



## استنباط محوری و بیزی در سیستم‌های منسجم‌نمایی تحت سانسور فزاینده

عادلہ فلاح تلوکی<sup>(۱)</sup>، اکبر اصغرزاده<sup>(۲)</sup> \*

<sup>(۱)</sup> گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
<sup>(۲)</sup> گروه آمار، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا محتشمی برزادران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۵/۲۴

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۰/۲

چکیده: در این مقاله، استنباط آماری در سیستم‌های  $k$  مولفه‌ای هنگامی که داده‌های طول عمر سیستم، سانسور شده فزاینده نوع دو باشند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این سیستم‌های منسجم، فرض می‌شود ساختار و اثر مشخصه سیستم مشخص و نیز توزیع طول عمر مولفه‌ها، نمایی باشد. دو روش محوری و بیزی برای برآورد نقطه‌ای پارامتر توزیع طول عمر مولفه‌ها معرفی می‌شوند و این روش‌ها با روش درست‌نمایی ماکزیمم و روش کمترین مربعات که در مقالات معرفی شده‌اند مقایسه می‌شوند. فاصله اطمینان محوری، فاصله اطمینان بیزی و فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت درست‌نمایی محاسبه می‌شوند. با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو، برآوردهای مختلف نقطه‌ای و فاصله‌ای مقایسه و مشاهده می‌شود که روش‌های محوری و بیزی عملکرد بهتری در مقایسه با دیگر روش‌های موجود برآورد دارند. برای تشریح بیشتر روش‌های برآورد معرفی شده، یک مثال عددی ارائه و بحث می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستم منسجم، اثر مشخصه، توزیع نمایی، برآورد به روش محوری، برآورد بیزی.

رده‌بندی ریاضی: 62F10; 62N01; 62N05

### ۱ مقدمه

یک سیستم  $k$  مولفه‌ای وقتی منسجم است که هر یک از  $k$  اجزای سازنده آن برای سیستم مفید باشد. در نظریه قابلیت اعتماد، سیستم‌های منسجم یک چارچوب کلاسیک برای توصیف ساختار سیستم‌ها ارائه می‌دهند. با شروع از مفهوم سیستم‌های منسجم، می‌توان ارتباط بین طول عمر اجزا و طول عمر خود سیستم را بدست آورد. در آزمایش‌های طول عمر و قابلیت اعتماد، همیشه توزیع طول عمر سیستم و توزیع طول عمر اجزای سازنده سیستم، مورد توجه محققان بوده است. در بسیاری از موارد، طول عمر سیستمی که دارای  $k$  مولفه است را می‌توان از طریق آزمایش طول عمر مشاهده کرد اما طول عمر مولفه‌های سیستم را نمی‌توان مشاهده نمود. این مشکل زمانی ایجاد می‌شود که بعد از ساخته شدن سیستم و زمانی که سیستم شروع به فعالیت می‌کند، محققان قادر نخواهند بود مولفه‌های سیستم را به طور جداگانه مورد آزمایش قرار دهند. لذا اطلاعات مربوط به اینکه کدام مولفه منجر به خرابی سیستم شده است معمولاً ناشناخته باقی می‌ماند، چون آزمایش کننده اغلب

\* نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (A. Asgharzadeh), [a.asgharzadeh@umz.ac.ir](mailto:a.asgharzadeh@umz.ac.ir)

توانایی شناسایی قطعه خراب را ندارد و یا اینکه کل سیستم پس از خرابی کنار گذاشته می‌شود. در شرایط دیگر، توزیع طول عمر مولفه‌ها ممکن است تغییر کند وقتی آنها در سیستم مشخصی استفاده شوند. در این موارد، ما فقط می‌توانیم طول عمر سیستم را مشاهده کنیم و نه طول عمر مولفه‌ها را. در نتیجه استنباط آماری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها ممکن است امکان‌پذیر نباشد مگر اینکه اطلاعات مربوط به ساختار سیستم  $k$  مولفه‌ای در دسترس باشد. ما در اینجا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن می‌توان طول عمر یک سیستم منسجم  $k$  مولفه‌ای را مشاهده کرد اما طول عمر مولفه‌های این سیستم را نمی‌توان مشاهده کرد و استنباط آماری درباره توزیع طول عمر مولفه‌های این سیستم بر اساس داده‌های طول عمر سیستم مورد توجه است.

یک سیستم منسجم  $k$  مولفه‌ای را با طول عمر  $T$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_k$  بیانگر طول عمر مولفه‌های این سیستم منسجم باشند که متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک  $F_X(\cdot)$  و تابع چگالی احتمال مشترک  $f_X(\cdot)$  می‌باشند. همچنین  $X_{1:k} < X_{2:k} < \dots, X_{k:k}$  آماره‌های ترتیبی متناظر با طول عمر مولفه‌های سیستم باشند. بردار  $k$  بعدی  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  را اثر مشخصه یک سیستم منسجم گویند هرگاه عنصر  $i$  ام بردار  $\mathbf{p}$  به صورت زیر تعریف شود

$$p_i = \Pr(T = X_{i:k}), \quad i = 1, \dots, k,$$

در واقع،  $p_i$  این احتمال را نشان می‌دهد که خرابی  $i$  امین مولفه سیستم، منجر به خرابی کل سیستم شود. شایان ذکر است که  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ .

سامانیگو [۱۷]، ثابت کرد که برای یک سیستم  $k$  مولفه‌ای با طول عمرهای مستقل و هم توزیع، اثر مشخصه سیستم تنها به تابع ساختار سیستم بستگی دارد و به توزیع طول عمر مولفه‌ها بستگی ندارد. او همچنین نشان داد زمانی که تابع ساختار و اثر مشخصه یک سیستم منسجم مشخص باشد، تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر سیستم به ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k p_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{k}{j} [F_X(t)]^j [\bar{F}_X(t)]^{k-j},$$

9

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^k p_i \binom{k}{i} i f_X(t) [F_X(t)]^{i-1} [\bar{F}_X(t)]^{k-i}.$$

ناوارو و همکاران [۱۳] نشان دادند که تابع قابلیت اعتماد طول عمر یک سیستم منسجم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k a_i \bar{F}_{1:i}(t) = \sum_{i=1}^k a_i [\bar{F}_X(t)]^i, \quad (1.1)$$

که در آن  $a_1, a_2, \dots, a_k$  اعداد صحیح هستند که وابسته به  $F_X(\cdot)$  نبوده و  $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ . شایان ذکر است که  $\bar{F}_{1:i}(t)$  تابع قابلیت اعتماد طول عمر یک سیستم سری با  $i$  مولفه می‌باشد یعنی  $X_{1:i} = \min(X_1, X_2, \dots, X_i)$  که  $i = 1, 2, \dots, k$ . بردار  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  را بردار اثر مشخصه مینیمال می‌نامند. در ناوارو و همکاران [۱۳] اثبات شده است که اثر مشخصه مینیمال یک سیستم را می‌توان از اثر مشخصه آن سیستم به دست آورد و بالعکس. برای اطلاع بیشتر درباره تحقیقات انجام شده در زمینه اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال می‌توان به ناوارو و رابو [۱۲]، سامانیگو [۱۸]، ناوارو [۱۵] و کوچر [۹] مراجعه کرد.

توزیع نمایی یکی از معروف ترین مدل‌های طول عمر بوده که کاربردهای فراوانی در تحلیل داده‌های قابلیت دارد. در این مقاله، فرض می‌شود توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم منسجم، نمایی به ترتیب با تابع چگالی و تابع توزیع زیر باشند:

$$f_X(x) = \theta \exp(-\theta x) \quad x \geq 0, \theta > 0$$

9

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\theta x) \quad x \geq 0, \theta > 0.$$

بنابراین، تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی طول عمر سیستم منسجمی که  $k$  مولفه دارد و مولفه‌های این سیستم مستقل و هم توزیع از توزیع نمایی فوق پیروی می‌کنند با استفاده از رابطه (۱.۱) به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t}, \quad t \geq 0, \theta > 0, \quad (2.1)$$

9

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt}\bar{F}_T(t) = \theta \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t} \quad t \geq 0, \theta > 0. \quad (3.1)$$

در سال‌های اخیر، استنباط آماری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر سیستم زمانی که اثر مشخصه مشخص است، مورد بحث قرار گرفته است. به عنوان مثال، باتاچاریا و سامانیگو [۶] برآورد ناپارامتری توزیع طول عمر مولفه‌ها را از روی داده‌های طول عمر سیستم مطالعه کردند. بالاکریشنان و همکاران [۴] استنباط خطی را بر اساس داده‌های طول عمر سیستم منسجم سانسور شده نوع دو با اثر مشخصه معلوم بحث کردند. بالاکریشنان و همکاران [۵] استنباط ناپارامتری را برای توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر برای سیستم های منسجم مطالعه کردند. تونی و همکاران [۱۶] استنباط پارامتری برای توزیع طول عمر مولفه‌ها را تحت مدل نرخ خطر متناسب هنگامی که اثر مشخصه سیستم مشخص باشند مورد مطالعه قرار دادند. زانگ و همکاران [۲۴] روش برآورد درستمایی ماکزیمم و روش مبتنی بر رگرسیون را در نظر گرفته و به استنباط آماری از توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر سانسور شده نوع دو پرداختند. همچنین، زانگ و همکاران [۲۵] آزمون همگنی توزیع طول عمر مولفه‌ها بر اساس داده‌های طول عمر سیستم هنگامی که اثر مشخصه سیستم مشخص می‌باشد مطالعه کردند. یانگ و همکاران [۱۹] و [۲۰] الگوریتم EM را برای برآورد پارامتر توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم بر اساس داده‌های طول عمر سیستم هنگامی که ساختار سیستم مشخص یا نامشخص باشد ارائه نمودند. در این مقاله، مسئله‌ی برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر توزیع طول عمر مولفه‌های یک سیستم منسجم تحت سانسور فزاینده نوع دوم مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

طرح سانسور فزاینده نوع دو در آزمایش طول عمر سیستم‌ها به صورت زیر توصیف می‌شود.  $n$  سیستم  $k$  مولفه‌ای مستقل با ساختار سیستمی یکسان در معرض آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. مقادیر  $m, (m < n)$ ،  $R_1, R_2, \dots, R_m$  قبل از شروع آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شوند، به طوری که  $m + \sum_{i=1}^m R_i = n$ . به محض مشاهده اولین شکست، به طور تصادفی  $R_1$  سیستم از بین  $n - 1$  سیستم سالم، از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. به طور مشابه، به محض مشاهده دومین شکست، به طور تصادفی  $R_2$  سیستم از بین  $n - R_1 - 1$  سیستم سالم باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شود. این فرآیند تا وقتی ادامه دارد که بعد از شکست سیستم  $m$ ، همه سیستم‌های سالم باقیمانده، یعنی  $R_m = n - m - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1}$  از آزمایش کنار گذاشته شوند. داده‌های طول عمر سیستم به دست آمده از چنین آزمایش طول عمر را با  $T_1:m:n < T_2:m:n < \dots < T_m:m:n$  نشان داده و آن را نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو می‌نامیم. در این مقاله برای ساده‌سازی، نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو مشاهده شده را با  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$  نشان می‌دهیم.

در حالت خاص، اگر  $R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = 0, R_m = n - m$ ، این طرح به طرح سانسور نوع دوم متداول تبدیل می‌شود. که در آن فقط اولین  $m$  خرابی مشاهده می‌شوند. همچنین اگر  $n = m, R_1 = R_2 = \dots = R_m = 0$ ، این طرح فوق، به طرح فاقد سانسور یا طرح نمونه کامل تبدیل می‌شود، که در آن طول عمر همه  $n$  سیستم، مشاهده می‌شوند برای جزئیات بیشتر در مورد سانسورهای فزاینده به بالاکریشنان و آکاروالا [۲] و بالاکریشنان و کرامر [۳] مراجعه شود.

ساختار این مقاله به صورت زیر است. در بخش ۲، مروری بر دو روش درستمایی ماکزیمم و روش کمترین مربعات خواهیم داشت که در برخی مقالات مانند تونی و همکاران [۱۶] و توانگر و اسدی [۲۱] جهت برآورد پارامتر توزیع طول عمر استفاده شده‌اند. در بخش ۳، با ارائه یک کمیت محوری مناسب، روش محوری جهت برآورد پارامتر توزیع طول عمر بحث خواهد شد. در بخش ۴، از روش بی‌زی و به کمک الگوریتم متروپلیس-هستینگز، مسئله برآورد بحث می‌شود. در بخش ۵، فواصل اطمینان مختلف را برای پارامتر توزیع طول عمر محاسبه می‌کنیم. در بخش ۶، یک مثال عددی جهت تشریح روشهای برآورد و یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه روشهای مختلف برآورد ارائه می‌شوند. در نهایت، بحث و نتیجه گیری در انتهای این بخش آمده است.

