



ارزیابی کارایی ساختارهای دومرحله‌ای تحت شرایط رقابتی استکلبرگ و عدم قطعیت داده‌ها

محمد افزلی نژاد^{۱*}

(^۱) تفرش، ابتدای جاده تهران، دانشگاه تفرش، دانشکده ریاضی، ۳۹۵۱۸۷۹۶۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۲/۷

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۹/۴

دبیر مسئول: منصور سراج

چکیده: بسیاری از فرایندهای تولید، دارای ساختاری دومرحله‌ای‌اند و عملیات تولید، طی دو مرحله صورت می‌گیرد که هر مرحله دارای ورودی‌ها و خروجی‌های جداگانه است. در چنین ساختارهایی، بخشی از خروجی‌های مرحله اول، ورودی‌های مرحله دوم را شکل می‌دهند. این خروجی‌ها، داده‌های میانی نامیده می‌شوند. از آنجا که در بسیاری از مسائل عملی، داده‌ها قطعی نبوده و به صورت بازه‌ای در دسترس‌اند ارزیابی کارایی تحت شرایط عدم قطعیت از اهمیت زیادی برخوردار است. در این مقاله، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای بیان و ارزیابی کارایی ساختارهای دومرحله‌ای با داده‌های بازه‌ای و شرایط رقابتی استکلبرگ بین مراحل ارائه می‌شوند. با بهره‌گیری از ویژگی‌ها و روابط ریاضی، حل مدل‌ها ساده شده و نمایش اندازه کارایی به صورت یک عدد بازه‌ای فراهم می‌شود. ثابت می‌کنیم که کران‌های کارایی هر مرحله برای همه داده‌ها بجز داده‌های میانی، در یکی از کران‌های بالا یا پایین بازه رخ می‌دهد. با استفاده از یک مثال عددی، نحوه به‌کارگیری، حل و تحلیل نتایج مدل‌های پیشنهادی تحت سناریوهای خوش‌بینانه و بدبینانه مورد بحث قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ساختار دومرحله‌ای، مدل پیشرو-پیرو، داده‌های بازه‌ای، کران‌های کارایی، شبکه.

رده‌بندی ریاضی: 90C08

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که توسط چارنز و همکاران [۳] پایه‌گذاری شد رویکردی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی کارایی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) است. در تحلیل پوششی داده‌ها، واحدها به صورت جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شوند بدین معنی که ساختار و روابط داخلی واحدها در ارزیابی عملکرد آنها لحاظ نمی‌شود و فقط ورودی‌های اولیه و خروجی‌های نهایی مدنظر قرار دارد. با لحاظ کردن ساختار داخلی DMU، می‌توان به ارزیابی دقیق‌تر و جامع‌تری از کارایی نسبی آنها دست یافت. تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای [۱، ۱۰]، کارایی واحدها را بر اساس کارایی اجزا داخلی تخمین می‌زند و بدین ترتیب، هر واحد می‌تواند از نقاط ضعف و قوت در ساختار داخلی‌اش نیز آگاه گردد. در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، هر واحد از تعدادی زیرواحد تشکیل شده است که با یکدیگر در تعاملند و عملکرد آنها به خروجی‌های میانی و نهایی منجر می‌گردد. یکی از ساده‌ترین اما پرکاربردترین ساختارهای شبکه‌ای، ساختار دومرحله‌ای

*رایانامه: afzalinejad@tafreshu.ac.ir

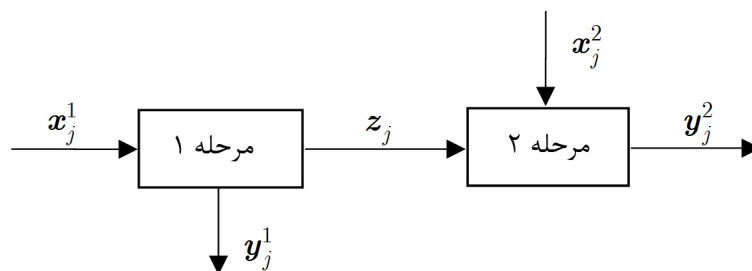
است که در آن مراحل به‌صورت سری به‌هم متصل‌اند و خروجی‌های مرحله اول، ورودی‌های مرحله دوم است. مثال‌های کاربردی زیادی برای ساختارهای دومرحله‌ای وجود دارند. به‌عنوان مثال، موسسات بانکی دارای یک ساختار دومرحله‌ای‌اند که در مرحله اول نیروی انسانی و سرمایه برای جذب سپرده‌های بانکی به‌کار گرفته می‌شوند و در مرحله دوم، سپرده‌ها برای تولید سود از طریق اعطای وام و دیگر سرمایه‌گذاری‌ها مصرف می‌شوند. یا در یک بیمارستان، گردش امور را می‌توان به‌صورت دو مرحله دید که مرحله اول، بخش اداری است که تهیه منابع و وسایل بیمارستانی را بر عهده دارد و مرحله دوم، بخش درمانی است که به مداوای بیماران می‌پردازد. همچنین در زمینه صنایع پایدار، می‌توان کل فرایند را به دو بخش تولید صنعتی و مدیریت پسماند تقسیم کرد که در مرحله اول، تولید محصول مدنظر است و در مرحله دوم، بازیافت و تصفیه پسماندهای مرحله اول نظیر زباله، آب، گازهای گلخانه‌ای و غیره انجام می‌شود. ساختارهای دومرحله‌ای، مورد توجه ویژه‌ای در DEA قرار گرفته‌اند و روش‌های متنوعی برای ارزیابی کارایی ساختار دومرحله‌ای ارائه شده است. منابع [۶، ۱۴، ۱۷] در میان پژوهش‌های شاخص در این رابطه‌اند.

در ساختارهای دومرحله‌ای، داده‌های میانی (واسطه) نقش مهمی ایفاء می‌کنند. تولیدات یا داده‌های میانی، خروجی‌های مرحله اول و همچنین ورودی‌های مرحله دوم محسوب می‌شوند. در ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای، دو حالت برای شکل تصمیم‌گیری فرض می‌شوند: ساختار با مدیریت مرکزی و ساختار با مدیریت پیشرو-پیرو. در ساختار با مدیریت مرکزی یا مشارکتی، تصمیم‌گیری توسط یک نهاد ناظر بر هر دو مرحله انجام می‌گیرد و هیچ‌یک از مراحل، در تصمیم‌گیری‌ها دست بالا را ندارد. در یک ساختار با مدیریت مرکزی، عمده توجه بر ورودی‌ها و خروجی‌های بیرونی است و هر دو مرحله با همکاری یکدیگر فرایند تولید را هدایت می‌کنند. در ساختار با مدیریت پیشرو-پیرو، یکی از مراحل، پیشرو بوده و در تصمیم‌گیری‌ها دارای اولویت است و دیگری پیرو بوده و مجبور به تبعیت از تصمیمات مرحله پیشرو است. چنین ساختاری با بازی استکلبرگ مطابقت دارد و به‌همین دلیل به مدل استکلبرگ شناخته می‌شود [۱۴]. به این ساختار، همچنین اسامی دیگری نظیر ساختار غیرمترکز یا ساختار غیرمشارکتی نسبت داده می‌شوند.

در تعریف ساختار دومرحله‌ای، ورودی‌ها و خروجی‌های مراحل ممکن است به‌شکل‌های مختلفی در نظر گرفته شود. در فرم معمول ساختار دومرحله‌ای، تمام خروجی‌های مرحله اول به مرحله دوم داده می‌شود و مرحله دوم، ورودی دیگری ندارد. اما ساختارهای دومرحله‌ای به‌شکل‌های متنوعی گسترش داده شده‌اند. در برخی از تعمیم‌ها، مرحله اول می‌تواند خروجی‌هایی بیرونی و مرحله دوم می‌تواند ورودی‌هایی از جهان بیرون داشته باشد. مثلاً لی و همکاران [۱۵] یک ساختار دومرحله‌ای توسعه‌یافته ارائه کردند که در آن مرحله دوم علاوه بر خروجی‌های مرحله اول دارای ورودی‌های خارجی نیز است. در برخی دیگر از توسعه‌ها، متغیرهای میانی (خروجی مرحله اول) ممکن است تماماً به مرحله دوم ارسال نگردند و خروجی مازاد بر نیاز، به‌عنوان خروجی بیرونی مرحله اول در نظر گرفته شود. مشابهاً حالت‌هایی که در آن برخی از ورودی‌ها بین هر دو مرحله به اشتراک گذاشته می‌شود، مطالعه شده است [۵، ۲۳]. وجود خروجی‌های نامطلوب در کنار خروجی‌های مطلوب هر مرحله از دیگر ساختارهای بررسی شده در این زمینه است [۱۱، ۱۸].

برای ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای روش‌های مختلفی در DEA معرفی شده است. سکستون و لویس [۲۰] ساختارهای دومرحله‌ای را برای ارزیابی لیگ بیسیال مورد مطالعه قرار دادند. آنها کارایی هر مرحله را جداگانه محاسبه نمودند اما در ارزیابی کارایی مرحله دوم از جواب بهینه مرحله اول برای وزن‌دهی داده‌های میانی استفاده نمودند. کائو و هوانگ [۱۷] تجزیه کارایی در یک ساختار دومرحله‌ای را مورد بحث قرار دادند. کوک و همکاران [۶] مدل‌های DEA برای ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای را مرور کرده و آنها را به چهار گروه مدل‌های استاندارد، روش تجزیه کارایی، تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای و مدل پیشرو-پیرو دسته‌بندی کردند. دستپوتیس و همکاران [۸] مدل ترکیبی را معرفی کردند. آنها از مدل برنامه‌ریزی خطی دوهدفه برای ارزیابی نمرات کارایی مراحل به‌صورت جداگانه استفاده کردند تا کارایی کلی سیستم به‌دست آید. همچنین روش ترکیبی را به فرایندهای چندمرحله‌ای در چارچوب برنامه‌ریزی چندهدفه توسعه دادند. لیم و ژو [۱۶] در رابطه با مرز کارایی و نقطه تصویر در ساختارهای دومرحله‌ای بحث کردند و نشان دادند برای یافتن نقطه تصویر نیاز به حل مدلی جداگانه نیست و مشابه مدل‌های کلاسیک DEA، که در آنها می‌توان از دوگان برای یافتن نقطه تصویر استفاده کرد، در مدل‌های دومرحله‌ای نیز می‌توان نتیجه مشابهی گرفت.

