



## برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای بر اساس توزیع تاپ-لئون توانی

حسین پاشا زانوسی<sup>\*</sup>، احمد پوردرویش، اکبر اصغرزاده

گروه آمار، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: محمد رضا زادکرمی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۶/۵

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۷/۲۵

چکیده: در این پژوهش قصد داریم به برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های چندمؤلفه‌ای وقتی متغیرهای تنش و مقاومت از توزیع تاپ-لئون توانی برخوردار هستند، بپردازیم. این سیستم از  $k$  مؤلفه‌ی مقاومت مستقل و هم توزیع  $X_1, X_2, \dots, X_k$  تشکیل شده است و هر یک از مؤلفه‌ها در معرض تنش یکسان  $Y$  قرار می‌گیرند و در صورتی که حداقل  $s$  ( $1 \leq s \leq k$ ) تا از متغیرهای مقاومت، بزرگتر از متغیر تنش باشند، فعال خواهد بود. قابلیت اعتماد سیستم از دو دیدگاه کلاسیک و بیزی در دو حالت برآورد می‌شود. در حالت اول فرض می‌شود که پارامترهای شکل اول یکسان و پارامترهای شکل دوم متفاوت هستند و در حالت دوم، پارامتر شکل اول را یکسان و معلوم در نظر می‌گیریم. در پایان، یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای مقایسه‌ی عملکرد برآوردگرها و یک مجموعه از داده‌های واقعی به منظور کاربرد روش‌ها ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای، توزیع تاپ-لئون توانی، برآورد بیز

رده‌بندی ریاضی: 62F15; 62G05; 62N05

### ۱ مقدمه

مدل تنش-مقاومت یکی از مهمترین مدل‌های آنالیز قابلیت اعتماد است که کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف مانند مهندسی، کنترل کیفیت، کشاورزی و غیره دارد. به خاطر عدم قطعیت در تنش‌های محیطی به دلیل وجود عواملی مانند دما، رطوبت و فشار و همچنین به خاطر عدم قطعیت در مقاومت اشیاء به دلیل عواملی نظیر ترکیب مواد و شیوه طراحی آن‌ها، مقادیر مقاومت  $X$  و تنش  $Y$ ، تصادفی فرض می‌شوند و احتمال  $R = P(Y < X)$  یعنی احتمال غلبه مقاومت بر تنش، به عنوان پارامتر تنش-مقاومت شناخته می‌شود. در حقیقت میزان  $R$ ، قابلیت اعتماد یا کارایی سیستم را نشان می‌دهد. چنین سیستمی تا زمانی که عمر خود ادامه می‌دهد که مقاومت سیستم از تنش وارد شده بر آن بیشتر باشد. سیستمی که بیش از یک مؤلفه داشته باشد، سیستم چندمؤلفه‌ای نامیده می‌شود. این سیستم شامل  $k$  جزء است و فعال بودن آن مستلزم فعال بودن حداقل  $s$  ( $1 \leq s \leq k$ ) جزء از  $k$  جزء آن می‌باشد. قابلیت اعتماد این سیستم را به صورت  $R_{s,k}$  نشان می‌دهند که کاربردهای زیادی هم در حوزه‌ی نظامی و هم صنعتی دارد [۱۳]. به عنوان مثال، یک پل معلق را در نظر بگیرید که توسط  $k$  زوج کابل

<sup>\*</sup>نویسنده مسئول مقاله

که در دو طرف آن قرار دارند، مهار می‌شود. این پل در معرض تنش‌های تصادفی مانند باد، بار ترافیکی، فرسودگی و غیره قرار دارد و تا زمانی پابرجا است که حداقل  $s$  زوج کابل از  $k$  زوج کابل آن فعال باشد. حال فرض کنید یک سیستم از  $k$  مؤلفه مستقل و هم‌توزیع با مقاومت‌های  $X_1, X_2, \dots, X_k$  و تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  تشکیل شده باشد و هر کدام از این مؤلفه‌ها تحت تنش یکسان  $Y$  با تابع توزیع تجمعی  $F(y)$  قرار بگیرند. در این صورت قابلیت اعتماد تنش-مقاومت که توسط باتاچاریا و جانسون [۴] معرفی شده، به شکل زیر بیان می‌شود

$$R_{s,k} = (\text{at least } s \text{ of the } (X_1, X_2, \dots, X_k) \text{ exceed } Y) \\ = \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_X(y)]^i [F_X(y)]^{k-i} dG(y). \quad (1.1)$$

برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت برای سیستم‌هایی چندمؤلفه‌ای به‌طور گسترده‌ای برای توزیع‌های مختلف و تحت سناریوهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان نمونه می‌توان به نادار و کیزیلاسلان [۱۵]، کیزیلاسلان و نادار [۱۰]، دی و همکاران [۶]، پاندیت و جوشی [۱۷]، آگگول [۲]، کهنسال [۱۱]، کهنسال و شعاعی [۱۲]، احمدی و غفوری [۱]، پاک و همکاران [۱۶]، کابال و همکاران [۹]، مایورا و تریپاتی [۱۴]، اشاره کرد.

در میان توزیع‌های آماری با دامنه‌ی محدود، توزیع تاپ-لئون یکی از کاربردی‌ترین آن‌ها است که توسط تاپ و لئون [۲۰]، با یک پارامتر شکل و دامنه‌ی  $(0, 1)$  معرفی شده است. در قابلیت اعتماد و آزمون‌های طول عمر، این توزیع ممکن است برای بسیاری از مجموعه داده‌ها به دلایلی از جمله محدودیت‌های فیزیکی در این زمینه‌ها مانند منبع تغذیه محدود، منبع نگهداری یا عمر طراحی سیستم مناسب باشد. مخصوصاً وقتی که قابلیت اعتماد، به عنوان تعداد آزمایش‌های موفقیت‌آمیز به تعداد کل آزمایش‌ها اندازه‌گیری شود. داده‌های درصدی، نرخ‌ها، اندازه‌ی ذرات و بعضی از داده‌های حاصل از فرآیندهای شیمیایی، به کمک این توزیع قابلیت مدل کردن دارند. با این وجود، معمولاً توزیع‌های احتمال استاندارد، برازش خوبی برای داده‌هایی که از مدل‌های پیچیده‌تر به دست آمده‌اند، نیستند. یک شیوه‌ی مؤثر برای رفع این مشکل، استفاده از توزیع‌های نمای‌شده است. با این هدف، رضایی و همکاران [۱۹]، توزیع تاپ-لئون توانی و خانواده‌ای از آن را معرفی نموده‌اند که انعطاف‌پذیری بیشتر توزیع تاپ-لئون استاندارد را به همراه دارد.

متغیر تصادفی  $X$  از توزیع تاپ-لئون توانی برخوردار است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x; \alpha, \theta) = \alpha \theta x^{\theta-1} (1 - x^\theta) [x^\theta (2 - x^\theta)]^{\alpha-1}, \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \theta > 0 \quad (2.1)$$

و تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F(x; \alpha, \theta) = [x^\theta (2 - x^\theta)]^\alpha, \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \theta > 0, \quad (3.1)$$

باشد. در این توزیع  $\theta$  و  $\alpha$  به ترتیب پارامترهای شکل اول و دوم هستند و ما آن را با  $PTL(\alpha, \theta)$  نشان می‌دهیم. جنس [۷]، پارامتر تنش-مقاومت را در سیستم تک‌مؤلفه‌ای و آگگول [۲]، در سیستم چندمؤلفه‌ای برای توزیع استاندارد تاپ-لئون برآورد کردند. بر اساس اطلاعات ما، تا کنون مطالعه‌ای روی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت بر پایه‌ی توزیع تاپ-لئون توانی انجام نشده است. در این پژوهش قصد داریم به استنباط کلاسیک و بیزی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای وقتی متغیرهای تنش و مقاومت از توزیع تاپ-لئون توانی برخوردار هستند، بپردازیم.

قالب‌بندی این مقاله به صورت زیر است. در ادامه، در بخش ۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) به همراه فاصله‌ی اطمینان مجانبی  $R_{s,k}$  در حالتی که پارامترهای شکل اول یکسان و پارامترهای شکل دوم متفاوت هستند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این بخش همچنین برآورد بیز به همراه فاصله‌ی اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین، با استفاده از روش مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC) محاسبه می‌شود. در بخش سوم، ابتدا برآورد ML و برآورد ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) و سپس برآورد دقیق بیز پارامتر  $R_{s,k}$  تحت تابع زیان مربع خطا ارائه می‌شود. علاوه بر این، روش تقریبی MCMC با هدف بررسی عملکرد آن در مقایسه با برآورد دقیق بیز مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم مطالعه‌ی شبیه‌سازی برای مقایسه‌ی عملکرد برآوردگرها ارائه می‌شود. سرانجام در بخش پنجم با استفاده از یک مثال واقعی روش‌های مطرح شده تشریح می‌شوند.

