مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۶۶۶-۶۷۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2021.38159.1952

پیرامون توسیع توابع پیوسته در LG-توپولوژی

مهدی بدیعی [۱]، علی شهیدی کیا [۲]*، حسین کثیری [۱]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، دزفول، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذرپناه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۵/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۸/۲۷

چکیده: در این مقاله، نگاشت‌های OLG، CLG و LG در مبحث LGT-فضا را معرفی می‌کنیم، نشان می‌دهیم که این نگاشت‌ها توسیع‌های توابع پیوسته در LGT-فضاهایند و برخی خواص آن‌ها را مطالعه می‌کنیم. همچنین، برخی از مفاهیم مرتبط با توابع پیوسته مانند توپولوژی ضعیف تولیدشده، توپولوژی خارج قسمت و توپولوژی افرازی را معرفی کرده‌ایم و نشان داده‌ایم که هر توپولوژی افرازی یک توپولوژی خارج قسمتی است.

واژه‌هاي كليدي: چارچوب، LGT-فضا، نگاشت LG، نگاشت OLG، نگاشت CLG، LGT-فضای خارج قسمتی، فضای تجزیه.

رده‌بندی ریاضی: 06D22; 54Bxx

۱ مقدمه

تا به حال دو نسخه از فضای توپولوژی بدون نقطه معرفی شده است. در نسخه‌ی اول، ازآن‌جا که خانواده‌ی مجموعه‌های باز یک فضای توپولوژی یک چارچوب است، محققین روی توپولوژی به‌عنوان یک چارچوب متمرکز می‌شوند. معرفی نسخه‌ی اول در [۳–۸، ۱۰، ۱۱] شروع شد و سپس در چندین مقاله دیگر مورد مطالعه قرار گرفت. در نسخه‌ی جدید، محققین این دیدگاه را دنبال کردند و ساختار جدیدی را معرفی نمودند. ازآن‌جا که خانواده‌ی مجموعه‌های باز یک زیرچارچوب از مجموعه‌ی توانی است، محققین روی توپولوژی به‌عنوان یک زیرچارچوب از چارچوب مجموعه‌ی توانی متمرکز می‌شوند.

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: badie@jsu.ac.ir (M. Badie)، ali.shahidikia@iaud.ac.ir (A. Shahidikia)،
hossein_kasiry@jsu.ac.ir (H. Kasiri)

ساختار دوم در [۱] معرفی و بررسی شده است و این ساختار LG-توپولوژی نامیده می‌شود. پس از آن در [۲] پیوستگی در این مبحث معرفی و مطالعه شده است.

در این مقاله، مطالعه‌ی توابع پیوسته در LG-توپولوژی را ادامه می‌دهیم. در ادامه‌ی این بخش، برخی از تعاریف مرتبط را یادآوری می‌کنیم. همچنین برخی از ویژگی‌های مقدماتی الحاق راست یک نگاشت را که در بخش‌های اصلی این تحقیق به آن‌ها نیاز داریم را ارائه می‌دهیم. در بخش ۲، نگاشت‌های OLG، CLG و LG را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم این نگاشت‌ها بسیاری از خصوصیات توابع پیوسته را دارند و برای موارد استثنا نیز مثال نقض ارائه کرده‌ایم. همچنین ثابت می‌کنیم این نگاشت‌ها توسیع‌هایی از توابع پیوسته در مبحث توپولوژی تعمیم‌یافته‌ی مشبکه‌ای‌اند. در نهایت، یک تابعگون از رسته‌ی فضاهای توپولوژی به رسته‌ی LGT-فضاها را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، LGT-فضای ضعیف تولید شده توسط یک خانواده از نگاشت‌ها، LGT-فضای خارج قسمتی و فضای تجزیه معرفی به‌عنوان توسیع‌های مفاهیم مربوطه معرفی و مطالعه شده‌اند و در انتها ثابت می‌کنیم که هر فضای تجزیه یک LGT-فضای خارج قسمتی است.

یک مشبکه را کامل گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه از L دارای کوچک‌ترین کران بالا باشد. پس یک مشبکه‌ی کامل دارای بزرگ‌ترین عضو ۱ و کوچک‌ترین عضو ۰ است. یک چارچوب F یک مشبکه‌ی کامل است به طوری که برای هر $a \in F$ و هر $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq F$ داشته باشیم $a \wedge \left(\bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge b_i)$. برای هر عضو $a \in F$، عضو a^* به‌صورت $\bigvee a^{\perp}$ تعریف می‌شود که در آن $a^{\perp} = \{x \in F : x \wedge a = 0\}$. عضو b از چارچوب F را متمم عضو a از F گوییم هرگاه $a \wedge b = 0$ و $a \vee b = 1$. واضح است که متمم عضو a در صورت وجود منحصر به فرد است. متمم عضو a را با a^c نشان می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان دید که اگر متمم عضو a موجود باشد، آنگاه $a^* = a^c$. اگر هر عضو از چارچوب F دارای یک متمم باشد، آنگاه F را یک چارچوب متمم‌دار گوییم. زیرمجموعه‌ی G از چارچوب F را یک زیرچارچوب از F گوییم، اگر G تحت رسند متناهی و وست دلخواه بسته باشد.