عدم قطعیت در داده‌ها یکی از مشکلات رایج در مسائل دنیای واقعی است. ناپایداری شرایط، ابزارهای اندازه‌گیری نادقیق و یا طبیعت مسأله موجب می‌شود که در برخی از کاربردها، نتوان داده‌ها را به‌شکل قطعی و دقیق تعیین کرد. عدم قطعیت به‌شکل‌های مختلفی می‌تواند وجود داشته باشد که داده‌های احتمالی، فازی، ترتیبی، کران‌دار و کران‌دار نسبی از این جمله‌اند. در این مقاله، داده‌های غیرقطعی از نوع کران‌دار یا بازه‌ای مورد نظر است. کوپر و همکاران [۷] نحوه برخورد با داده‌های کران‌دار و داده‌های ترتیبی ضعیف در مدل‌های DEA را شرح دادند. دستپوتیس و اسمیرلیس [۹] مدل مضربی CCR را برای داده‌های بازه‌ای توسعه دادند و اندازه کارایی بازه‌ای را برای چنین داده‌هایی پیشنهاد نمودند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۳] روشی برای رتبه‌بندی واحدها در تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای ارائه دادند و روش خود را برای ارزیابی شعب بانک به‌کار بردند. چن [۴] نشان داد که در حالت غیرقطعی، مدل‌های مضربی و پوششی DEA دیگر معادل نیستند و نحوه محاسبه کران‌های بالا و پایین کارایی را با استفاده از فرم‌های مضربی و پوششی بیان نمود. ژو و ژو [۲۴] عدم قطعیت را در مدل دومرحله‌ای با مدیریت مرکزی مورد مطالعه قرار دادند و کران‌های پایین و بالای کارایی را برای داده‌های بازه‌ای به‌دست آوردند. گکر و کرسک [۱۲] از یک روش بهینه‌سازی چندمعیاره مبتنی بر DEA برای تعیین واحدهای کارا در شرایط عدم قطعیت استفاده کردند. شکوهی و همکاران [۲۱] یک مدل بهینه‌سازی استوار را برای برخورد با عدم قطعیت داده‌ها توسعه دادند که در این مدل، ورودی‌ها و خروجی‌ها در یک مجموعه عدم قطعیت قرار دارند و قیودی برای اعمال بدترین سناریو در داده‌ها تعریف شده‌اند. پیکانی و همکاران [۱۹] پژوهش‌های انجام شده در رابطه با عدم قطعیت در DEA را مرور کردند. آنها تحلیل پوششی داده‌های غیرقطعی را به ۵ گروه فازی، احتمالی، بوت استرپ، نادقیق و استوار



شکل ۱: ساختار دومرحله‌ای توسعه‌یافته

دسته‌بندی نمودند و ۷۳ مطالعه در این زمینه را مورد بررسی قرار دادند.

در این مقاله فرض می‌کنیم واحدهای تصمیم‌گیری دارای ساختار دومرحله‌ای توسعه‌یافته بوده و هر دو مرحله دارای ورودی‌ها و خروجی‌های بیرونی‌اند. داده‌ها غیرقطعی بوده و هر یک از ورودی‌ها، خروجی‌ها و داده‌های میانی، امکان نوسان در یک بازه را دارند. همچنین فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیری در ساختار دومرحله‌ای مورد بحث، غیرمشارکتی بوده و یکی از مراحل، تصمیم‌گیرنده بالاتر (پیشرو) و دیگری تابع یا پیرو آن است. ساختار با مدیریت غیرمشارکتی و داده‌های غیرقطعی در تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار نگرفته است. مدل‌های لازم برای ارزیابی چنین ساختاری در دو فرم مضربی و پوششی DEA ارائه می‌گردند و کران‌های پایین و بالای کارایی در حالت بدبینانه و خوش‌بینانه محاسبه می‌گردند. با استفاده از روابط ریاضی، نشان داده می‌شود که چطور می‌توان از مدل‌های غیرخطی حاصل، به شکل ساده‌تری نتایج مورد نظر را به دست آورد. نحوه محاسبه و تحلیل نتایج مدل‌های پیشنهادی با یک مثال عددی، شرح داده می‌شود.

مقاله در ۴ بخش سازماندهی شده است. بخش ۲ ساختار دومرحله‌ای را با فرض شرایط رقابتی استکلبرگ بیان کرده و مدل‌های دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها را در حالت قطعی مرور می‌کند. در بخش ۳، مدل‌های پیشنهادی برای ارزیابی کارایی ساختار دومرحله‌ای بخش ۲ در حالت عدم قطعیت ارائه می‌گردد. بخش ۴ یک مثال عددی را برای بررسی قابلیت‌های مدل پیشنهادی و تحلیل رفتار آن شرح می‌دهد و سرانجام، در بخش ۵، نتیجه‌گیری مقاله بیان می‌گردد.

۲ ارزیابی کارایی ساختارهای دومرحله‌ای قطعی

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد که هر یک دارای ساختار دومرحله‌ای توسعه‌یافته شکل ۱ است. x_{ij}^1 ($i = 1, \dots, m_1$) ورودی‌های مرحله اول و x_{ij}^2 ($i = 1, \dots, m_2$) ورودی‌های مرحله دوم DMU_j ($j = 1, \dots, n$) هستند. مشابهاً، خروجی‌های بیرونی مرحله اول با y_{rj}^1 ($r = 1, \dots, s_1$) و خروجی‌های مرحله دوم با y_{rj}^2 ($r = 1, \dots, s_2$) نمایش داده شده‌اند. z_{kj} ($k = 1, \dots, d$) نیز خروجی‌های مرحله اول DMU_j هستند که به عنوان ورودی دوم مرحله دوم استفاده می‌شوند و به آنها داده‌های واسطه یا میانی گفته می‌شود. در شکل ۱ از بردارهای $\mathbf{x}^1, \mathbf{z}, \mathbf{y}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2$ برای نمایش داده‌های مسأله استفاده شده است. کلیه این بردارها، نامنفی و مخالف صفر در نظر گرفته می‌شوند. با فرض این که ساختار مورد بحث فاقد مدیریت متمرکز است و مطابق شرایط بازی رقابتی استکلبرگ یکی از دو مرحله پیشرو و دیگری پیرو است مسأله را مدل‌سازی می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم مرحله اول پیشرو و مرحله دوم پیرو است. مدل CCR [۳] کارایی مرحله اول را برای واحد o ، $o \in \{1, \dots, n\}$ ، محاسبه می‌کند:

$$\max e_o^1 = \mathbf{u}^1 \mathbf{y}_o^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_o \quad (۱)$$

s.t.

$$\mathbf{v}^1 \mathbf{x}_o^1 = 1$$

$$\mathbf{u}^1 \mathbf{y}_j^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_j - \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_j^1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{v}^1 \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mathbf{u}^1 \geq 0.$$

در مدل فوق بردارهای $\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^1$ و \mathbf{w} وزن‌ها یا ارزش‌های مجازی به ترتیب برای ورودی‌ها، خروجی‌ها و داده‌های میانی مرحله اول‌اند و مقدار بهینه تابع هدف e_o^{1*} نمره کارایی شعاعی مرحله اول واحد o است. برای ارزیابی عملکرد DMU_o در مرحله دوم، علاوه بر قیود معمول مدل CCR قیودی را اضافه می‌کنیم که تضمین کنند نمره کارایی مرحله اول کاهش نخواهد یافت. به عبارت دیگر وزن‌های اختصاص داده شده به اندازه‌های میانی نباید به گونه‌ای باشد که کارایی محاسبه شده برای مرحله اول را کاهش دهند. این عمل بر اساس آنچه که توسط لیانگ و همکاران [۱۴] برای مدل‌سازی بازی رقابتی استکلبرگ به کار گرفته شده است، انجام می‌شود و برتری مرحله اول (پیشرو) بر مرحله دوم (پیرو)

را نشان می دهد. بنابراین مدل زیر برای ارزیابی کارایی مرحله دوم در ساختار توسعه یافته فوق حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \max e_o^2 &= \frac{u^2 y_o^2}{wz_o + v^2 x_o^2} \\ \text{s.t.} \\ \frac{u^2 y_j^2}{wz_j + v^2 x_j^2} &\leq 1 \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{u^1 y_j^1 + wz_j}{v^1 x_j^1} &\leq 1 \quad j = 1, \dots, n, j \neq o \\ \frac{u^1 y_o^1 + wz_o}{v^1 x_o^1} &= e_o^{1*} \\ v^1 \geq 0, v^2 \geq 0, w \geq 0, u^1 \geq 0, u^2 \geq 0. \end{aligned}$$

مدل فوق یک مساله برنامه ریزی کسری است اما با استفاده از روش چارنز-کوپر [۲] خطی می شود. با تعریف $t = \frac{1}{wz_o + v^2 x_o^2} > 0$ ضرب کردن صورت و مخرج تمام کسرها در t و انجام تغییر متغیر، در نهایت مدل زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \max e_o^2 &= u^2 y_o^2 \tag{۲} \\ \text{s.t.} \\ wz_o + v^2 x_o^2 &= 1 \\ u^2 y_j^2 - wz_j - v^2 x_j^2 &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ u^1 y_j^1 + wz_j - v^1 x_j^1 &\leq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq o \\ u^1 y_o^1 + wz_o - e_o^{1*} v^1 x_o^1 &= 0 \\ v^1 \geq 0, u^2 \geq 0, w \geq 0, u^1 \geq 0, v^2 \geq 0. \end{aligned}$$

مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق یعنی e_o^{2*} نمره کارایی مرحله دوم واحد o است. مدل فوق وزن های بهینه هر دو مرحله را به دست می دهد. مدل های (۱) و (۲) فوق در فرم مضربی بیان شده اند و فرم پوششی آنها با تعیین مساله دوگان به دست می آیند. نمره کارایی کلی DMU_o به صورت میانگین حسابی یا هندسی e_o^{1*} و e_o^{2*} تعریف می شود.

