran.

⁽²⁾ School of Mathematics, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

⁽³⁾ Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Received: 2020/10/5

Accepted: 2021/3/27

Communicated by: Abdolrahman Razani

Abstract: In this work, we consider an inverse fractional parabolic problem that has many applications in different fields. Simultaneously determination of a source term and a boundary flux function in a time-fractional order parabolic equation is investigated using a mollified space marching method. Superposition and Duhamel's principles, the uniqueness of solution with respect to an over determination condition is proved. The stability and convergence of the numerical method are proved and two numerical test problems are conducted to illustrate the ability and accuracy of the numerical method.

Keywords: Time fractional, inverse problem, mollication, marching method.



©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

^{††}Corresponding author.

E-mail addresses: stoobaiei@yahoo.com (S.Toubaei), m_garshsbi@iust.ac.ir (M. Garshsbi), p_reihani@pnu.ac.ir (P. Reihani Ardabili).