مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۶۷۹-۶۸۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/JAMM.2021.38473.1961

تشخیص‌پذیری گروه سوزوکی $\mathrm{Sz}(2^9)$ با استفاده از مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه

حسین پرویزی مساعد[۱]، اشرف دانشخواه[۲] *، سید حسن علوی[۲]

(۱) موسسه آموزش عالی الوند، همدان، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۶/۱۴ تاریخ پذیرش:۱۴۰۰/۸/۳

چکیده: فرض کنیم G یک گروه و $\mathrm{nse}(G)$ مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه در گروه G باشد. در این مقاله، ثابت می‌کنیم اگر G یک گروه و $\mathrm{Sz}(2^9)$ گروه ساده سوزوکی باشد به‌قسمی‌که $\mathrm{nse}(G) = \mathrm{nse}(\mathrm{Sz}(2^9))$، آنگاه گروه G با گروه ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(2^9)$ یکریخت است. به‌عبارت دیگر، گروه ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(2^9)$ به‌طور منحصربه‌فرد توسط مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه‌ی خود مشخص می‌شود. در نتیجه، مسئله تامپسون برای گروه ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(2^9)$ برقرار است.

واژه‌های کلیدی: گروه ساده متناهی، گروه سوزوکی، مرتبه عنصر، گراف اول.

رده‌بندی ریاضی: 20D60; 20D06

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر مسائل نظریه گروه‌ها که به شاخه‌های دیگری از ریاضیات مربوط می‌شوند مورد توجه خاص قرار گرفته‌اند. مسئله قدیمی تامپسون (۱۹۸۷) از این دسته مسائل است که به شاخه میدان‌های جبری مربوط می‌شود:

مسئله تامپسون [۹، مسئله ۱۲.۳۷]. برای گروه متناهی G و عدد طبیعی n، فرض کنیم $G(n) = \{x \in G : x^n = 1\}$. تابعی که مقدارش در n برابر $|G(n)|$ است را نوع G تعریف می‌کنیم. آیا گروه هم‌نوعِ یک گروه حل‌پذیر ، خود حل‌پذیر است؟

این مسئله به مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه گروه G، که آنرا با $\mathrm{nse}(G)$ نمایش می‌دهیم، مربوط می‌شود. در واقع، اگر دو گروه H و G از یک نوع باشند، آنگاه $\mathrm{nse}(G) = \mathrm{nse}(H)$ و $|G| = |H|$. بنابراین اگر یک گروه به‌طور منحصربه‌فرد توسط مرتبه و مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه آن مشخص شود، آنگاه مسئله تامپسون برای آن گروه صادق است. از جمله سؤالات مطرح‌شده در رابطه با

*نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: alavi.s.hassan@basu.ac.ir (S.H. Alavi)، adanesh@basu.ac.ir (A. Daneshkhah)،
h.parvizi.mosaed@alvand.ac.ir (H. Parvizi Mosaed)

مسئله تامپسون این است که آیا این مسئله برای گروه‌های غیر حل‌پذیر ، به‌ویژه گروه‌های ساده غیر آبلی صادق است؟ در این راستا، شائو و همکارانش در مرجع [۱۲]، گروه‌های ساده متناهی را که مرتبه آنها دارای حداکثر چهار شمارنده اول‌اند، مطالعه کردند و ثابت کردند این گروه‌ها به‌وسیله مرتبه و مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه به‌طور منحصربه‌فرد شناسایی می‌شوند. در ادامه این مطالعات، ثابت شد که خانواده گروه‌های ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(q)$ و گروه‌های ساده ری کوچک $^{2}\mathrm{G}_{2}(q)$ توسط مرتبه و مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه تشخیص‌پذیرند [۱، ۲]. در این مقاله شرط ضعیف‌تری را برای تشخیص‌پذیری گروه $\mathrm{Sz}(2^9)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و به مطالعه تشخیص‌پذیری این گروه ساده متناهی فقط توسط مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه می‌پردازیم. در ادامه‌ی مطالعات صورت گرفته [۳، ۴، ۱۱، ۱۳]، در این مقاله ثابت می‌کنیم گروه سوزوکی $\mathrm{Sz}(2^9)$ به‌طور منحصربه‌فرد توسط مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه تشخیص‌پذیر است.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد به‌قسمی‌که $\mathsf{nse}(G) = \mathsf{nse}(H)$، که در آن $H = \mathrm{Sz}(2^9)$ گروه ساده سوزوکی است. در این‌صورت G متناهی است و به‌ویژه $G \cong H$.