تعریف ۱.۲. DMU_o کاراست اگر و فقط اگر $e_o^{1*} = e_o^{2*} = 1$.

کارایی بیان شده در تعریف فوق، کارایی شعاعی است. برای کارایی کامل، لازم است متغیرهای اسلک نیز بررسی شوند. این کار مشابه مدل های کلاسیک DEA از طریق روش دومرحله ای انجام می شود که در مرحله اول مدل های شعاعی فوق حل شده و در مرحله دوم، پیشینه سازی اسلک ها روی نقطه تصویر به دست آمده انجام می شود. مشابهاً می توان برای حالتی که مرحله دوم پیشرو و مرحله اول پیرو باشند مدل های DEA را توسعه داد.

۳ مدل پیشرو-پیرو با داده های بازه ای

فرض می کنیم داده های مساله، به صورت دقیق و قطعی در دسترس نباشند و به صورت بازه ای زیر داده شده باشند:

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &\in [x_{ij}^{tL}, x_{ij}^{tU}], \quad i = 1, \dots, m_t, t = 1, 2 \\ y_{rj}^t &\in [y_{rj}^{tL}, y_{rj}^{tU}], \quad r = 1, \dots, s_t, t = 1, 2 \\ z_{kj} &\in [z_{kj}^L, z_{kj}^U], \quad k = 1, \dots, d \\ j &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

که اندیس‌های L و U به ترتیب نشان‌دهنده کران پایین و بالابند. کران‌های بازه‌ها اعداد قطعی و معین‌اند و به‌علاوه x_{ij}^{tL} ، y_{rj}^{tL} و z_{kj}^L نامفی‌اند. مدل پیشرو-پیرو توسعه‌یافته بخش ۲ تحت شرایط عدم قطعیت فوق به‌صورت زیر بیان می‌شود.

Stage 1:

$$\begin{aligned} \max \quad & e_o^1 = \mathbf{u}^1 \mathbf{y}_o^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_o \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_o^1 = 1 \\ & \mathbf{u}^1 \mathbf{y}_j^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_j - \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_j^1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{x}_j^{1L} \leq \mathbf{x}_j^1 \leq \mathbf{x}_j^{1U}, \mathbf{y}_j^{1L} \leq \mathbf{y}_j^1 \leq \mathbf{y}_j^{1U}, \mathbf{z}_j^L \leq \mathbf{z}_j \leq \mathbf{z}_j^U \quad j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{v}^1 \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mathbf{u}^1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Stage 2:

$$\begin{aligned} \max \quad & e_o^2 = \mathbf{u}^2 \mathbf{y}_o^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w} \mathbf{z}_o + \mathbf{v}^2 \mathbf{x}_o^2 = 1 \\ & \mathbf{u}^2 \mathbf{y}_j^2 - \mathbf{w} \mathbf{z}_j - \mathbf{v}^2 \mathbf{x}_j^2 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{u}^1 \mathbf{y}_j^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_j - \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_j^1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq o \\ & \mathbf{u}^1 \mathbf{y}_o^1 + \mathbf{w} \mathbf{z}_o - e_o^1 \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_o^1 = 0 \\ & \mathbf{x}_j^{tL} \leq \mathbf{x}_j^t \leq \mathbf{x}_j^{tU}, \mathbf{y}_j^{tL} \leq \mathbf{y}_j^t \leq \mathbf{y}_j^{tU}, \mathbf{z}_j^L \leq \mathbf{z}_j \leq \mathbf{z}_j^U, \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2 \\ & \mathbf{v}^1 \geq 0, \mathbf{v}^2 \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mathbf{u}^1 \geq 0, \mathbf{u}^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

که \mathbf{z}_j^L و \mathbf{y}_j^{tL} و \mathbf{x}_j^{tL} بردارهای کران پایین و \mathbf{z}_j^U و \mathbf{y}_j^{tU} و \mathbf{x}_j^{tU} بردارهای کران بالا به ترتیب برای ورودی‌ها، خروجی‌ها و داده‌های میانی‌اند. در مدل‌های فوق، نه تنها وزن‌های \mathbf{u} ، \mathbf{v} و \mathbf{w} بلکه مقادیر ورودی، خروجی و داده‌های میانی طوری تعیین می‌شوند که مطلوب واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_o بوده و بیش‌ترین نمره کارایی برای آن تعیین شود. مسائل (۳) و (۴)، عدم قطعیت داده‌ها را بر روی مدل مضربی معرفی‌شده در بخش قبل یعنی مدل‌های (۱) و (۲) اعمال می‌کنند. به‌طور مشابه، تحمیل شرایط عدم قطعیت داده‌ها بر روی فرم پوششی به مدل‌های زیر منجر می‌شود:

Stage 1:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j^1 \leq \theta \mathbf{x}_o^1 \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{y}_j^1 \geq \mathbf{y}_o^1 \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{z}_j \geq \mathbf{z}_o \\ & \mathbf{x}_j^{1L} \leq \mathbf{x}_j^1 \leq \mathbf{x}_j^{1U}, \mathbf{y}_j^{1L} \leq \mathbf{y}_j^1 \leq \mathbf{y}_j^{1U}, \mathbf{z}_j^L \leq \mathbf{z}_j \leq \mathbf{z}_j^U \quad j = 1, \dots, n \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

Stage 2:

$$\min \beta \quad (10)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{x}_j^{\downarrow} \leq \beta \mathbf{x}_o^{\downarrow} \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{y}_j^{\downarrow} \geq \mathbf{y}_o^{\downarrow} \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{z}_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{z}_j \geq (\alpha - \beta) \mathbf{z}_o \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j^{\uparrow} \leq e_o^* \alpha \mathbf{x}_o^{\uparrow} \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{y}_j^{\uparrow} \geq \alpha \mathbf{y}_o^{\uparrow} \quad (15)$$

$$\mathbf{x}_j^{tL} \leq \mathbf{x}_j^t \leq \mathbf{x}_j^{tU}, \mathbf{y}_j^{tL} \leq \mathbf{y}_j^t \leq \mathbf{y}_j^{tU}, \mathbf{z}_j^L \leq \mathbf{z}_j \leq \mathbf{z}_j^U, \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2$$

 α, β free

$$\lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

برخلاف مدل های قطعی DEA، مرز کارایی در اینجا به صورت بازه ای است و در محدوده داده ها متغیر است. مدل های (۹) و (۱۰) مرز کارایی را در دورترین مکان نسبت به واحد تحت ارزیابی در نظر می گیرند تا کمترین اندازه های کارایی شعاعی یعنی θ و β به دست آیند. مدل های غیرقطعی فوق در هر دو فرم مضربی و پوششی، مدل های غیرخطی اند و برخلاف حالت قطعی، رابطه دوگانی برای آنها برقرار نیست. اگرچه تغییر متغیرهایی که دسپوتیس و اسمیرلیس [۹] برای خطی کردن مدل های غیرقطعی تک مرحله ای به کار گرفتند، در اینجا نیز می توانند مدل های (۳) و (۴) را خطی نمایند اما به نظر نمی رسد بتوان مدل های (۹) و (۱۰) را با تغییر متغیر خطی نمود. از آنجا که هدف اصلی در تحلیل پوششی داده های بازه ای، تعیین اندازه کارایی به صورت یک عدد بازه ای است، باید بیشترین کارایی نسبی در حالت خوش بینانه و کمترین کارایی نسبی در حالت بدبینانه را به دست آورد. در ادامه نشان می دهیم که نیاز به حل مدل های غیرخطی فوق نیست و با استفاده از ویژگی ها و ساختار ریاضی مدل ها، می توان به روش ساده تری کران های بالا و پایین کارایی را برای واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_o به دست آورد.

۱.۳ مدل مضربی

مدل های (۳) و (۴) بیشترین نمره کارایی واحد تحت ارزیابی را روی مجموعه داده ها، یعنی

$$D : \mathbf{x}^{tL} \leq \mathbf{x}_j^t \leq \mathbf{x}_j^{tU}, \mathbf{y}_j^{tL} \leq \mathbf{y}_j^t \leq \mathbf{y}_j^{tU}, \mathbf{z}_j^L \leq \mathbf{z}_j \leq \mathbf{z}_j^U, \quad t = 1, 2, j = 1, \dots, n$$

به دست می آورند. قضیه زیر نشان می دهد که اگر در هر دو مرحله، ترکیب داده های غیرقطعی مربوط به ورودی ها و خروجی ها به نفع واحد تحت ارزیابی و به ضرر دیگر واحدها باشد، کران بالای کارایی آن واحد حاصل می گردد. این شرایط، زمانی رخ می دهد که در مجموعه داده های فوق برای واحد تحت ارزیابی، ورودی ها کمترین و خروجی ها بیشترین باشند و به عکس برای دیگر واحدها، ورودی ها بیشترین و خروجی ها کمترین مقدار را داشته باشند. اما در رابطه با داده های میانی، موضوع پیچیده تر است. در مرحله اول اگر مقدار داده میانی برای واحد تحت ارزیابی، بیشترین و برای دیگر واحدها کمترین باشد بیشترین نمره کارایی برای آن واحد به دست می آید. اما کران بالای کارایی مرحله دوم، لزوماً در یکی از کران های کارایی به دست نمی آید و داده های میانی که به کران بالای کارایی مرحله دوم منجر می شوند باید طوری محاسبه شوند که ضمن حفظ نمره کارایی مرحله اول، نمره کارایی مرحله دوم نیز بیشینه گردد. با توجه به مشابهت بحث و ساده تر بودن مدل مرحله اول، قضیه را فقط برای مرحله دوم بیان و ثابت می کنیم.