## ۲ برآورد $R_{s,k}$ با پارامترهای شکل اول یکسان و پارامتر شکل دوم متفاوت

### ۱.۲ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

فرض کنید سیستمی شامل  $k$  مؤلفه با مقاومت‌های مستقل و هم‌توزیع  $X_1, X_2, \dots, X_k$  با تابع چگالی  $PTL(\alpha, \theta)$  و تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  است و در معرض تنش ثابت  $Y$  با تابع چگالی  $PTL(\beta, \theta)$  و تابع توزیع تجمعی  $F(y)$  قرار گرفته است. این سیستم

وقتی حداقل  $s$  ( $1 \leq s \leq k$ ) تا از متغیرهای مقاومت  $X_i$ ، بزرگتر از متغیر تنش  $Y$  باشند، فعال خواهد بود. بنابراین پارامتر  $R_{s,k}$  با کمک رابطه‌ی (۱.۱) و تغییر متغیر  $t = [y^\theta(\Psi - y^\theta)]$  به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} R_{s,k} &= \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^1 [1 - [y^\theta(\Psi - y^\theta)]^\alpha]^{k-i} [[y^\theta(\Psi - y^\theta)]^\alpha]^{k-i} \\ &\quad \times \Psi \beta \theta y^{\theta-1} (1 - y^\theta) [y^\theta(\Psi - y^\theta)]^{\beta-1} dy \\ &= \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \beta \int_0^1 (1 - t^\alpha)^i t^{\alpha(k-i)+\beta-1} dt \\ &= \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \beta}{\alpha(k+j-i) + \beta}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

حال فرض کنید که نمونه‌های تصادفی از توزیع‌های  $X \sim PTL(\alpha, \theta)$  و  $Y \sim PTL(\beta, \theta)$  که مستقل از هم با پارامتر شکل اول یکسان  $\theta$  و پارامترهای شکل دوم متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  هستند، تولید شده باشد. تابع درستنمایی بر اساس مشاهدات به صورت

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Psi^{m+n} \alpha^m \beta^n \theta^{m+n} \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^n y_i^{\theta-1} \prod_{i=1}^m (1 - x_i^\theta) \prod_{i=1}^n (1 - y_i^\theta) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m [x_i^\theta (\Psi - x_i^\theta)]^{\alpha-1} \prod_{i=1}^n [y_i^\theta (\Psi - y_i^\theta)]^{\beta-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

و تابع لگاریتم درستنمایی برابر است با

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= c + m \ln \alpha + n \ln \beta + (m+n) \ln \theta + (\theta - 1) \left( \sum_{i=1}^m \ln x_i + \sum_{i=1}^n \ln y_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \ln (1 - x_i^\theta) + \sum_{i=1}^n \ln (1 - y_i^\theta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \ln [x_i^\theta (\Psi - x_i^\theta)] \\ &\quad + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln [y_i^\theta (\Psi - y_i^\theta)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

به طوری که  $c$  مقدار ثابتی است. بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  از حل معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \ln [x_i^\theta (\Psi - x_i^\theta)] = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln [y_i^\theta (\Psi - y_i^\theta)] = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \theta} &= \frac{m+n}{\theta} + \sum_{i=1}^m \ln x_i + \sum_{i=1}^n \ln y_i - \sum_{i=1}^m \frac{x_i^\theta \ln x_i}{1 - x_i^\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\theta \ln y_i}{1 - y_i^\theta} \\ &\quad + \Psi(\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \frac{(1 - x_i^\theta) \ln x_i}{\Psi - x_i^\theta} + \Psi(\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(1 - y_i^\theta) \ln y_i}{\Psi - y_i^\theta} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

از روابط (۴.۲) و (۵.۲) داریم

$$\alpha(\theta) = -\frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln [x_i^\theta (\Psi - x_i^\theta)]}, \quad \beta(\theta) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln [y_i^\theta (\Psi - y_i^\theta)]} \quad (7.2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۷.۲) در رابطه‌ی (۶.۲)، برآورد ماکسیمم درستنمایی  $\hat{\theta}(\hat{\theta})$  از حل یک معادله‌ی غیر خطی با استفاده از روش تکرار نقطه‌ی ثابت تعیین می‌شود. با تعیین  $\hat{\theta}$ ، برآورد ماکسیمم درستنمایی  $\alpha(\hat{\alpha})$  و  $\beta(\hat{\beta})$  از رابطه‌ی (۷.۲) قابل محاسبه است. در نهایت طبق خاصیت پایایی، برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{R}_{s,k}^{MLE} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \hat{\beta}}{\hat{\alpha}(k+j-i) + \hat{\beta}}. \quad (۸.۲)$$

در ادامه برای تعیین فاصله‌ی اطمینان مجانبی  $R_{s,k}$ ، از این نکته استفاده می‌کنیم که برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  به صورت مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین  $R_{s,k}$  و واریانس مجانبی زیر است [۱۸].

$$H = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \lambda_j} M_{ij}^{-1},$$

به طوری که  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\alpha, \beta, \theta)$  و  $M_{ij}^{-1}$  درایه‌ی  $(i, j)$  ام معکوس ماتریس اطلاع فیشر است. با توجه به اینکه، امکان محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس  $M$  به صورت تحلیلی وجود ندارد، از ماتریس واریانس-کواریانس مشاهده شده‌ی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی استفاده می‌کنیم، در این مورد داریم

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{m}{\alpha^2}, & M_{22} &= \frac{n}{\beta^2}, & M_{12} &= M_{21} = 0, \\ M_{13} &= M_{31} = -2 \sum_{i=1}^m \frac{(1-x_i^\theta) \ln x_i}{2-x_i^\theta}, & M_{23} &= M_{32} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(1-y_i^\theta) \ln y_i}{2-y_i^\theta}, \\ M_{33} &= \frac{m+n}{\theta^2} + \sum_{i=1}^m \frac{x_i^\theta (\ln x_i)^2}{(1-x_i^\theta)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\theta (\ln y_i)^2}{(1-y_i^\theta)^2} + 2(\alpha-1) \sum_{i=1}^m \frac{x_i^\theta (\ln x_i)^2}{(2-x_i^\theta)^2} \\ &\quad + 2(\beta-1) \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\theta (\ln y_i)^2}{(2-y_i^\theta)^2}. \end{aligned}$$

علاوه بر این داریم

$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^{j+1} \beta (k+j-i)}{[\alpha(k+j-i) + \beta]^2} \quad (۹.۲)$$

$$\frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j \alpha (k+j-i)}{[\alpha(k+j-i) + \beta]^2} \quad (۱۰.۲)$$

و در نتیجه واریانس مجانبی  $R_{s,k}$  به صورت

$$H_{s,k} = \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right)^2 M_{11}^{-1} + 2 \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} M_{12}^{-1} + M_{22}^{-1} \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^2 \Big|_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (۱۱.۲)$$

و فاصله‌ی اطمینان مجانبی  $100(1-\alpha)\%$  آن به شکل

$$\left( \hat{R}_{s,k} - z_{\alpha/2} \sqrt{H_{s,k}}, \hat{R}_{s,k} + z_{\alpha/2} \sqrt{H_{s,k}} \right). \quad (۱۲.۲)$$

به دست می‌آید که در آن  $Z_{\alpha/2}$  چندک مرتبه‌ی  $\frac{\alpha}{2}$  ام توزیع نرمال استاندارد است. ممکن است بازه‌های اطمینان مجانبی که برای  $R_{s,k}$  بدست می‌آید همواره در فاصله‌ی  $(0, 1)$  قرار نگیرند، بنابراین بهتر است از تبدیل لگاریتمی به صورت  $f(R_{s,k}) = \log \left[ \frac{R_{s,k}}{1-R_{s,k}} \right]$  استفاده کرد [۸] و در ادامه آن را به مقیاس قبلی برگرداند. بنابراین فاصله‌ی اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای  $f(\hat{R}_{s,k})$  به صورت

$$f(\hat{R}_{s,k}) \pm z_{\alpha/2} \frac{\hat{H}_{s,k}}{\hat{R}_{s,k}(1-\hat{R}_{s,k})} \equiv (L, U),$$

و برای  $R_{s,k}$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\left( \frac{e^L}{1 + e^L}, \frac{e^U}{1 + e^U} \right). \quad (۱۳.۲)$$