## ۲ روشهای برآورد موجود

## ۱.۲ روش درست‌نمایی ماکزیمم

$n$  سیستم منسجم  $k$  مولفه‌ای را در نظر بگیرید که توزیع طول عمر مولفه‌های آن نمایی است. همچنین، فرض کنید  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$  یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو با طرح سانسور  $(R_1, R_2, \dots, R_m)$  از داده‌های طول عمر سیستم‌های فوق باشند. تابع درست‌نمایی این نمونه عبارت است از [۳]

$$L(\theta, t) = \prod_{j=1}^m \tau_j f(t_j) [1 - F(t_j)]^{R_j}, \quad (1.2)$$

که

$$\tau_j = \sum_{l=j}^m (R_l + 1), \quad l = 1, \dots, m.$$

با توجه به روابط (۳.۱) و (۲.۱) و جایگزینی در معادله (۱.۲)، تابع درست‌نمایی را می‌توان به صورت

$$L(\mathbf{t}; \theta) = \prod_{j=1}^m \left[ \tau_j \theta \left( \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j} \right) \left( \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right)^{R_j} \right], \quad (2.2)$$

به دست آورد. لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با

$$\ln L(\mathbf{t}; \theta) = \sum_{j=1}^m \ln \tau_j + m \ln \theta + \sum_{j=1}^m \ln \left( \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j} \right) + \sum_{j=1}^m R_j \ln \left( \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right).$$

با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درست‌نمایی نسبت به پارامتر  $\theta$ ، معادله درست‌نمایی زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{\theta} - \sum_{j=1}^m t_j \left( \frac{\sum_{i=1}^k i^2 a_i e^{-i\theta t_j}}{\sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j}} \right) - \sum_{j=1}^m R_j t_j \left( \frac{\sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j}}{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j}} \right) = 0. \quad (3.2)$$

با حل معادله (۳.۲) به روش عددی می‌توان برآورد درست‌نمایی ماکزیمم (MLE) پارامتر  $\theta$  را محاسبه کرد. با توجه به توزیع مجانبی برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامتر  $\theta$  یعنی  $\hat{\theta}$ ، چون کمیت محوری  $(\hat{\theta} - \theta) / \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}$  مجانباً دارای توزیع نرمال استاندارد است. لذا فاصله اطمینان مجانبی  $\% (1 - \gamma) \times 100$  برای  $\theta$  عبارت است از:

$$[\hat{\theta}_l, \hat{\theta}_u] = \hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}, \quad (4.2)$$

که در آن  $z_q$ ، چندک  $q$ -ام توزیع نرمال استاندارد است و

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \left[ -\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]^{-1}.$$

## ۲.۲ روش حداقل مربعات

اگر  $T_{j:m:n}$ ،  $j$  امین آماره ترتیبی یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دو از یک توزیع پیوسته با تابع توزیع  $F(\cdot)$  باشند، آنگاه داریم [۱]

$$E[F(T_{j:m:n})] = 1 - \prod_{s=m-j+1}^m B_s, \quad j = 1, \dots, m,$$

9

$$Var[F(T_{j:m:n})] = \left( \prod_{s=m-j+1}^m B_s \right) \left( \prod_{s=m-j+1}^m D_s - \prod_{s=m-j+1}^m B_s \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

که

$$A_s = s + \sum_{l=m-s+1}^m R_l, \quad B_s = \frac{A_s}{1 + A_s}, \quad C_s = \frac{1}{(A_s + 1)(A_s + 2)}, \quad D_s = B_s + C_s.$$

بر اساس داده‌های طول عمر سیستم مشاهده شده  $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ، برآورد حداقل مربعات (LSE) برای پارامتر  $\theta$ ، با مینیمم کردن تابع

$$\sum_{j=1}^m [F(t_j) - E[F(T_{j:m:n})]]^2 = \sum_{j=1}^m \left[ \prod_{s=m-j+1}^m B_s - \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right]^2$$

نسبت به پارامتر  $\theta$  و حل معادله زیر به دست می‌آید

$$2 \sum_{j=1}^m t_j \left\{ \left[ \prod_{s=m-j+1}^m B_s - \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right] \left( \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j} \right) \right\} = 0.$$

همچنین برآورد حداقل مربعات وزنی (WLSE) برای پارامتر  $\theta$ ، با مینیمم کردن تابع

$$\sum_{j=1}^m \omega_j [F(t_j) - E[F(T_{j:m:n})]]^2 = \sum_{j=1}^m \omega_j \left[ \prod_{s=m-j+1}^m B_s - \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right]^2$$

نسبت به پارامتر  $\theta$  و حل معادله زیر حاصل می‌شود

$$2 \sum_{j=1}^m \omega_j t_j \left\{ \left[ \prod_{s=m-j+1}^m B_s - \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right] \left( \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j} \right) \right\} = 0,$$

که

$$\omega_j = \frac{1}{Var[F(T_{j:m:n})]}.$$

### ۳ برآورد به روش محوری

متغیر تصادفی  $Y_j$  برای  $j = 1, 2, \dots, m$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Y_j = -\ln[\bar{F}(T_j; \theta)], \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

که در آن  $\bar{F}_T(t)$  تابع قابلیت اعتماد سیستم منسجم می‌باشد. با استفاده از رابطه (۲.۱) داریم

$$Y_j = -\ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j} \right], \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

با توجه اینکه  $-\ln[\bar{F}(T_j; \theta)]$  دارای توزیع نمایی استاندارد است، بنابراین  $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_m$  یک نمونه سانسور فزاینده نوع دوم از توزیع نمایی استاندارد می‌باشد. تحت تبدیلات

$$\begin{cases} Z_1 = nY_1 \\ Z_2 = (n - R_1 - 1)(Y_2 - Y_1) \\ \vdots \\ Z_m = (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)(Y_m - Y_{m-1}). \end{cases}$$

می‌توان نشان داد که  $Z_1 < Z_2 < \dots < Z_m$  متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی استاندارد می‌باشند (برای مثال [۲] را ببینید). متغیرهای  $V$  و  $U$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V = \sum_{j=1}^m Z_j = \sum_{j=1}^m (R_j + 1)Y_j - nY_1, \quad U = \sum_{j=2}^m Z_j = \sum_{j=1}^m (R_j + 1)Y_j - nY_1.$$

این متغیرها از یکدیگر مستقل بوده و متغیر  $V$  دارای توزیع خی دو با  $2$  درجه آزادی و متغیر  $U$  دارای توزیع خی دو با  $2m - 2$  درجه آزادی می‌باشد. بدیهی است

$$Q(\theta) = U + V = \sum_{j=1}^m (R_j + 1)Y_j = -\sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j} \right],$$

دارای توزیع خی دو با  $2m$  درجه آزادی است. از طرفی زمانی که  $m$  به سمت بینهایت میل می‌کند

$$E \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} \right) = \frac{m}{m - 1} \rightarrow 1, \quad Var \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} \right) = \frac{m}{(m - 1)^2} \rightarrow 0,$$

با استفاده از نامساوی مارکف، برای هر  $\epsilon > 0$  و  $m \rightarrow \infty$  داریم:

$$\begin{aligned} Pr \left( \left| \frac{Q(\theta)}{2m - 2} - 1 \right| > \epsilon \right) &= Pr \left[ \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} - 1 \right)^2 > \epsilon^2 \right] \\ &< \frac{E \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} - 1 \right)^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{Var \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} \right) + E^2 \left( \frac{Q(\theta)}{2m - 2} - 1 \right)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{m + 1}{\epsilon^2 (m - 1)^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

لذا احتمال فوق، زمانی که  $m$  به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر همگرا است. بنابراین

$$\frac{Q(\theta)}{2m - 2} = \frac{-\sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j} \right]}{2m - 2} \xrightarrow{p} 1,$$

که  $\xrightarrow{p}$  همگرایی در احتمال می‌باشد. بنابراین براساس کمیت محوری  $Q(\theta)$ ، می‌توان با حل معادله  $Q(\theta) = 2m - 2$  یا با حل معادله (۱.۳)

$$m - 1 + \sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j} \right] = 0. \quad (1.3)$$

یک برآورد برای پارامتر  $\theta$  پیدا کرد. توجه کنید که

$$\frac{d}{d\theta} \{Q(\theta)\} = \sum_{j=1}^m \left\{ (1 + R_j) T_j \left( \frac{\sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta T_j}}{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j}} \right) \right\} \geq 0,$$

9

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} Q(\theta) = -\sum_{i=1}^m (1 + R_i) \ln(1) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow +\infty} Q(\theta) = +\infty.$$

بنابراین  $Q(\theta)$  تابعی پیوسته و اکیدا صعودی در بازه  $(0, \infty)$  است. این بدان معنی است که برآوردی که از روش محوری و حل معادله  $Q(\theta) = 2m - 2$  محاسبه می‌شود وجود دارد و یکتا است.

## ۴ برآورد بیزی

در برآورد بیزی، تابع زیان نقش بسزایی دارد. در این بخش، برای محاسبه برآورد بیزی از توابع زیان مربع خطا و لاینکس استفاده می‌شود. تابع زیان مربع خطا عبارت از:

$$L_1(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2,$$

که در آن  $\delta$  برآورد پارامتر  $\theta$  است. تابع زیان مربع خطا یک تابع زیان متقارن است که بیش برآوردی و کم برآوردی را به یک اندازه نشان می‌دهد. وارین [۲۲] و زلنر [۲۳] تابع زیان لاینکس که یک تابع زیان خطی-نمایی است را به صورت زیر معرفی نمودند.

$$L_2(\theta, \delta) = e^{c(\delta-\theta)} - c(\delta - \theta) - 1, \quad c \neq 0,$$

که در آن  $c$  پارامتر شکل است. تابع زیان لاینکس، یک تابع زیان نامتقارن می‌باشد و زمانی که  $c$  به سمت صفر میل کند این تابع زیان تبدیل به تابع زیان متقارن مربع خطا می‌شود. برای  $c > 0$ ، تابع زیان لاینکس بیش برآوردی را بیشتر از کم برآوردی و برای  $c < 0$ ، کم برآوردی را بیشتر از بیش برآوردی نشان می‌دهد. برای انجام استنباط بیزی باید توزیع پیشین مناسبی برای پارامتر مجهول در نظر گرفته شود. فرض می‌کنیم که  $\theta$  دارای توزیع پیشین گاما با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  و با تابع چگالی احتمال

$$\pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \quad \theta > 0, \quad (1.4)$$

باشد که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  مقادیر ثابت و معلوم هستند. توزیع پیشین گاما یک توزیع انعطاف پذیر است، زیرا با انتخاب مقادیر مناسب  $\alpha$  و  $\beta$  می‌توانیم توزیع پیشین آگاهی بخش و توزیع پیشین ناآگاهی بخش را داشته باشیم. با استفاده از تابع درست‌نمایی (۲.۲) و چگالی پیشین (۱.۴)، تابع چگالی پسین  $\theta$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\pi(\theta|\mathbf{t}) \propto \theta^{m+\alpha-1} e^{-\beta\theta} \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^k i a_i e^{-i\theta t_j} \right) \prod_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta t_j} \right)^{R_j}. \quad (2.4)$$

برآورد بیز پارامتر  $\theta$ ، تحت تابع زیان مربع خطا برابر میانگین چگالی پسین و به صورت

$$\hat{\theta}_{BS} = E_\theta(\theta|\mathbf{t}) = \frac{\int_0^\infty \theta \pi(\theta|\mathbf{t}) d\theta}{\int_0^\infty \pi(\theta|\mathbf{t}) d\theta}, \quad (3.4)$$

به دست می‌آید. همچنین، برآورد بیز پارامتر  $\theta$ ، تحت تابع زیان لاینکس به صورت

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c} \log(E_\theta(e^{-c\theta}|\mathbf{t})) = -\frac{1}{c} \log\left(\frac{\int_0^\infty e^{-c\theta} \pi(\theta|\mathbf{t}) d\theta}{\int_0^\infty \pi(\theta|\mathbf{t}) d\theta}\right), \quad (4.4)$$

محاسبه می‌شود. حل عددی روابط (۳.۴) و (۴.۴) به صورت تحلیلی قابل حصول نیست. تابع چگالی پسین نیز فرم شناخته شده‌ای ندارد، لذا نمونه گیری از این چگالی پسین به سادگی امکان پذیر نخواهد بود. بنابراین با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز می‌توان نمونه‌ها را از تابع چگالی پسین تولید کرد. گام‌های الگوریتم متروپلیس-هستینگز به شرح زیر می‌باشد:

۱. مقدار اولیه  $\theta^{(0)}$  را برای پارامتر  $\theta$  در نظر می‌گیریم. برای شروع الگوریتم، مقدار اولیه را می‌توان برآورد درست‌نمایی ماکزیمم در نظر گرفت.

