مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۰، دوره ۱۱، شماره ۴، ص ۶۸۶-۶۹۸

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2021.38887.1971

کاربرد روش تکمیل تنسوری بهینه‌سازی‌شده تک‌بیتی در بازیافت تصاویر دیجیتالی مخدوش

محسن شاهرضایی [۱] [۱]، علیرضا شجاعی‌فرد [۲]، حمیدرضا یزدانی [۳]

(۱) دانشکده علوم دفاعی، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران
(۲) مرکز ریاضی و آمار، پژوهشکده و دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران
(۳) مرکز ریاضی و آمار، پژوهشکده و دانشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین (ع). تهران، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲۵ تاریخ پذیرش:۱۴۰۰/۸/۲۸

چکیده: داده‌های ساختاری تنسوری مرتبه بالا در بسیاری از سناریوهای تصویربرداری نظیر تصویربرداری فراطیفی و ویدیوهای رنگی، به‌کار می‌روند. بازیابی یک تنسور از یک مجموعه ناقص از درآیه‌ها، که تکمیل تنسوری نامیده می‌شود، درزمینه‌هایی نظیر پردازش تصاویر دیجیتال و فشرده‌سازی کاربردهای فراوانی دارد. در تکمیل تنسوری، علاوه بر ناقص بودن داده‌های مشاهده‌شده، مساله دیگر کمی‌سازی درآیه‌ها است. کمی‌سازی مرحله‌ای مهم برای انتقال و ذخیره‌سازی داده‌های بعد بالا به منظور کاهش نیاز به ذخیره‌سازی و صرفه‌جویی در مصرف انرژی است. در این‌جا، روشی جدید برای بازیافت تنسورهای رتبه پایین از تعداد اندکی اندازه‌گیری‌های دودویی (تک‌بیتی) ارائه می‌شود. روش تکمیل تنسوری تک‌بیتی، متکی بر کاربرد تکمیل تنسوری در نسخه‌های ماتریسی‌شده با داده‌های دودویی در تنسور زمینه‌ای داده‌ها است. نتایج آزمایشی در تصاویر فراطیفی نشان‌دهنده آن است که عملیات مستقیم با اندازه‌گیری دودویی، به‌جای مقادیر حقیقی آن‌ها منجر به خطای بازیافت کم‌تری می‌شود. در این‌جا یک تنسور مرتبه سوم داده شده با درآیه‌های دودویی بازیافت می‌شود. در عمل تنسور را به‌صورت یک فراماتریس سه‌تایی باز نموده و الگوریتم تکمیل تنسوری کمی‌سازی‌شده را بر همه مدل‌های ماتریسی تنسور مزبور به‌کار می‌بریم. فضای داده‌ای در این‌جا تصاویر فراطیفی ماهواره‌ای با هدف بازیافت تصاویر مخدوش‌شده‌است.

واژه‌های کلیدی: بازیابی تصاویر دیجیتال، تکمیل تنسوری، تنسور، تنسور مرتبه بالا.

رده‌بندی ریاضی: 65F99; 15A69; 58C05.

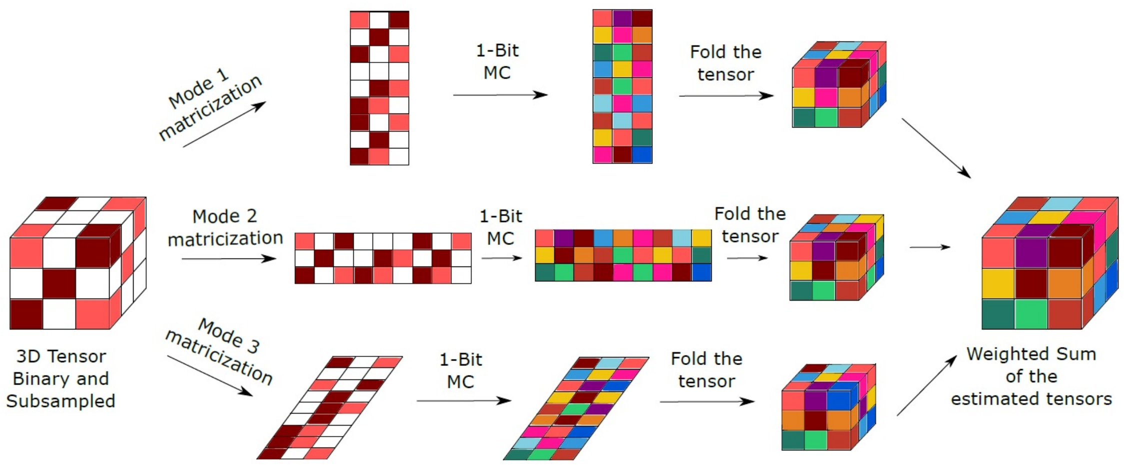
[۱] نویسنده مسئول
رایانامه: mshahrezaee@mail.bmn.ir (M. Shahrezaei), ashojaeifard@ihu.ac.ir (A. R. Shojaeifard), hamidreza.yazdani@gmail.com (H.R. Yazdani)