## ۲.۲ برآورد بیز $R_{s,k}$

در این بخش فرض می‌کنیم که پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع گاما و پارامترهای معلوم و مثبت به ترتیب  $(a_1, b_1)$ ،  $(a_2, b_2)$  و  $(a_3, b_3)$  هستند. تابع چگالی پسین توأم  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{L(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \alpha, \beta, \theta) \pi_1(\alpha) \pi_2(\beta) \pi_3(\theta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty L(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \alpha, \beta, \theta) \pi_1(\alpha) \pi_2(\beta) \pi_3(\theta) d\alpha d\beta d\theta} \\ &\propto \alpha^{m+a_1-1} \beta^{n+a_2-1} \theta^{m+n+a_3-1} \\ &\times \exp \left[ -\alpha \{b_1 + P(\theta)\} - \beta \{b_2 + Q(\theta)\} - \theta b_3 + P(\theta) \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \ln \{x_i^{\theta-1} (1 - x_i^\theta)\} + Q(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln \{y_i^{\theta-1} (1 - y_i^\theta)\} \right] \quad (۱۴.۲) \end{aligned}$$

به طوری که  $P(\theta) = -\sum_{i=1}^m \ln [x_i^\theta (2 - x_i^\theta)]$  و  $Q(\theta) = -\sum_{i=1}^n \ln [y_i^\theta (2 - y_i^\theta)]$  است. تحت تابع زیان مربع خطا، برآورد بیز تابع  $R_{s,k}$  برابر امید پسین این تابع خواهد بود.

$$\hat{R}_{s,k}^B = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^j \beta}{\alpha(k+j-i) + \beta} \pi(\alpha, \beta, \theta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\alpha d\beta d\theta. \quad (۱۵.۲)$$

واضح است که رابطه‌ی (۱۵.۲) قابل نمایش به صورت فرم بسته نیست، بنابراین با استفاده از روش تقریبی MCMC آن را برآورد می‌کنیم.

## ۱.۲.۲ روش MCMC

تابع چگالی پسین حاشیه‌ای پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  با توجه به رابطه‌ی (۱۴.۲) به ترتیب برابر است با

$$\alpha | \theta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \sim \text{Gamma}(m + a_1, b_1 + P(\theta)), \quad (۱۶.۲)$$

$$\beta | \theta, \mathbf{x}, \mathbf{y} \sim \text{Gamma}(n + a_2, b_2 + Q(\theta)), \quad (۱۷.۲)$$

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &\propto \theta^{m+n+a_3-1} e^{-\alpha P(\theta) - \beta Q(\theta) - \theta b_3} \exp \left[ P(\theta) + \sum_{i=1}^m \ln \{x_i^{\theta-1} (1 - x_i^\theta)\} \right. \\ &\left. + Q(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln \{y_i^{\theta-1} (1 - y_i^\theta)\} \right]. \quad (۱۸.۲) \end{aligned}$$

هر چند امکان استخراج نمونه از  $\alpha$  و  $\beta$  به سادگی میسر است، اما توزیع شرطی (۱۸.۲) به فرم یک توزیع شناخته شده نیست، بنابراین امکان نمونه‌گیری از آن با روش‌های مستقیم وجود ندارد. با این وجود، با توجه به اینکه شکل توزیع آن تقریباً نرمال است، می‌توان با استفاده از توزیع پیشنهادی نرمال و روش متروپلیس-هستینگز با الگوریتم نمونه‌گیری گیبز، از  $\pi(\theta | \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  نمونه تولید کرد. برای رسیدن به این هدف، از گام‌های زیر پیروی می‌کنیم

گام اول: مقادیر اولیه‌ی  $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \theta^{(0)})$  را در نظر بگیرید.

گام دوم: قرار دهید  $l = 1$

گام سوم: مقدار  $\alpha^{(l)}$  را از  $\text{Gamma}(m + a_1, b_1 + P(\theta^{(l-1)}))$  تولید کنید.

گام چهارم: مقدار  $\beta^{(l)}$  را از  $\text{Gamma}(n + a_2, b_2 + Q(\theta^{(l-1)}))$  تولید کنید.

گام پنجم: مقدار  $\theta^{(l)}$  را از  $\pi(\theta | \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگ و توزیع پیشنهادی

$$q \equiv N(\theta^{(l-1)}, H^{(l-1)}) \text{ که در آن } H^{(l-1)} = \left[ \frac{-\partial^2 \ln(\pi(\theta | \alpha^{(l)}, \beta^{(l)}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))}{\partial \theta^2} \right]^{-1} \text{ است، مطابق زیر تولید کنید.}$$

الف: قرار دهید  $z = \theta^{(l-1)}$ .

ب:  $t$  را از  $q$  تولید کنید.

$$\text{ج: قرار دهید } p(z, t) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(t | \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) q(z)}{\pi(z | \alpha, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) q(t)} \right\}$$

د:  $u$  را از  $U(0, 1)$  تولید کنید. اگر  $u < p(z, t)$  قرار دهید  $\theta^{(l)} = t$ ، در غیر این صورت قرار دهید  $\theta^{(l)} = z$ .

گام ششم: مقدار  $R_{s,k}^{(l)}$  را در  $(\alpha^{(l)}, \beta^{(l)}, \theta^{(l)})$  محاسبه کنید.

گام هفتم: قرار دهید  $l = l + 1$ .

گام هشتم: گام‌های سوم تا هفتم را  $N$  بار تکرار کنید تا  $R_{s,k}^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) به دست آید.

حال با استفاده از نمونه‌های پسین محاسبه شده، برآورد بیز را تحت تابع زیان مربع خطا از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم

$$\hat{R}_{s,k}^{B-MC} = \frac{1}{N - M} \sum_{l=M+1}^N R_{s,k}^{(l)} \quad (19.2)$$

به طوری که  $M$ ، تعداد مشاهدات سوخته است. همچنین با استفاده از ایده‌ی چن و شاوو [۵]، ابتدا مقادیر  $R_{s,k}$  را به ترتیب صعودی از ۱ تا  $l$  مرتب نموده و سپس کوچکترین فاصله از میان فواصل اعتبار  $\alpha l$ ،  $1 \leq i \leq \alpha l$ ،  $(R_{s,k}^{(i)}, R_{s,k}^{((1-\alpha)l+i)})$  را به عنوان فاصله‌ی اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین در سطح  $100(1 - \alpha)\%$  در نظر می‌گیریم.

### ۳ برآورد $R_{s,k}$ با پارامترهای شکل اول یکسان و معلوم

#### ۱.۳ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $R_{s,k}$

فرض کنید که نمونه‌های تصادفی از توزیع‌های مستقل  $X \sim PTL(\alpha, \theta)$  و  $Y \sim PTL(\beta, \theta)$  با پارامتر شکل اول یکسان و معلوم  $\theta = \theta_0$  و پارامترهای شکل دوم متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$ ، تولید شده باشد. در این صورت تابع لگاریتم درست‌نمایی بر اساس مشاهدات برابر است با

$$l(\alpha, \beta | \theta_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = c + m \ln \alpha + n \ln \beta + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \ln [x_i^{\theta_0} (2 - x_i^{\theta_0})] + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln [y_i^{\theta_0} (2 - y_i^{\theta_0})], \quad (1.3)$$

به طوری که  $c$  مقدار ثابتی است. بنابراین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  از حل روابط  $\frac{\partial l}{\partial \alpha} = 0$  و  $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ ، به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{P^*}, \quad \hat{\beta} = \frac{n}{Q^*} \quad (2.3)$$

جایی که  $Q^* = -\sum_{i=1}^n \ln [y_i^{\theta_0} (2 - y_i^{\theta_0})]$  و  $P^* = -\sum_{i=1}^m \ln [x_i^{\theta_0} (2 - x_i^{\theta_0})]$  با توجه به اینکه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R_{s,k}$  محاسبه شده در رابطه‌ی (۱.۲)، مستقل از پارامتر شکل اول است، بنابراین این برآورد در حالتی که پارامتر  $\theta$  معلوم است،

همانند حالتی است که پارامتر  $\theta$  نامعلوم است. علاوه بر این، فاصله اطمینان مجانبی همانند رابطه (۱۳.۲) محاسبه می‌شود، با این تفاوت که واریانس مجانبی  $R_{s,k}$  به صورت زیر است

$$H_{s,k} = \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right)^2 \frac{\alpha^2}{m} + \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^2 \frac{\beta^2}{n} \Big|_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}.$$