قضیه ۱.۳. جواب بهینه‌ای برای مدل (۴) وجود دارد که

$$\begin{aligned} x_{io}^t &= x_{io}^{tL} \\ y_{ro}^t &= y_{ro}^{tU} \end{aligned} \quad t = 1, 2, \quad \forall i, r$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &= x_{ij}^{tU} \\ y_{rj}^t &= y_{rj}^{tL} \end{aligned} \quad t = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o, \quad \forall i, r.$$

اثبات. اگر $(v^1, u^1, w^1, v^2, u^2)$ همراه با

$$(x_j^*, y_j^*, z_j^*, x_j^{1*}, y_j^{1*}) \quad j = 1, \dots, n$$

یک جواب بهینه برای مدل (۴) با مقدار تابع هدف $e_o^{1*} = u^{2*} y_o^{2*}$ باشد، ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\bar{v}^1, \bar{u}^1, \bar{w}, \bar{v}^2, \bar{u}^2), \\ (\bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{z}_j, \bar{x}_j^1, \bar{y}_j^1) \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

نیز یک جواب مسأله است که در آن

$$\bar{v}_i^t = v_i^{t*} \frac{x_{io}^{t*}}{x_{io}^{tL}}, \quad \forall i, t$$

$$\bar{u}_r^t = u_r^{t*} \frac{y_{ro}^{t*}}{y_{ro}^{tU}}, \quad \forall r, t$$

$$\bar{w} = w^*,$$

$$\bar{z}_j = z_j^*, \quad \forall j$$

و \bar{x}_j^t و \bar{y}_j^t مطابق مفروضات قضیه اختیار شده‌اند. قیود مدل (۴) را در نظر بگیرید. برای دسته قید (۵) داریم:

$$\bar{w} \bar{z}_o + \sum_{i=1}^{m_1} \bar{v}_i^1 \bar{x}_{io}^1 = w^* z_o^* + \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} \frac{x_{io}^{1*}}{x_{io}^{1L}} x_{io}^{1L} = w^* z_o^* + \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} x_{io}^{1*} = 1$$

و با جایگذاری در دسته قیود (۶) داریم:

$j \neq o$:

$$\sum_{r=1}^{s_1} \bar{u}_r^1 \bar{y}_{rj}^1 - \bar{w} \bar{z}_j - \sum_{i=1}^{m_1} \bar{v}_i^1 \bar{x}_{ij}^1 = \sum_{r=1}^{s_1} u_r^{1*} \frac{y_{ro}^{1*}}{y_{ro}^{1U}} y_{rj}^{1L} - w^* z_j^* - \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} \frac{x_{io}^{1*}}{x_{io}^{1L}} x_{ij}^{1U} \leq$$

$$\sum_{r=1}^{s_1} u_r^{1*} y_{rj}^{1*} - w^* z_j^* - \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} x_{ij}^{1*} \leq 0$$

$j = o$:

$$\sum_{r=1}^{s_1} \bar{u}_r^1 \bar{y}_{ro}^1 - \bar{w} \bar{z}_o - \sum_{i=1}^{m_1} \bar{v}_i^1 \bar{x}_{io}^1 = \sum_{r=1}^{s_1} u_r^{1*} \frac{y_{ro}^{1*}}{y_{ro}^{1U}} y_{ro}^{1U} - w^* z_o^* - \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} \frac{x_{io}^{1*}}{x_{io}^{1L}} x_{io}^{1L} =$$

$$\sum_{r=1}^{s_1} u_r^{1*} y_{ro}^{1*} - w^* z_o^* - \sum_{i=1}^{m_1} v_i^{1*} x_{io}^{1*} \leq 0.$$

مشابه‌اً می‌توان نشان داد جواب مفروض در دیگر قیود مسأله (۴) صدق می‌کند و شدنی است. مقدار تابع هدف به‌ازای این جواب برابر است با

$$\bar{e}_o^1 = \sum_{r=1}^{s_1} \bar{u}_r^1 \bar{y}_{ro}^1 = \sum_{r=1}^{s_1} u_r^{1*} \frac{y_{ro}^{1*}}{y_{ro}^{1U}} y_{ro}^{1U} = e_o^{1*}.$$

□

بنابراین، جواب داده‌شده یک جواب بهینه برای مسأله است.

برای داده‌های واسطه z_{kj} ، نمی‌توان نتیجه‌ای مشابه آنچه که برای ورودی‌ها یا خروجی‌ها در قضیه فوق بیان شد، به‌دست آورد. این متغیرها را با استفاده از تبدیلات

$$z_{kj} = z_{kj}^L + t_{kj}(z_{kj}^U - z_{kj}^L) \quad 0 \leq t_{kj} \leq 1, k = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n$$

و تغییر متغیر $w'_{kj} = w_k t_{kj}$ در مدل وارد نموده و مدل خطی حاصل برای محاسبه جواب بهینه حل می‌گردد. بر این اساس و با توجه به قضیه فوق، کران بالای کارایی مرحله دوم را می‌توان توسط مدل زیر به‌دست آورد:

$$\max \mathbf{u}' \mathbf{y}_o^U \quad (16)$$

s.t.

$$\mathbf{wz}_o^L + \sum_{k=1}^d w'_{ko}(z_{ko}^U - z_{ko}^L) + \mathbf{v}' \mathbf{x}_o^L = 1$$

$$\mathbf{u}' \mathbf{y}_j^L - \mathbf{wz}_j^L - \sum_{k=1}^d w'_{kj}(z_{kj}^U - z_{kj}^L) - \mathbf{v}' \mathbf{x}_j^U \leq 0 \quad j \neq o$$

$$\mathbf{u}' \mathbf{y}_o^U \leq 1$$

$$\mathbf{u}' \mathbf{y}_j^L + \mathbf{wz}_j^L + \sum_{k=1}^d w'_{kj}(z_{kj}^U - z_{kj}^L) - \mathbf{v}' \mathbf{x}_j^U \leq 0 \quad j \neq o$$

$$\mathbf{u}' \mathbf{y}_o^U + \mathbf{wz}_o^L + \sum_{k=1}^d w'_{ko}(z_{ko}^U - z_{ko}^L) - e_o^* \mathbf{v}' \mathbf{x}_o^L = 0$$

$$0 \leq w'_{kj} \leq w_k \quad \forall k, j$$

$$\mathbf{v}' \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mathbf{u}' \geq 0, \mathbf{u} \geq 0.$$

مدل فوق فقط $d \times n$ متغیر و $d \times n$ قید نسبت به مدل مرحله دوم قطعی بیش‌تر دارد. کارایی محاسبه‌شده در بالا، کارایی در شرایط خوش‌بینانه است. در حالت بدبینانه، ورودی‌های واحد تحت ارزیابی در کران بالا و خروجی‌ها در کران پایین خود هستند و به‌عکس برای دیگر واحدها، ورودی‌ها در کران پایین و خروجی‌ها در کران بالای خود قرار دارند. بنابراین، با جای‌گزینی کران‌ها مطابق شرایط بدبینانه و به‌کارگیری تغییر متغیر برای متغیرهای z_{kj} ، می‌توان کارایی بدبینانه DMU_o را به‌دست آورد. کارایی بدبینانه محاسبه‌شده به این روش، لزوماً با کران پایین کارایی برابر نیست.

۲.۳ مدل پوششی

مدل‌های (۹) و (۱۰) کم‌ترین نمره کارایی واحد تحت ارزیابی را روی مجموعه داده‌ها محاسبه می‌کنند. برای مدل (۹) مشابه مدل‌های تک-مرحله‌ای DEA می‌توان دید که جواب بهینه مدل می‌تواند در کران‌های بالا یا پایین داده‌ها به‌دست آید. قضیه زیر نشان می‌دهد که کارایی مرحله دوم را نیز می‌توان با استفاده از کران‌های بالا یا پایین داده‌ها ارزیابی کرد.

قضیه ۲.۳. جواب بهینه‌ای برای مدل (۱۰) وجود دارد که در آن

$$\begin{aligned} x_{io}^t &= x_{io}^{tU} \\ y_{ro}^t &= y_{ro}^{tL} \end{aligned} \quad t = 1, 2, \forall i, r$$

$$\begin{aligned} x_{ij}^t &= x_{ij}^{tL} \\ y_{rj}^t &= y_{rj}^{tU} \end{aligned} \quad t = 1, 2, j = 1, \dots, n, j \neq o, \forall i, r$$

و متغیرهای z_{kj}^t برای هر k و j در یکی از کران‌های پایین یا بالای خود قرار دارند.