فرض کنیم F یک چارچوب باشد، گوییم $\tau \subseteq F$ یک توپولوژی تعمیم‌یافته‌ی مشبکه‌ای (به طور خلاصه LG-توپولوژی) روی F است، هرگاه τ یک زیرچارچوب از F باشد، در این صورت (F, τ) (به طور خلاصه F) را یک LGT-فضا گوییم. هر عضو از τ را باز و هر عضو از $\tau^* = \{t^* : t \in \tau\}$ را بسته گوییم. واضح است برای هر خانواده $\mathcal{F} \subseteq \tau^*$ داریم $\bigwedge \mathcal{F} \in \tau^*$. یک LG-توپولوژی τ روی چارچوب F گسسته (بدیهی) نامیده می‌شود، اگر $\tau = F$ ($\tau = \{0, 1\}$). اگر (F, τ) یک LGT-فضا باشد، آنگاه برای هر عضو $a \in F$، درون و بستار a به‌ترتیب با a° و $\overline{a}$ نشان داده و به‌صورت $\bigvee\{t \in \tau : t \leqslant a\}$ و $\bigwedge\{f \in \tau^* : a \leqslant f\}$ تعریف می‌شوند. واضح است که $a^\circ \in \tau$ و $\overline{a} \in \tau^*$، برای هر $a \in F$ و همچنین $f = f^*$، برای هر $f \in \tau^*$. اگر برای $a \in F$، داشته باشیم $\overline{a} = 1$، آنگاه گوییم a در F چگال است. واضح است اگر (F, τ) یک LGT-فضا باشد و $a \in F$، آنگاه (F_a, τ_a) نیز یک LGT-فضا است که در آن $F_a = \downarrow a = \{x \in F : x \leqslant a\}$ و $\tau_a = \{s \wedge a : s \in \tau\}$. (F_a, τ_a) را یک زیرفضا از (F, τ) گوییم. یک LGT-فضای (F, τ) را فشرده گوییم هرگاه برای هر خانواده از اعضای باز $\{t_\alpha\}_{\alpha\in A}$ که $\bigvee_{\alpha\in A} t_\alpha = 1$، زیرخانواده‌ی $\{t_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n}$ از $\{t_\alpha\}_{\alpha\in A}$ موجود باشد به طوری که $\bigvee_{i=1}^{n} t_{\alpha_i} = 1$. مفاهیم شمارا فشرده و لیندلوف نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. فرض کنیم $\{(F_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ یک خانواده از LGT-فضاها باشد، آنگاه

$$\tau_{_P} = \left\{ t \in \prod_{\alpha\in A} F_\alpha : t_\alpha \neq 1 \text{ برای تمام } \alpha \text{ در } A \text{ ، } t_\alpha \text{ عضوی از } \tau_\alpha \text{ است و فقط برای تعداد متناهی } \alpha \text{ داریم} \right\}$$

یک LG-توپولوژی روی $\prod_{\alpha\in A} F_\alpha$ است، این فضا LGT-فضای حاصل‌ضرب نامیده می‌شود. فرض کنیم (F, τ) یک LGT-فضا باشد و $B \subseteq \tau$؛ گوییم B یک پایه برای τ است، هرگاه برای هر $t \in \tau$، بتوان $B' \subseteq B$ را یافت به طوری که $t = \bigvee B'$.

فرض کنیم F_1 و F_2 دو چارچوب باشند. گوییم نگاشت $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت حافظ وست است، هرگاه برای هر $E \subseteq F_1$ داشته باشیم $\phi(\bigvee E) = \bigvee \phi(E)$. همچنین نگاشت $\psi : F_2 \to F_1$ را یک الحاق راست ϕ گوییم، اگر برای هر $a \in F_1$ و $b \in F_2$

$$\phi(a) \leqslant b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \leqslant \psi(b).$$

به طور مشابه نگاشت‌های حافظ رسند و الحاق چپ نیز تعریف می‌شوند. به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر ϕ یک نگاشت حافظ وست (رسند) باشد، آنگاه ϕ دارای یک نگاشت الحاق راست (چپ) منحصر به فرد است و این نگاشت الحاق

راست (چپ) منحصر به فرد، که با $\phi_*(\phi^*)$ نشان داده می شود، یک حافظ رسند (وست) است. یک نگاشت الحاق راست را نگاشت RL-الحاقی می‌گوییم، هرگاه ϕ_* نیز حافظ وست باشد. برای اصطلاحات و مفاهیم تعریف نشده، خواننده را به [۱، ۹، ۱۲] ارجاع می‌دهیم.

گزاره ۱.۱. فرض کنیم F_1، F_2 و F_3 سه چارچوب، $\phi : F_1 \to F_2$ و $\psi : F_2 \to F_3$ دو نگاشت حافظ وست باشند. آن‌گاه

(الف) $\phi_*(b) = \bigvee_{\phi(x)\leqslant b} x$، برای هر $b \in F_2$.

(ب) $\phi_*(b) = \max\{x \in F_1 : \phi(x) \leqslant b\}$، برای هر $b \in F_2$.

(پ) $\phi(\phi_*(b)) \leqslant b$، برای هر $b \in F_2$.

(ت) $\phi \circ \psi$ یک نگاشت حافظ وست است و $(\phi \circ \psi)_* = \psi_* \circ \phi_*$.

اثبات. (الف). ازآن‌جا که ϕ یک نگاشت حافظ وست است، ϕ دارای یک نگاشت الحاق راست منحصر به فرد است. پس کافی است نشان دهیم $\nu : F_2 \to F_1$، که با ضابطه‌ی $\nu(b) = \bigvee_{\phi(x)\leqslant b} x$ تعریف می‌شود، یک الحاق راست ϕ است. حال فرض کنیم $\phi(a) \leqslant b$، آن‌گاه $a \leqslant \bigvee_{\phi(x)\leqslant b} x = \nu(b)$. به‌عکس، اگر $a \leqslant \nu(b) = \bigvee_{\phi(x)\leqslant b} x$، آن‌گاه

$$\phi(a) \leqslant \phi\Big(\bigvee_{\phi(x)\leqslant b} x\Big) = \bigvee_{\phi(x)\leqslant b} \phi(x) \leqslant b.$$

لذا ν یک الحاق راست ϕ است.
(ب)، (پ) و (ت) بدیهی‌اند. □

می‌توان گزاره‌ای مشابه با گزاره‌ی بالا برای نگاشت‌های حافظ رسند ارائه و اثبات کرد.

۲ توسیع‌ها و برخی خواص مرتبط

در این بخش، تعدادی نگاشت معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که رسته‌های این نگاشت‌ها با یکدیگر برابر نیستند. سپس ثابت می‌کنیم اکثر ویژگی‌های توابع پیوسته را دارند. پس از آن، نشان داده می‌شود که نگاشت‌های معرفی شده توسیع‌هایی از توابع پیوسته‌اند. در آخر، یک تابعگون از رسته‌های فضاهای توپولوژی به رسته‌ی LGT-فضاها معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا باشند. یک نگاشت حافظ وست $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت OLG (CLG) نامیده می‌شود اگر برای هر $t \in \tau_2$ $(f \in \tau_2^*)$، $\phi_*(t) \in \tau_1$ $(\phi_*(f) \in \tau_1^*)$. گوییم ϕ یک نگاشت LG است اگر هم OLG و هم CLG باشد.