### ۲.۳ برآورد ناریب با کمترین واریانس $R_{s,k}$

در این بخش می‌خواهیم برآورد ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) را برای  $R_{s,k}$  به دست آوریم. برای این کار کفایت تا برآورد UMVUE را برای  $\gamma(\alpha, \beta) = \frac{(-1)^j \beta}{\alpha(k+j-i)+\beta}$  تعیین کنیم و با توجه به خاصیت خطی این برآوردگر، برآورد UMVUE را برای  $R_{s,k}$  به دست آوریم. می‌دانیم که  $(P^*, Q^*)$ ، آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای  $(\alpha, \beta)$  است. علاوه بر  $P^*$  و  $Q^*$  از توزیع گاما به ترتیب با پارامترهای  $(m, \alpha)$  و  $(n, \beta)$  پیروی می‌کنند. فرض کنید  $\tilde{P} = -\ln[X_1(\Psi - X_1)]$  و  $\tilde{Q} = -\ln[Y_1(\Psi - Y_1)]$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(\tilde{Q}, \tilde{P}) = \begin{cases} 1, & \tilde{P} > (k+j-1)\tilde{Q} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که  $\varphi(\tilde{Q}, \tilde{P})$  برآورد ناریب برای  $\gamma(\alpha, \beta)$  است. واضح است که  $\tilde{P}$  و  $\tilde{Q}$  از توزیع نمایی به ترتیب با پارامترهای  $\frac{1}{\alpha}$  و  $\frac{1}{\beta}$  برخوردار هستند، داریم:

$$\begin{aligned} E[\varphi(\tilde{Q}, \tilde{P})] &= \alpha\beta \int_0^\infty \int_0^{\tilde{p}/(i+k-j)} e^{-\alpha\tilde{p}} e^{-\beta\tilde{q}} d\tilde{q} d\tilde{p} \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha\tilde{p}} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta\tilde{p}}{i+k-j}} \right] d\tilde{p} \\ &= \frac{\beta}{\alpha(i+k-j) + \beta}. \end{aligned}$$

حال با استفاده از قضیه لهن-شفه، برآورد UMVUE را برای  $\gamma(\alpha, \beta)$  محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{UM}(\alpha, \beta) &= E \left[ \varphi(\tilde{Q}, \tilde{P}) \mid P^* = p^*, Q^* = q^* \right] \\ &= P \left[ \tilde{P} > (i+k-j)\tilde{Q} \mid P^* = p^*, Q^* = q^* \right] \\ &= \int_\omega \int f_{\tilde{P}|P^*=p^*}(\tilde{p} \mid p^*) f_{\tilde{Q}|Q^*=q^*}(\tilde{q} \mid q^*) d\tilde{q} d\tilde{p}, \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

به طوری که ناحیه‌ی  $\omega$  به صورت  $\{(\tilde{p}, \tilde{q}) : 0 < \tilde{p} < p^*, 0 < \tilde{q} < q^*, \tilde{p} > (k+j-i)\tilde{q}\}$  است. حال این انتگرال دوگانه را در دو حالت  $h < l$  و  $h > l$  به کمک الگوی بصیرت و همکاران [۳] محاسبه می‌کنیم، به طوری که  $h = \frac{(k+j-i)q^*}{p^*}$ . حاصل رابطه‌ی (۳.۳) در حالتی که  $h < 1$  باشد، به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{UM}(\alpha, \beta) &= \int_0^{q^*} \int_{\tilde{q}(k+j-i)}^{p^*} \frac{(n-1)(m-1)}{q^*p^*} \left( 1 - \frac{\tilde{q}}{q^*} \right)^{n-2} \left( 1 - \frac{\tilde{p}}{p^*} \right)^{m-2} d\tilde{p} d\tilde{q} \\ &= (n-1) \int_0^1 (1-v)^{n-2} (1-hv)^{m-1} dv \\ &= \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t h^t \frac{\binom{m-1}{t}}{\binom{n+t-1}{t}}, \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

به طوری که  $v = \frac{\tilde{q}}{q^*}$ . وقتی  $h > 1$  باشد، با تغییر متغیر  $v = \frac{\tilde{p}}{p^*}$ ، انتگرال رابطه‌ی (۳.۳) برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{UM}(\alpha, \beta) &= \int_0^{p^*} \int_0^{\tilde{p}/(k+j-i)} \frac{(n-1)(m-1)}{q^*p^*} \left(1 - \frac{\tilde{q}}{q^*}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{\tilde{p}}{p^*}\right)^{m-2} d\tilde{p}d\tilde{q} \\ &= 1 - (m-1) \int_0^1 (1-v)^{m-2} (1-h^{-1}v)^{n-1} dv \\ &= 1 - \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t h^{-t} \frac{\binom{n-1}{t}}{\binom{m+t-1}{t}}. \end{aligned} \quad (۵.۳)$$

بنابراین برآورد UMVUE برای  $R_{s,k}$  با استفاده از روابط (۴.۳) و (۵.۳)، به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{R}_{s,k}^{UM} = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \hat{\gamma}_{UM}(\alpha, \beta). \quad (۶.۳)$$

### ۳.۳ برآورد بیز $R_{s,k}$

در این بخش فرض می‌کنیم پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  متغیرهای تصادفی با توزیع گاما و پارامترهای معلوم و مثبت به ترتیب  $(a_1, b_1)$  و  $(a_2, b_2)$  هستند. تابع چگالی پسین توأم  $\alpha$  و  $\beta$  برابر است با

$$\begin{aligned} \pi(\alpha, \beta | \theta_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{(b_1 + P^*)^{m+a_1} (b_2 + Q^*)^{n+a_2}}{\Gamma(m+a_1) \Gamma(n+a_2)} \\ &\times \alpha^{m+a_1-1} \beta^{n+a_2-1} \exp[-\alpha(b_1 + P^*) - \beta(b_2 + Q^*)], \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

به طوری که  $P^*$  و  $Q^*$  در رابطه‌ی (۲.۳) تعریف شده‌اند. چگالی پسین حاشیه‌ای برای  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب برابر  $\Gamma(m+a_1, b_1 + P^*)$  و  $\Gamma(n+a_2, b_2 + Q^*)$  خواهد بود. تحت تابع زیان مربع خطا، برآورد بیز تابع  $R_{s,k}$  برابر امید پسین این تابع خواهد بود.

$$\hat{R}_{s,k}^B = \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^j \beta}{\alpha(k+j-i) + \beta} \pi(\alpha, \beta | \theta_0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\alpha d\beta.$$

انتگرال فوق با در نظر گرفتن تبدیل‌های  $v_1 = \frac{\beta}{\alpha(k+j-i) + \beta}$  و  $v_2 = \alpha(k+j-i)$  و به کمک الگوی کیزیلاسلان و نادر [۱۰] به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\hat{R}_{s,k}^B = \begin{cases} \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j (1-q)^{n+a_2} \frac{n+a_2}{p} {}_1F_2(p, n+a_2+1; p+1, q) & |q| < 1 \\ \sum_{i=s}^k \sum_{j=0}^i \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j (n+a_2)}{p(1-q)^{m+a_1}} {}_1F_2(p, m+a_1+1; p+1, \frac{q}{q-1}), & q < -1 \end{cases} \quad (۸.۳)$$

هر چند که در اینجا برای برآورد بیز فرم بسته‌ای به دست آمده است، اما معمولاً چنین اتفاقی رخ نمی‌دهد. می‌توان این برآورد را به کمک تکنیک‌های دیگر مانند لیندلی، تیرنی کادان و MCMC با هدف بررسی عملکرد آن‌ها در مقایسه با برآورد دقیق بیز، بکار گرفت. مشابه بودن نتایج موجب می‌شود که از این تکنیک‌ها به عنوان روش کارآمد، وقتی پارامترهای توزیع نامشخص هستند، استفاده کنیم. با توجه به اینکه با تقریب‌های لیندلی و تیرنی کادان، امکان ایجاد فاصله‌ی اعتبار فراهم نیست، ما روش MCMC را برای تعیین برآورد بیز بکار می‌گیریم.

### ۱.۳.۳ روش MCMC

واضح است که تابع چگالی پسین حاشیه‌ای به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \alpha | \theta_0, \mathbf{x}, \mathbf{y} &\sim \text{Gamma}(m+a_1, b_1 + P^*), \\ \beta | \theta_0, \mathbf{x}, \mathbf{y} &\sim \text{Gamma}(n+a_2, b_2 + Q^*). \end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم با کمک نمونه‌گیری گیبز و گام‌های زیر نمونه‌های تصادفی از این توزیع‌ها استخراج کنیم.



گام اول: قرار دهید  $l = 1$ .

گام دوم: مقدار  $\alpha^{(l)}$  را از  $\text{Gamma}(m + a_1, b_1 + P^*)$  تولید کنید.

گام سوم: مقدار  $\beta^{(l)}$  را از  $\text{Gamma}(n + a_2, b_2 + Q^*)$  تولید کنید.

گام چهارم: مقدار  $R_{s,k}^{(l)}$  را در  $(\alpha^{(l)}, \beta^{(l)})$  محاسبه کنید.

گام پنجم: قرار دهید  $l = l + 1$ .

گام ششم: گام‌های دوم تا پنجم را  $N$  بار تکرار کنید تا  $(l = 1, 2, \dots, N)$  به دست آید.

حال با استفاده از نمونه‌های پسین محاسبه شده، برآورد بیز را تحت تابع زیان مربع خطا از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کنیم

$$\hat{R}_{s,k}^{B-MC} = \sum_{l=1}^N R_{s,k}^{(l)} \quad (9.3)$$

و با استفاده از ایده‌ی چن و شاوو [۵]، یک فاصله‌ی اعتبار مرتفع‌ترین چگالی پسین در سطح  $100(1 - \alpha)\%$  ایجاد می‌کنیم.