۲. قرار دهید  $j = 1$ .

۳. با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز،  $\theta^{(j)}$  را از  $\pi(\theta^{(j-1)}|\mathbf{y})$  با توزیع پیشنهادی  $N(\theta^{(j-1)}, S_\theta^2)$  تولید می‌کنیم. که  $S_\theta^2$  معکوس اطلاع فیشر می‌باشد.

۴. قرار دهید  $j = j + 1$ .

۵. گام‌های دوم و سوم را  $N$  بار تکرار می‌کنیم تا نمونه‌های مونت کارلو زنجیر مارکوفی (MCMC)  $\theta_1, \dots, \theta_N$  را تولید کنیم.

البته باید به این نکته توجه کنیم که معمولاً نمونه‌هایی که در تکرارهای اولیه الگوریتم تولید می‌شوند، نمونه‌های مناسبی از توزیع پسین مورد نظر نمی‌باشند. بنابراین، تعدادی از نمونه‌های اولیه تولید شده از زنجیره نمونه‌ها کنار گذاشته می‌شوند که به آن‌ها مشاهدات سوخته می‌نامند. اگر  $M$  را تعداد  $\theta$  های سوخته در نظر بگیریم. برآورد بیز پارامتر  $\theta$  تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{\theta}_{BS} = \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N \theta_j,$$

$$\hat{\theta}_{BL} = -\frac{1}{c} \ln \left( \frac{1}{N-M} \sum_{j=M+1}^N e^{-c\theta_j} \right).$$

## ۵ فواصل اطمینان مختلف

در این بخش، فواصل اطمینان مختلف برای پارامتر مجهول را به دست می‌آوریم.

### ۱.۵ فاصله اطمینان محوری

در بخش ۳، نشان داده شد که کمیت محوری

$$Q(\theta) = Q(\theta; \underline{T}) = 2 \sum_{j=1}^m (R_j + 1) Y_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

که در آن

$$Y_j = -\ln[\bar{F}(T_j; \theta)] \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

دارای توزیع خی دو با  $2m$  درجه آزادی است. بنابراین، با استفاده از رابطه (۲.۱)، می‌توان کمیت محوری  $Q(\theta)$  را به صورت زیر

$$Q(\theta) = Q(\theta; \underline{T}) = -2 \sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta T_j} \right], \quad (1.5)$$

نوشت. لذا با استفاده از کمیت محوری  $Q(\theta)$ ، فاصله اطمینان  $\% (1 - \gamma) \cdot 100$  برای پارامتر  $\theta$  از رابطه

$$\Pr \left( \chi_{\gamma/2, 2m}^2 < Q(\theta) < \chi_{1-\gamma/2, 2m}^2 \right) = 1 - \gamma,$$

به دست می‌آید، که در آن  $\chi_{\gamma/2, 2m}^2$  و  $\chi_{1-\gamma/2, 2m}^2$  به ترتیب چندک‌های بالا و پایین  $\gamma/2$  درصدی از توزیع خی دو با  $2m$  درجه آزادی می‌باشند. همان‌طور که در بخش ۲.۲ نشان داده شد کمیت محوری  $Q(\theta)$  تابعی صعودی از  $\theta$  است. لذا فاصله اطمینان  $\% (1 - \gamma) \cdot 100$  برای پارامتر  $\theta$  را می‌توان به صورت زیر

$$\left[ Q^{-1}(\chi_{\gamma/2}^2(2m)), Q^{-1}(\chi_{1-\gamma/2}^2(2m)) \right],$$

بازنویسی کرد، به طوری که  $Q^{-1}(t)$  جوابی از  $\theta$  برای معادله  $Q(\theta) = t$  می‌باشد. بطور خلاصه با استفاده از رابطه (۱.۵)، یک فاصله اطمینان  $\% (1 - \gamma) \cdot 100$  برای پارامتر  $\theta$  عبارت است از  $(\theta_L, \theta_U)$ ، که  $\theta_L$  و  $\theta_U$  کران پایین و کران بالای فاصله اطمینان به ترتیب از معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$-2 \sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta_L T_j} \right] = \chi_{1-\gamma/2}^2(2m), \quad (2.5)$$

و

$$-2 \sum_{j=1}^m (1 + R_j) \ln \left[ \sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta_U T_j} \right] = \chi_{\gamma/2}^2(2m). \quad (3.5)$$



### ۲.۵ فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی ماکزیمم

فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی، اولین بار توسط لاولس [۱۰] برای به دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای توزیع گاما به کار گرفته شد. می توان نشان داد که این فاصله اطمینان اندکی بهتر از فاصله اطمینان بر اساس توزیع مجانبی برآورد درستنمایی ماکزیمم می باشد (میکر و اسکوبار [۱۱]). در این بخش، برای پارامتر  $\theta$ ، فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی (LRT) ارائه می شود. آزمون فرضیه  $H_0: \theta = \theta_0$  را در مقابل  $H_a: \theta \neq \theta_0$  در نظر می گیریم. آماره آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون فرضیه فوق برابر است با:

$$\lambda(\mathbf{t}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta|\mathbf{t})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\hat{\theta}|\mathbf{t})} = \frac{L(\theta_0|\mathbf{t})}{L(\hat{\theta}|\mathbf{t})}, \quad (۴.۵)$$

که  $\Theta$  فضای پارامتر،  $\hat{\theta}$  برآورد درستنمایی ماکزیمم  $\theta$  و  $\Theta_0$  فضای پارامتر تحت فرض  $H_0$  می باشد. فرض کنید  $T_1, T_2, \dots, T_m$  مشاهدات طول عمر سیستم منسجم تحت سانسور شده فرایند نوع دو با طرح سانسور  $(R_1, R_2, \dots, R_m)$  و  $t_1, t_2, \dots, t_m$  مقادیر مشاهده شده آن باشد. بر اساس روابط (۲.۲) و (۴.۵)، آماره آزمون نسبت درستنمایی برابر است با:

$$\lambda(\mathbf{t}) = \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right)^m \prod_{j=1}^m \left(\frac{\sum_{i=1}^k ia_i e^{-i\theta_0 t_j}}{\sum_{i=1}^k ia_i e^{-i\hat{\theta} t_j}}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta_0 t_j}}{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\hat{\theta} t_j}}\right)^{R_j}. \quad (۵.۵)$$

بنا بر خاصیت مجانبی آماره آزمون نسبت درستنمایی برای نمونه های بزرگ، عبارت

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{T}) = -2 \left[ m \ln \left(\frac{\theta_0}{\hat{\theta}}\right) + \sum_{j=1}^m \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^k ia_i e^{-i\theta_0 t_j}}{\sum_{i=1}^k ia_i e^{-i\hat{\theta} t_j}}\right) + \sum_{j=1}^m R_j \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\theta_0 t_j}}{\sum_{i=1}^k a_i e^{-i\hat{\theta} t_j}}\right) \right]$$

در توزیع، همگرا به توزیع خی دو با یک درجه آزادی است.

برای به دست آوردن فاصله اطمینان با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی کفایت مکمل ناحیه رد فرض  $H_0$ ، ناحیه پذیرش یا ناحیه اطمینان در نظر گرفته شود. بر اساس آزمون نسبت درستنمایی، فرض  $H_0$  در سطح معنی داری  $\gamma$  رد می شود هرگاه

$$-2 \ln \lambda(\mathbf{t}) > \chi_{1-\gamma}^2(1).$$

بنابراین فاصله اطمینان  $(1 - \gamma) \%$  بر اساس آزمون نسبت درستنمایی می شود:

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \{\theta : -2 \ln \lambda(\mathbf{t}) \leq \chi_{1-\gamma}^2(1)\} \\ &= \{\theta : -2[L(\theta|\mathbf{t}) - L(\hat{\theta}|\mathbf{t})] \leq \chi_{1-\gamma}^2(1)\} \\ &= \{\theta : L(\theta|\mathbf{t}) \geq L(\hat{\theta}|\mathbf{t}) - \frac{1}{2} \chi_{1-\gamma}^2(1)\}. \end{aligned}$$

از آنجایی که  $L(\theta|\mathbf{t})$  تابعی تک مدی است، بنابراین به ازای هر  $\gamma$  مشخص،  $K(\theta)$  یک فاصله اطمینان یکتا خواهد بود.

### ۳.۵ فاصله اطمینان بیزی

در بخش ۴، به کمک الگوریتم متروپلیس-هستینگز نمونه های MCMC  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  را تولید کردیم. بعد از حذف  $M$  مشاهده سوخته، نمونه های MCMC باقیمانده را به صورت صعودی  $\theta_{[1]} < \theta_{[2]} < \dots < \theta_{[N-M]}$  مرتب می کنیم. با استفاده از این نمونه مرتب شده و بکارگیری ایده چن وشائو [۷]، یک فاصله اطمینان بیزی  $(1 - \gamma) \%$  برای  $\theta$  عبارتست از

$$\left( \theta_{[\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil (N-M)]}, \theta_{[\lfloor (1-\frac{\gamma}{2}) \rfloor (N-M)]} \right).$$

با تکرار این روش می توان فواصل زیادی برای  $\theta$  به دست آورد. از بین فواصل به دست آمده، آن فاصله ای که دارای کوتاهترین طول باشد، یک فاصله اطمینان با بالاترین چگالی پسین (HPD) برای  $\theta$  می باشد.

## ۶ محاسبات عددی و مطالعه عملکرد برآوردها

در این بخش، یک مثال عددی برای تشریح روش‌های برآورد استفاده شده در این مقاله و یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو برای ارزیابی عملکرد روش‌های برآورد ارائه می‌شوند. ابتدا توصیف می‌کنیم که چگونه می‌توان داده‌های طول عمر  $T_1, T_2, \dots, T_m$  را برای سیستم‌های منسجم با  $k$  مولفه نمایی تولید کرد. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_k$  طول عمر مولفه های یک سیستم منسجم باشند، به طوری که مولفه‌های سیستم، مستقل و هم توزیع با تابع توزیع نمایی

$$F_X(t) = 1 - e^{-\theta t}, \quad t > 0, \theta > 0.$$

باشند. اگر اثر مشخصه سیستم منسجم  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  باشد آنگاه الگوریتم زیر نحوه تولید داده‌های طول عمر سیستم  $T_1, T_2, \dots, T_m$  را نشان می‌دهد.

۱.  $u$  را از توزیع  $U(0, 1)$  تولید می‌کنیم.

۲.  $X_1, X_2, \dots, X_k$  که بیانگر طول عمر مولفه های سیستم منسجم می‌باشد را از تابع توزیع  $F(x)$  تولید می‌کنیم.

۳.  $X_1, X_2, \dots, X_k$  را به ترتیب صعودی  $X_{1:k} < X_{2:k} < \dots < X_{k:k}$  مرتب می‌کنیم.

۴. برای هر  $\sum_{i=1}^{j-1} p_i < u < \sum_{i=1}^j p_i$  که  $j = 1, 2, \dots, k$ ، قرار دهید  $T = X_{j:k}$  یعنی،

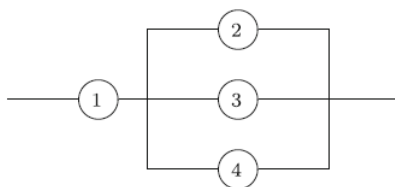
$$T = \begin{cases} X_{1:k} & 0 < u < p_1, \\ X_{2:k} & p_1 < u < p_1 + p_2, \\ X_{3:k} & p_1 + p_2 < u < p_1 + p_2 + p_3, \\ \vdots & \vdots \\ X_{k:k} & \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u < \sum_{i=1}^k p_i. \end{cases}$$

۵. گام‌های اول تا گام چهارم را  $n$  بار تکرار می‌کنیم تا داده‌های طول عمر سیستم منسجم  $T_1, T_2, \dots, T_n$  به دست آیند.

براساس طرح سانسور  $(R_1, R_2, \dots, R_m)$  و با استفاده از الگوریتم داده شده در [۲]، نمونه سانسور فزاینده نوع دوم  $T_1, T_2, \dots, T_m$  ( $m < n$ ) را از داده‌های طول عمر  $T_1, T_2, \dots, T_m$  تولید می‌کنیم.