در [۲] نگاشت OLG، تابع پیوسته‌ی ضعیف نامیده می‌شود (تعریف ۴.۲ و گزاره ۵.۲ را در [۲] ملاحظه بفرمایید). البته به این دلیل که این مفهوم با استفاده از مجموعه‌های باز معرفی شده است و می‌خواهیم با مجموعه‌های بسته هم یک توسیع از توابع پیوسته از توپولوژی را معرفی کنیم، ما ترجیح می‌دهیم آن را نگاشت OLG بنامیم.
فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا باشند. به‌آسانی می‌توان دید که اگر $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت OLG باشد، آن‌گاه برای هر $u \in \tau_2$،

$$\phi_*(u) = \bigvee_{\phi(x)\leqslant u} x = \bigvee_{\substack{\phi(t)\leqslant u\\ t\in\tau_1}} t = \max\{t \in \tau_1 : \phi(t) \leqslant u\}.$$

گزاره ۲.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا باشند.

(الف) نگاشت همانی $I_F : (F_1, \tau_1) \to (F_2, \tau_2)$ یک نگاشت OLG است اگر و تنها اگر $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

(ب) نگاشت همانی $I_F : (F_1, \tau_1) \to (F_2, \tau_2)$ یک نگاشت CLG است اگر و تنها اگر $\tau_2^* \subseteq \tau_1^*$.

اثبات. اثبات سر راست است. □

در مثال بعد، با استفاده از گزاره‌ی فوق، نشان می‌دهیم که یک نگاشت CLG لزوماً که یک نگاشت OLG نیست.

مثال ۳.۲. فرض کنیم $F = \{0, a, 1\}$، $\tau_1 = \{0, 1\}$ یک LG-توپولوژی بدیهی و $\tau_2 = \{0, a, 1\}$ یک LG-توپولوژی گسسته باشد. آن‌گاه $\tau_1^* = \{0, 1\}$ و $\tau_2^* = \{0, 1\}$. بنا به گزاره‌ی بالا، $I_F : (F, \tau_1) \to (F, \tau_2)$ یک نگاشت CLG است که OLG نیست.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم (F, τ) یک LGT-فضا باشد.

(الف) τ یک LG-توپولوژی گسسته روی F است اگر و تنها اگر برای هر LGT-فضای (F', τ')، هر نگاشت حافظ وست $\phi : F \to F'$ یک نگاشت OLG باشد.

(ب) $\tau^* = F$ اگر و تنها اگر برای هر LGT-فضای (F', τ')، هر نگاشت حافظ وست $\phi : F \to F'$ یک نگاشت CLG باشد.

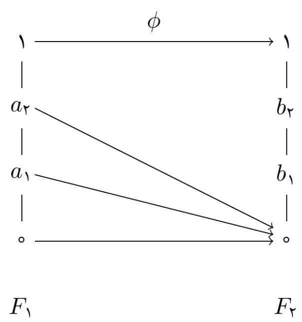
(پ) اگر برای هر LGT-فضای (F', τ')، هر نگاشت حافظ وست $\phi : F \to F'$ یک نگاشت OLG باشد، آن‌گاه τ یک LG-توپولوژی بدیهی روی F است.

(ت) اگر برای هر LGT-فضای (F', τ')، هر نگاشت حافظ وست $\phi : F \to F'$ یک نگاشت CLG باشد، آن‌گاه $\tau^* = \{0, 1\}$.

اثبات. (الف⇐). واضح است.
(الف⇒). ازآن‌جا که نگاشت همانی $I_F : (F, \tau) \to (F, F)$ یک نگاشت OLG است، پس بنا به گزاره‌ی ۲.۲، $\tau = F$ یک LG-توپولوژی گسسته روی F است.
(ب). اثبات مشابه قسمت (الف) است.
(پ). فرض کنیم τ' توپولوژی بدیهی روی F باشد. ازآن‌جا که $I_F : (F, \tau') \to (F, \tau)$ یک OLG است، بنا به گزاره‌ی ۲.۲، نتیجه می‌شود که $\tau = \tau'$.
(ت). اثبات مشابه قسمت (پ) است. □

در مثال بعد، نشان می‌دهیم که عکس قسمت‌های (پ) و (ت) در نتیجه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد.

مثال ۵.۲. فرض کنیم



و $\tau_1 = \{0, a_2, 1\}$ و τ_2 یک LG-توپولوژی بدیهی باشد. آن‌گاه $\tau_1^* = \{0, 1\}$ و $\tau_2^* = \{0, 1\}$. واضح است که ϕ حافظ وست است و به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که ϕ یک نگاشت OLG است که CLG نیست.

لم ۶.۲. فرض کنیم (F, τ) یک LGT-فضا باشد. اگر $\tau^* = F$، آن‌گاه τ یک LG-توپولوژی گسسته است.

اثبات. فرض کنیم $a \in F$، آنگاه $t, u, v \in \tau$ وجود دارند به طوری که $a = t^*$، $t = u^*$ و $u = v^*$، پس بنا به [۱، نکته ۱.۱]،

$$a = t^* = u^{**} = v^{***} = v^* = u \in \tau.$$

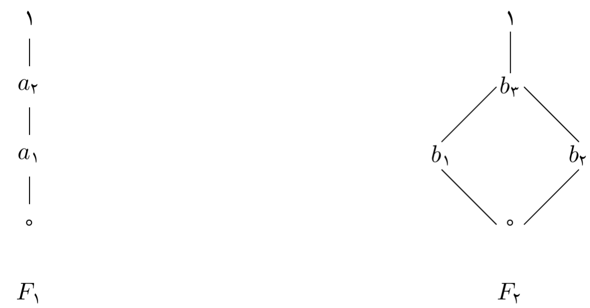
لذا $F = \tau$ یک LG-توپولوژی گسسته است. $\square$

حال نتیجه‌ی ۴.۲ و لم ۶.۲ نتیجه‌ی بعد را استنتاج می‌کنند.

نتیجه ۷.۲. فرض کنیم (F, τ) یک LGT-فضا باشد. اگر برای هر LGT-فضای (F', τ')، هر نگاشت حافظ وست $\phi : (F, \tau) \to (F', \tau')$ یک نگاشت CLG باشد، آنگاه τ یک LG-توپولوژی گسسته است.

در مثال بعد، یک نگاشت OLG ارائه می‌دهیم که نگاشت CLG نیست و نشان می‌دهیم که عکس نتیجه‌ی فوق برقرار نیست.