#### ۴ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش به کمک شبیه‌سازی به مقایسه‌ی عملکرد برآوردهای کلاسیک و بیزی  $R_{s,k}$  می‌پردازیم. عملکرد برآوردهای نقطه‌ای با استفاده از مقدار برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای و میانگین مربعات خطا (MSE) و عملکرد برآوردهای فاصله‌ای به کمک میانگین طول (AL) و درصد پوشش (CP) فواصل اطمینان و اعتبار مورد سنجش قرار گرفته‌اند. در حالتی که پارامتر شکل اول نامشخص است، سه مجموعه‌ی مقادیر برای پارامترها به صورت  $(2, 13/5, 0/5)$ ،  $(2, 3, 1)$  و  $(3, 1, 2)$  با اندازه نمونه‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ در نظر گرفته شده است. مقادیر واقعی قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای وقتی  $(s, k) = (1, 3)$ ، برای این ترکیب پارامترها به ترتیب برابر  $0/1$ ،  $0/5$  و  $0/9$  می‌باشد. برای ارزیابی برآوردهای بیز، از پیشین‌های آگاهی‌بخش برای هر ترکیب از پارامترها استفاده شده است. مجموعه‌ی پیشین‌ها به صورت  $(a_1, b_1) = (1, 2)$ ،  $(a_2, b_2) = (7, 0/5)$  و  $(a_3, b_3) = (4, 2)$  برای مجموعه‌ی مقادیر اول،  $(a_1, b_1) = (2, 2)$ ،  $(a_2, b_2) = (6, 2)$  و  $(a_3, b_3) = (6, 3)$  برای مجموعه‌ی مقادیر دوم و  $(a_1, b_1) = (6, 2)$ ،  $(a_2, b_2) = (2, 2)$  و  $(a_3, b_3) = (4, 2)$  برای مجموعه‌ی مقادیر سوم در نظر گرفته شده است. کلیه‌ی محاسبات با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلوی زنجیر مارکوفی با  $50000$  تکرار انجام شده است. برای حالتی که پارامتر شکل اول معلوم است نیز، سه مجموعه‌ی مقادیر برای پارامترها به صورت  $(0/5, 13/5, 0/5)$ ،  $(1, 3)$  و  $(3, 1)$  با اندازه نمونه‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ در نظر گرفته شده است. ما فرض کردیم پارامتر شکل اول برابر  $\theta_0 = 2$  باشد. مقادیر واقعی  $R_{1,3}$  برای این ترکیب پارامترها با حالتی که پارامتر شکل اول نامعلوم است، یکسان است. از دیدگاه بیزی، مجموعه‌ی پیشین‌ها به صورت  $(a_1, b_1) = (1, 2)$  و  $(a_2, b_2) = (7, 0/5)$ ، برای مجموعه‌ی مقادیر اول،  $(a_1, b_1) = (2, 2)$  و  $(a_2, b_2) = (6, 2)$ ، برای مجموعه‌ی مقادیر دوم و در نهایت،  $(a_1, b_1) = (6, 2)$  و  $(a_2, b_2) = (2, 2)$ ، برای مجموعه‌ی مقادیر سوم در نظر گرفته شده است.

کلیه‌ی نتایج حاصل از عملکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای کلاسیک و بیزی در جداول ۱، ۲ و ۳ گزارش شده است. علاوه بر این عملکرد برآوردها بر اساس میانگین مربعات خطا و میانگین طول فواصل اطمینان و اعتبار، به کمک رسم نمودار نیز مورد مقایسه قرار گرفته است. برای رسیدن به این هدف، فرض کردیم  $\theta = 2$ ،  $\alpha = 1$  و برای  $\beta$  مقادیر ۲۷، ۱۲، ۷، ۴/۵، ۳، ۲، ۱/۲۹، ۰/۷۵ و ۰/۳۳ را در نظر گرفتیم. برای این ترکیب پارامترها، مقادیر واقعی قابلیت اعتماد چندمؤلفه‌ای وقتی  $(s, k) = (1, 3)$ ، به ترتیب برابر  $0/1$ ،  $0/2$ ،  $0/3$ ،  $0/4$ ،  $0/5$ ،  $0/6$ ،  $0/7$ ،  $0/8$  و  $0/9$  است. نتایج حاصل در شکل ۱ آمده است.

مهمترین نتایجی که از جدول‌های ۱ تا ۳ و شکل ۱ به دست می‌آیند، به قرار زیر است

- عملکرد کلیه‌ی برآوردها بر اساس مقدار برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چند-مؤلفه‌ای، حتی برای اندازه نمونه‌های کوچک، کاملاً رضایت‌بخش بوده است، به‌ویژه زمانی که پارامتر شکل اول معلوم بوده است.
- با افزایش اندازه‌ی نمونه، مقادیر میانگین مربعات خطا و همچنین میانگین طول فواصل اطمینان و نواحی اعتبار، مطابق انتظار کاهش پیدا می‌کند.
- وقتی پارامتر شکل اول نامعلوم است، میانگین مربعات خطای به دست آمده از برآورد بیز، کوچکتر از میانگین به دست آمده از برآورد ماکسیمم درست‌نمایی بوده است.

جدول ۱: عملکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای  $R_{1,3}$  با پارامتر شکل اول یکسان و نامعلوم

بی‌زی				کلاسیک				$n$	$R_{s,k}$	$(\alpha, \beta, \theta)$
$CP$	$AL$	$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^{B-MC}$	$CP$	$AL$	$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^{MLE}$			
۰٫۹۳۲۴	۰٫۲۴۱۵	۰٫۰۰۰۲۷	۰٫۰۹۲۱	۰٫۹۲۳۰	۰٫۲۸۸۴	۰٫۰۰۰۴۰	۰٫۰۹۷۰	۱۰	۰٫۱	(۰٫۵, ۱۳٫۵, ۲)
۰٫۹۲۲۰	۰٫۱۷۵۳	۰٫۰۰۰۱۳	۰٫۰۹۴۰	۰٫۹۲۴۰	۰٫۱۹۷۰	۰٫۰۰۰۲۳	۰٫۰۹۶۶	۲۰		
۰٫۹۱۲۴	۰٫۱۴۶۷	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۰۹۴۹	۰٫۹۲۴۵	۰٫۱۶۰۵	۰٫۰۰۰۱۶	۰٫۰۹۷۵	۳۰		
۰٫۹۰۸۹	۰٫۱۲۴۷	۰٫۰۰۰۰۶	۰٫۰۹۵۵	۰٫۹۳۰۲	۰٫۱۳۹۶	۰٫۰۰۰۱۲	۰٫۰۹۸۰	۴۰		
۰٫۹۰۵۵	۰٫۱۱۲۴	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۰۹۶۱	۰٫۹۳۴۷	۰٫۱۲۵۰	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۰۹۸۲	۵۰		
۰٫۹۳۹۰	۰٫۳۹۲۳	۰٫۰۰۰۷۷	۰٫۴۷۸۰	۰٫۹۴۴۰	۰٫۴۴۹۶	۰٫۰۱۶۶	۰٫۴۷۷۲	۱۰	۰٫۵	(۱, ۳, ۲)
۰٫۹۲۸۶	۰٫۳۰۰۱	۰٫۰۰۰۴۳	۰٫۴۸۰۰	۰٫۹۴۵۵	۰٫۳۳۰۹	۰٫۰۰۰۸۷	۰٫۴۸۲۵	۲۰		
۰٫۹۲۷۳	۰٫۲۴۰۴	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۴۸۵۶	۰٫۹۴۶۵	۰٫۲۷۲۵	۰٫۰۰۰۵۶	۰٫۴۸۸۷	۳۰		
۰٫۹۱۷۵	۰٫۲۱۶۱	۰٫۰۰۰۲۷	۰٫۴۸۶۷	۰٫۹۴۷۰	۰٫۲۳۷۳	۰٫۰۰۰۴۱	۰٫۴۹۱۱	۴۰		
۰٫۹۱۳۶	۰٫۱۹۸۰	۰٫۰۰۰۲۲	۰٫۴۹۱۰	۰٫۹۴۸۶	۰٫۲۱۲۹	۰٫۰۰۰۳۳	۰٫۴۹۳۸	۵۰		
۰٫۹۴۵۰	۰٫۱۴۷۱	۰٫۰۰۰۱۸	۰٫۸۸۹۹	۰٫۹۴۰۰	۰٫۱۸۲۴	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۸۹۹۰	۱۰	۰٫۹	(۳, ۱, ۲)
۰٫۹۴۰۵	۰٫۱۰۸۳	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۸۹۲۳	۰٫۹۴۱۱	۰٫۱۲۰۲	۰٫۰۰۰۱۰	۰٫۹۰۰۸	۲۰		
۰٫۹۳۶۵	۰٫۰۸۷۶	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۸۹۵۴	۰٫۹۴۶۰	۰٫۰۹۵۷	۰٫۰۰۰۰۷	۰٫۹۰۰۸	۳۰		
۰٫۹۳۰۵	۰٫۰۷۶۱	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۸۹۶۰	۰٫۹۴۷۰	۰٫۰۸۱۶	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۹۰۰۷	۴۰		
۰٫۹۲۱۱	۰٫۰۶۸۲	۰٫۰۰۰۰۲	۰٫۸۹۸۹	۰٫۹۴۹۷	۰٫۰۷۲۷	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۹۰۰۵	۵۰		