با توجه به مطالبی که در بالا آمده است، از آنجایی‌که گروه ساده $\mathrm{Sz}(2^9)$ به‌طور منحصربه‌فرد توسط مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه آن مشخص می‌شود، اگر گروه G هم‌نوع گروه $\mathrm{Sz}(2^9)$ باشد، آنگاه G با $\mathrm{Sz}(2^9)$ یکریخت است. به‌بیان دیگر، مسئله تامپسون برای گروه ساده $\mathrm{Sz}(2^9)$ صادق است.

۲ مفاهیم اولیه

در این بخش، بعضی از مفاهیم مورد نیاز را که در اثبات قضیه اصلی مقاله استفاده می‌شوند بیان می‌کنیم. مفاهیم، تعاریف و نمادهایی را که در این مقاله به آنها اشاره نشده است می‌توان در مراجع [۶، ۸] یافت. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. مجموعه شمارنده‌های اول مرتبه G را با نماد $\pi(G)$ و مجموعه مرتبه عناصر G را با نماد $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای $k \in \pi(G)$، تعداد عناصر از مرتبه k در G را با نماد $\mathsf{m}_k(G)$ و مجموعه تعداد عناصر هم‌مرتبه در G را با نماد $\mathsf{nse}(G)$ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر،

$$\mathsf{m}_k(G) = |\{g \in G \ : \ (g) = k\}|$$

و

$$\mathsf{nse}(G) = \{m_k(G) \ : \ k \in \omega(G)\}.$$

در این مقاله p–زیرگروه سیلوی G را با نماد G_p و تعداد p–زیرگروه‌های سیلوی G را با نماد $\mathsf{n}_p(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی حل‌پذیر از مرتبه mn باشد به‌قسمی‌که $(m,n) = 1$ و $m = p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$. اگر $\pi = \{p_1,\ldots,p_r\}$ و h_m تعداد π–زیرگروه‌های هال G باشد، آنگاه $h_m = q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s}$ و برای هر $1 \le i \le s$ شرایط زیر برقرار است:

(الف) p_j ای موجود است به‌قسمی‌که $q_i^{\beta_i} \equiv 1 \pmod{p_j}$؛

(ب) مرتبه بعضی از فاکتورهای اصلی G توسط $q_i^{\beta_i}$ بخش‌پذیر است.

اثبات. به مرجع [۷] مراجعه شود. □

لم ۲.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $n = p^s m$ که در آن $(p,m) = 1$ و p شمارنده اول فرد مرتبه G است. اگر p–زیرگروه سیلوی G دوری نباشد و $s > 1$، آنگاه تعداد عناصر از مرتبه n یا صفر یا مضربی از p^s است.

اثبات. به مرجع [۱۰] مراجعه شود. □

لم ۳.۲. فرض کنیم G یک گروه شامل بیش از دو عنصر باشد. اگر $s := \mathsf{sup}(\mathsf{nse}(G))$ متناهی باشد، آنگاه G متناهی است و $|G| \le s(s^2 - 1)$.

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه شود. □

لم ۴.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی و m یک شمارنده صحیح مثبت از مرتبه G باشد. اگر $G(m) = \{g \in G : \ g^m = 1\}$، آنگاه m یک شمارنده $|G(m)|$ است.

اثبات. به مرجع [۵] مراجعه شود. □

جدول ۱: تعداد عناصر هم‌مرتبه گروه $\mathrm{Sz}(۲^۹)$.