مثال ۸.۲. فرض کنیم



و $F_۱ = \tau_۱$ و $F_۲ = \tau_۲$ دو LG-توپولوژی‌های گسسته باشند. آنگاه نگاشت $\phi : F_۱ \to F_۲$، با ضابطه‌ی $\phi(۰) = ۰$، $\phi(a_۱) = b_۱$، $\phi(a_۲) = b_۳$ و $\phi(۱) = ۱$، یک نگاشت OLG است، بنا به نتیجه‌ی ۷.۲. اما $b_۱ = b_۲^* \in \tau_۲^*$ و $\phi_*(b_۱) = a_۱ \notin \{۰, ۱\} = \tau_۱^*$ و درنتیجه ϕ یک نگاشت CLG نیست.

گزاره ۹.۲. فرض کنیم $(F_۱, \tau_۱)$ و $(F_۲, \tau_۲)$ دو LGT-فضا باشند. اگر $\phi : F_۱ \to F_۲$ یک نگاشت OLG باشد و داشته باشیم $\phi_*(a^*) = \left(\phi_*(a)\right)^*$، آنگاه ϕ یک نگاشت LG است.

اثبات. روشن است. $\square$

در قضیه‌ی زیر [۲، گزاره ۲۱.۲] را توسیع می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنیم $(F_۱, \tau_۱)$ و $(F_۲, \tau_۲)$ دو LGT-فضا و $\phi : F_۱ \to F_۲$ یک نگاشت حافظ وست باشد. آنگاه موارد زیر معادل‌اند.

(الف) ϕ یک نگاشت CLG است.

(ب) $\phi(\overline{a}) \leqslant \overline{\phi(a)}$، برای هر $a \in F_۱$.

(پ) $\overline{\phi_*(b)} \leqslant \phi_*(\overline{b})$، برای هر $b \in F_۲$.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب). چون $\phi(a) \leqslant \overline{\phi(a)}$، بنابراین $a \leqslant \phi_*(\overline{\phi(a)})$. اما $\overline{\phi(a)} \in \tau_۲^*$، پس $\phi_*(\overline{\phi(a)}) \in \tau_۱^*$، ازاین‌رو $\overline{a} \leqslant \phi_*(\overline{\phi(a)})$ و درنتیجه $\phi(\overline{a}) \leqslant \overline{\phi(a)}$.
(ب) $\Leftarrow$ (پ). ازآن‌جا که $\phi_*(b) \leqslant \phi_*(b)$، پس $\phi(\phi_*(b)) \leqslant b$. به این ترتیب، بنا به فرض، داریم $\phi(\overline{\phi_*(b)}) \leqslant \overline{\phi(\phi_*(b))} \leqslant \overline{b}$ و درنتیجه $\overline{\phi_*(b)} \leqslant \phi_*(\overline{b})$.
(پ) $\Leftarrow$ (الف). برای هر $t \in \tau_۲$، داریم $\overline{\phi_*(t^*)} \leqslant \phi_*(\overline{t^*}) = \phi_*(t^*)$، پس $\overline{\phi_*(t^*)} = \phi_*(t^*)$ و ازاین‌رو $\phi_*(t^*) \in \tau_۱^*$. درنتیجه ϕ یک نگاشت CLG است. $\square$

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا و $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت CLG پوشا باشد. اگر a در F_1 چگال باشد، آن‌گاه $\phi(a)$ در F_2 چگال است.

اثبات. به‌آسانی از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود. $\square$

در قضیه‌ی زیر تقریباً حکم مشابه با قضیه‌ی ۱۰.۲ را برای مجموعه‌های باز و نگاشت OLG بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا و $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت حافظ وست باشد. در این صورت ϕ یک نگاشت OLG است اگر و تنها اگر $\phi_*(b^\circ) \leqslant \phi_*(b)^\circ$، برای هر $b \in F_2$.

اثبات. $(\Leftarrow)$. ازآن‌جا که $b^\circ \in \tau_2$، پس $\phi_*(b^\circ) \in \tau_1$، بنابراین

$$\phi_*(b^\circ) = \phi_*(b^\circ)^\circ \leqslant \phi_*(b)^\circ.$$

$(\Rightarrow)$. برای هر $t \in \tau_2$، داریم $\phi_*(t) = \phi_*(t^\circ) \leqslant \phi_*(t)^\circ$، پس $\phi_*(t) = \phi_*(t)^\circ \in \tau_1$ و درنتیجه ϕ یک نگاشت OLG است. $\square$

در گزاره‌ی زیر حکم مشابه با [۲، گزاره ۹.۲] را برای نگاشت‌های CLG و LG می‌آوریم. چون اثبات آن نیز شبیه به اثبات همان گزاره است، بنابراین از بیان اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1)، (F_2, τ_2) و (F_3, τ_3) سه LGT-فضا باشند.

(الف) اگر $\phi : F_1 \to F_2$ و $\psi : F_2 \to F_3$ نگاشت‌های CLG باشند، آن‌گاه $\psi \circ \phi : F_1 \to F_3$ یک نگاشت CLG است.

(ب) اگر $\phi : F_1 \to F_2$ و $\psi : F_2 \to F_3$ نگاشت‌های LG باشند، آن‌گاه $\psi \circ \phi : F_1 \to F_3$ یک نگاشت LG است.

در گزاره‌ی بعد، نشان می‌دهیم که نگاشت‌های CLG، OLG و LG توسیع‌هایی از توابع پیوسته در توپولوژی‌اند. فرض کنیم $f : X \to Y$؛ قرار می‌دهیم $\mho(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$، با ضابطه‌ی

$$\forall S \in \mathcal{P}(X) \qquad \mho(f)(S) = f(S)$$

گزاره ۱۴.۲. اگر (X, τ) و (Y, τ') دو فضای توپولوژی باشند و $f : X \to Y$، آن‌گاه احکام زیر معادل‌اند.

(الف) $\mho(f)$ یک نگاشت OLG است.

(ب) $\mho(f)$ یک نگاشت CLG است.

(پ) $\mho(f)$ یک نگاشت LG است.

(ت) f یک تابع پیوسته است.