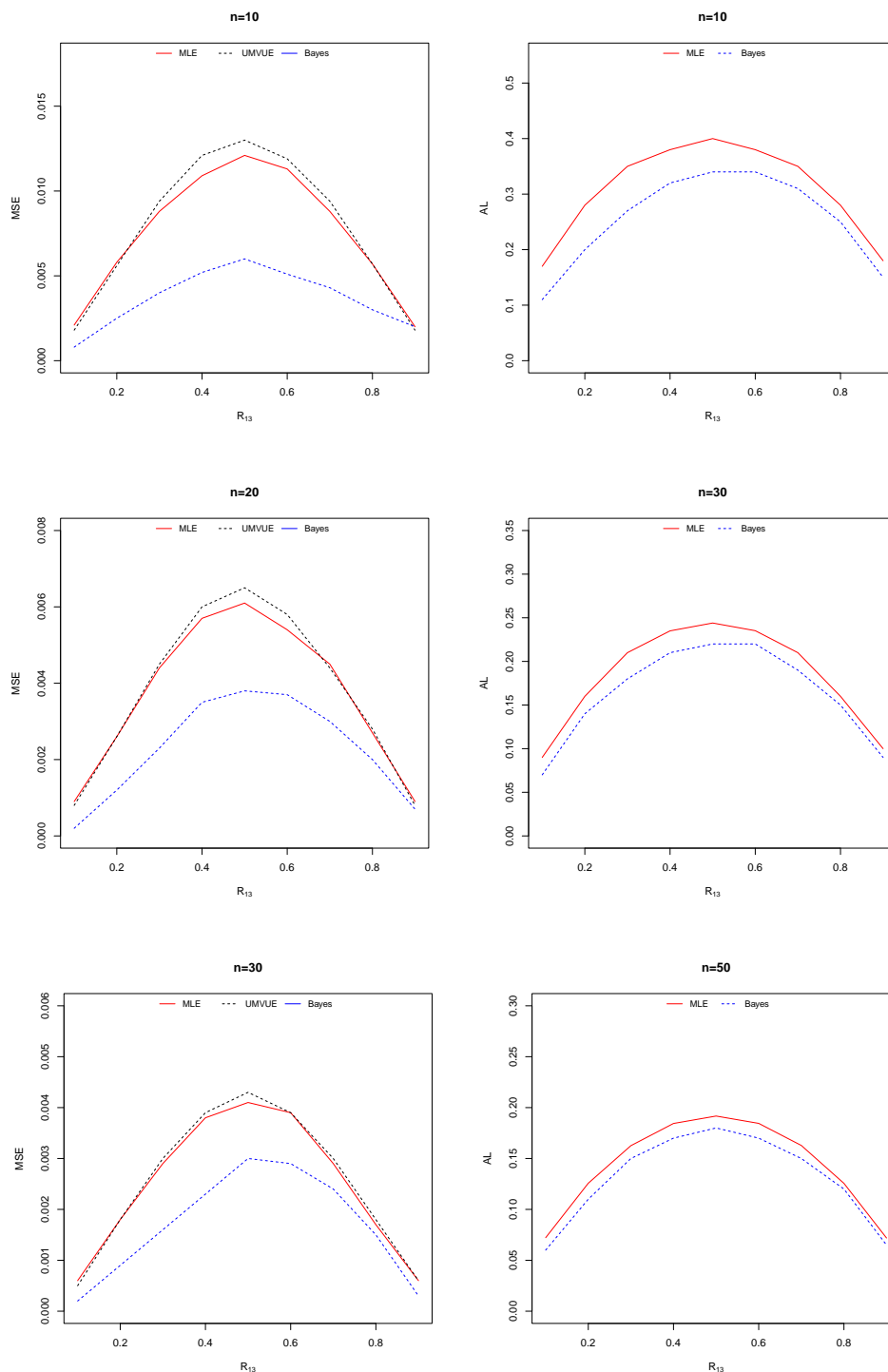
جدول ۲: عملکرد برآوردهای نقطه‌ای  $R_{1,3}$  با پارامتر شکل اول یکسان و معلوم  $\theta_0 = 2$

بی‌زی				کلاسیک				$n$	$R_{s,k}$	$(\alpha, \beta)$
$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^B$	$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^{B-MC}$	$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^{UM}$	$MSE$	$\hat{R}_{s,k}^{MLE}$			
۰٫۰۰۰۱۲	۰٫۱۰۹۱	۰٫۰۰۰۱۲	۰٫۱۰۹۱	۰٫۰۰۰۱۸	۰٫۱۰۰۱	۰٫۰۰۰۲۰	۰٫۱۰۷۵	۱۰	۰٫۱	(۰٫۵, ۱۳٫۵)
۰٫۰۰۰۰۷	۰٫۱۰۵۱	۰٫۰۰۰۰۷	۰٫۱۰۵۲	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۰۹۹۹	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۱۰۳۶	۲۰		
۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۱۰۳۶	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۱۰۳۷	۰٫۰۰۰۰۶	۰٫۰۹۹۹	۰٫۰۰۰۰۶	۰٫۱۰۲۵	۳۰		
۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۱۰۲۶	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۱۰۲۷	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۰۹۹۹	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۱۰۱۸	۴۰		
۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۱۰۲۳	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۱۰۲۶	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۱۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۱۰۱۴	۵۰		
۰٫۰۰۰۶۱	۰٫۵۰۲۴	۰٫۰۰۰۶۱	۰٫۵۰۲۰	۰٫۰۱۳۰	۰٫۵۰۰۲	۰٫۰۱۱۹	۰٫۴۹۹۹	۱۰	۰٫۵	(۱, ۳)
۰٫۰۰۰۴۲	۰٫۵۰۰۶	۰٫۰۰۰۴۲	۰٫۵۰۱۶	۰٫۰۰۰۶۴	۰٫۵۰۰۲	۰٫۰۰۰۶۱	۰٫۵۰۰۰	۲۰		
۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۵۰۰۴	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۵۰۰۵	۰٫۰۰۰۴۲	۰٫۵۰۰۳	۰٫۰۰۰۴۱	۰٫۵۰۰۰	۳۰		
۰٫۰۰۰۲۵	۰٫۴۹۹۹	۰٫۰۰۰۲۵	۰٫۵۰۰۷	۰٫۰۰۰۳۲	۰٫۵۰۰۳	۰٫۰۰۰۳۱	۰٫۵۰۰۰	۴۰		
۰٫۰۰۰۲۱	۰٫۴۹۹۵	۰٫۰۰۰۲۱	۰٫۵۰۰۱	۰٫۰۰۰۲۵	۰٫۵۰۰۰	۰٫۰۰۰۲۵	۰٫۵۰۰۱	۵۰		
۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۸۹۰۲	۰٫۰۰۰۱۱	۰٫۸۹۰۶	۰٫۰۰۰۱۸	۰٫۹۰۰۰	۰٫۰۰۰۲۰	۰٫۸۹۲۵	۱۰	۰٫۹	(۳, ۱)
۰٫۰۰۰۰۷	۰٫۸۹۴۳	۰٫۰۰۰۰۷	۰٫۸۹۳۸	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۸۹۹۹	۰٫۰۰۰۰۹	۰٫۸۹۶۳	۲۰		
۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۸۹۵۸	۰٫۰۰۰۰۵	۰٫۸۹۵۷	۰٫۰۰۰۰۶	۰٫۹۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۶	۰٫۸۹۷۶	۳۰		
۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۸۹۶۶	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۸۹۶۷	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۹۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۸۹۸۱	۴۰		
۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۸۹۷۹	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۸۹۷۳	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۹۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۸۹۸۵	۵۰		

جدول ۳: عملکرد برآوردهای فاصله‌ای  $R_{1,3}$  با پارامتر شکل اول یکسان و معلوم  $\theta_0 = 2$