### ۱.۶ مثال عددی

در این بخش برای تشریح نتایج به دست آمده، سیستم منسجم ۴ مولفه‌ای را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. طول عمر این سیستم عبارتست



شکل ۱: سیستم منسجم با چهار مولفه

از:

$$T = \min\{X_1, \max\{X_2, X_3, X_4\}\}.$$

که در آن  $X_i$  طول عمر مولفه  $i$  است ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). از ناوارو و همکاران [۱۳]، اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال این سیستم به ترتیب عبارتند از  $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2, 0)$  و  $\mathbf{a} = (0, 3, -3, 1)$ . با استفاده از الگوریتمی که در بالا ارائه شد، یک نمونه به حجم  $n = 15$  از این سیستم منسجم تولید می‌شود. مولفه‌های طول عمر این سیستم منسجم مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی با پارامتر  $\theta = 2$  فرض می‌شود. داده‌های طول عمر سیستم تولید شده عبارتند از:

$$\begin{matrix} ۰/۰۰۹۰۴ & ۰/۰۱۰۸۸ & ۰/۱۳۵۳۲ & ۰/۱۵۲۷۵ & ۰/۱۷۹۱۶ & ۰/۱۸۶۸۲ & ۰/۲۳۸۰۷ & ۰/۲۸۰۶۷ \\ ۰/۳۲۱۰۲ & ۰/۳۳۸۹۵ & ۰/۳۷۷۰۷ & ۰/۴۶۵۶۸ & ۰/۵۲۳۲۵ & ۰/۶۳۸۸۹ & ۱/۰۲۹۰۷ \end{matrix}$$

اکنون دو طرح سانسور شده را در نظر می گیریم:

$$\text{طرح ۱: } m = ۹, (R_1, R_2, \dots, R_m) = (۲, ۰, ۰, ۰, ۰, ۳, ۰, ۰, ۰, ۱)$$

$$\text{طرح ۲: } m = ۱۰, (R_1, R_2, \dots, R_m) = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۵)$$

بر اساس طرح ۱ و طرح ۲، ۱۵ سیستم چهار مولفه ای مستقل با ساختار سیستمی یکسان در معرض آزمایش طول عمر قرار می گیرند. طرح ۱ نشان دهنده این است که به محض مشاهده اولین شکست، به طور تصادفی ۲ سیستم از بین ۱۴ سیستم سالم، از آزمایش کنار گذاشته می شوند. همچنین، به محض مشاهده پنجمین شکست، به طور تصادفی ۳ سیستم از بین ۱۲ سیستم سالم، از آزمایش کنار گذاشته می شوند. این فرآیند زمانی به پایان میرسد که بعد از شکست سیستم نهم، همه سیستم های سالم باقیمانده، یعنی  $R_9 = ۱$  از آزمایش کنار گذاشته شوند. همچنین، طرح ۲ نشان دهنده یک طرح سانسور نوع دوم می باشد که در آن آزمایش طول عمر زمانی به پایان میرسد که در آن فقط اولین،  $m = ۵$  شکست مشاهده شود.

برای طرح اول، نمونه سانسور فزاینده تولید شده از داده های طول عمر سیستم بالا عبارتند از:

$$۰/۰۰۰۹۰ \quad ۰/۰۱۰۸ \quad ۰/۱۳۵۳ \quad ۰/۱۵۲۷ \quad ۰/۱۷۹۱ \quad ۰/۱۸۶۸ \quad ۰/۲۸۰۶ \quad ۰/۵۲۳۲ \quad ۰/۶۳۸۸$$

با استفاده از داده های فوق، برآوردهای نقطه ای برای پارامتر  $\theta$  عبارتند از:

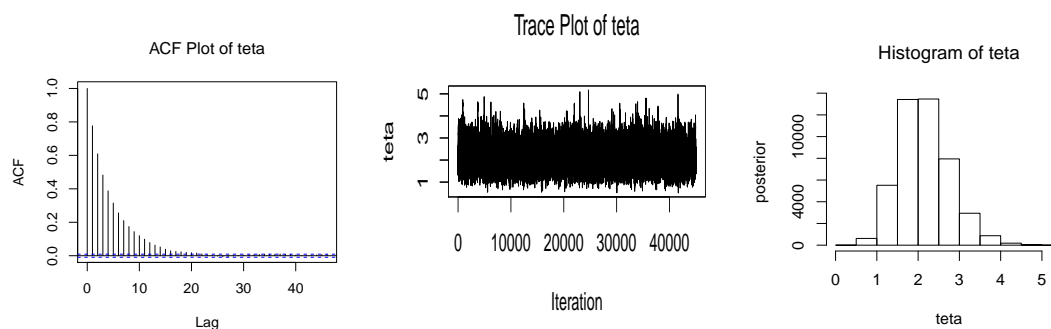
برآورد درست نمایی ماکزیم  $\hat{\theta}_{MLE} = ۲/۱۶۵۳$ ، برآورد براساس کمیت محوری  $\hat{\theta}_{Pivot} = ۱/۹۷۱۲$  همچنین، برآوردهای حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی به ترتیب  $\hat{\theta}_{LSE} = ۲/۰۹۳۸$  و  $\hat{\theta}_{WLSE} = ۲/۰۷۲۴$  می باشند. برآوردهای بیز با استفاده از روش MCMC و از الگوریتم متروپلیس-هستینگز تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ازای مقادیر  $(۱, ۰/۰۵)$  به دست می آوریم. چون هیچ اطلاعی درباره توزیع پیشین نداریم، از توزیع پیشین تقریباً ناآگاهی بخش،  $\alpha = \beta = ۰/۰۰۰۰۱$  برای محاسبه برآورد بیز استفاده خواهیم کرد. در الگوریتم متروپلیس-هستینگز مقدار اولیه  $\theta^{(۰)}$  را برآورد درست نمایی ماکزیم و  $S_{\theta}^2$  واریانس توزیع پیشنهادی را معکوس اطلاع فشر در نظر می گیریم. با استفاده از الگوریتم فوق نمونه ای به حجم  $N = ۵۰۰۰۰$  از  $\theta$  ها با  $S_{\theta}^2 = ۰/۳۴۶۸$  و درصد پذیرش  $\% ۷۰$  تولید شده است. برای از بین بردن اثر نقاط آغازین،  $M = ۵۰۰۰$  نمونه اولیه را حذف می کنیم، بنابراین برای محاسبه برآورد بیز و فاصله اطمینان بیزی از  $N - M = ۴۵۰۰۰$ ،  $\theta$  تولید شده استفاده می شود. برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا  $\hat{\theta}_{BS} = ۲/۱۳۹۱$  و تحت تابع زیان لاینکس با  $c = -۰/۰۵$ ،  $\hat{\theta}_{BL} = ۲/۱۴۸۳$  و برای  $c = ۱$ ،  $\hat{\theta}_{BL} = ۱/۹۷۳۰$  به دست می آیند. برآورد فاصله ای برای پارامتر  $\theta$  براساس توزیع مجانبی MLE  $(۰/۹۷۹۱, ۳/۳۵۱۵)$  و براساس آزمون نسبت درست نمایی ماکزیم  $(۱/۱۵۷۷, ۳/۵۳۷۰)$  می باشند. همچنین فاصله اطمینان محوری و فاصله اطمینان بیزی به ترتیب عبارتند از:  $(۱/۱۱۳۲, ۳/۴۶۹۱)$  و  $(۱/۱۰۲۱, ۳/۴۶۱۷)$ .

برای طرح دوم، مشاهدات عبارتند از:

$$۰/۰۰۰۹۰ \quad ۰/۰۱۰۸ \quad ۰/۱۳۵۳ \quad ۰/۱۵۲۷ \quad ۰/۱۷۹۱ \quad ۰/۱۸۶۸ \quad ۰/۲۳۸۰ \quad ۰/۲۸۰۶ \quad ۰/۳۲۱۰ \quad ۰/۳۳۸۹$$

با استفاده از داده های فوق، برآورد درست نمایی ماکزیم برای پارامتر  $\theta$ ،  $\hat{\theta}_{MLE} = ۲/۳۹۸۲$  و براساس کمیت محوری  $\hat{\theta}_{Pivot} = ۲/۱۶۴۹$  می باشند. همچنین برآورد حداقل مربعات و حداقل مربعات وزنی به ترتیب  $\hat{\theta}_{LSE} = ۲/۱۲۰۱$  و  $\hat{\theta}_{WLSE} = ۲/۱۰۳۵$  می باشند. برآورد بیز تحت تابع زیان مربع خطا  $\hat{\theta}_{BS} = ۲/۳۶۴۴$  و تحت تابع زیان لاینکس با  $c = -۰/۰۵$  و برای  $\hat{\theta}_{BL} = ۲/۳۷۴۲$  و برای  $c = ۱$ ،  $\hat{\theta}_{BL} = ۲/۱۸۶۴$  محاسبه شده است. فاصله اطمینان برای پارامتر  $\theta$  براساس توزیع مجانبی MLE  $(۱/۱۸۰۱, ۳/۶۱۶۳)$  و براساس آزمون نسبت درست نمایی ماکزیم  $(۱/۳۳۷۹, ۳/۷۷۵۷)$  می باشد. همچنین فاصله اطمینان محوری و فاصله اطمینان بیزی به ترتیب برابر است با:  $(۱/۲۵۰۵, ۳/۶۸۰۰)$  و  $(۱/۲۷۲۹, ۳/۶۸۷۷)$ .

در نمودار ۲ هیستوگرام زنجیره دنباله  $\theta$  های به دست آمده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز ارائه شده است. این نمودار نشان می دهد که انتخاب توزیع نرمال به عنوان تقریبی از تابع چگالی پسین و توزیع پیشنهادی انتخابی کاملاً مناسب است. همچنین برای ارزیابی همگرایی در الگوریتم متروپلیس-هستینگز از ابزار تشخیصی مانند نمودار تابع خود همبستگی (ACF) استفاده شده است. این نمودار نشان می دهد که خود همبستگی بین نمونه ها کم می باشد. بنابراین برآوردهای به دست آمده برای پارامتر رضایت بخش خواهند بود. همچنین برای بررسی همگرایی زنجیره های تولید شده در الگوریتم، می توانیم از نمودار اثر (trace plot) استفاده کنیم. این نمودار نشان می دهد که مقادیر  $\theta$  های تولید شده در الگوریتم متروپلیس-هستینگز به طور تصادفی در اطراف میانگین پراکنده شده اند.



شکل ۲: نمودار هیستوگرام، نمودار اثر و نمودار تابع همبستگی مربوط به الگوریتم متروپلیس

## ۲.۶ مطالعه شبیه سازی

در بخش های قبل با استفاده از دیدگاه کلاسیک و بیز، برآوردگرهای مختلفی را برای پارامتر  $\theta$  به دست می‌آوریم. در این بخش به کمک شبیه سازی مونت کارلو به مقایسه و بررسی رفتار برآوردگرها می‌پردازیم. با استفاده از الگوریتم معرفی شده، نمونه‌های طول عمر سیستم منسجم  $T_1, T_2, \dots, T_m$  را براساس سانسور فزاینده نوع دو و با طرح سانسور شده  $R_1, R_2, \dots, R_m$  تولید می‌کنیم. در این شبیه سازی، شش سیستم منسجم ۴ مولفه‌ای با اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال معلوم را انتخاب کرده که در جدول ۱ گزارش شده است. برای مطالعه بیشتر به ناوارو و ریچلیک [۱۴] مراجعه شود. در این سیستم‌های منسجم، مولفه های سیستم مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی

جدول ۱: اثر مشخصه و اثر مشخصه مینیمال سیستم‌های منسجم ۴ مولفه ای که در شبیه سازی به کار رفته است.