اثبات. ازآن‌جا که $\mho(f)_*(S) = \bigvee_{\mho(f)(A) \subseteq S} A = \bigcup_{f(A) \subseteq S} A = f^{-1}(S)$، موارد فوق معادل‌اند. $\square$

در [۲، گزاره ۶.۲] نشان داده شده است که تحدید هر نگاشت OLG روی یک زیرفضا، باز یک نگاشت OLG است. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم حکم مشابه در حالتی که زیرفضا بسته باشد، برای نگاشت‌های CLG و LG برقرارند. با ملاحظه‌ی [۱، گزاره ۴.۳]، اثبات گزاره‌ی زیر مشابه اثبات [۲، گزاره ۶.۲] است، ازاین‌رو از بیان اثبات صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره ۱۵.۲. فرض کنیم (F, τ) و (F', τ') دو LGT-فضا، $a \in F^*$ و $\phi : (F, \tau) \to (F', \tau')$ یک نگاشت حافظ وست باشد.

(الف) هرگاه ϕ یک نگاشت CLG باشد، آن‌گاه $\phi|_{F_a} : (F_a, \tau_a) \to (F', \tau')$ یک نگاشت CLG است.

(ب) هرگاه ϕ یک نگاشت LG باشد، آن‌گاه $\phi|_{F_a} : (F_a, \tau_a) \to (F', \tau')$ یک نگاشت LG است.

واضح است که هر عضو از چارچوب متمم‌دار، متمم عضوی است، بنابراین قضیه‌ی فوق نتیجه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

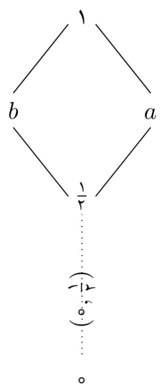
نتیجه ۱۶.۲. فرض کنیم (F, τ) و (F', τ') دو LGT-فضا، $a \in F$ و $\phi : (F, \tau) \to (F', \tau')$. اگر ϕ یک نگاشت LG و F متمم‌دار باشد، آن‌گاه $\phi|_{F_a} : (F_a, \tau_a) \to (F', \tau')$ یک نگاشت LG است.

در [۲، گزاره ۷.۲] لم چسب در توپولوژی برای هر خانواده از مجموعه باز به مبحث LG-توپولوژی به نگاشت‌های OLG و اعضای باز توسیع داده شده است. در گزاره‌ی زیر ادعا می‌کنیم که این گزاره در حالت نگاشت‌های CLG و اعضای بسته نیز قابل توسیع است. البته چون اثبات آن مشابه اثبات [۲، گزاره ۷.۲] است، از بیان اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

گزاره ۱۷.۲. فرض کنیم $\phi : F \to F'$ یک نگاشت حافظ وست باشد. هرگاه (F, τ) و (F', τ') دو LGT-فضا، $s, t \in \tau_1^*$، $\phi|_{F_s}$ و $\phi|_{F_t}$ نگاشت‌های CLG باشند و $s \vee t = 1$، آن‌گاه ϕ یک نگاشت CLG است.

در مثال بعد نشان می‌دهیم تصویر یک LGT-فضای فشرده تحت یک نگاشت LG لزوماً فشرده نیست.

مثال ۱۸.۲. فرض کنیم $F_2 = [0, 1]$ با رابطه‌ی معمولی و $F_1 = [0, \frac{1}{2}] \cup \{a, b, 1\}$ با رابطه‌ی تعریف شده در زیر باشد.



F_1

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که F_1 و F_2 دو چارچوب‌اند. $\tau_1 = F_1$ و $\tau_2 = F_2$ را درنظر بگیرید. واضح است که $\tau_1^* = \{0, 1, a, b\}$، $\tau_2^* = \{0, 1\}$، (F_1, τ_1) یک LGT-فضای فشرده است، (F_2, τ_2) یک LGT-فضای فشرده نیست و نگاشت $\phi : (F_1, \tau_1) \to (F_2, \tau_2)$، با ضابطه‌ی

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \notin [0, \frac{1}{2}] \\ 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

یک نگاشت LG پوشا است.

گزاره ۱۹.۲. فرض کنیم (F_1, τ_1) و (F_2, τ_2) دو LGT-فضا، $\phi : F_1 \to F_2$ یک نگاشت OLG پوشا باشد و $\bigvee_{\alpha \in A} u_\alpha = 1$ نتیجه دهد $\bigvee_{\alpha \in A} \phi_*(u_\alpha) = 1$، برای هر زیرخانواده‌ی $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از τ_2.

(الف) اگر F_1 فشرده باشد، آن‌گاه F_2 نیز فشرده است.

(ب) اگر F_1 شمارا فشرده باشد، آن‌گاه F_2 نیز شمارا فشرده است.

(پ) اگر F_1 لیندلوف باشد، آن‌گاه F_2 نیز لیندلوف است.

اثبات. (الف). فرض کنیم $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک خانواده از اعضای باز $F_۲$ باشد و $\bigvee_{\alpha\in A} u_\alpha = ۱$. ازآن‌جا که ϕ یک نگاشت OLG است، نتیجه می‌شود که $t_\alpha = \phi_*(u_\alpha) \in \tau_\alpha$. پس بنا به فرض، $\bigvee_{\alpha\in A} t_\alpha = ۱$. ازآن‌جا که $F_۱$ فشرده است، $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n \in A$ وجود دارند به طوری که $\bigvee_{i=۱}^{n} t_{\alpha_i} = ۱$، ازاین‌رو

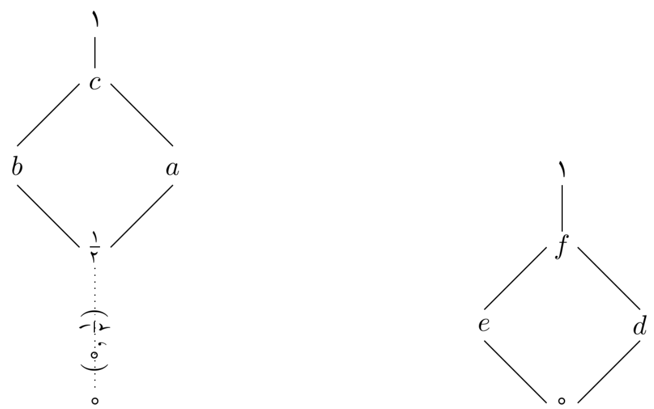
$$۱ = \phi\Big(\bigvee_{i=۱}^{n} t_{\alpha_i}\Big) = \bigvee_{i=۱}^{n} \phi(t_{\alpha_i}) = \bigvee_{i=۱}^{n} u_{\alpha_i}.$$

درنتیجه $F_۲$ فشرده است. (ب) و (پ). مشابه قسمت (الف) اثبات می‌شوند. □

در مقاله‌ی [۲] یک نگاشت پیوسته نامیده شده است، هرگاه یک نگاشت OLG باشد که الحاق راست آن حافظ رسند باشد. پس هر نگاشت پیوسته در شرایط گزاره‌ی فوق صدق می‌کند، بنابراین [۲، گزاره ۲۳.۲] از گزاره‌ی فوق نتیجه می‌شود.