اثبات. فرض کنیم $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, \mu_1^*, \dots, \mu_n^*, \alpha^*, \beta^*)$ همراه با

$$(\mathbf{x}_j^*, \mathbf{y}_j^*, \mathbf{z}_j^*, \mathbf{x}_j^L, \mathbf{y}_j^L) \quad j = 1, \dots, n$$

یک جواب بهینه برای مدل (۱۰) با مقدار تابع هدف β^* باشد. اگر

$$\begin{aligned} \bar{x}_{io}^1 &= x_{io}^U, & i &= 1, \dots, m_1 \\ \bar{x}_{ij}^1 &= x_{ij}^L, & i &= 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, n, j \neq 0 \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم با جای‌گذاری $\bar{\mathbf{x}}_j^1$ به جای \mathbf{x}_j^1 در جواب بهینه فوق، همچنان یک جواب بهینه خواهیم داشت ابتدا توجه کنید که $\lambda_o^* \leq e_o^* \alpha^*$ زیرا

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^* \mathbf{x}_j^1 \leq e_o^* \alpha^* \mathbf{x}_o^1$$

پس

$$(e_o^* \alpha^* - \lambda_o^*) \mathbf{x}_o^1 \geq \sum_{j=1, j \neq 0}^n \lambda_j^* \mathbf{x}_j^1 \geq 0.$$

که چون $\mathbf{x}_o^1 \geq 0$ و همه مولفه‌هایش صفر نیست، نامساوی مورد نظر نتیجه می‌شود. مشابهاً نامساوی $\mu_o^* \leq \beta^*$ برقرار است. برای این که شدنی بودن $\bar{\mathbf{x}}_j^1$ را نشان دهیم، دسته قیود (۱۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \bar{\mathbf{x}}_j^1 &= \sum_{j \neq 0} \lambda_j^* \mathbf{x}_j^L + \lambda_o^* \mathbf{x}_o^U \leq \sum_{j \neq 0} \lambda_j^* \mathbf{x}_j^1 + \lambda_o^* \mathbf{x}_o^U = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \mathbf{x}_j^1 - \lambda_o^* \mathbf{x}_o^1 + \lambda_o^* \mathbf{x}_o^U \\ &\leq e_o^* \alpha^* \mathbf{x}_o^1 + \lambda_o^* (\mathbf{x}_o^U - \mathbf{x}_o^1) \leq e_o^* \alpha^* \mathbf{x}_o^1 + e_o^* \alpha^* (\mathbf{x}_o^U - \mathbf{x}_o^1) = e_o^* \alpha^* \bar{\mathbf{x}}_o^1 \end{aligned}$$

حال ثابت می‌کنیم که با تعویض $\bar{\mathbf{y}}_j^1$ با \mathbf{y}_j^1 تعریف شده به صورت

$$\begin{aligned} \bar{y}_{ro}^1 &= y_{ro}^L, & r &= 1, \dots, s_1 \\ \bar{y}_{rj}^1 &= y_{rj}^U, & r &= 1, \dots, s_1, j = 1, \dots, n, j \neq 0 \end{aligned}$$

همچنان یک جواب شدنی خواهیم داشت. با جای‌گذاری در دسته قیود (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \bar{\mathbf{y}}_j^1 &= \sum_{j \neq 0} \lambda_j^* \mathbf{y}_j^U + \lambda_o^* \mathbf{y}_o^L \geq \sum_{j \neq 0} \lambda_j^* \mathbf{y}_j^1 + \lambda_o^* \mathbf{y}_o^L = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \mathbf{y}_j^1 - \lambda_o^* \mathbf{y}_o^1 + \lambda_o^* \mathbf{y}_o^L \\ &\geq \alpha^* \mathbf{y}_o^1 - \lambda_o^* (\mathbf{y}_o^1 - \mathbf{y}_o^L) \geq \alpha^* \mathbf{y}_o^1 - e_o^* \alpha^* (\mathbf{y}_o^1 - \mathbf{y}_o^L) \geq \alpha^* \mathbf{y}_o^1 - \alpha^* (\mathbf{y}_o^1 - \mathbf{y}_o^L) \\ &= \alpha^* \bar{\mathbf{y}}_o^1 \end{aligned}$$

با استدلال مشابه می‌توان شدنی بودن را برای مقادیر کرانی مفروض \mathbf{x}_j^1 و \mathbf{y}_j^1 به دست آورد. برای داده‌های میانی، با توجه به دسته قیود (۱۳) باید داشته باشیم:

$$\sum_{j=1, j \neq 0}^n (\lambda_j^* - \mu_j^*) \bar{\mathbf{z}}_j \geq (\mu_o^* - \lambda_o^* + \alpha^* - \beta^*) \bar{\mathbf{z}}_o.$$

اگر $(\lambda_j^* - \mu_j^*) \geq 0$ ، قرار می‌دهیم $\bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{z}_j^U$ و در غیر این صورت $(j \neq 0)$ ، همچنین اگر $(\mu_o^* - \lambda_o^* + \alpha^* - \beta^*) \geq 0$ ، قرار می‌دهیم $\bar{\mathbf{z}}_o = \mathbf{z}_o^L$ و در غیر این صورت قرار می‌دهیم $\bar{\mathbf{z}}_o = \mathbf{z}_o^U$ بدین ترتیب، دسته قیود (۱۳) برقرار می‌مانند. در نهایت، چون مقدار تابع هدف به‌ازای مقادیر مفروض $\bar{\mathbf{x}}_j^1, \bar{\mathbf{y}}_j^1, \bar{\mathbf{z}}_j^1$ همان β^* است پس چنین جوابی یک جواب بهینه است. □

اگرچه در حالت مضربی، جواب بهینه برای همه متغیرها می تواند در کران های آنها رخ دهد اما برای داده های میانی نمی توان از پیش تعیین کرد که کدام یک از کران ها به جواب بهینه منجر می گردد. به علاوه نمی توان مشابه فرم مضربی، مدل را خطی کرد. از آنجا که انتخاب کران پایین یا بالای داده های میانی به نوع داده میانی وابسته نیست و برای هر اندیس j در مدل (۱۰) یا همه z_{kj} ها در کران پایین یا همه در کران بالا قرار می گیرند، لازم است مسأله (۱۰) را برای هر 2^m حالت اندیس های j حل و جواب بهینه (جواب با کمترین مقدار تابع هدف) را از میان آنها انتخاب کرد. چنین جوابی، شرایط بدینانه را برای مسأله در نظر می گیرد و کمترین کارایی DMU_o را در شرایطی که ترکیب داده ها به ضرر آن است، نمایش می دهد. مشابه فرم مضربی، در اینجا نیز می توان شرایط خوش بینانه را در مدل اعمال و کران پایین کارایی در شرایط خوش بینانه را نیز به دست آورد. بدین منظور باید مقدار متغیرهای ورودی و خروجی به نفع واحد تحت ارزیابی و به ضرر دیگر واحدها تعیین شود و با حل مدل حاصل برای تمام مقادیر کرانی متغیرهای میانی، کارایی خوش بینانه را تخمین زد.

در نهایت، با مقایسه هر دو فرم مضربی و پوششی، نمره کارایی هر واحد به صورت یک بازه تعیین می شود که کران پایین بازه از فرم پوششی و کران بالای بازه از فرم مضربی به دست می آیند. قضیه زیر این موضوع را برای مدل مرحله دوم ثابت می کند. قضیه، برای مدل مرحله اول مشابه است.

قضیه ۳.۳. اگر مقدار بهینه تابع هدف مسأله (۴) روی مجموعه داده ها، D ، دارای کران پایین e_o^{2L} و کران بالای e_o^{2U} و مقدار بهینه تابع هدف مسأله (۱۰) روی مجموعه داده ها دارای کران پایین β^L و کران بالای β^U باشد، در این صورت $e_o^{2U} \geq \beta^U$ و $\beta^L \leq e_o^{2L}$.

اثبات. فرض کنید مقدار بهینه تابع هدف مسأله (۱۰) به ازای

$$\hat{x}_j^t, \hat{y}_j^t, \hat{z}_j \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2$$

بیشترین مقدار β^U را داشته باشد. پس مقدار بهینه تابع هدف مسأله دوگان آن یعنی

$$\max \mathbf{u}^2 \mathbf{y}_o^2$$

s.t.

$$\mathbf{wz}_o + \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_o^1 = 1$$

$$\mathbf{u}^1 \mathbf{y}_j^1 - \mathbf{wz}_j - \mathbf{v}^2 \mathbf{x}_j^2 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{u}^1 \mathbf{y}_j^1 + \mathbf{wz}_j - \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_j^1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n, j \neq o$$

$$\mathbf{u}^1 \mathbf{y}_o^1 + \mathbf{wz}_o - e_o^{1*} \mathbf{v}^1 \mathbf{x}_o^1 = 0$$

$$\mathbf{x}_j^t = \hat{x}_j^t, \mathbf{y}_j^t = \hat{y}_j^t, \mathbf{z}_j = \hat{z}_j, \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2$$

$$\mathbf{v}^1 \geq 0, \mathbf{v}^2 \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mathbf{u}^1 \geq 0, \mathbf{u}^2 \geq 0.$$

نیز برابر β^U است. چون ناحیه شدنی مسأله فوق زیرمجموعه ناحیه شدنی مسأله (۴) است، پس $e_o^{2U} \geq \beta^U$ به طور مشابه، اگر e_o^{2L} کمترین مقدار بهینه تابع هدف مسأله (۴) روی D به ازای مقادیری مثل

$$\tilde{x}_j^t, \tilde{y}_j^t, \tilde{z}_j \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2$$

حاصل شود، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر نیز برابر e_o^{2L} است:

$$\min \beta$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{x}_j^1 \leq \beta \mathbf{x}_o^1$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{y}_j^1 \geq \mathbf{y}_o^1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{z}_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{z}_j \geq (\alpha - \beta) \mathbf{z}_o$$

جدول ۱: داده‌ها (دو داده میانی، یک ورودی و یک خروجی بیرونی برای هر مرحله)