شماره سیستم	طول عمر $T$	اثر مشخصه (P)	اثر مشخصه مینیمال (a)
۱	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$(1, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 1)$
۲	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$	$(0, 3, -3, 1)$
۳	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$	$(0, 0, 2, -1)$
۴	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_2, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$	$(0, 1, 1, -1)$
۵	$\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(1, 0, 1, -1)$
۶	$X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$(0, 0, 0, 1)$	$(4, -6, 4, -1)$

با پارامتر  $\theta = 1$  فرض می‌شوند. در این مطالعه شبیه سازی، برای مقادیر مختلف  $n$  و  $m$ ، چهار طرح سانسور فزاینده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\text{طرح ۱: } R_i = 0 \text{ برای } i \neq m \text{ و } R_m = n - m,$$

$$\text{طرح ۲: } R_i = 0 \text{ برای } i \neq 1 \text{ و } R_1 = n - m,$$

$$\text{طرح ۳: } R_i = 0 \text{ برای } i \neq 1, m \text{ و } R_1 = R_m = \frac{n-m}{2}$$

$$\text{طرح ۴: } R_i = 0 \text{ برای } i \neq \frac{m}{2} \text{ و } R_{m/2} = n - m,$$

برآوردگرهای نقطه‌ای مختلف مانند برآورد درست‌نمایی ماکزیمم  $\hat{\theta}_{MLE}$ ، برآورد براساس کمیت محوری  $\hat{\theta}_{Pivot}$ ، برآورد حداقل مربعات  $\hat{\theta}_{LSE}$ ، برآورد حداقل مربعات وزنی  $\hat{\theta}_{WLSE}$  و برآوردگرهای بیز تحت تابع زیان مربع خطا  $\hat{\theta}_{BS}$ ، و تحت تابع زیان لاینکس  $\hat{\theta}_{BL}$  به دست می‌آوریم. برای محاسبه برآوردگرهای بیز دو توزیع پیشین به فرم زیر را در نظر می‌گیریم

توزیع پیشین ۱:  $\alpha = ۲, \beta = ۴,$

توزیع پیشین ۲:  $\alpha = \beta = ۰,۰۰۰۰۱$

توجه کنید که توزیع پیشین ۱ یک توزیع آگاهی بخش و توزیع پیشین ۲ یک توزیع تقریباً ناآگاهی بخش است. برای هر سیستم منسجم، شبیه سازی را ۱۰۰۰ بار تکرار می کنیم و عملکرد برآوردگرها براساس میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطا (MSE) مقایسه می شوند. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطا به ترتیب از روابط زیر به دست می آیند:

$$\widehat{Bias} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta),$$

$$\widehat{MSE} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2,$$

9

که  $\hat{\theta}_i$  برآورد پارامتر  $\theta$ ، در  $i$  امین شبیه سازی است. نتایج این شبیه سازی در جدول ۲ گزارش شده است. تمام محاسبات با نرم افزار  $R$ ، و برای انجام محاسبات بیزی با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگر از پکیج (MHadaptive) استفاده شده است (چی ورس [۸] را ملاحظه نمایید).

فواصل اطمینان ۹۵ درصد براساس توزیع مجانبی MLE، آزمون نسبت درستنمایی LRT، فاصله اطمینان محوری و فواصل اطمینان بیزی برای پارامتر  $\theta$  محاسبه شده اند. فواصل اطمینان به دست آمده را با استفاده از میانگین طول فواصل اطمینان (AW) و احتمال پوشش فاصله ها (CP) مورد مقایسه قرار می دهیم. اگر  $(L_i, U_i)$  فاصله اطمینان  $\theta$  در مرحله  $i$  ام شبیه سازی باشد، احتمال پوشش برای  $i = 1, \dots, 1000$ ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$CP = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} I \{L_i < T < U_i\},$$

که  $I \{ \cdot \}$  تابع نشانگر می باشد. نتایج این شبیه سازی در جدول ۳ گزارش شده است.

### ۳.۶ نتیجه گیری

از جدول ۲ نتایج زیر به دست می آیند: عملکرد برآوردها وابسته به ساختار سیستم می باشد. از آنجایی که سیستم سری (سیستم شماره ۱) دارای مینیم طول عمر می باشد بنابراین نسبت به سیستم های دیگر دارای بیشترین اریبی و میانگین توان دوم خطا است. این ادعا در مورد سیستم های موازی نیز صادق است. برای سیستم موازی (سیستم شماره ۶) با بیشترین طول عمر، مقدار MSE نسبت به سیستم های دیگر کمتر می باشد. در میان برآوردهای کلاسیک، برآوردها به دست آمده از کمیت محوری در بیشتر سیستم ها از لحاظ میانگین توان دوم خطا بهتر از برآوردها در دستنمایی ماکزیمم، برآوردها مربع خطا و برآوردها مربع خطای وزنی عمل می کند. در مقایسه دو برآوردها بیز به دست آمده با توزیع پیشین آگاهی بخش و توزیع پیشین ناآگاهی بخش، مشاهده می کنیم که برآوردها بیز با توزیع پیشین آگاهی بخش از نظر میانگین توان دوم خطا، بهتر از برآوردها بیز با توزیع پیشین ناآگاهی بخش است. با مقایسه تمامی برآوردها مشاهده می شود که برآورد بیز بر اساس توزیع پیشین آگاهی بخش در همه سیستم ها از لحاظ میانگین توان دوم خطا بهتر از برآوردهای کلاسیک و برآوردها بیز بر اساس توزیع پیشین ناآگاهی بخش عمل می کند. همچنین وقتی مقادیر  $n$  و  $m$  افزایش می یابد مقدار MSE کاهش می یابد.

از جدول ۳ و با مقایسه فواصل اطمینان مختلف، نتایج زیر به دست می آید: با افزایش مقادیر  $n$  و  $m$  متوسط طول فاصله اطمینان نیز کاهش می یابد. درصد پوشش بازه های اطمینان نیز در بیشتر موارد نزدیک به ۹۵ درصد می باشد. متوسط طول فاصله اطمینان براساس توزیع پیشین آگاهی بخش و ناآگاهی بخش به ترتیب کمترین طول فاصله اطمینان را دارا می باشند. در اکثر سیستم ها نیز متوسط طول فاصله اطمینان محوری کمتر از فاصله اطمینان براساس توزیع مجانبی MLE و فاصله اطمینان براساس نسبت درستنمایی ماکزیمم می باشد. در اکثر سیستم ها نیز فاصله اطمینان براساس نسبت درستنمایی ماکزیمم بهتر از فاصله اطمینان مجانبی می باشد.

بطور خلاصه از نتایج شبیه سازی، مشاهده می شود که روش های محوری و بیزی معرفی شده در این مقاله، عملکرد بهتری در مقایسه با روش های رایج درستنمایی ماکزیمم و کمترین مربعات برای برآورد طول عمر مولفه های سیستم دارند.

جدول ۲: میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای مختلف برای اندازه نمونه و طرح‌های مختلف