بی‌زی (مرتفع‌ترین چگالی پسین)		کلاسیک (مجانبی)		$n$	$R_{s,k}$	$(\alpha, \beta)$
$CP$	$AL$	$CP$	$AL$			
۰٫۹۵۸۳	۰٫۱۳۶۴	۰٫۹۴۳۴	۰٫۱۷۱۹	۱۰	۰٫۱	(۰٫۵, ۱۳٫۵)
۰٫۹۴۴۹	۰٫۱۰۱۲	۰٫۹۴۷۰	۰٫۱۱۷۰	۲۰		
۰٫۹۴۲۴	۰٫۰۸۳۹	۰٫۹۴۸۱	۰٫۰۹۴۲	۳۰		
۰٫۹۳۷۹	۰٫۰۷۳۴	۰٫۹۴۸۷	۰٫۰۸۰۹	۴۰		
۰٫۹۴۶۵	۰٫۰۶۶۱	۰٫۹۴۹۹	۰٫۰۷۲۰	۵۰		
۰٫۹۶۰۴	۰٫۳۴۲۲	۰٫۹۴۳۲	۰٫۳۹۵۶	۱۰	۰٫۵	(۱, ۳)
۰٫۹۴۹۵	۰٫۲۶۳۹	۰٫۹۴۶۹	۰٫۲۹۳۶	۲۰		
۰٫۹۴۳۵	۰٫۲۲۳۵	۰٫۹۴۸۱	۰٫۲۴۴۰	۳۰		
۰٫۹۳۸۵	۰٫۱۹۷۶	۰٫۹۴۸۲	۰٫۲۱۳۱	۴۰		
۰٫۹۳۷۴	۰٫۱۷۸۵	۰٫۹۴۸۷	۰٫۱۹۱۷	۵۰		
۰٫۹۶۵۱	۰٫۱۳۵۵	۰٫۹۴۳۴	۰٫۱۷۱۹	۱۰	۰٫۹	(۳, ۱)
۰٫۹۴۸۹	۰٫۱۰۱۲	۰٫۹۴۷۲	۰٫۱۱۷۰	۲۰		
۰٫۹۴۳۶	۰٫۰۸۴۱	۰٫۹۴۸۰	۰٫۰۹۴۱	۳۰		
۰٫۹۴۳۵	۰٫۰۷۳۷	۰٫۹۴۸۵	۰٫۰۸۰۹	۴۰		
۰٫۹۳۸۶	۰٫۰۶۶۱	۰٫۹۴۸۶	۰٫۰۷۲۰	۵۰		

• وقتی پارامتر شکل اول معلوم است، عملکرد برآوردها بر اساس معیار میانگین مربعات خطا، به صورت  $MSE(\hat{R}_{s,k}^B) < MSE(\hat{R}_{s,k}^{MLE}) < MSE(\hat{R}_{s,k}^{UM})$  مشاهده شده است. با این وجود برای اندازه‌ی نمونه



شکل ۱: میانگین مربعات خطای برآوردهای نقطه‌ای (سمت چپ) و میانگین طول برآوردهای فاصله‌ای (سمت راست)

$(n \geq 20)$ ، عملکرد برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و برآوردگر ناریب با کمترین واریانس، یکسان بوده است.

- تمام برآوردها وقتی  $R_{s,k}$  حدود ۵٪ است، از بیشترین مقدار میانگین مربعات خطا برخوردار هستند و وقتی  $R_{s,k}$  به صفر یا ۱ نزدیک می‌شود، دارای مقدار میانگین مربعات خطای کمتری هستند.
- میانگین طول نواحی اعتبار کمتر از میانگین طول فواصل اطمینان مجانبی است.
- بر اساس معیار درصد پوشش فواصل اطمینان و نواحی اعتبار، برای اندازه‌ی نمونه‌های کوچک، عملکرد برآورد بیز بهتر بوده است و

با افزایش اندازه‌ی نمونه، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ترجیح داده می‌شود.

- عملکرد برآوردگرها بر اساس معیار میانگین مربعات خطا و درصد پوشش فواصل اطمینان و نواحی اعتبار، زمانی که پارامتر شکل اول معلوم است در مقایسه با زمانی که پارامتر شکل اول نامعلوم است، مناسب‌تر بوده است. با این وجود، بر اساس میانگین طول فواصل اطمینان و نواحی اعتبار تفاوت چندانی مشاهده نشده است.
- با توجه به تشابه عملکرد برآوردهای حاصل از تکنیک MCMC و روش دقیق بیز بر اساس معیار مقدار برآورد پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمؤلفه‌ای و همچنین میانگین مربعات خطا، می‌توان از این تکنیک در زمان‌هایی که فرم بسته‌ای برای برآورد بیز وجود ندارد، استفاده کرد.

## ۵ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش برای نشان دادن کاربرد روش‌های مطرح شده در این تحقیق، از داده‌های به دست آمده از مخزن آب ایستگاه شاستا در کالیفرنیا استفاده می‌کنیم. این داده‌ها توسط کیزیلانسان و نادار [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. موضوع خشکسالی شدید، در صنعت کشاورزی از اهمیت بسیاری برخوردار است، زیرا ممکن است آسیب جدی به محصولات تولیدی وارد کند. بنابراین لازم است که این موضوع مدیریت شود. یک سناریو برای رخداد این پیشامد به صورت زیر مطرح می‌شود. اگر ظرفیت آب مخزن در سپتامبر سال جاری، بیشتر از مقدار آب ورودی ماه دسامبر دو سال از پنج سال آینده باشد، می‌توان ادعا نمود که در سال‌های آتی، با خشکسالی شدید مواجه نخواهیم شد. بنابراین احتمال عدم رخداد خشکسالی شدید معادل قابلیت اعتماد سیستم چندمؤلفه‌ای به صورت  $R_{2,5}$  است. داده‌ها شامل ظرفیت آب مخزن ماه‌های سپتامبر و دسامبر بین سال‌های ۱۹۸۰ تا ۲۰۱۵ است. این داده‌ها در <http://cdec.water.ca.gov/cgi-progs/queryMonthly?SHA> قابل مشاهده است.  $y_1$ ، ظرفیت آب مخزن در دسامبر ۱۹۸۰ و  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}$  ظرفیت آب مخزن در سپتامبر ۱۹۸۱ تا ۱۹۸۵ می‌باشد. مجدداً،  $y_2$  ظرفیت آب مخزن در دسامبر ۱۹۸۶ و  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{25}$  ظرفیت آب مخزن در سپتامبر ۱۹۸۷ تا ۱۹۹۱ می‌باشد. این فرآیند را تا سال ۲۰۱۵ ادامه می‌دهیم. با توجه به دامنه‌ی تغییرات توزیع تاپ-لئون توانی ( $0 < x < 1$ )، کلیه‌ی مقادیر به ظرفیت کل مخزن یعنی  $4/552/000$  اکر-فوت تقسیم شده‌اند. داده‌های تبدیل‌یافته به صورت زیر هستند

$$X = \begin{bmatrix} 0,5449 & 0,7659 & 0,7946 & 0,7118 & 0,4345 \\ 0,4631 & 0,3484 & 0,4605 & 0,3597 & 0,2943 \\ 0,6814 & 0,4617 & 0,6890 & 0,6786 & 0,5071 \\ 0,7310 & 0,6558 & 0,4832 & 0,5620 & 0,6941 \\ 0,6667 & 0,7041 & 0,4128 & 0,3041 & 0,3897 \\ 0,7340 & 0,5693 & 0,4187 & 0,2542 & 0,3520 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0,7009 \\ 0,6532 \\ 0,4589 \\ 0,7183 \\ 0,5310 \\ 0,7665 \end{bmatrix}$$

برای اجرای روش‌های مطرح شده، ابتدا توزیع تاپ-لئون توانی را به‌طور جداگانه به هر یک از مجموعه داده‌های فوق برازش می‌دهیم. نتایج حاصل از آزمون‌های نیکویی برازش کولموگروف-اسمیرنوف (KS)، اندرسون دارلینگ (A) و کرامر-وون میسز (W) در جدول ۴ آمده است. بر اساس P-مقدارها، مناسب بودن توزیع تاپ-لئون توانی برای هر دو مجموعه داده‌ها، مورد پذیرش قرار می‌گیرد. با انجام آزمون نسبت درست‌نمایی به منظور بررسی فرض تساوی پارامترهای شکل اول در دو توزیع، مقدار آماره‌ی آزمون برابر  $0,1221$  و P-مقدار متناظر آن برابر  $0,7267$  محاسبه شده است که نشان می‌دهد، پذیرش این فرض منطقی است. همچنین نتایج حاصل از آزمون‌های نیکویی برازش جدول ۵، ادعای برابری پارامترهای شکل اول با مقدار  $0,293$  را مورد تأیید قرار می‌دهد. بنابراین می‌توان پارامتر تنش-مقاومت سیستم چندمؤلفه‌ای را بر اساس تساوی پارامترهای شکل اول ( $0,293 = \theta_0$ )، برآورد کرد. در این صورت برآورد درست‌نمایی پارامترها برابر  $\hat{\alpha} = 2185/8$  و  $\hat{\beta} = 4757/0$  و احتمال عدم خشکسالی شدید برابر  $0,4512$  تعیین می‌شود. از دیدگاه بیزی، با توجه به عدم آگاهی

جدول ۴: آزمون‌های نیکویی برازش داده‌های واقعی

داده‌ها	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی				
	پارامتر شکل ۱	پارامتر شکل ۲	KS	P-مقدار	A
X	0,316	1876,1	0,1196	0,7396	0,5316
Y	0,177	12918,8	0,2475	0,7795	0,3789
				W	P-مقدار
				0,737	0,7325
				0,592	0,8380

از پارامترهای توزیع پیشین، از یک مجموعه‌ی پیشین تقریباً ناآگاهی‌بخش به صورت  $(a_i, b_i) = (0,0001, 0,0001)$ ،  $i = 1, 2$  استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل از برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای  $R_{2,5}$  به ترتیب در جدول‌های ۶ و ۷ گزارش شده است. بر اساس نتایج حاصله، مشاهده می‌شود که فاصله‌ی اطمینان مجانبی اندکی کوتاه‌تر از فاصله‌ی اعتبار به دست آمده از برآورد بیز تحت پیشین تقریباً ناآگاهی‌بخش بوده است.