مرحله دوم				داده‌های میانی				مرحله اول				
y^{2U}	y^{2L}	x^{2U}	x^{2L}	z_1^U	z_1^L	z_2^U	z_2^L	y^{1U}	y^{1L}	x^{1U}	x^{1L}	
۱۰.۸	۸.۳۳	۵۹.۷	۵۸.۸۵	۳۵.۵	۲۷.۵۵	۳.۱۱	۲.۸۲۸	۹۵۰.۶۵	۸۷۳.۰۰	۷۸۳.۳	۷۲۷.۷۸	DMU1
۹.۱۱	۴	۱۰۰.۱۲	۸۷.۳۹	۹۰.۰۲	۸۴.۵	۶.۰۶۹	۵.۶۶۷	۱۴۹۸۹۰	۱۴۷۱۳۸.۴	۱۰۷۰.۶۸	۹۷۰.۵۱	DMU2
۴۴.۳	۴۲	۱۲۸.۶۸	۱۲۰.۵	۲۴۱.۴۴	۱۸۳.۶	۶.۵۴	۶.۲۳	۱۶۱۶۹۳	۱۳۵۰۰۰	۳۷۸۱.۱	۳۶۲۴	DMU3
۱۴.۳۲	۷.۲۵	۶۹.۳۳	۵۸.۴۲	۱۳۹	۱۲۲.۷	۷.۲۲	۵.۵۷۷	۸۱۷۸۳.۲۱	۷۶۷۷۳.۸۲	۱۶۲۲	۱۳۹۹.۲۶	DMU4
۱۶.۷	۱۱	۴۶.۴۱	۴۲.۵	۷۹.۹۶	۵۷.۱۹	۴.۰۵۲	۳.۸۶۴	۸۱۰۱۱.۵	۸۰۸۴۴.۰۱	۹۱۰.۲۶	۸۹۰.۸۸	DMU5
۶	۴	۶۰.۹۶	۵۸.۸۸	۷۸.۵۲	۷۲.۰۷	۵.۶۰۶	۴.۶۹۶	۱۹۶۳۴۰.۶۶	۱۷۱۰۰۰	۸۱۶.۵	۷۳۷	DMU6
۱۹.۵	۱۴	۳۵.۵	۱۹.۱۷	۴۰.۳۲	۳۱.۸۳	۵.۱۳	۳.۵۸۲	۴۹۹۱۱۰	۴۷۵۰۲۰	۳۵۴۳.۴۵	۳۳۰.۳۶	DMU7
۳۴.۲	۲۹.۰۴	۱۰۸.۱	۹۹.۷۹	۹۱.۱	۶۳.۸۵	۷.۷۹۱	۵.۳۹۵	۱۷۰۹۳۶	۱۳۳۵۴۳.۲	۲۹۴۰.۷۶	۲۴۱۰.۸	DMU8
۱۷.۸	۱۰.۳	۳۴۰.۶۲	۳۱۲.۸	۳۰۰.۷	۲۷.۹۳	۸.۳۳۶	۷.۷۶۱	۸۱۲۵۱.۰۵	۶۲۱۰۰	۲۰۰۵.۴	۱۷۰۶.۲۴	DMU9
۱۳.۶	۵	۸۹.۹۵	۸۴.۵۱	۶۲.۲۱	۵۹.۹۹	۴.۹۱۵	۳.۷۴۸	۳۸۰۱۰	۳۷۵۰۰	۵۱۳۳	۴۹۹۲	DMU10
۳۲.۲۸	۲۴.۵۳	۶۸۸.۷	۶۶۶.۴	۴۱.۵	۳۵.۲۵	۵.۵۰۹	۳.۷۷۵	۱۳۸۷۴۷.۴۵	۱۲۹۱۳۷.۳	۱۸۰.۶۹	۱۴۶۳	DMU11
۲۰.۷۳	۱۸	۱۱۵.۳	۱۱۱.۶	۱۳۹.۲	۱۲۲	۷.۹۱	۷.۶۵۷	۱۴۰۸۰.۲	۱۰۸۰۰۰	۹۸۸.۳۸	۹۵۱	DMU12
۸۸	۸۶.۴	۱۳۵.۲۴	۱۲۱.۶	۲۰۱.۵	۱۵۹.۵	۹.۱۴۹	۸.۸۹۹	۱۵۷۶۳۳.۶	۱۳۹۵۰۰	۳۳۴۴.۰۶	۲۷۸۸.۸۷	DMU13
۱۸.۹	۱۲.۶۵	۶۴.۳۶	۵۸.۳۵	۱۱۰.۸	۹۴.۴۸	۱۰.۱۲۲	۷.۵۵۲	۱۳۹۰۱۱	۱۳۴۵۰۰	۱۰۳۷.۷	۶۸۳.۵۷	DMU14
۲۹.۲	۲۷.۵۸	۵۵.۹	۴۸.۹۱	۴۵.۶۵	۳۸.۴۳	۶.۳۹۵	۵.۷۲	۱۴۷۰۱۰.۲	۱۲۶۰۰۰	۸۱۸	۷۰۹.۵۹	DMU15
۱۶	۱۰۰.۴	۵۲.۰۷	۴۷.۶۸	۸.۳۷	۲.۶۴	۶.۸۰۹	۶.۱۹۶	۳۱۰.۹۶	۳۰۰۴۶.۰۴	۲۲۶۵.۷۲	۱۹۸۲.۳۱	DMU16

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^1 \leq e_o^1 \alpha x_o^1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^1 \geq \alpha y_o^1$$

$$x_j^t = \tilde{x}_j^t, y_j^t = \tilde{y}_j^t, z_j = \tilde{z}_j^t, \quad j = 1, \dots, n, t = 1, 2$$

$$\alpha, \beta \text{ free}, \quad \lambda_j, \mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

□ که چون ناحیه شدنی مسأله فوق محدودتر از مسأله (۱۰) است؛ پس $\beta^L \leq e_o^L$

اگر کران پایین کارایی یک DMU برابر یک باشد، آن واحد قطعاً کارا است و نوسانات داده‌ها (در بازه‌هایشان) نمی‌تواند منجر به ناکارایی آن گردد. اما واحدهایی که کران بالای کارایی آنها برابر یک و کران پایین کارایی‌شان کمتر از یک باشد، ممکن است با تغییر داده‌ها، وضعیت کارایی خود را از دست دهند. این چنین واحدهایی بالقوه کارا نامیده می‌شوند. همچنین، واحدهایی که کران بالای کارایی‌شان کمتر از یک باشد، تحت هر شرایطی ناکارایند و به‌عنوان واحدهای قطعاً ناکارا دسته‌بندی می‌شوند. در رابطه با نحوه رتبه‌بندی DMUها در شرایط عدم قطعیت، یک روش در بخش مثال عددی معرفی خواهد شد.

۴ مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی را مورد مطالعه قرار داده و مدل‌ها و نتایج به‌دست‌آمده در بخش‌های قبل را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، فرض می‌کنیم هر DMU دارای دو مرحله با داده‌های بازه‌ای است. مرحله اول یک ورودی و سه خروجی دارد که یک خروجی به بیرون از DMU و دو تای دیگر به مرحله دوم ارسال می‌گردند. مرحله دوم سه ورودی و یک خروجی دارد. دو ورودی از مرحله اول دریافت می‌شوند و یک ورودی از بیرون دریافت می‌گردد. برای مشابهت دادن این مثال با مسائل دنیای واقعی، مثلاً می‌توان فرض کرد که ساختار مورد بحث، یک کارخانه تولید انرژی است که در مرحله اول با دریافت مواد سوختی نظیر گاز یا زغال سنگ، برق تولید می‌کند که این فرایند خروجی‌های ناخواسته‌ای از قبیل CO_2 ، SO_2 و NO_x به‌همراه دارد. در مرحله دوم، خروجی‌های ناخواسته مرحله اول طی فرایندهای شیمیایی بازیافت شده و تبدیل به خروجی‌های مطلوبی نظیر کود یا دیگر مواد صنعتی می‌گردند. مرحله دوم نیز می‌تواند دارای ورودی بیرونی، نظیر انرژی یا مواد شیمیایی باشد.

داده‌های استفاده‌شده در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. داده‌ها از چند مسأله واقعی به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند و سپس برای هر قلم داده، بازه‌ای برای نمایش عدم قطعیت تعیین شده است. برای محاسبه کران بالای کارایی از مدل‌های (۳) و (۱۶) و قضیه ۱.۳ استفاده شده است که برای هر DMU دو مدل و جمعاً 2×16 مدل LP حل شده است. برای محاسبه کران پایین کارایی، مدل‌های (۹) و (۱۰) و قضیه