فرض کنیم، $(F_۱, \tau_۱)$ و $(F_۲, \tau_۲)$ دو چارچوب، $\phi : F_۱ \to F_۲$ یک نگاشت حافظ وست و B یک پایه برای $\tau_۲$ باشد. در مثال بعد نشان می‌دهیم که اگر $\phi_*(b) \in \tau_۱$، برای هر $b \in B$، آن‌گاه ϕ لزوماً یک نگاشت OLG نیست. البته در [۲، گزاره ۱۶.۲] ثابت شده است که اگر ϕ یک نگاشت RL-الحاقی باشد که در شرط فوق صدق کند، تابع مورد نظر پیوسته خواهد شد و درنتیجه یک نگاشت OLG است.

مثال ۲۰.۲. فرض کنیم



$F_۱$ $F_۲$

$F_۲ = \tau_۲$، $\tau_۱ = [۰, \frac{۱}{۲}] \cup \{۱\}$، $B = \{۰, d, e, ۱\}$ و $\phi : F_۱ \to F_۲$ با ضابطه‌ی $\phi|_{[۰,\frac{۱}{۲}]} = ۰$، $\phi(۱) = ۱$ و $\phi(a) = \phi(b) = \phi(c) = f$ تعریف شده باشد. آن‌گاه $\phi_*(۱) = c \notin \tau_۱$، پس ϕ یک نگاشت OLG نیست، اما $\phi_*(x) \in \tau_۱$، برای هر $x \in B$.

برای هر فضای توپولوژی (X, τ)، قرار می‌دهیم $\mho(X, \tau) = (\mathcal{P}(X), \tau)$. حال نتیجه‌ی زیر را از قضیه‌ی ۱۳.۲، گزاره‌ی ۱۴.۲ و این حقیقت که $\mho(I_X) = I_{\mathcal{P}(X)} = I_{\mho(X)}$ به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۲۱.۲. اگر **Top** رسته‌ی فضاهای توپولوژی و توابع پیوسته باشد و **Lgt** رسته‌ی LGT-فضاها و نگاشت‌های LG باشد، آن‌گاه $\mho : \mathbf{Top} \to \mathbf{Lgt}$ یک تابعگون است.

۳ حاصل‌ضرب و خارج قسمت

در این بخش، با الهام از مفاهیم شناخته شده در زمینه‌ی توپولوژی، LGT-فضای ضعیف تولید شده توسط خانواده‌ای از نگاشت‌ها، LGT-فضای خارج قسمتی و فضای تجزیه‌ی معرفی و مطالعه می‌شوند.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $\{(F_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ یک خانواده از LGT-فضاها، F یک چارچوب و $\phi_\alpha : F \to F_\alpha$ یک نگاشت حافظ وست باشد، برای هر $\alpha \in A$. در این صورت LG-توپولوژی تولیدشده توسط خانواده‌ی

$$\{\phi_{\alpha *}(t_\alpha) : \alpha \in A \text{ و } t_\alpha \in \tau_\alpha\}$$

را LG-توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ می‌نامیم و F همراه با این توپولوژی را LGT-فضای ضعیف تولیدشده توسط $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ می‌نامیم.

در واقع، LG-توپولوژی حاصل‌ضرب توسیع مناسبی از توپولوژی حاصل‌ضرب نیست. اما می‌توان گفت LG-توپولوژی ضعیف تولیدشده توسط $\{\mho(\pi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ روی $\mathcal{P}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ منطبق با $\mho(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \tau)$ است که در آن τ توپولوژی حاصل‌ضرب است.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $\{(F_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ یک خانواده از LGT-فضاها، (F, τ) یک LGT-فضای ضعیف تولیدشده توسط $\{\phi_\alpha : F \to F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از نگاشت‌های حافظ وست، (F', τ') یک LGT-فضا باشد و $\psi : F' \to F$ یک نگاشت حافظ وست باشد. در این صورت ψ یک نگاشت OLG است اگر و تنها اگر $\phi_\alpha \circ \psi$ یک نگاشت OLG باشد، برای هر $\alpha \in A$.

اثبات. مشابه [۲، گزاره ۱۷.۲] اثبات می‌شود. □

در مثال زیر نشان می‌دهیم که قضیه‌ی فوق برای حالت CLG صادق نیست.

مثال ۳.۳. فرض کنیم $F_۱$ و $F_۲$ چارچوب‌ها، ϕ نگاشت و $\tau_۱$ و $\tau_۲$ به‌ترتیب دو LG-توپولوژی روی $F_۱$ و $F_۲$ معرفی شده در مثال ۵.۲ باشند. اگر خانواده‌ی تابعی که می‌خواهیم با استفاده از آن LG-توپولوژی ضعیف تولیدشده را معرفی کنیم، خانواده‌ی تک عضوی $\{\phi\}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه LG-توپولوژی ضعیف تولیدشده روی $F_۱$ برابر LG-توپولوژی بدیهی $\tau_۱$ خواهد شد. حال با وجود این که $I_{F_۱}$ یک نگاشت CLG است، اما $\phi \circ I_{F_۱} = \phi$ یک نگاشت CLG نیست.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم (F', τ') یک LGT-فضا و F یک چارچوب باشد. اگر $\phi : F' \to F$ یک نگاشت RL-الحاقی پوشا باشد. در این صورت $\tau_\phi = \{t \in F : \phi_*(t) \in \tau_۱\}$ بزرگ‌ترین LG-توپولوژی روی F است، که در آن ϕ یک نگاشت OLG است.