n	m	No.	Scheme		روش MCMC											
					$\hat{\theta}_{MLE}$	$\hat{\theta}_{Pivot}$	$\hat{\theta}_{LSE}$	$\hat{\theta}_{WLSE}$	$\hat{\theta}_{BS}$	P-I		P-II		$\hat{\theta}_{BS}$	$\hat{\theta}_{BL}$	
										$c = -0.5$	$c = 1$	$c = -0.5$	$c = 1$			
۲۰	۱۴	۱	۱	Bias	۰/۰۷۲۴	-۰/۰۰۴۲	۰/۰۳۴۲	۰/۰۲۷۸	-۰/۰۷۵۴	-۰/۰۷۴۰	-۰/۱۰۲۱	۰/۰۷۱۲	۰/۰۷۳۴	۰/۰۲۹۳		
				MSE	۰/۱۰۳۰	۰/۰۸۴۳	۰/۱۰۰۷	۰/۱۰۳۳	۰/۰۴۴۹	۰/۰۴۵۰	۰/۰۴۵۲	۰/۱۰۲۳	۰/۱۰۳۵	۰/۰۸۲۸		
			۲	Bias	۰/۰۷۹۱	۰/۰۰۶۲	۰/۰۵۵۷	۰/۰۴۸۵	-۰/۰۶۹۴	-۰/۰۶۸۰	-۰/۰۹۶۴	۰/۰۷۸۷	۰/۰۸۱۰	۰/۰۳۶۷		
				MSE	۰/۰۹۴۹	۰/۰۷۶۵	۰/۱۲۲۲	۰/۱۱۲۲	۰/۰۴۱۶	۰/۰۴۲۰	۰/۰۹۵۲	۰/۰۹۵۲	۰/۰۹۶۳	۰/۰۷۶۸		
			۳	Bias	۰/۰۷۰۸	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۳۴۸	۰/۰۲۵۶	-۰/۰۷۶۰	-۰/۰۷۴۶	-۰/۱۰۲۷	۰/۰۷۱۸	۰/۰۷۴۰	۰/۰۳۰۱		
				MSE	۰/۰۹۸۶	۰/۰۸۰۷	۰/۱۰۵۲	۰/۱۰۴۵	۰/۰۴۴۳	۰/۰۴۴۷	۰/۰۴۴۷	۰/۰۹۹۲	۰/۱۰۰۴	۰/۰۸۰۵		
		۴	Bias	۰/۰۸۲۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۵۴۲	۰/۰۵۴۲	-۰/۰۶۸۶	-۰/۰۶۷۲	-۰/۰۹۵۸	۰/۰۸۲۵	۰/۰۸۲۵	۰/۰۳۹۶			
			MSE	۰/۱۰۷۵	۰/۰۸۶۹	۰/۱۱۸۳	۰/۱۱۷۸	۰/۰۴۴۵	۰/۰۴۴۵	۰/۰۴۴۵	۰/۱۰۸۲	۰/۱۰۹۵	۰/۰۸۶۷			
		۲	۱	Bias	۰/۰۴۹۳	-۰/۰۱۶۸	۰/۰۱۵۰	۰/۰۰۸۴	-۰/۰۶۱۵	-۰/۰۶۰۴	-۰/۰۸۲۳	۰/۰۳۸۴	۰/۰۳۸۸	۰/۰۱۱۱		
				MSE	۰/۰۶۰۳	۰/۰۵۱۰	۰/۰۶۵۳	۰/۰۶۶۳	۰/۰۳۳۸	۰/۰۳۳۸	۰/۰۳۴۱	۰/۰۵۵۲	۰/۰۵۵۶	۰/۰۵۰۸		
			۲	Bias	۰/۰۴۸۴	-۰/۰۱۴۹	۰/۰۲۷۲	۰/۰۲۱۱	-۰/۰۵۷۲	-۰/۰۵۶۱	-۰/۰۷۷۶	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۲۲	۰/۰۱۶۷		
				MSE	۰/۰۵۵۴	۰/۰۳۷۵	۰/۰۷۹۸	۰/۰۷۲۷	۰/۰۳۱۵	۰/۰۳۱۵	۰/۰۳۱۵	۰/۰۵۴۲	۰/۰۵۴۶	۰/۰۳۷۲		
	۳		Bias	۰/۰۷۲۳	۰/۰۰۶۸	۰/۰۳۸۳	۰/۰۳۰۴	-۰/۰۴۲۳	-۰/۰۴۱۲	-۰/۰۶۲۷	۰/۰۶۳۱	۰/۰۶۳۶	۰/۰۳۲۷			
			MSE	۰/۰۶۶۹	۰/۰۵۷۰	۰/۰۳۷۳	۰/۰۳۴۹	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۴۹	۰/۰۳۴۹	۰/۰۶۶۱	۰/۰۶۶۱	۰/۰۵۷۹			
	۴	Bias	۰/۰۵۳۲	-۰/۰۱۲۶	۰/۰۲۷۷	۰/۰۲۴۷	-۰/۰۵۷۳	-۰/۰۵۶۲	-۰/۰۷۸۴	۰/۰۴۵۲	۰/۰۴۵۲	۰/۰۱۷۱				
		MSE	۰/۰۶۱۰	۰/۰۵۱۷	۰/۰۷۲۰	۰/۰۶۲۶	۰/۰۳۳۵	۰/۰۳۳۵	۰/۰۳۳۵	۰/۰۵۵۵	۰/۰۵۵۵	۰/۰۵۱۶				
	۳	۱	۱	Bias	۰/۰۶۵۱	-۰/۰۰۶۷	۰/۰۲۶۱	۰/۰۱۹۵	-۰/۰۶۶۵	-۰/۰۶۳۲	-۰/۰۸۸۴	۰/۰۵۵۱	۰/۰۶۰۹	۰/۰۳۲۷		
				MSE	۰/۰۷۷۵	۰/۰۶۳۹	۰/۰۷۹۱	۰/۰۷۹۹	۰/۰۳۷۱	۰/۰۳۷۱	۰/۰۳۷۲	۰/۰۷۵۲	۰/۰۷۷۰	۰/۰۶۳۷		
			۲	Bias	۰/۰۶۰۹	-۰/۰۰۹۲	۰/۰۵۰۹	۰/۰۴۱۷	-۰/۰۶۶۳	-۰/۰۶۵۰	-۰/۰۹۰۰	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۹۹	۰/۰۳۲۱		
				MSE	۰/۰۸۱۵	۰/۰۶۸۳	۰/۱۳۶۷	۰/۱۲۵۷	۰/۰۴۰۱	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۰۲	۰/۰۸۱۰	۰/۰۸۱۵	۰/۰۶۸۲		
			۳	Bias	۰/۰۶۷۹	-۰/۰۰۳۷	۰/۰۳۳۹	۰/۰۲۳۸	-۰/۰۶۱۲	-۰/۰۶۰۱	-۰/۰۸۶۴	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۲۸۱		
				MSE	۰/۰۸۴۸	۰/۰۶۹۸	۰/۰۹۷۹	۰/۰۹۴۵	۰/۰۴۰۷	۰/۰۴۰۸	۰/۰۴۰۵	۰/۰۸۲۳	۰/۰۸۲۳	۰/۰۶۹۸		
		۴	Bias	۰/۰۶۶۴	-۰/۰۰۴۷	۰/۰۴۰۴	۰/۰۳۷۵	-۰/۰۶۲۷	-۰/۰۶۱۵	-۰/۰۸۶۷	۰/۰۶۲۵	۰/۰۶۴۳	۰/۰۲۷۷			
			MSE	۰/۰۷۷۰	۰/۰۶۳۵	۰/۰۸۸۱	۰/۰۹۰۰	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۷۷	۰/۰۷۶۰	۰/۰۷۶۸	۰/۰۶۳۵			
۴		۱	Bias	۰/۰۵۶۷	-۰/۰۰۵۳	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۱۷	-۰/۰۵۰۵	-۰/۰۴۹۵	-۰/۰۷۱۵	۰/۰۵۳۹	۰/۰۵۵۴	۰/۰۲۵۶			
			MSE	۰/۰۶۳۸	۰/۰۵۳۶	۰/۰۶۷۷	۰/۰۶۸۶	۰/۰۳۴۳	۰/۰۳۴۳	۰/۰۳۴۱	۰/۰۶۳۲	۰/۰۶۳۸	۰/۰۵۴۵			
		۲	Bias	۰/۰۵۶۸	-۰/۰۰۶۲	۰/۰۳۷۶	۰/۰۳۰۱	-۰/۰۵۴۸	-۰/۰۵۳۷	-۰/۰۷۶۵	۰/۰۵۷۳	۰/۰۵۸۸	۰/۰۲۶۷			
			MSE	۰/۰۷۴۷	۰/۰۶۳۱	۰/۰۹۱۱	۰/۰۸۴۶	۰/۰۳۸۸	۰/۰۳۸۸	۰/۰۳۸۴	۰/۰۷۴۹	۰/۰۷۴۹	۰/۰۶۶۹			
	۳	Bias	۰/۰۴۹۵	-۰/۰۱۱۵	۰/۰۲۶۶	۰/۰۱۹۵	-۰/۰۵۷۰	-۰/۰۵۵۹	-۰/۰۷۷۹	۰/۰۴۸۱	۰/۰۴۹۶	۰/۰۱۹۴				
		MSE	۰/۰۶۸۷	۰/۰۵۹۰	۰/۰۷۵۳	۰/۰۷۳۵	۰/۰۳۷۴	۰/۰۳۷۴	۰/۰۳۷۲	۰/۰۶۸۰	۰/۰۶۸۵	۰/۰۵۸۷				
۴	Bias	۰/۰۴۵۶	-۰/۰۰۱۷۰	۰/۰۲۳۳	۰/۰۲۱۰	-۰/۰۶۲۵	-۰/۰۶۱۴	-۰/۰۸۲۷	۰/۰۴۴۶	۰/۰۴۶۲	۰/۰۱۵۳					
	MSE	۰/۰۶۷۰	۰/۰۵۷۴	۰/۰۸۳۷	۰/۰۸۷۲	۰/۰۳۷۱	۰/۰۳۷۱	۰/۰۳۷۲	۰/۰۶۷۰	۰/۰۶۶۶	۰/۰۵۷۹					
۵	۱	۱	Bias	۰/۰۳۲۹	-۰/۰۱۶۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۵۳	-۰/۰۴۸۹	-۰/۰۴۷۹	-۰/۰۶۷۲	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۶۶	۰/۰۱۹۹			
			MSE	۰/۰۵۲۶	۰/۰۴۹۲	۰/۰۵۴۰	۰/۰۵۴۰	۰/۰۳۲۷	۰/۰۳۲۷	۰/۰۳۲۶	۰/۰۵۵۱	۰/۰۵۵۵	۰/۰۴۸۳			
		۲	Bias	۰/۰۲۶۶	-۰/۰۰۲۹۰	۰/۰۱۴۱	۰/۰۰۹۵	-۰/۰۶۶۱	-۰/۰۶۵۰	-۰/۰۸۶۰	۰/۰۳۵۸	۰/۰۳۷۳	۰/۰۰۷۵			
			MSE	۰/۰۲۹۶	۰/۰۵۷۶	۰/۰۶۹۴	۰/۰۶۵۵	۰/۰۳۷۰	۰/۰۳۷۰	۰/۰۳۷۴	۰/۰۶۲۷	۰/۰۶۲۲	۰/۰۵۵۶			
		۳	Bias	۰/۰۲۹۶	-۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۳۲	۰/۰۰۶۲	-۰/۰۵۷۴	-۰/۰۵۶۴	-۰/۰۷۶۵	۰/۰۴۱۳	۰/۰۴۲۷	۰/۰۱۴۴			
			MSE	۰/۰۵۶۹	۰/۰۵۳۸	۰/۰۶۰۳	۰/۰۵۸۹	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۵۶	۰/۰۵۹۰	۰/۰۵۹۴	۰/۰۵۱۷			
	۴	Bias	۰/۰۵۰۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۳۶۱	۰/۰۳۴۱	-۰/۰۴۰۵	-۰/۰۳۹۵	-۰/۰۵۹۹	۰/۰۵۹۲	۰/۰۶۰۶	۰/۰۳۲۲				
		MSE	۰/۰۵۵۴	۰/۰۵۰۶	۰/۰۵۸۰	۰/۰۵۶۳	۰/۰۳۱۶	۰/۰۳۱۶	۰/۰۳۱۲	۰/۰۵۷۷	۰/۰۵۸۲	۰/۰۴۹۸				
	۶	۱	Bias	۰/۰۱۷۸	-۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۸۵	۰/۰۰۴۸	-۰/۰۱۸۰	-۰/۰۱۷۵	-۰/۰۲۶۶	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۷	۰/۰۱۰۴			
			MSE	۰/۰۲۰۴	۰/۰۱۹۸	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۱۳	۰/۰۱۶۴	۰/۰۱۶۴	۰/۰۱۶۴	۰/۰۲۰۷	۰/۰۲۰۸	۰/۰۱۹۶			
		۲	Bias	۰/۰۲۳۱	-۰/۰۰۱۲۲	۰/۰۰۵۵	۰/۰۰۱۷۱	-۰/۰۱۹۳	-۰/۰۱۸۸	-۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۶۵	۰/۰۲۷۱	۰/۰۱۴۸			
			MSE	۰/۰۲۵۵	۰/۰۲۵۰	۰/۰۳۰۲	۰/۰۲۸۲	۰/۰۱۹۴	۰/۰۱۹۴	۰/۰۱۹۱	۰/۰۲۵۸	۰/۰۲۵۹	۰/۰۲۴۲			
۳		Bias	۰/۰۱۶۰	-۰/۰۱۵۳	۰/۰۰۰۷۰	۰/۰۰۰۲۸	-۰/۰۲۱۴	-۰/۰۲۰۹	-۰/۰۳۰۵	۰/۰۱۹۰	۰/۰۱۹۰	۰/۰۰۸۵				
		MSE	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۹	۰/۰۲۱۰	۰/۰۲۰۳	۰/۰۱۶۳	۰/۰۱۶۳	۰/۰۱۶۲	۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۰۶	۰/۰۱۹۴				
۴	Bias	۰/۰۱۶۴	-۰/۰۰۱۵۲	۰/۰۰۱۱۷	۰/۰۰۱۰۲	-۰/۰۲۱۵	-۰/۰۲۱۱	-۰/۰۳۰۷	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۹۳	۰/۰۰۸۳					
	MSE	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲۵۱	۰/۰۲۳۸	۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۷۷	۰/۰۱۷۶	۰/۰۲۲۴	۰/۰۲۲۵	۰/۰۲۱۲					

ادامه جدول ۲.