جدول ۲: کارایی شعاعی و رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده

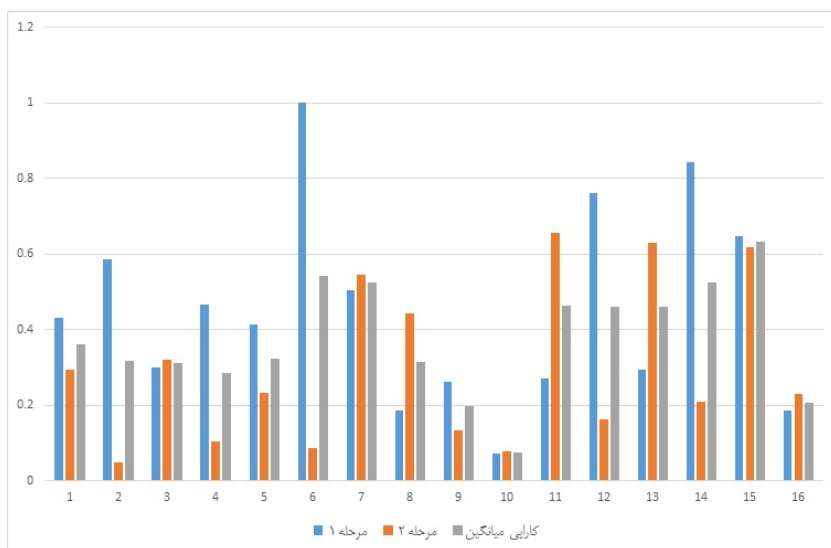
رتبه بازه ای	بازه کارایی	فرم مضربی			فرم پوششی					
		رتبه	میانگین	مرحله ۲	مرحله ۱	رتبه	میانگین	مرحله ۲	مرحله ۱	
۹	[۰.۳۶۲۰.۵۲۹]	۱۲	۰.۵۲۸۵۶۲	۰.۳۶۷۷۲۵	۰.۶۸۹۳۹۹	۸	۰.۳۶۱۹۵۱	۰.۲۹۴۲۹۲	۰.۴۲۹۶۱	DMU1
۱۱	[۰.۳۱۷۰.۵۵۱]	۱۱	۰.۵۵۱۲۱۱	۰.۱۶۳۳۶	۰.۹۳۹۰۶۲	۱۰	۰.۳۱۷۰۵۰	۰.۰۴۸۰۳۴	۰.۵۸۶۰۶۷	DMU2
۱۲	[۰.۳۱۰.۵۵۸]	۱۰	۰.۵۵۷۵۹۶	۰.۵۷۵۴۵۱	۰.۵۳۹۷۴۱	۱۲	۰.۳۱۰۲۱۹	۰.۳۲۰۸۶۸	۰.۲۹۹۵۷	DMU3
۱۰	[۰.۲۸۵۰.۵۹۴]	۸	۰.۵۹۴۲۳۵	۰.۳۸۳۶۸۳	۰.۸۰۴۷۸۶	۱۳	۰.۲۸۴۷۵۱	۰.۱۰۲۸۰۳	۰.۴۶۶۶۹۹	DMU4
۸	[۰.۳۳۳۰.۶۸۴]	۶	۰.۶۸۳۵۵۷	۰.۶۱۵۰۶۲	۰.۷۵۲۰۵۱	۹	۰.۳۳۳۰۰۵	۰.۲۳۳۰۰۷	۰.۴۱۳۳۰۳	DMU5
۶	[۰.۵۴۲۰.۵۸۹]	۹	۰.۵۸۹۴۴۱	۰.۱۷۸۸۸۱	۱	۲	۰.۵۴۲۴۸۸	۰.۰۸۴۹۷۶	۱	DMU6
۲	[۰.۵۴۲۰.۵۸۹]	۲	۰.۸۶۰۶۹۴	۱	۰.۷۲۱۲۸۸	۴	۰.۵۴۲۰۷۳	۰.۵۴۴۹۴۲	۰.۵۰۳۲۰۳	DMU7
۱۳	[۰.۳۱۴۰.۵۰۱]	۱۳	۰.۵۰۰۷۸۸	۰.۵۳۶۴۵۲	۰.۴۶۵۱۲۳	۱۱	۰.۳۱۳۸۴۵	۰.۴۴۳۰۸۸	۰.۱۸۴۶۰۲	DMU8
۱۵	[۰.۱۹۸۰.۴۳۶]	۱۵	۰.۴۲۵۹۶۷	۰.۲۲۸۸۵۷	۰.۶۲۳۰۷۷	۱۵	۰.۱۹۷۸۸۳	۰.۱۳۳۲۰۸	۰.۲۶۱۳۵۷	DMU9
۱۶	[۰.۰۷۵۰.۲۱۰]	۱۶	۰.۲۱۰۰۴۸	۰.۲۹۳۰۰۵	۰.۱۲۷۰۹۱	۱۶	۰.۰۷۴۶۳۴	۰.۰۷۷۱۶۶۱	۰.۰۷۲۱۰۲۶	DMU10
۷	[۰.۴۶۳۰.۶۶۱]	۷	۰.۶۶۱۱۱۱	۰.۷۵۸۲۱۱	۰.۵۶۴۰۱	۵	۰.۴۶۳۳۳۱	۰.۶۵۷۱۱۲	۰.۲۶۹۵۴۹	DMU11
۵	[۰.۴۶۳۰.۶۸۴]	۵	۰.۶۸۴۳۷۸	۰.۳۶۸۵۵۵	۱	۶	۰.۴۶۱۵۳۳	۰.۱۶۱۵۳	۰.۷۶۱۵۱۶	DMU12
۴	[۰.۴۶۱۰.۷۹۴]	۳	۰.۷۹۲۶۲۷	۱	۰.۵۸۵۳۴۴	۷	۰.۴۶۱۱۵۶	۰.۶۲۸۰۵۲	۰.۲۹۴۲۵۹	DMU13
۳	[۰.۵۴۶۰.۷۵۴]	۴	۰.۷۵۳۳۳۸	۰.۵۰۷۸۷۶	۱	۳	۰.۵۲۵۵۴۱	۰.۲۰۸۹۱۳	۰.۸۴۲۱۶۸	DMU14
۱	[۰.۶۳۲۰.۹۸۴]	۱	۰.۹۸۴۴۷	۰.۹۶۸۹۳۹	۱	۱	۰.۶۳۱۹۷۸	۰.۶۱۷۵۴۵	۰.۴۶۶۴۱۱	DMU15
۱۴	[۰.۲۰۷۰.۳۸۴]	۱۴	۰.۴۸۴۳۲۱	۰.۵۲۵۲۶۱	۰.۴۳۳۲۸۱	۱۴	۰.۲۰۶۶۲۱	۰.۲۲۸۵۶	۰.۱۸۴۶۸۱	DMU16

۲.۳ به کار گرفته شده است. محاسبات لازم در این حالت بسیار بیش تر است. اگرچه کران پایین مرحله اول هر DMU با حل تنها یک مدل LP به دست می آید اما در مرحله دوم برای تعیین کران بهینه متغیرهای میانی لازم است 2^{16} مدل LP حل شود و از میان جواب های حاصل، جواب بهینه انتخاب شود. بدین ترتیب، برای تعیین کران پایین همه DMUها، مجموعاً $16 \times 16 \times 16$ مدل حل شده است. نتایج در جدول ۲ خلاصه شده اند. همان طور که ملاحظه می شود در مرحله اول، فقط واحد ۶ قطعاً کارا است؛ زیرا حتی در حالت بدبینانه دارای کران پایین کارایی ۱ هستند. اما در مرحله دوم، هیچ واحدی قطعاً کارا نیست. در حالت خوش بینانه، ۴ واحد ۶، ۱۲، ۱۴ و ۱۵ به کارایی در مرحله اول دست می یابند و دارای کران بالای کارایی ۱ هستند. دو واحد ۷ و ۱۳ در مرحله دوم به کارایی خوش بینانه ۱ می رسند. از میان این دو، واحد ۱۳ شرایط بهتری دارد؛ زیرا دارای کران پایین کارایی بهتری است (۰.۶۳ در مقابل ۰.۵۴). برای مقایسه کلی DMUها از دو منظر بدبینانه و خوش بینانه می توان از میانگین نمره کارایی هر دو مرحله استفاده کرد که در این صورت واحد ۱۵ بهترین شرایط را در هر دو کران پایین و بالای کارایی دارد. کمترین کارایی میانگین به واحد ۱۰ می رسد که در هر دو مدل پوششی و مضربی، پایین ترین نمره کارایی میانگین را کسب کرده است. نمودارهای ۲ و ۳ کارایی مرحله ای و کارایی کلی واحدها را در هر دو حالت بدبینانه و خوش بینانه مقایسه می کنند. برای رتبه بندی نهایی واحدهای تصمیم گیرنده باید اندازه کارایی های بازه ای آنها را با هم مقایسه کرد. برای مقایسه بازه ها روش های زیادی پیشنهاد شده است. در این مقاله، ما از روش ونگ و همکاران [۲۲] استفاده می کنیم که قادر است یک مجموعه از بازه ها را رتبه بندی نماید. در این روش از فرمول

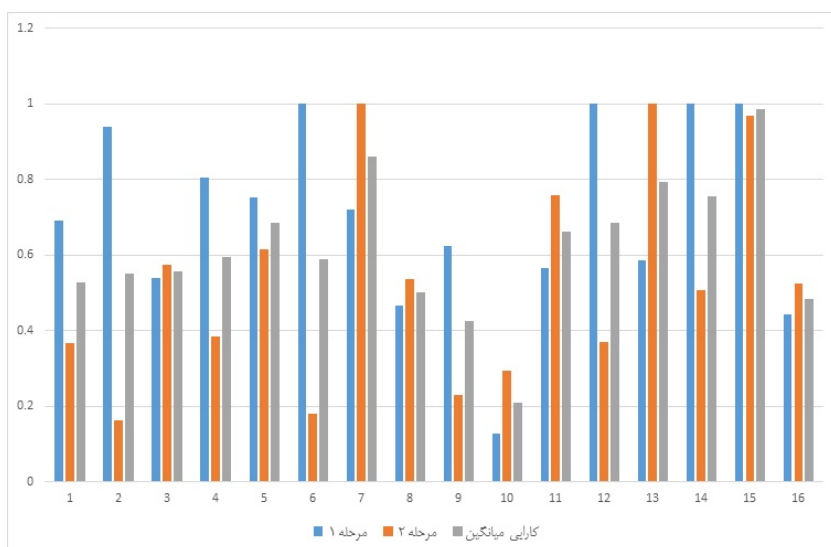
$$P(a > b) = \frac{\max(0, a^U - b^L) - \max(0, a^L - b^U)}{(a^U - a^L) + (b^U - b^L)}$$

برای مقایسه دو بازه $a = [a^L, a^U]$ و $b = [b^L, b^U]$ و تعیین میزان برتری بازه a بر b استفاده می شود. $P(a > b)$ عددی بین صفر و یک است و رابطه $P(a > b) = 1 - P(b > a)$ برقرار است. اگر $P(a > b) > P(b > a)$ ، آنگاه گفته می شود بازه a بر b برتری دارد. برای رتبه بندی کردن مجموعه $\{a_i\}_{i=1}^n$ از بازه ها، ماتریس $M = [m_{ij} = P(a_i, a_j)]$ را تشکیل می دهیم که هر عنصر آن نتیجه مقایسه دو بازه است. در این مثال، ماتریس M یک ماتریس 16×16 است و مؤلفه m_{ij} کارایی بازه ای دو واحد i و j را با فرمول فوق مقایسه می کند. سطری از ماتریس که همه عناصر آن، مقادیری بزرگتر یا مساوی ۰.۵ است بالاترین رتبه را در میان DMUهای موجود در ماتریس به دست می آورد. سپس سطر و ستون نظیر واحد انتخابی از ماتریس حذف می گردد و مقایسه بر روی واحدهای باقیمانده در ماتریس صورت می گیرد. با تکرار این روند یک رتبه بندی کامل برای کلیه واحدها به دست می آید. نتیجه رتبه بندی، در ستون سمت چپ جدول ۲ ارائه و با رتبه بندی حاصل از کران های پایین و بالا مقایسه شده است. بر این اساس، واحد ۱۵ که بالاترین رتبه را در میان کران های پایین و بالا داشت در مقایسه کلی نیز بالاترین رتبه را به دست می آورد. از آنجا که در بیشتر DMUها (بجز واحد ۶) بین رتبه بندی کران های پایین و بالا مشابهت وجود دارد، تفاوت چشمگیری در نتیجه رتبه بندی ملاحظه نمی شود. برای واحد ۶ که دارای رتبه ۲ در کران پایین و رتبه ۹ در کران بالای کارایی است، رتبه میانگین ۶ در مقایسه بازه های کارایی حاصل می شود.