مرتبه i	تعداد عناصر از مرتبه i
۱	۱
۲	۵ · ۷ · ۱۳ · ۳۷ · ۷۳ · ۱۰۹
۴	$۲^۹$ · ۵ · ۷ · ۱۳ · ۳۷ · ۷۳ · ۱۰۹
۵	$۲^{۱۸}$ · ۷ · ۱۳ · ۳۷ · ۷۳
۷	$۲^{۱۸}$ · ۳ · ۵ · ۱۳ · ۳۷ · ۱۰۹
۱۳	$۲^{۱۸}$ · ۳ · ۵ · ۷ · ۷۳ · ۱۰۹
۳۷	$۲^{۱۸}$ · $۳^۲$ · ۵ · ۷ · ۷۳ · ۱۰۹
۷۳	$۲^{۲۰}$ · $۳^۲$ · ۵ · ۱۳ · ۳۷ · ۱۰۹
۱۰۹	$۲^{۱۸}$ · $۳^۳$ · ۷ · ۱۳ · ۳۷ · ۷۳
۴۸۱	$۲^{۲۰}$ · $۳^۳$ · ۵ · ۷ · ۷۳ · ۱۰۹
۵۱۱	$۲^{۲۱}$ · $۳^۳$ · ۵ · ۱۳ · ۳۷ · ۱۰۹
۵۴۵	$۲^{۲۰}$ · $۳^۳$ · ۷ · ۱۳ · ۳۷ · ۷۳

لم ۵.۲. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $i \in \omega(G)$. در این‌صورت $i \mid \sum_{j\mid i} \mathsf{m}_j(G)$ و $\phi(i) \mid \mathsf{m}_i(G)$ که در آن ϕ تابع اویلر است. به‌ویژه، اگر $i > ۲$ آنگاه $\mathsf{m}_i(G)$ زوج است.

اثبات. اگر $i \in \omega(G)$، آنگاه لم ۴.۲ نتیجه می‌دهد i یک شمارنده $\sum_{j\mid i} \mathsf{m}_j(G)$ است. واضح است که تعداد عناصر از مرتبه i در یک گروه دوری از مرتبه i برابر $\phi(i)$ است. بنابراین اگر k تعداد زیرگروه‌های دوری G از مرتبه i باشد، آنگاه $\mathsf{m}_i(G) = \phi(i)k$. درنتیجه $\phi(i)$ یک شمارنده $\mathsf{m}_i(G)$ است. به‌ویژه، اگر $i > ۲$، آنگاه $\phi(i)$ زوج است و چون $\phi(i) \mid \mathsf{m}_i(G)$، نتیجه می‌گیریم $\mathsf{m}_i(G)$ نیز زوج است. □

لم ۶.۲. فرض کنیم $\mathrm{Sz}(q)$ گروه ساده سوزوکی باشد. در این‌صورت تعداد عناصر هم‌مرتبه $\mathrm{Sz}(q)$ دقیقا یکی از اعداد زیر است:

(الف) ۱، $(q-۱)(q^۲+۱)$، $q(q-۱)(q^۲+۱)$؛

(ب) $\phi(i)q^۲(q \mp \sqrt{۲q}+۱)(q-۱)/۴$ که در آن $i > ۱$ عدد $q \pm \sqrt{۲q}+۱$ را می‌شمارد؛

(پ) $\phi(i)q^۲(q^۲+۱)/۲$ که در آن $i > ۱$ عدد $q-۱$ را می‌شمارد.

اثبات. به مرجع [۱، گزاره ۲.۹] مراجعه شود. □

نتیجه ۷.۲. تعداد عناصر هم‌مرتبه گروه ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(۲^۹)$، اعداد مندرج در جدول ۱ است.

اثبات. نتیجه مستقیم از لم ۶.۲ است. □

۳ اثبات قضیه اصلی

در این بخش، به اثبات قضیه ۱.۱ می‌پردازیم. از این پس، گروه ساده سوزوکی $\mathrm{Sz}(۲^۹)$ را با H نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که G گروهی است که در شرط $\mathsf{nse}(G) = \mathsf{nse}(H)$ صدق می‌کند.