اثبات. ازآن‌جا که ϕ_* یک نگاشت حافظ وست است، پس $\phi_*(۰) = ۰$ و درنتیجه $۰ \in \tau_\phi$. چون ϕ پوشا است، پس $a \in F$ وجود دارد به طوری که $\phi(a) = ۱$. به این ترتیب

$$\phi(۱) = \phi(a \vee ۱) = \phi(a) \vee \phi(۱) = ۱.$$

بنابراین $\phi_*(۱) = \bigvee_{\phi(x) \leqslant ۱} x = ۱$ و ازاین‌رو $۱ \in \tau_\phi$. ازآن‌جا که برای هر زیرخانواده $\{t_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از τ' و $t_۱$ و $t_۲$ در τ' داریم $\phi_*(\bigvee_{\alpha \in A} t_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in A} \phi_*(t_\alpha)$ و $\phi_*(t_۱ \wedge t_۲) = \phi_*(t_۱) \wedge \phi_*(t_۲)$. بنابراین $\bigvee_{\alpha \in A} t_\alpha \in \tau_\phi$ و $t_۱ \wedge t_۲ \in \tau_\phi$. به این ترتیب می‌توان گفت τ_ϕ یک LG-توپولوژی روی F است. بدیهی است که τ_ϕ بزرگ‌ترین LG-توپولوژی روی F است، که در آن ϕ یک نگاشت OLG است. □

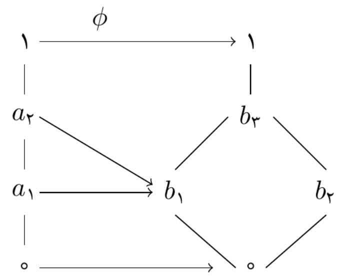
تعریف ۵.۳. فرض کنیم (F', τ') یک LGT-فضا و F یک چارچوب باشد. اگر $\phi : F' \to F$ نگاشت RL-الحاقی پوشا باشد. در این صورت بنا به گزاره‌ی فوق، $\tau_\phi = \{t \in F : \phi_*(t) \in \tau'\}$ یک LG-توپولوژی روی F است. τ_ϕ یک LG-توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط ϕ روی F نامیده می‌شود.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم (F', τ') و (F'', τ'') دو LGT-فضا و (F, τ_ϕ) یک LG-توپولوژی خارج قسمتی القاء شده توسط $\phi : F' \to F$ باشد. نگاشت حافظ وست $\psi : F \to F''$ یک نگاشت OLG است اگر و تنها اگر $\psi \circ \phi : F' \to F''$ یک نگاشت OLG باشد.

اثبات. $(\Leftarrow)$. بنا به [۲، گزاره ۹.۲] بدیهی است.
$(\Rightarrow)$. اگر $t \in \tau''$، آن‌گاه $(\psi \circ \phi)_*(t) \in \tau'$، پس $\phi_*(\psi_*(t)) \in \tau'$، بنا به گزاره‌ی ۱.۱. ازاین‌رو $\psi_*(t) \in \tau_\phi$ و درنتیجه ψ یک نگاشت OLG است. □

در مثال زیر نشان می‌دهیم که قضیه‌ی فوق برای حالت CLG برقرار نیست.

مثال ۷.۳. فرض کنیم



F_1 $\qquad$ F_2

و $\tau = \{0, a_2, 1\}$ یک LG-توپولوژی روی F_1 باشد. دراین صورت به‌سادگی می‌توان دید که $\tau_\phi = F_2$ و درنتیجه ϕ یک نگاشت CLG نیست. به این ترتیب با این وجود که $I_{F_2} : (F_2, \tau_\phi) \to (F_2, \tau_\phi)$ یک نگاشت CLG است اما $I_{F_2} \circ \phi = \phi$ یک نگاشت CLG نیست.

تعریف ۸.۳. فرض کنیم F یک چارچوب باشد. $D \subseteq F$ یک افراز برای F می‌نامیم، هرگاه

(الف) $0 \notin D$.

(ب) $\bigvee D = 1$.

(پ) برای هر $d_1, d_2 \in D$، $d_1 \neq d_2$ نتیجه دهد $d_1 \wedge d_2 = 0$.

لم ۹.۳. فرض کنیم F یک چارچوب، $a \in F$، $D \subseteq F$ یک افراز برای F، $T \subseteq D$ و $T_a = \{d \in D : d \wedge a \neq 0\}$ باشد. در این صورت $a \leqslant \bigvee T$ اگر و تنها اگر $T_a \subseteq T$.

اثبات. اگر $a = 0$، آن‌گاه اثبات واضح است. حال فرض کنیم $a \neq 0$.
($\Leftarrow$). برخلاف حکم، فرض کنیم $d' \in T_a \setminus T$ موجود باشد، آن‌گاه

$$a = a \wedge \big(\bigvee_{d \in T} d\big) = \bigvee_{d \in T} (d \wedge a) \ \Rightarrow\ 0 \neq d' \wedge a = d' \wedge \Big[\bigvee_{d \in T} (d \wedge a)\Big] = \bigvee_{d \in T} (d' \wedge d \wedge a) = 0$$

که یک تناقض است.
($\Rightarrow$). ازآن‌جا که برای هر $d \in D \setminus T$، داریم $d \wedge a = 0$،

$$\begin{aligned} a = a \wedge 1 = a \wedge \Big(\bigvee_{d \in D} d\Big) &= \bigvee_{d \in D} (a \wedge d) \\ &= \Big[\bigvee_{d \in T} (a \wedge d)\Big] \vee \Big[\bigvee_{d \in D \setminus T} (a \wedge d)\Big] \\ &= \bigvee_{d \in T} (a \wedge d) = a \wedge \Big(\bigvee_{d \in T} d\Big). \end{aligned}$$

درنتیجه $a \leqslant \bigvee_{d \in T} d$. $\square$

گزاره ۱۰.۳. فرض کنیم (F,τ) یک LGT-فضا باشد. اگر D یک افراز برای F باشد، آن‌گاه

$$\tau_D = \{T \subseteq D : \bigvee T \in \tau\}$$

یک توپولوژی روی D است.