n	m	No.	Scheme		$\hat{\theta}_{MLE}$	$\hat{\theta}_{Pivot}$	$\hat{\theta}_{LSE}$	$\hat{\theta}_{WLSE}$	$\hat{\theta}_{BS}$	روش MCMC					
										P-I		P-II			
										$\hat{\theta}_{BL}$		$\hat{\theta}_{BS}$			
										$c = -0.5$	$c = 1$	$c = -0.5$	$c = 1$		
۴۰	۲۸	۱	Bias	۰/۰۴۷۲	۰/۰۰۹۸	۰/۰۲۸۴	۰/۰۲۳۳	-۰/۰۲۸۶	-۰/۰۲۷۸	-۰/۰۴۴۴	۰/۰۴۷۱	۰/۰۴۸۱	۰/۰۲۷۲	۰/۰۴۵۰	
			MSE	۰/۰۵۰۲	۰/۰۴۴۷	۰/۰۴۹۸	۰/۰۵۰۷	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۰۲	۰/۰۵۰۲	۰/۰۳۲۷	۰/۰۴۵۰
			Bias	۰/۰۳۳۸	-۰/۰۰۳۱	۰/۰۱۸۹	۰/۰۱۷۴	-۰/۰۲۹۴	-۰/۰۲۸۶	-۰/۰۲۷۸	-۰/۰۲۷۸	-۰/۰۵۴۷	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۳۷
			MSE	۰/۰۴۲۳	۰/۰۳۸۳	۰/۰۵۳۱	۰/۰۴۹۰	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۷۶	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۲۵	۰/۰۴۲۵
		Bias	۰/۰۴۵۱	۰/۰۰۷۸	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۶۷	-۰/۰۳۰۴	-۰/۰۲۹۶	-۰/۰۲۹۶	-۰/۰۲۹۶	-۰/۰۴۶۱	۰/۰۴۵۰	۰/۰۴۵۰	۰/۰۴۵۰	
		MSE	۰/۰۴۷۳	۰/۰۴۲۱	۰/۰۵۵۴	۰/۰۵۴۰	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۹۴	۰/۰۴۷۵	۰/۰۴۷۵	۰/۰۴۷۵	
		Bias	۰/۰۳۰۵	-۰/۰۰۶۳	۰/۰۱۹۳	۰/۰۱۹۳	-۰/۰۴۱۷	-۰/۰۴۱۷	-۰/۰۴۱۷	-۰/۰۴۱۷	-۰/۰۵۵۱	۰/۰۳۰۸	۰/۰۳۰۸	۰/۰۳۰۸	
		MSE	۰/۰۴۰۴	۰/۰۳۶۷	۰/۰۴۷۰	۰/۰۴۸۷	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۸	۰/۰۴۰۱	۰/۰۴۰۱	۰/۰۳۶۴	
		Bias	۰/۰۳۲۵	$2e^{-0.4}$	۰/۰۱۴۳	۰/۰۱۰۳	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۲۷	۰/۰۳۲۷	۰/۰۳۲۷	
		MSE	۰/۰۳۰۶	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۳۹	۰/۰۳۴۸	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۶	۰/۰۳۰۰	۰/۰۳۰۰	۰/۰۳۰۰	
		Bias	۰/۰۳۴۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۲۵۹	۰/۰۲۲۱	-۰/۰۲۱۹	-۰/۰۱۹۳	-۰/۰۱۹۳	-۰/۰۱۹۳	-۰/۰۳۱۴	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۱۰	۰/۰۳۱۰	
		MSE	۰/۰۳۰۲	۰/۰۲۷۴	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۰	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۱	۰/۰۲۹۸	۰/۰۲۹۸	۰/۰۲۹۸	
	Bias	۰/۰۲۷۷	-۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۴۶	-۰/۰۲۹۰	-۰/۰۲۸۴	-۰/۰۲۸۴	-۰/۰۲۸۴	-۰/۰۴۰۲	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۰۴		
	MSE	۰/۰۲۷۷	۰/۰۲۵۶	۰/۰۳۱۶	۰/۰۳۰۸	۰/۰۲۰۶	۰/۰۲۰۶	۰/۰۲۰۶	۰/۰۲۰۶	۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۷۳	۰/۰۲۷۳	۰/۰۲۷۳		
	Bias	۰/۰۲۹۵	-۰/۰۰۲۱	۰/۰۱۲۸	۰/۰۱۳۵	-۰/۰۲۵۹	-۰/۰۲۵۳	-۰/۰۲۵۳	-۰/۰۲۵۳	-۰/۰۳۷۶	۰/۰۲۵۸	۰/۰۲۵۸	۰/۰۲۵۸		
	MSE	۰/۰۲۷۴	۰/۰۲۵۰	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۲۵	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۹۹	۰/۰۱۹۷	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۷۱		
	Bias	۰/۰۳۶۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۲۴۶	۰/۰۲۰۶	-۰/۰۲۸۷	-۰/۰۲۸۰	-۰/۰۲۸۰	-۰/۰۲۸۰	-۰/۰۴۲۲	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۳۶		
	MSE	۰/۰۳۳۰	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۹۷	۰/۰۳۰۴	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۳۱	۰/۰۲۳۱	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۳۶		
	Bias	۰/۰۴۱۶	۰/۰۰۷۰	۰/۰۲۵۶	۰/۰۲۳۳	-۰/۰۲۲۸	-۰/۰۲۲۱	-۰/۰۲۲۱	-۰/۰۲۲۱	-۰/۰۳۶۴	۰/۰۲۹۶	۰/۰۲۹۶	۰/۰۲۹۶		
	MSE	۰/۰۳۵۵	۰/۰۳۱۷	۰/۰۴۶۹	۰/۰۴۲۶	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۳۶	۰/۰۲۳۱	۰/۰۳۵۲	۰/۰۳۵۲	۰/۰۳۵۲		
	Bias	۰/۰۲۷۷	-۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۲۳	-۰/۰۲۳۷	-۰/۰۲۳۰	-۰/۰۲۳۰	-۰/۰۲۳۰	-۰/۰۳۸۰	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۶۰		
	MSE	۰/۰۳۲۷	۰/۰۲۹۹	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۶۸	۰/۰۲۳۳	۰/۰۲۳۳	۰/۰۲۳۳	۰/۰۲۳۳	۰/۰۲۳۱	۰/۰۳۲۴	۰/۰۳۲۴	۰/۰۳۲۴		
	Bias	۰/۰۲۹۵	-۰/۰۰۴۴	۰/۰۲۱۳	۰/۰۲۲۸	-۰/۰۲۵۰	-۰/۰۲۴۳	-۰/۰۲۴۳	-۰/۰۲۴۳	-۰/۰۳۸۵	۰/۰۲۷۴	۰/۰۲۷۴	۰/۰۲۷۴		
	MSE	۰/۰۳۹۰	۰/۰۳۵۷	۰/۰۴۶۲	۰/۰۴۷۰	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۶۶	۰/۰۳۸۹	۰/۰۳۸۹	۰/۰۳۸۹		
Bias	۰/۰۲۹۵	$-7e^{-0.4}$	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۷۹	-۰/۰۲۳۷	-۰/۰۲۳۲	-۰/۰۲۳۲	-۰/۰۲۳۲	-۰/۰۳۵۲	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۸۱			
MSE	۰/۰۳۰۶	۰/۰۲۸۰	۰/۰۳۴۲	۰/۰۳۵۰	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۲۱	۰/۰۲۱۸	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۰۶			
Bias	۰/۰۴۰۲	۰/۰۰۹۵	۰/۰۲۸۳	۰/۰۲۵۸	-۰/۰۱۶۶	-۰/۰۱۶۰	-۰/۰۱۶۰	-۰/۰۱۶۰	-۰/۰۲۸۹	۰/۰۴۱۰	۰/۰۴۱۰	۰/۰۴۱۰			
MSE	۰/۰۳۱۹	۰/۰۲۸۶	۰/۰۳۸۷	۰/۰۳۵۴	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۹	۰/۰۲۱۴	۰/۰۳۲۲	۰/۰۳۲۲	۰/۰۳۲۲			
Bias	۰/۰۲۲۴	-۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۳۳	-۰/۰۲۹۸	-۰/۰۲۹۲	-۰/۰۲۹۲	-۰/۰۲۹۲	-۰/۰۴۱۳	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۱۷	۰/۰۲۱۷			
MSE	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۵۰	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۰۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۲	۰/۰۲۰۱	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۹			
Bias	۰/۰۲۷۰	-۰/۰۰۳۲	۰/۰۱۳۶	۰/۰۱۳۰	-۰/۰۲۷۷	-۰/۰۲۷۱	-۰/۰۲۷۱	-۰/۰۲۷۱	-۰/۰۳۶۶	۰/۰۲۶۷	۰/۰۲۶۷	۰/۰۲۶۷			
MSE	۰/۰۳۱۰	۰/۰۲۸۵	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۶۱	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲۲۷	۰/۰۲۲۴	۰/۰۳۱۲	۰/۰۳۱۲	۰/۰۳۱۲			
Bias	۰/۰۲۴۷	۰/۰۰۲۰	۰/۰۱۵۵	۰/۰۱۱۹	-۰/۰۱۶۷	-۰/۰۱۶۲	-۰/۰۱۶۲	-۰/۰۱۶۲	-۰/۰۲۷۱	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۳			
MSE	۰/۰۲۴۷	۰/۰۲۴۱	۰/۰۲۵۵	۰/۰۲۵۳	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۱۸۵	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۵۳			
Bias	۰/۰۱۸۶	-۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۱۹	۰/۰۱۰۶	-۰/۰۲۹۷	-۰/۰۲۹۱	-۰/۰۲۹۱	-۰/۰۲۹۱	-۰/۰۴۱۳	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۳۵			
MSE	۰/۰۲۹۹	۰/۰۲۹۶	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۱۶	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۲۱	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۳	۰/۰۳۰۳			
Bias	۰/۰۲۰۰	-۰/۰۰۳۶	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۲	-۰/۰۲۴۷	-۰/۰۲۴۱	-۰/۰۲۴۱	-۰/۰۲۴۱	-۰/۰۳۵۷	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۶۰			
MSE	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۸۴	۰/۰۲۹۷	۰/۰۲۹۰	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۵	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۹۲	۰/۰۲۹۲	۰/۰۲۹۲			
Bias	۰/۰۱۹۷	-۰/۰۰۶۴	۰/۰۱۲۵	۰/۰۱۲۹	-۰/۰۲۴۴	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۲۳۹	-۰/۰۳۵۰	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۳۵	۰/۰۲۳۵			
MSE	۰/۰۲۵۸	۰/۰۲۵۳	۰/۰۲۸۷	۰/۰۲۸۱	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۹۸	۰/۰۱۹۶	۰/۰۲۶۲	۰/۰۲۶۲	۰/۰۲۶۲			
Bias	۰/۰۰۲۱	-۰/۰۱۱۷	-۰/۰۰۳۴	-۰/۰۰۶۲	-۰/۰۱۵۵	-۰/۰۱۵۲	-۰/۰۱۵۲	-۰/۰۱۵۲	-۰/۰۱۹۹	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۷	-۰/۰۰۱۳			
MSE	۰/۰۰۹۳	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۹۹	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۹۲			
Bias	۰/۰۱۰۳	-۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۶۴	-۰/۰۱۰۸	-۰/۰۱۰۵	-۰/۰۱۰۵	-۰/۰۱۰۵	-۰/۰۱۶۱	۰/۰۱۲۲	۰/۰۱۲۵	۰/۰۰۶۴			
MSE	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۱۸	۰/۰۱۳۱	۰/۰۱۲۳	۰/۰۱۰۲	۰/۰۱۰۲	۰/۰۱۰۲	۰/۰۱۰۲	۰/۰۱۰۱	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۱۶	۰/۰۱۱۲			
Bias	۰/۰۰۸۸	-۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۱۴	-۰/۰۱۰۰	-۰/۰۰۹۸	-۰/۰۰۹۸	-۰/۰۰۹۸	-۰/۰۱۴۹	۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۵۱			
MSE	۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۰۵	۰/۰۱۰۸	۰/۰۱۰۶	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۰۹۱	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۰۴	۰/۰۱۰۱			
Bias	۰/۰۰۳۱	-۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۰	-۰/۰۱۵۲	-۰/۰۱۵۴	-۰/۰۱۵۴	-۰/۰۱۵۴	-۰/۰۲۰۴	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۵	-۰/۰۰۴			
MSE	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۱۲	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۱۳	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۹۷	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۰۷	۰/۰۱۰۵			