لم ۱.۳. فرض کنیم مفروضات قضیه ۱.۱ برقرار باشد. در این‌صورت G گروهی متناهی است و $\pi(G) = \{۲, ۵, ۷, ۱۳, ۳۷, ۷۳, ۱۰۹\}$. همچنین، اگر $p \in \pi(G)$ عدد فرد باشد، آنگاه

(الف) اگر $p \neq ۱۳$، آنگاه $|G_p| = p$ و $\mathsf{n}_p(G) = \mathsf{m}_p(G)/\phi(p)$؛

(ب) اگر $p = ۱۳$، آنگاه $|G_p| = p^i$ و $\mathsf{n}_p(G) = \mathsf{m}_{p^i}(G)/\phi(p^i)$ که در آن $i = ۱$ یا ۲.

جدول ۲: مقادیر $۱+\mathsf{m}_i(H)$ در اثبات لم ۱.۳.

مرتبه i	$۱+\mathsf{m}_i(H)$
۱	۲
۲	$۲^۹\cdot۳\cdot۸۷۲۱۱$
۴	$۱۱\cdot۳۳۱\cdot۱۸۸۳۷۰۰۱$
۵	$۵\cdot۱۱\cdot۴۱\cdot۲۸۵۷۳۲۳۱$
۷	$۷\cdot۳۱\cdot۴۳\cdot۲۲۰۹۴۰۱۱$
۱۳	$۱۳\cdot۱۶۳\cdot۳۳۷۳\cdot۳۰۶۴۳$
۳۷	$۲۳\cdot۳۷\cdot۷۷۲۰۹۴۱۷۱$
۷۳	$۷۳\cdot۹۸۷۱\cdot۳۴۳۳۲۰۷$
۱۰۹	$۱۹\cdot۱۰۹\cdot۷۵۷۳\cdot۱۱۰۹۲۳$
۴۸۱	$۲۷۹۷\cdot۲۸۱۸۹۵۸۰۵۳$
۵۱۱	$۶۱\cdot۱۵۱\cdot۱۶۱۱۴۹۳۱۷۱$
۵۴۵	$۴۲۵۹\cdot۱۶۳۳۸۸۶۹۸۷$

اثبات. چون $\mathsf{nse}(G)=\mathsf{nse}(H)$ و $\sup(\mathsf{nse}(H))$ متناهی است، لم ۳.۲ نتیجه می‌دهد که G یک گروه متناهی است. فرض کنیم p یک شمارنده اول $|G|$ باشد. در این‌صورت بنابر لم ۵.۲، عدد اول p یک شمارنده‌ی $۱+\mathsf{m}_p(G)$ است منحصربه در جدول ۲ آمده است. با توجه به لم ۵.۲، عدد $p-۱=\phi(p)$ یک شمارنده $\mathsf{m}_p(G)$ است. درنتیجه p قابل محاسبه است و بنابراین

$$\pi(G)\subseteq\{۲,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۹,۳۱,۳۷,۶۱,۷۳,۱۰۹\}.$$

در این‌صورت

$$\mathsf{m}_p(G)=\begin{cases}\mathsf{m}_p(H), & p=۲,۵,۷,۱۳,۳۷,۷۳,۱۰۹;\\ \mathsf{m}_۴(H), & p=۱۱;\\ \mathsf{m}_{۱۰۹}(H), & p=۱۹;\\ \mathsf{m}_۷(H), & p=۳۱;\\ \mathsf{m}_{۵۱۱}(H), & p=۶۱.\end{cases} \tag{۱.۳}$$