اثبات. روشن است که $\bigvee \emptyset = 0$، و بنا به فرض، $\bigvee D = 1$، پس $\emptyset, D \in \tau_D$. فرض کنیم $T_1, T_2 \in \tau_D$. بنا به لم ۹.۳،

$$\begin{aligned} a \leqslant \bigvee_{d \in T_1 \cap T_2} d \quad &\Leftrightarrow \quad T_a \subseteq T_1 \cap T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_a \subseteq T_1 \quad \text{و} \quad T_a \subseteq T_2 \\ &\Leftrightarrow \quad a \leqslant \bigvee_{d \in T_1} d \quad \text{و} \quad a \leqslant \bigvee_{d \in T_2} d \\ &\Leftrightarrow \quad a \leqslant \Big(\bigvee_{d \in T_1} d\Big) \wedge \Big(\bigvee_{d \in T_2} d\Big). \end{aligned}$$

ازاین‌رو $\bigvee_{d \in T_1 \cap T_2} d = \Big(\bigvee_{d \in T_1} d\Big) \wedge \Big(\bigvee_{d \in T_2} d\Big) \in \tau$ و درنتیجه $T_1 \cap T_2 \in \tau_D$. حال فرض کنیم $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau_D$. ازآن‌جا که $\bigvee_{d \in \bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha} d = \bigvee_{\alpha \in A} \bigvee_{d \in T_\alpha} d \in \tau$، پس $\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \in \tau_D$. به این ترتیب (D, τ_D) یک فضای توپولوژی است. □

تعریف ۱۱.۳. فرض کنیم (F,τ) یک LGT-فضا و D یک افراز برای F باشد. بنا به گزاره‌ی قبل

$$\tau_D = \{T \subseteq D : \bigvee T \in \tau\}$$

یک توپولوژی روی D است. τ_D را توپولوژی تجزیه و $(\mathcal{P}(D), \tau_D)$ را LGT-فضای تجزیه می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم (F,τ) یک LGT-فضا و D یک افراز برای F باشد. توپولوژی تجزیه‌ی τ_D یک LG-توپولوژی خارج قسمتی روی $\mathcal{P}(D)$ است.

اثبات. قرار می‌دهیم $P : F \to \mathcal{P}(D)$، با ضابطه‌ی $P(a) = \{d \in D : d \wedge a \neq 0\} = T_a$. برای هر خانواده S از اعضای F، داریم

$$\begin{aligned} d \in T_{\bigvee_{s \in S} s} \Leftrightarrow d \wedge \big(\bigvee_{s \in S} s\big) \neq 0 \Leftrightarrow \bigvee_{s \in S} (d \wedge s) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \exists s \in S \quad d \wedge s \neq 0 \Leftrightarrow \exists s \in S \quad d \in T_s \Leftrightarrow d \in \bigcup_{s \in S} T_s \end{aligned}$$

ازاین‌رو $T_{\bigvee_{s \in S} s} = \bigcup_{s \in S} T_s$، پس $P\big(\bigvee_{s \in S} s\big) = \bigcup_{s \in S} T_s$ و درنتیجه P یک نگاشت حافظ وست است. بنا به لم ۹.۳،

$$a \leqslant \bigvee T \quad \Leftrightarrow \quad T_a \subseteq T \quad \Leftrightarrow \quad P(a) \subseteq T \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant P_*(T)$$

به این ترتیب می‌توان گفت $P_*(T) = \bigvee T$. حال فرض کنیم $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq P(D)$، در این صورت

$$P_*\Big(\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha\Big) = \bigvee_{\alpha \in A} \Big(\bigvee T_\alpha\Big) = \bigvee_{\alpha \in A} P_*(T_\alpha).$$

پس P_* حافظ وست است. در نهایت این که

$$T \in \tau_D \quad \Leftrightarrow \quad P_*(T) = \bigvee T \in \tau \quad \Leftrightarrow \quad T \in \tau_P.$$

بنابراین $\tau_D = \tau_P$. □

واضح است که یک LGT-فضای غیر توپولوژی (F, τ) وجود دارد. چون $\tau = \tau_{I_F}$، که در آن I_F نگاشت همانی است، پس τ یک LG-توپولوژی خارج قسمتی است که توپولوژی تجزیه نمی‌باشد. بنابراین عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست.

فهرست منابع

[1] A. R. Aliabad , A. Sheykhmiri, LG-topology, *Bull. Iran. Math. Soc.* **41**(1) (2015) 239–258.

[2] A. R. Aliabad, H. Zarepour, Continuous functions on LG-spaces, *J. Algebr. Syst.* **8**(2) (2021) 181–200.

[3] C. H. Dowker, D. Papert, Quotient frames and subspaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* **16** (3) (1966) 275–296.

[4] C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen, Jahresber. *Dtsch. Math.-Ver.* **60** (1957) 49–77.

[5] J. R. Isbell, Atomless parts of spaces, *Math. Scand.* **31** (1972) 5–32.

[6] J. C. C. McKinsey, A. Tarski, The algebra of topology, *Ann. Math.* **45**(2) (1944) 141–191.

[7] G. Nöbeling, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Springer, Berlin, 1954.

[8] S. Papert, An abstract theory of topological subspaces, *Proc. Camb. Philos. Soc.* **60** (1964) 197–203.

[9] J. Picado, A. Pultr, *Frames and locales, Topology without points*, Springer, Berlin, 2012.

[10] H. Simmons, A framework for topology, Logic colloquium '77, *Proc., Wroclaw 1977, Stud. Logic Found. Math.* **96** (1978) 239–251.

[11] H. Wallman, Lattices and topological spaces, *Ann. Math.* (2) **39** (1938) 112–126.

[12] S. Willard, *General topology*, Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley Publishing Company. XII, 1970.

On continuous functions on LG-spaces

Mehdi Badie[1] † , **Hossein Kasiri** [1], **Ali Shahidikia** [2]

(1) Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

(2) Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Dezful Branch, Islamic Azad University, Dezful, Iran

Communicated by: Fariborz Azarpanah

Received: 2021/8/3 Accepted: 2021/11/18

Abstract: In this article, we introduce OLG, CLG and LG maps in the context of LGT-spaces, show that they are generalizations of continuous function on LGT-spaces and some properties of them studied. Also, some generalized notions related to continuous functions as weak topology induced, quotient topology and decomposition topology are introduced and studied and is shown that each decomposition space is an LG-quotient space.

Keywords: Frame, LGT-space, LG map, OLG map, CLG map, LGT-quotient topology, decomposition space.

†Corresponding author.

E-mail addresses: badie@jsu.ac.ir (M.Badie), hossein_kasiry@jsu.ac.ir (H. Kasiri), ali.shahidikia@iaud.ac.ir (A. Shahidikia).