برای بررسی بیشتر، کارایی خوش بینانه مرحله دوم در حالتی که شرایط بدبینانه برای مرحله اول رخ می دهد نیز محاسبه شده است. در این صورت، نتایج کارایی مرحله دوم در همه واحدها بجز یک واحد (واحد ۱۵) کران بالای بهتری خواهند داشت و ۴ واحد ۷، ۸، ۱۱ و ۱۳ به



شکل ۲: مقایسه کران پایین کارایی در شرایط بدبینانه (فرم پوششی)



شکل ۳: مقایسه کران بالای کارایی در شرایط خوش‌بینانه (فرم مضری)

کران بالای کارایی ۱ می‌رسند. به عبارت دیگر، وقتی شرایط بدبینانه برای مرحله یک و شرایط خوش‌بینانه برای مرحله ۲ رخ می‌دهد متغیرهای میانی آزادی عمل بیش‌تری را در اختیار مرحله دوم قرار می‌دهند تا به نمره کارایی بالاتری دست یابد. مشابهاً می‌توان شرایط خوش‌بینانه برای مرحله ۱ و شرایط بدبینانه برای مرحله ۲ در نظر گرفت. در این صورت برای محاسبه کران پایین کارایی مرحله دوم باید حالت‌های ممکن برای کران پایین یا بالای داده‌های میانی را در نظر گرفت و در نهایت جواب بهینه را از میان تمام حالت‌ها انتخاب نمود. در اینجا نیز، مقدار کران پایین مرحله دوم در اغلب موارد یا تغییر نمی‌کند یا کاهش می‌یابد. به نظر می‌رسد شرایط خوش‌بینانه و کارایی بالاتر مرحله یک می‌تواند نمره کارایی مرحله ۲ را کاهش دهد.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، ارزیابی ساختارهای دومرحله‌ای تحت شرایط عدم قطعیت مورد مطالعه قرار گرفت و با فرض مدیریت نامتمرکز، نحوه محاسبه کران‌های بالا و پایین کارایی تحت سناریوهای خوش‌بینانه و بدبینانه ارائه شد. مدل‌های DEA در شرایط عدم قطعیت، غیرخطی هستند. ساختار مورد مطالعه در این مقاله یک ساختار دومرحله‌ای توسعه یافته است. عدم قطعیت داده‌ها و ساختار شبکه‌ای واحدهای تصمیم‌گیرنده بر پیچیدگی مدل‌ها می‌افزاید. بخش زیادی از پیچیدگی مسأله، ناشی از داده‌های میانی است که دو نقش متضاد ورودی و خروجی را بازی می‌کنند. با استفاده از تحلیل‌های ریاضی، برخی از مدل‌ها خطی و برای برخی دیگر روش‌های ساده‌تر حل پیشنهاد شد. این راه‌حل‌ها بر نحوه برخورد با عدم قطعیت در داده‌های میانی متمرکزند. با توجه به برقراری شرایط استکلبرگ، ارزیابی کارایی با اولویت‌دهی به مرحله پیشرو انجام می‌شود. روش پیشنهادی با استفاده از فرم پوششی مدل‌ها، کم‌ترین کارایی مراحل را در حالت بدبینانه محاسبه می‌کند و با به‌کارگیری فرم مضربی مدل‌ها، کران بالای کارایی مراحل را تحت شرایط خوش‌بینانه تعیین می‌کند. بدین ترتیب برای داده‌های بازه‌ای، یک اندازه کارایی بازه‌ای به دست می‌آید.

با استفاده از یک مثال عددی، عملکرد مدل‌ها و روش‌های پیشنهادی در حل مسائل واقعی مورد بررسی قرار گرفت. با به‌کارگیری روش‌های مقایسه داده‌های بازه‌ای، اندازه کارایی‌های بازه‌ای به دست آمده، مقایسه و یک رتبه‌بندی کامل برای واحدها تعیین شد. به علاوه، نتایج کارایی در حالت‌هایی که یکی از مراحل در حالت خوش‌بینانه و دیگری در وضعیت بدبینانه قرار می‌گیرد، محاسبه و مقایسه شدند.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله، مراتب قدردانی خود را از وقت و دقتی که داور و دبیران مجله برای ارزیابی مقاله صرف کرده‌اند، بیان می‌دارد. نکات و پیشنهادات ارائه شده، کمک مؤثری به بهبود مقاله نمود. این مقاله با حمایت مالی دانشگاه تفرش و در قالب طرح پژوهشی مصوب به انجام رسیده است.

فهرست منابع

- [۱] ه. صالح، ف. حسین‌زاده لطفی، م. رستمی، م. شفیع، ارزیابی عملکرد و تعیین بازه به مقیاس در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی، ۱۳۹۹، ۱۷۱۹. <https://doi.org/10.22055/JAMM.2020.29434.1719>
- [2] A. Charnes, W.W. Cooper, Programming with linear fractional functional. *Nav. Res. Log.* **9(3)** (1962) 181–185.
- [3] A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *Eur. J. Oper. Res.* **2** (1978) 429–444.
- [4] Y. Chen, Imprecise DEA–Envelopment and multiplier model approaches, *Asia–Pac. J. Oper. Res.* **24(02)** (2007) 279–291.
- [5] Y. Chen, J. Du, S.H. David, J. Zhu, DEA model with shared resources and efficiency decomposition, *Eur. J. Oper. Res.* **207(1)** (2010) 339–349.
- [6] W.D. Cook, L. Liang, J. Zhu, Measuring performance of two-stage network structures by DEA: a review and future perspective, *Omega* **38(6)** (2010) 423–430.
- [7] W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA, *Manag. Sci.* **45(4)** (1999) 597–607.

- [8] D.K. Despotis, G. Koronakos, D. Sotiros, Composition versus decomposition in two-stage network DEA: A reverse approach. *J. Prod. Anal.* **45 (1)** (2016) 71–87.
- [9] D.K. Despotis, Y.G. Smirlis, Data envelopment analysis with imprecise data, *Eur. J. Oper. Res.* **140** (2002) 24–36.
- [10] R. Färe, S. Grosskopf, Network DEA, *Socio-Econ. Plan. Sci.* **34** (2000) 35–49.
- [11] H. Fukuyama, W.L. Weber, A slacks-based inefficiency measure for a two-stage system with bad outputs, *Omega* **38** (2010) 398–409.
- [12] N. Goker, E.E. Karsak, Two-stage common weight DEA-Based approach for performance evaluation with imprecise data, *Socio-Econ. Plan. Sci.* (2020), <https://doi.org/10.1016/j.seps.2020.100943>.
- [13] F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Navabakhs, A. Tehranian, M. Rostamy-Malkhalifeh, R. Shahverdi, Ranking bank branches with interval data: The application of DEA. *Int. Math. Forum* **2 (9)** (2007) 429–440.
- [14] L. Liang, W.D. Cook, J. Zhu, DEA models for two-stage processes: game approach, *Nav. Res. Log.* **55** (2008) 643–653.
- [15] Y. Li, Y. Chen, L. Liang, J. Xie, DEA models for extended two-stage network structure, *Omega* **40(5)** (2012) 611–618.
- [16] S. Lim, J. Zhu, Primal-dual correspondence and frontier projections in two-stage network DEA models, *Omega* **83** (2019) 236–248.
- [17] C. Kao and S.N. Hwang, Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan, *Eur. J. Oper. Res.* **185 (1)** (2008) 418–429.
- [18] M. Maghbouli, A. Amirteimoori, S. Kordrostami, Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach, *Measurement* **48** (2014) 109–118.
- [19] P. Peykani, E. Mohammadi, R.F. Saen, S.J. Sadjadi, M. Rostamy-Malkhalifeh, Data envelopment analysis and robust optimization: A review, *Expert Syst.* **37** (2020), <https://doi.org/10.1111/exsy.12534>.
- [20] T.R. Sexton, H.F. Lewis, Two-Stage DEA: An Application to Major League Baseball, *J. Prod. Anal.* **19** (2003) 227–249.
- [21] A.H. Shokouhi, A. Hatami-Marbini, M. Tavana, S. Saati, A robust optimization approach for imprecise data envelopment analysis, *Comput. Ind. Eng.* **59(3)** (2010) 387–397.
- [22] Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu, A preference aggregation method through the estimation of utility intervals, *Comput. Oper. Res.* **32(8)** (2005) 2027–2049.
- [23] J. Wu, Q. Zhu, X. Ji, J. Chu, L. Liang, Two-stage network processes with shared resources and resources recovered from undesirable outputs, *Eur. J. Oper. Res.* **251(1)** (2016) 182–197.
- [24] W. Zhu, Z. Zhou, Interval efficiency of two-stage network DEA model with imprecise data, *INFOR: Inf. Syst. Oper. Res.* **51(3)** (2013) 142–150.



Evaluating the efficiency of two-stage systems under Stackelberg game and imprecise data conditions

Mohammad Afzalinejad[†]

Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh 39518 79611, Iran

Received: 2020/11/24

Accepted: 2021/4/27

Communicated by: Mansour Seraj

Abstract: Many production processes have a two-stage structure in which production takes place through two stages with separate inputs and outputs for each stage. In these production systems, some outputs of the first stage form inputs for the second stage. These factors are called intermediate data. Since in many practical situations, data is not deterministic and is given in interval form, the efficiency evaluation under interval data is very important. In this paper, some data envelopment analysis models are proposed to evaluate the performance of two-stage systems with interval data and Stackelberg game tradeoff between the stages. By exploiting the mathematical properties of the models, some simplifications are provided to determine the interval efficiency of each stage. For optimistic and pessimistic scenarios, it is shown that the upper and lower bounds of efficiency scores are obtain at the upper/lower bounds of all data except the intermediate data. Using a numerical example, the application of the model and analysis of the results are described.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Two-stage system, Leader-follower model, Interval data, Efficiency bounds, Network.



©2021 Shahid chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]E-mail address: afzalinejad@tafreshu.ac.ir