ادعا می‌کنیم $۱۱,۱۹,۳۱,۶۱\notin\pi(G)$. برای اثبات این ادعا، ابتدا با توجه به جدول ۱، مشاهده می‌کنیم که $۱۳۳۹۵۶۰۹۵=۵\cdot۷\cdot۱۳\cdot۳۷\cdot۷۳\cdot۱۰۹$ تنها عدد طبیعی فرد از مجموعه $\mathsf{nse}(G)-\{۱\}$ است. لذا از لم ۵.۲ نتیجه می‌گیریم $۲\in\pi(G)$ و $\mathsf{m}_۲(G)=\mathsf{m}_۲(H)$. اگر p شمارنده اول مرتبه G باشد به‌قسمی‌که $p\in\{۱۱,۳۱,۶۱\}$، آنگاه بنابر لم ۵.۲، گروه G عضوی از مرتبه $۲p$ ندارد. بنابراین G_p روی مجموعه تمام عناصر از مرتبه ۲ با تزویج به‌طور نقطه ثابت عمل می‌کند و در نتیجه $\mathsf{m}_۲(G)$ مضربی از $|G_p|$ است که این یک تناقض است. اگر $۱۹\in\pi(G)$، آنگاه لم ۵.۲ نتیجه می‌دهد که $۱۹^۲\notin\omega(G)$. بنابراین بنابر لم ۴.۲، مرتبه ۱۹–زیرگروه سیلوی G، عدد $۱+\mathsf{m}_{۱۹}(G)$ را می‌شمارد. لذا $|G_{۱۹}|=۱۹$ و $\mathsf{n}_{۱۹}(G)=\mathsf{m}_{۱۹}(G)/\phi(۱۹)$. پس ۳ یک شمارنده $\mathsf{n}_{۱۹}(G)$ است در حالی‌که $|G|$ نسبت به ۳ اول است. بنابراین $۱۹\notin\pi(G)$. در نتیجه ادعا ما اثبات می‌شود و داریم $\{۲\}\subseteq\pi(G)\subseteq\{۲,۵,۷,۱۳,۳۷,۷۳,۱۰۹\}$.

حال نشان می‌دهیم G یک ۲–گروه نیست. فرض کنیم چنین نباشد و G یک ۲–گروه باشد. در این‌صورت لم ۵.۲ ایجاب می‌کند که برای هر عدد صحیح مثبت $a\geq۲۳$، $۲^a\notin\omega(G)$ و لذا $|\omega(G)|\leq۲۳$. اکنون چون $|\mathsf{nse}(G)|=۱۲$، نتیجه می‌گیریم $۱۲\leq|\omega(G)|\leq۲۳$. برای هر $i\in\omega(H)$، قرار می‌دهیم:

$$k_i:=|\{j\in\omega(G)\ :\ \mathsf{m}_j(G)=\mathsf{m}_i(H)\}| \tag{۲.۳}$$

که در آن اعداد $\mathsf{m}_i(H)$ در جدول ۱ داده شده‌اند. توجه می‌کنیم $k_۱=k_۲=k_۴=۱$ و $۱۲\leq\sum k_i\leq۲۳$. حال چون G یک ۲–گروه است، داریم

$$\sum_{i\in\omega(H)}k_i\mathsf{m}_i(S)=|G|=۲^b.$$

به‌سادگی می‌توان با استفاده از جدول ۱ بررسی کرد که این معادله هیچ جوابی ندارد. از این رو G یک ۲–گروه نیست. بنابراین $\pi(G)$ شامل عدد اول فرد p است که $p\in\{۵,۷,۱۳,۳۷,۷۳,۱۰۹\}$.