جدول ۵: آزمون های نیکویی برازش داده های واقعی با فرض تساوی پارامترهای شکل اول ( $\theta_0 = 0.293$ )

برآورد ماکسیمم درستنمایی								
داده ها	پارامتر شکل ۱	پارامتر شکل ۲	KS	P-مقدار	A	P-مقدار	W	P-مقدار
X	0.293	2185.8	0.2492	0.7729	0.3829	0.8610	0.599	0.8334
Y	0.293	4757.0	0.1190	0.7455	0.5357	0.7092	0.746	0.7271

جدول ۶: برآوردهای نقطه ای  $R_{2,5}$  برای داده های واقعی

بیزی		کلاسیک	
$\hat{R}_{s,k}^{B-MC}$	$\hat{R}_{s,k}^B$	$\hat{R}_{s,k}^{UM}$	$\hat{R}_{s,k}^{MLE}$
0.4884	0.4885	0.4729	0.4512

جدول ۷: برآوردهای فاصله ای  $R_{2,5}$  برای داده های واقعی

بیزی		کلاسیک	
طول	فاصله ای اعتبار مرتفع ترین چگالی پسین	طول	فاصله ای اطمینان مجانبی
0.4888	(0.2486, 0.7374)	0.4770	(0.2239, 0.7009)

## ۶ بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق، استنباط کلاسیک و بیزی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در سیستم چندمؤلفه ای وقتی که متغیرهای تصادفی تنش و مقاومت از توزیع تاپ-لئون توانی پیروی می کنند، در دو حالت معلوم و نامعلوم پارامتر شکل اول، مورد بررسی قرار داده ایم. نتایج نشان داد که میانگین مربعات خطا و همچنین میانگین طول های فاصله اطمینان مجانبی و فاصله ای اعتبار  $R_{s,k}$  با افزایش اندازه ی نمونه کاهش پیدا کرده است. مقادیر میانگین مربعات خطا وقتی مقدار واقعی  $R_{s,k}$  به  $0.5$  نزدیک می شود، افزایش و با نزدیک شدن به مقادیر کرانگین، کاهش پیدا می کند. همچنین برآوردهای بیزی با پیشین آگاهی بخش در مقایسه با برآوردهای کلاسیک، از میانگین مربعات خطای کمتر و میانگین بازه ای اطمینان کوچکتر برخوردار بوده اند. علاوه بر این، عملکرد برآوردها با معلوم بودن پارامتر شکل اول، در مقایسه با زمانی که نامعلوم است، بهتر بوده است.

## فهرست منابع

- [1] Ahmadi K. and Ghafouri S., *Reliability estimation in a multicomponent stress-strength model under generalized half-normal distribution based on progressive type-II censoring*, J. Statist. Comput. Simul, 89 (2019), 2505-2548.
- [2] Akgül F. G., *Reliability estimation in multicomponent stress-strength model for Topp-Leone distribution*, J. Statist. Comput. Simul, 89 (2019), 2914-2929.
- [3] Basirat M, Baratpour S. and Ahmadi J., *Statistical inferences for stress-strength in the proportional hazard models based on progressive Type-II censored samples*, J. Statist. Comput. Simul, 85 (2015), 431-449.
- [4] Bhattacharyya G. K. and Johnson R. A., *Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model*, J. Amer. Stat. Assoc, 69 (1974), 966-970.
- [5] Chen M. H. Shao Q. M., *Monte Carlo methods estimation of Bayesian credible and hpd intervals*, J. Comput. Graph. Statist. 8 (1999), 69-92.
- [6] Dey S, Mazucheli J. and Anis M.Z., *Estimation of reliability of multicomponent stress-strength for a Kumaraswamy distribution*, Comm. Statist. Theory Methods, 46 (2017), 1560-1572.

- [7] Genc A. I., *Estimation of  $P(X > Y)$  with Topp-Leone distribution*, J. Statist. Comput. Simul, 83 (2013), 326-339.
- [8] Ghitany M. E, Al-Mutairi D. K. and Aboukhamseen S. M., *Estimation of the reliability of a stress-strength system from power Lindley distributions*, Comm. Statist. Simul. Comput, 44 (2015), 118-136.
- [9] Kayal T, Tripathi Y. M, Dey S. and Wu S. J., *On estimating the reliability in a multicomponent stress-strength model based on Chen distribution*, Comm. Statist. Theory Methods, 49 (2020), 2429-2447.
- [10] Kızılaslan F. and Nadar M., *Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a bivariate Kumaraswamy distribution*, Statist Papers, 59 (2018), 307-340.
- [11] Kohansal A., *On estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a Kumaraswamy distribution based on progressively censored sample*, Statist. Papers, 60 (2019), 2185-2224.
- [12] Kohansal A. and Shoaee S., *Bayesian and classical estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model under adaptive hybrid progressive censored data*, Statist Papers, 62 (2021), 309-359.
- [13] Kuo W. and Zuo M. J., *Optimal reliability modeling: principles and applications*, John Wiley and Sons, 2003.
- [14] Maurya R. K. and Tripathi Y. M., *Reliability estimation in a multicomponent stress-strength model for Burr XII distribution under progressive censoring*, Brazilian. J. Prob. Stat, 34 (2020), 345-369.
- [15] Nadar M. and Kızılaslan F., *Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model based on a Marshall-Olkin bivariate Weibull distribution*, IEEE Transactions on Reliability, 65 (2015), 370-380.
- [16] Pak A, Khoolenjani N. B. and Rastogi M. K., *Bayesian inference on reliability in a multicomponent stress-strength bathtub-shaped model based on record values*, Pak. j. stat. oper. res, 15 (2019), 431-444.
- [17] Pandit P. V. and Joshi S., *Reliability Estimation in Multicomponent Stress-strength Model based on Generalized Pareto Distribution*, Amer. J. Appl. Math. Stat, 6 (2018), 210-217.
- [18] Rao C. R, Rao C. R, Statistiker M, Rao C. R. and Rao C. R., *Linear statistical inference and its applications*, New York: Wiley, 1973.
- [19] Rezaei S, Sadr B. B, Alizadeh M. and Nadarajah S., *Topp-Leone generated family of distributions: Properties and applications*, Comm. Statist. Theory Methods, 46 (2017), 2893-2909.
- [20] Topp C. W. and Leone F. C., *A family of J-shaped frequency functions*, J. Amer. Statist. Assoc, 50 (1955), 209-219.



## Estimation of Multicomponent Stress-strength Reliability Based on Power Topp-Leone Distribution

Hossein Pasha-Zanoosi<sup>†</sup>, Ahmad Pourdarvish, Akbar Asgharzadeh

Department of Statistics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Received: 2020/10/16

Accepted: 2021/8/27

Communicated by: Mohammad Reza Zadkarami

**Abstract:** In this study, we consider the statistical inference of multicomponent stress-strength reliability when stress and strength variables follow power Topp-Leone distributions. This system has independent and identically distributed strength components and each component is exposed to a common stress and is reliable if at least out of strength variables exceed the stress variable. The reliability of the system is estimated in view of classical and Bayesian in two cases. In the first case, we suppose that the first shape parameters are same and second shape parameters are different and in the second case, it is assumed that the common first shape parameter is known. Finally, a simulation study is performed to compare the performances of the estimators and one data set is presented for the application of methods.

**Keywords:** Multicomponent stress-strength reliability, Power Topp-Leone distribution, Bayesian estimation.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>†</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: [pashazanoosi@yahoo.com](mailto:pashazanoosi@yahoo.com) (H. Pasha-Zanoosi), [a.pourdarvish@umz.ac.ir](mailto:a.pourdarvish@umz.ac.ir) (A. Pourdarvish), [a.asgharzadeh@umz.ac.ir](mailto:a.asgharzadeh@umz.ac.ir) (A. Asgharzadeh).