جدول ۳: طول و درصد پوشش فواصل اطمینان مختلف برای اندازه نمونه و طرح‌های مختلف

n	m	No.	CS		MLE	Exact	LRT	HPD		n	m	No.	CS		MLE	Exact	LRT	HPD	
								P-I	P-II									P-I	P-II
۲۰	۱۴	۱	۱	AW	۱/۱۴۱	۱/۱۳۴	۱/۱۵۰	۰/۹۰۹	۱/۱۲۹	۴۰	۲۸	۱	۱	AW	۰/۷۶۶	۰/۷۶۴	۰/۷۶۹	۰/۶۸۵	۰/۷۶۲
				CP	۰/۹۵۴	۰/۹۵۱	۰/۹۴۲	۰/۹۴۹	۰/۹۴۵					CP	۰/۹۴۱	۰/۹۴۱	۰/۹۳۸	۰/۹۳۸	
		۲	AW	۱/۱۱۸	۱/۱۱۱	۱/۱۲۷	۰/۸۹۴	۱/۱۰۵	AW			۰/۷۶۶	۰/۷۶۴	۰/۷۶۹	۰/۶۸۴	۰/۷۶۱			
			CP	۰/۹۵۰	۰/۹۳۷	۰/۹۳۷	۰/۹۴۶	۰/۹۳۳	CP			۰/۹۶۳	۰/۹۶۲	۰/۹۶۲	۰/۹۵۶	۰/۹۶۳			
		۳	AW	۱/۱۱۶	۱/۱۰۹	۱/۱۲۴	۰/۸۹۴	۱/۱۰۵	AW			۰/۷۷۳	۰/۷۷۱	۰/۷۷۶	۰/۶۹۰	۰/۷۶۸			
			CP	۰/۹۵۹	۰/۹۴۶	۰/۹۴۹	۰/۹۴۹	۰/۹۴۶	CP			۰/۹۵۹	۰/۹۶۳	۰/۹۶۶	۰/۹۶۰	۰/۹۶۱			
		۴	AW	۱/۱۲۱	۱/۱۱۴	۱/۱۲۹	۰/۸۹۹	۱/۱۱۴	AW			۰/۷۶۳	۰/۷۶۰	۰/۷۶۵	۰/۶۸۱	۰/۷۶۰			
			CP	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۵۴	۰/۹۴۸	۰/۹۵۰	CP			۰/۹۵۴	۰/۹۴۶	۰/۹۴۵	۰/۹۴۰	۰/۹۵۰			
		۲	۱	AW	۰/۹۵۳	۰/۹۳۱	۰/۹۳۵	۰/۸۰۶	۰/۹۲۶			AW	۰/۶۷۶	۰/۶۳۴	۰/۶۳۴	۰/۵۸۹	۰/۶۳۰		
				CP	۰/۹۵۳	۰/۹۴۰	۰/۹۳۳	۰/۹۳۴	۰/۹۳۶			CP	۰/۹۶۵	۰/۹۵۵	۰/۹۴۵	۰/۹۴۳	۰/۹۴۹		
		۲	۲	AW	۰/۹۲۳	۰/۹۲۳	۰/۹۲۷	۰/۷۹۸	۰/۹۱۷			AW	۰/۶۳۳	۰/۶۳۳	۰/۶۳۴	۰/۵۸۸	۰/۶۳۱		
				CP	۰/۹۶۷	۰/۹۵۹	۰/۹۵۷	۰/۹۵۷	۰/۹۶۱			CP	۰/۹۴۱	۰/۹۳۸	۰/۹۳۹	۰/۹۴۳	۰/۹۳۸		
		۳	۳	AW	۰/۹۵۳	۰/۹۱۶	۰/۹۱۹	۰/۷۹۴	۰/۹۱۱			AW	۰/۶۵۶	۰/۶۳۱	۰/۶۳۱	۰/۵۸۸	۰/۶۲۹		
				CP	۰/۹۵۳	۰/۹۶۱	۰/۹۴۹	۰/۹۵۹	۰/۹۵۵			CP	۰/۹۶۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰		
		۴	۴	AW	۰/۹۴۹	۰/۹۳۱	۰/۹۳۶	۰/۸۰۴	۰/۹۲۸			AW	۰/۶۵۶	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵	۰/۶۴۲	۰/۹۵۰		
				CP	۰/۹۶۲	۰/۹۵۱	۰/۹۴۹	۰/۹۴۶	۰/۹۵۳			CP	۰/۹۵۱	۰/۹۴۵	۰/۹۴۶	۰/۹۴۷	۰/۹۴۳		
		۳	۱	AW	۱/۰۵۵	۱/۰۱۷	۱/۰۲۸	۰/۸۵۴	۱/۰۱۳			AW	۰/۷۲۱	۰/۶۹۸	۰/۷۰۲	۰/۶۳۸	۰/۶۹۶		
				CP	۰/۹۶۸	۰/۹۵۹	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۵۹			CP	۰/۹۶۴	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۴۹		
		۲	۲	AW	۱/۰۲۴	۱/۰۱۸	۱/۰۲۸	۰/۸۵۲	۱/۰۱۵			AW	۰/۷۰۳	۰/۷۰۴	۰/۷۰۴	۰/۶۴۱	۰/۶۹۹		
				CP	۰/۹۵۴	۰/۹۴۷	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳	۰/۹۴۴			CP	۰/۹۵۸	۰/۹۵۶	۰/۹۵۵	۰/۹۵۵	۰/۹۵۵		
		۳	۳	AW	۱/۰۵۴	۱/۰۲۷	۱/۰۳۸	۰/۸۵۸	۱/۰۲۴			AW	۰/۷۱۰	۰/۶۹۵	۰/۶۹۸	۰/۶۳۶	۰/۶۹۳		
				CP	۰/۹۶۱	۰/۹۵۵	۰/۹۴۴	۰/۹۴۹	۰/۹۵۵			CP	۰/۹۵۶	۰/۹۵۶	۰/۹۵۹	۰/۹۵۴	۰/۹۵۴		
		۴	۴	AW	۱/۰۴۴	۱/۰۲۸	۱/۰۴۰	۰/۸۵۹	۱/۰۲۵			AW	۰/۷۱۱	۰/۷۰۳	۰/۷۰۷	۰/۶۴۲	۰/۷۰۱		
				CP	۰/۹۶۵	۰/۹۶۲	۰/۹۵۷	۰/۹۵۴	۰/۹۶۲			CP	۰/۹۵۶	۰/۹۵۰	۰/۹۴۹	۰/۹۵۳	۰/۹۴۶		
		۴	۱	AW	۰/۹۵۹	۰/۹۳۰	۰/۹۳۷	۰/۷۹۹	۰/۹۲۹			AW	۰/۶۵۹	۰/۶۳۹	۰/۶۴۱	۰/۵۹۱	۰/۶۳۹		
				CP	۰/۹۵۰	۰/۹۴۹	۰/۹۴۷	۰/۹۵۱	۰/۹۴۱			CP	۰/۹۴۵	۰/۹۳۴	۰/۹۳۳	۰/۹۴۸	۰/۹۳۶		
		۲	۲	AW	۰/۹۵۰	۰/۹۵۰	۰/۹۵۷	۰/۸۰۶	۰/۹۳۸			AW	۰/۶۶۲	۰/۶۶۱	۰/۶۶۳	۰/۶۰۶	۰/۶۶۰		
				CP	۰/۹۴۹	۰/۹۴۶	۰/۹۴۴	۰/۹۵۱	۰/۹۴۲			CP	۰/۹۵۵	۰/۹۵۹	۰/۹۵۷	۰/۹۴۶	۰/۹۵۵		
		۳	۳	AW	۰/۹۴۵	۰/۹۳۳	۰/۹۳۹	۰/۷۹۶	۰/۹۳۰			AW	۰/۶۵۶	۰/۶۴۸	۰/۶۵۰	۰/۵۹۸	۰/۶۴۵		
				CP	۰/۹۵۳	۰/۹۴۶	۰/۹۴۷	۰/۹۴۷	۰/۹۴۷			CP	۰/۹۶۰	۰/۹۵۵	۰/۹۴۸	۰/۹۶۳	۰/۹۴۹		
		۴	۴	AW	۰/۹۶۲	۰/۹۴۵	۰/۹۵۲	۰/۸۰۵	۰/۹۴۱			AW	۰/۶۶۵	۰/۶۵۳	۰/۶۵۵	۰/۶۰۲	۰/۶۵۰		
				CP	۰/۹۵۸	۰/۹۵۴	۰/۹۵۵	۰/۹۵۲	۰/۹۶۰			CP	۰/۹۶۰	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۵۵	۰/۹۵۲		
		۵	۱	AW	۰/۸۵۱	۰/۸۹۴	۰/۸۸۱	۰/۷۴۷	۰/۸۷۷			AW	۰/۵۹۴	۰/۶۲۲	۰/۶۱۱	۰/۵۰۶	۰/۶۰۸		
				CP	۰/۹۴۰	۰/۹۴۵	۰/۹۴۵	۰/۹۴۶	۰/۹۵۰			CP	۰/۹۴۷	۰/۹۵۸	۰/۹۵۶	۰/۹۴۷	۰/۹۵۴		
		۲	۲	AW	۰/۹۳۷	۰/۹۵۸	۰/۹۴۱	۰/۷۸۳	۰/۹۳۸			AW	۰/۶۵۳	۰/۶۶۷	۰/۶۵۳	۰/۵۹۳	۰/۶۵۰		
				CP	۰/۹۵۲	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۱	۰/۹۴۹			CP	۰/۹۳۹	۰/۹۴۳	۰/۹۳۸	۰/۹۳۵	۰/۹۳۷		
		۳	۳	AW	۰/۹۰۳	۰/۹۴۰	۰/۹۲۶	۰/۷۷۴	۰/۹۱۶			AW	۰/۶۲۴	۰/۶۴۹	۰/۶۳۶	۰/۵۸۰	۰/۶۳۲		
				CP	۰/۹۴۷	۰/۹۴۹	۰/۹۵۰	۰/۹۴۱	۰/۹۵۴			CP	۰/۹۴۷	۰/۹۴۵	۰/۹۴۵	۰/۹۴۸	۰/۹۴۳		
		۴	۴	AW	۰/۹۱۴	۰/۹۲۷	۰/۹۱۲	۰/۷۶۷	۰/۹۰۲			AW	۰/۶۲۲	۰/۶۲۹	۰/۶۱۶	۰/۵۶۶	۰/۶۱۳		
				CP	۰/۹۴۹	۰/۹۴۰	۰/۹۴۲	۰/۹۴۰	۰/۹۴۴			CP	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۴۹	۰/۹۵۲		
۶	۱	AW	۰/۵۷۱	۰/۵۶۰	۰/۵۴۸	۰/۵۱۲	۰/۵۴۵	AW	۰/۴۹۹	۰/۴۳۰	۰/۴۸۲	۰/۳۶۹	۰/۴۸۰						
		CP	۰/۹۷۶	۰/۹۶۳	۰/۹۶۲	۰/۹۶۳	۰/۹۶۴	CP	۰/۹۵۹	۰/۹۴۸	۰/۹۴۷	۰/۹۴۸	۰/۹۴۶						
۲	۲	AW	۰/۶۰۵	۰/۶۲۱	۰/۵۹۳	۰/۵۴۸	۰/۵۸۹	AW	۰/۴۲۰	۰/۴۳۴	۰/۴۱۸	۰/۴۰۰	۰/۴۱۷						
		CP	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴	۰/۹۵۱	CP	۰/۹۴۵	۰/۹۵۴	۰/۹۵۳	۰/۹۴۲	۰/۹۴۶						
۳	۳	AW	۰/۵۸۲	۰/۵۸۴	۰/۵۶۹	۰/۵۳۰	۰/۵۶۶	AW	۰/۴۰۸	۰/۴۱۰	۰/۳۹۸	۰/۳۸۴	۰/۳۹۷						
		CP	۰/۹۵۷	۰/۹۵۳	۰/۹۴۹	۰/۹۵۲	۰/۹۵۲	CP	۰/۹۴۶	۰/۹۴۷	۰/۹۴۲	۰/۹۴۵	۰/۹۳۸						
۴	۴	AW	۰/۵۹۲	۰/۵۸۷	۰/۵۶۸	۰/۵۲۹	۰/۵۶۴	AW	۰/۴۱۳	۰/۴۰۹	۰/۳۹۵	۰/۳۸۰	۰/۳۹۴						
		CP	۰/۹۵۶	۰/۹۴۱	۰/۹۴۴	۰/۹۵۲	۰/۹۴۵	CP	۰/۹۵۷	۰/۹۴۵	۰/۹۴۲	۰/۹۴۷	۰/۹۴۲						

### فهرست منابع

[1] Aggarwala, R. Balakrishnan, N. (1998). Some properties of progressive censored order statistics from arbitrary and uniform distributions with applications to inference and simulation, *Journal of Statist Plann Inference* **70**, 35-49.

[2] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: Theory Methods and Applications*. Boston: Birkhäuser.

[3] Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014). *The art of Progressive censoring, Applications to reliability and auality*, New York: Birkhauser.

[4] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Navarro, J. (2011a). Linear inference for Type-II censored lifetime data of reliability systems with known signatures, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 426-440.

[5] Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Navarro, J. (2011b). Exact nonparametric inference for component lifetime distribution based on lifetime data from systems with known signatures, *Journal of Nonparametric Statistics*, **23**, 741-752.



- [6] Bhattacharya, D. and Samaniego, F. J. (2010). Estimating component characteristics from system failure time data, *Naval Research Logistics*, **57**, 380–389.
- [7] Chen, M. H. and Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.
- [8] Chivers, C. (2012). MHadaptive: General Markov Chain Monte Carlo for Bayesian Inference using adaptive Metropolis-Hastings sampling, R package.
- [9] Kochar, S. Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999). The Signature of a Coherent System and its Application to Comparisons Among Systems, *Naval Research Logistics*, **46**, 507–523.
- [10] Lawless, J. L. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.
- [11] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*; Wiley, New York.
- [12] Navarro, J. and Rubio, R. (2010). Computations of coherent systems with five components, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **39**, 68–84.
- [13] Navarro, J. Ruiz, J. M. and Sandoval, C. J. (2007). Properties of coherent systems with dependent components, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **36**, 175–191.
- [14] Navarro, J. Rychlik, T. (2007). Reliability and expectation bounds for coherent systems with exchangeable components, *J Multivar Anal*, **98**, 102–113
- [15] Navarro, J. Samaniego, F. J. Balakrishnan, N. and Bhattacharya, D. (2008). On the application and extension of system signatures in engineering reliability, *Naval Research Logistics*, **55**, 313–327.
- [16] Ng, H. K. T. Navarro, J. and Balakrishnan, N. (2012). Parametric inference from system lifetime data under a proportional hazard rate model, *Metrika*, **75**, 367–388.
- [17] Samaniego, F. J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems, *IEEE Transactions on Reliability Theory*, **34**, 69–72.
- [18] Samaniego, F. J. (2007). *System Signatures and their Applications in Engineering Reliability*, International Series in Operations Research and Management Science 110, Springer, New York.
- [19] Yang, Y. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2016). A stochastic expectation-maximization algorithm for the analysis of system lifetime data with known signature, *Computational Statistics*, **31**, 609–641.
- [20] Yang, Y. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2019). Expectation maximization algorithm for system based lifetime data with unknown system structure, *AStA Advanced Statistical Analysis*, **103**, 69–98.
- [21] Tavangar, M. Asadi, M. (2020). Component reliability estimation based on system failure-time data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **90(17)**, 3232-3249.
- [22] Varrian, H. R. (1975). A Bayesian approach to real estate assessment. In: *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Sarage.*, Amsterdam: North Holland, 195–208.

- [23] Zellner, A. (1986). Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss function. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81**, 446–451.
- [24] Zhang, J. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2015a). Statistical inference of component lifetimes with location-scale distributions from censored system failure data with known signature, *IEEE Transactions on Reliability*, **64**, 613–626.
- [25] Zhang, J. Ng, H. K. T. and Balakrishnan, N. (2015b). Tests for homogeneity of distributions of component lifetimes from system lifetime data with known system signatures, *Naval Research Logistics*, **62**, 550–563.



## Pivotal and Bayesian inference in exponential coherent systems under progressive censoring

Adeleh Fallah<sup>1</sup>, Akbar Asgharzadeh<sup>2</sup> †

<sup>(1)</sup> Department of Statistics, Payam Noor, Tehran, Iran

<sup>(2)</sup> Department of Statistics, Mazandaran University, Mazandaran, Iran

Received: 2020/12/22

Accepted: 2021/8/15

Communicated by: G.R. Mohtashami Borzadaran

**Abstract:** In this paper, statistical inference is considered for k-component coherent systems, when the system lifetime data is progressively type-II censored. In these coherent systems, it is assumed that the system structure and system signature are known and the component lifetime distribution is exponential. Pivotal and Bayesian methods are introduced for point estimation of the component lifetime parameter, and these methods are compared with the maximum likelihood and the least squares methods existing in the literature. Pivotal confidence interval, Bayesian confidence interval and confidence interval based on the likelihood ratio test are computed. Using Monte Carlo simulations, different point and interval estimates are compared and it is observed that pivotal and Bayesian methods perform better than other existing estimation methods.

**Keywords:** Coherent system, System signature, Exponential distribution, Estimation based on pivotal quantity, Bayesian estimation.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62F10; 62N01; 62N05.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

†Corresponding author.

E-mail addresses: [a.asgharzadeh@umz.ac.ir](mailto:a.asgharzadeh@umz.ac.ir) (A. Asgharzadeh)