حال به اثبات قسمت (الف) می‌پردازیم. فرض کنیم $p \in \{۳۷, ۷۳, ۱۰۹\}$. در این‌صورت با استفاده از لم ۵.۲ و رابطه (۱.۳)، گروه G دارای عضوی از مرتبه $p^۲$ نیست و لذا لم ۴.۲ ایجاب می‌کند $|G_p|$ یک شمارنده $\mathrm{m}_p(G)+۱$ باشد. با توجه به جدول ۲، نتیجه می‌گیریم (الف) برای اعداد اول ۳۷، ۷۳ و ۱۰۹ صحیح است. حال اگر p یکی از اعداد ۵ یا ۷ باشد، آنگاه با توجه به لم ۵.۲ نتیجه می‌گیریم که برای $i \geq ۳$، $p^i \notin \omega(G)$. اگر $p^۲ \in \omega(G)$، آنگاه لم ۵.۲ ایجاب می‌کند $\mathrm{m}_{p^۲}(G) = \mathrm{m}_{۳۷}(H)$. چون $p^۲$ یک شمارنده $\mathrm{m}_{۳۷}(H)$ نیست، بنابر لم ۲.۲، زیرگروه G_p دوری است و لذا $\mathrm{m}_{p^۲}(G) = \mathrm{n}_p(G)\phi(p^۲)$. پس ۳ یک شمارنده از $\mathrm{n}_p(G)$ است. بنابراین $|G|$ مضربی از ۳ است و این یک تناقض است. از این رو نتیجه می‌گیریم که $p^۲ \notin \omega(G)$، لذا بنابر لم ۴.۲، $|G_p|$ یک شمارنده $\mathrm{m}_p(G)+۱$ است. بنابر جدول ۲، نتیجه می‌گیریم $|G_p| = p$ که در آن $p \in \{۵, ۷\}$ و به‌سادگی قسمت (الف) برای این اعداد اول نیز برقرار است. بنابرین (الف) اثبات می‌شود.

اکنون به اثبات قسمت (ب) می‌پردازیم. ابتدا توجه می‌کنیم، بنابر لم ۵.۲، برای هر $i \geq ۳$، گروه G شامل عنصری از مرتبه ۱۳^i نیست. اگر $۱۳^۲ \in \omega(G)$، چون $\mathrm{m}_{۱۳^۲}(G) = \mathrm{m}_۷(H)$ و $۱۳^۲$ عدد $\mathrm{m}_۷(H)$ را نمی‌شمارد، از لم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم، $G_{۱۳}$ دوری از مرتبه $۱۳^۲$ است. حال اگر $۱۳^۲ \notin \omega(G)$، آنگاه $\mathrm{m}_{۱۳}(G) = \mathrm{m}_{۱۳}(H)$، و لذا بنابر لم ۴.۲، $|G_{۱۳}|$ یک شمارنده $\mathrm{m}_{۱۳}(G)+۱$ است. با توجه به جدول ۲، $G_{۱۳}$ دوری از مرتبه ۱۳ است. بنابراین قسمت (ب) برای عدد اول $p = ۱۳$ اثبات می‌شود.

در پایان نشان می‌دهیم $\pi(G) = \{۲, ۵, ۷, ۱۳, ۳۷, ۷۳, ۱۰۹\}$. توجه می‌کنیم $\pi(G)$ حداقل شامل یکی از اعداد اول مجموعه $A = \{۵, ۷, ۱۳, ۳۷, ۷۳, ۱۰۹\}$ است. با روش زیر نشان می‌دهیم $\pi(G)$ لزوماً شامل بقیه اعداد اول از مجموعه A است و این اثبات را کامل می‌کند. برای مثال اگر $۵ \in \pi(G)$، آنگاه بنابر (الف) داریم، $\mathrm{n}_۵(G) = \mathrm{m}_۵(G)/\phi(۵)$. لذا ۷ یک شمارنده $\mathrm{n}_۵(G)$ است. بنابراین $۷ \in \pi(G)$. با تکرار این فرایند طبق نمودار زیر حکم ثابت می‌شود.

$$\begin{tikzcd}
۵ \in \pi(G) \arrow[r] & ۷ \in \pi(G) \arrow[r] & ۱۳ \in \pi(G) \arrow[d] \\
۳۷ \in \pi(G) \arrow[u] & ۷۳ \in \pi(G) \arrow[l] & ۱۰۹ \in \pi(G) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

بدین ترتیب قسمت (ب) ثابت می‌شود. □

لم ۲.۳. اگر مفروضات قضیه ۱.۱ برقرار باشد، آنگاه $|G|/|H|$ عدد ۴ را می‌شمارد.

اثبات. فرض کنیم $p \in \{۵, ۷, ۳۷, ۷۳, ۱۰۹\}$. در این‌صورت بنابر لم ۱.۳ قسمت (الف) داریم $|G_p| = p$، و لذا $|G_p| = |H_p|$. بنابر لم ۵.۲، گروه G عضوی از مرتبه $۱۳ \cdot ۱۰۹$ ندارد. بنابراین $G_{۱۳}$ روی مجموعه عناصر از مرتبه ۱۰۹ بدون نقطه ثابت با تزویج عمل می‌کند و از این‌رو $\mathrm{m}_{۱۰۹}(G)$ مضربی از $|G_{۱۳}|$ است و بنابراین $|G_{۱۳}| = ۱۳$. لذا $|G_{۱۳}| = |H_{۱۳}|$. فرض کنیم $۲۱۸ = ۲ \cdot ۱۰۹ \in \omega(G)$. در این‌صورت $\mathrm{m}_{۲۱۸}(G) \in \{\mathrm{m}_{۴۸۱}(H), \mathrm{m}_{۵۱۱}(S)\}$. بنابراین، اگر k تعداد زیرگروه‌های دوری از مرتبه ۲ در $C_G(G_{۱۰۹})$ باشد، آنگاه از آنجایی‌که، همه مرکزسازهای ۱۰۹−زیرگروه‌های سیلوی G در G مزدوج اند، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{m}_{۲۱۸}(G) = k\phi(۲۱۸)\mathrm{n}_{۲۱۸}(G)$. پس $\mathrm{m}_{۱۰۹}(G)$ باید $\mathrm{m}_{۲۱۸}(G)$ را بشمارد، که این یک تناقض است. لذا $G_۲$ روی مجموعه عناصر از مرتبه ۱۰۹ به‌صورت نقطه ثابت با تزویج عمل می‌کند، و لذا $\mathrm{m}_{۱۰۹}(G)$ مضربی از $|G_۲|$ است. بنابرین $|G_۲| \mid ۲^{۲۰}$. از طرفی، $\mathrm{n}_{۱۰۹}(G) \mid |G|$. این نتیجه می‌دهد که $۲^{۱۸}$، مرتبه $G_۲$ را می‌شمارد. بنابراین $|G_۲| \in \{۲^{۱۸}, ۲^{۱۹}, ۲^{۲۰}\}$. پس $|G_۲|/|H_۲|$ عدد ۴ را می‌شمارد. بنابراین $|G|/|H|$ عدد ۴ را می‌شمارد. □

لم ۳.۳. اگر مفروضات قضیه ۱.۱ برقرار باشد، آنگاه گروه G حل‌پذیر نیست.

اثبات. فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر باشد. در این‌صورت لم ۱.۳ ایجاب می‌کند $\mathrm{n}_۷(G) = ۲^{۱۷} \cdot ۵ \cdot ۱۳ \cdot ۳۷ \cdot ۱۰۹$. اکنون با استناد به لم ۱.۲ نتیجه می‌گیریم $۵ \equiv ۱ \pmod{۷}$، که یک تناقض است. □

اثبات قضیه ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد به‌قسمی‌که $\mathrm{nse}(G) = \mathrm{nse}(H)$ که در آن $H = \mathrm{Sz}(۲^۹)$ گروه ساده سوزوکی است. در این‌صورت بنابر لم‌های ۱.۳ و ۳.۳، گروه G متناهی و غیرحل‌پذیر است. بنابراین، سری نرمال $۱ \trianglelefteq N \trianglelefteq M \trianglelefteq G$ وجود دارد به‌قسمی‌که N زیرگروه نرمال حل‌پذیر ماکسیمال G و M/N حاصلضرب مستقیم گروه‌های ساده غیر آبلی یکریخت با هم است. فرض کنیم

$$M/N \cong S_۱ \times \cdots \times S_r,$$

که در آن S_iها گروه‌های ساده غیر آبلی دوبه‌دو با هم یکریخت‌اند. بنابر لم ۲.۳، کسر $|G|/|H|$ عدد ۴ را می‌شمارد و چون $۱ \trianglelefteq N \trianglelefteq M \trianglelefteq G$، نتیجه می‌گیریم $r = ۱$ و لذا M/N یک گروه ساده غیر آبلی است. می‌دانیم که گروه‌های سوزوکی تنها گروه‌های ساده غیر آبلی‌اند که مرتبه آنها نسبت به ۳ اول است. بنابراین M/N با $\mathrm{Sz}(q')$ یکریخت است که در آن q' توان فردی از ۲ است. چون $|M/N|$ مرتبه G را می‌شمارد و $|G|/|H|$ یک شمارنده ۴ است، نتیجه می‌گیریم که $q' = ۲^۹$. بنابراین $N = ۱$. در نتیجه، $G = M \cong H$ و این حکم را ثابت می‌کند. □

فهرست منابع

[1] Alavi S.H., Daneshkhah A. and Parvizi Mosaed H., *On Quantitative Structure of Small Ree Groups*, Communications in Algebra, **45** (2017) 4099–4108.

[2] Alavi S.H., Daneshkhah A. and Parvizi Mosaed H., *Finite groups of the same type as Suzuki groups*, International Journal of Group Theory, **8** (2019) 35–42.

[3] Asgary S., and Ahanjideh N., *A characterization of* $\mathrm{Sz}(۸)$ *by nse*, The 6th National Group Theory Conference, Golestan University, Gorgan, Iran, (2014) 50–54.

[4] Babai A. and Khatami M., *NSE characterization of some Suzuki groups*, Quasigroups and Related Systems, **27** (2019) 15–24.

[5] Frobenius G., *Verallgemeinerung des sylowschen Satze*, Berliner Sitz, (1895) 981–993.

[6] Gorenstein D., *Finite Groups*, New York, Harper and Row, 1980.

[7] Hall M., *The Theory of Group*, New York, Macmillan Co., 1959.

[8] Huppert B. and Blackburn N., *Finite Groups III*, Berlin, Springer Verlag, 1982.

[9] Mazurov V.D. and Khukhro E.I., *Unsolved problems in group theory, The Kourovka Notebook*, 16 ed. Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Akad. Novosibirsk, 2006.

[10] Miller G., *Addition to a theorem due to Frobenius*, Bulletin of the American Mathematical Society, **11** (1904) 6–7.

[11] Parvizi Mosaed H., Iranmanesh A. and Tehranian A., *A characterization of the small Suzuki groups by the number of the same element order*, Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran, **26** (2015) 171–177.

[12] Shao C.G., Shi W.J. and Jiang Q.H., *Characterization of simple* $K_۴$*-groups*, Frontiers of Mathematics in China, **3** (2008) 355–370.

[13] Shen R., Shao C., Jiang Q., Shi W.J. and Mazurov V.D., *A new characterization of* $A_۵$, Monatshefte für Mathematik, **160** (2010) 337–341.

A characterization of the Suzuki group $\mathrm{Sz}(2^9)$ by the set of the number of elements with the same order

Seyed Hassan Alavi[1] **, Ashraf Daneshkhah**[1 †] **, Hosein Parvizi Mosaed**[2]

(1) Department of Mathematics, Faculty of Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran
(2) Alvand Institute of Higher Education, Hamedan, Iran

Communicated by: M. Namdari

Received: 2021/9/5 Accepted: 2021/10/25

Abstract: Let G be a group, and let $\mathsf{nse}(G)$ be the set of the number of elements with the same order in G. In this paper, we prove that if G is a group and $\mathrm{Sz}(2^9)$ is the Suzuki simple group such that $\mathsf{nse}(G) = \mathsf{nse}(\mathrm{Sz}(2^9))$, then G is isomorphic to the Suzuki simple group $\mathrm{Sz}(2^9)$. In other words, we prove that the simple Suzuki group $\mathrm{Sz}(2^9)$ is uniquely determined by its set of the number of elements with the same order. Consequently, Thompson's problem is true for the Suzuki simple group $\mathrm{Sz}(2^9)$.

Keywords: Finite simple group, Suzuki group, Element order, Prime graph.

†Corresponding author.
E-mail addresses: adanesh@basu.ac.ir (A. Daneshkhah), alavi.s.hassan@basu.ac.ir (S.H. Alavi), h.parvizi.mosaed@alvand.ac.ir (H. Parvizi Mosaed).