۱ مقدمه

آرایه‌های چندبعدی موسوم به تنسورها[۲] به‌عنوان تعمیم مفاهیم ریاضی نظیر اسکالر، بردار و ماتریس به ابعاد بالاتر، اشیای ریاضی توانا در مدیریت، کنترل و کار با داده‌ها در ابعاد و حجم بالا هستند. با توسعه زیرساخت‌های گوناگون ارتباطی و فناوری، مفهوم کلان‌داده‌ها[۳] به‌عنوان یکی از مفاهیم مهم و بنیادی در حوزه زندگی روزمره مطرح شده است. پتانسیل قابل توجه این نوع داده‌ها در تولید محتوا و دانش ارزشمند کاربردی در حوزه‌های گوناگون، منجر به توجه روز افزون به این حوزه گردیده است. تنسورها راه‌کارهایی طبیعی را برای نمایش این نوع داده‌ها ارائه می‌نمایند. از جمله زمینه‌های کاربرد تنسورها، حوزه پردازش تصاویر دیجیتالی است، در این بین تصاویر فراطیفی را می‌توان به‌صورت تنسور مرتبه سومی مدل‌سازی نمود، که با دو اندیس برای متغیرهای مکانی و یک اندیس در بعد طیفی تعریف می‌شود، در این حالت ویدیوی رنگی قابل نمایش به‌همین صورت با بعد اضافی چهارم جهت به‌حساب آوردن زمان است [۵].

در فضاهای بعد بالا، تنسورهای متناظر را می‌توان با ساختارهای بعد پایین تقریب زد. در چنین شرایطی، برخی درآیه‌های گم‌شده براساس مشاهدات صورت گرفته ظاهر می‌شوند. مساله بازیافت تنسور رتبه پایین از مجموعه داده‌های ناقص، تکمیل تنسوری رتبه پایین[۴] نامیده می‌شود. در بسیاری از حالات نه تنها داده‌های گم‌شده فراوانی وجود دارند، بلکه داده‌ها در ساختار از پیش‌تعریف‌شده‌ای کمی‌سازی شده‌اند. اغلب به‌دلیل سروکار داشتن با سیستم‌های رایانه‌ای، این کمی‌سازی در غالب بیت‌هاست. داده‌ها به‌صورت کدهای صفر و یک ذخیره و کمی‌سازی می‌شوند. به این ترتیب کمی‌سازی بخشی جدانشدنی در کلیه فرآیندهای محاسبات مرتبط با پردازش داده‌ها می‌شود. این امر منجر به پیدایش مبحث بهینه‌سازی روش‌های تکمیل تنسوری برای کار با داده‌های بیتی می‌شود[۱۰].

مساله اصلی چگونگی بازیافت درآیه‌های حقیقی-مقدار تنسورها از تعداد اندکی از مشاهدات دودویی کمی‌سازی شده است. این مساله با الگوریتم‌های تکمیل تنسوری مرسوم کاملا متفاوت است، در آن‌جا مساله مرتبط با تنسوری با درآیه‌های پیوسته از مقادیر حقیقی است. در این‌جا تصاویر فراطیفی ماهواره‌ای گسسته‌سازی‌شده به‌صورت تک‌بیتی (دودویی) با روش تکمیل تنسوری بهینه‌شده در مسیر بازیافت تصاویر استفاده می‌شوند. الگوریتم ارائه‌شده به دنبال بازیافت تصاویر فراطیفی گسسته تک‌بیتی با روش‌های تکمیل تنسوری است. این روش را تکمیل تنسوری تک‌بیتی می‌نامیم. به‌اختصار ۳-تنسور به صورت ۳-ماتریس باز شده و الگوریتم تکمیل ماتریسی تک‌بیتی بر همه مدهای ماتریسی اجرا می‌شود[۳]، نمای کار در تصویر ۱ دیده می‌شود، در این‌جا به دنبال باز کردن تنسور به ۳ ماتریس و اعمال روش تکمیل ماتریسی تک‌بیتی بر همه حالات ماتریسی‌شده هستیم. سپس هر یک از ماتریس‌ها را با یکدیگر ترکیب می‌کنیم تا تنسور بازیافتی اصلی حاصل شود.



شکل ۱: نمای روش تکمیل تنسوری تک‌بیتی. یک تنسور با دو مقدار ممکن (دو رنگ) و درآیه‌های گم‌شده (مکعب‌های سفید).

مساله تکمیل تنسوری رتبه پایین را می‌توان به‌صورت تعمیم تکمیل ماتریسی در نظر گرفت. در تکمیل ماتریسی، مساله بازیافت، یافتن درآیه گم‌شده در سطر یا ستونی است که حتما یک درآیه در آن موجود باشد، سپس براساس بعد داده‌ها، پایین‌ترین رتبه در نظر گرفته می‌شود [۳]. مشکل اصلی در کمینه‌سازی رتبه است، مساله کمینه‌سازی رتبه مساله ای $NP-$سخت است، بنابراین کار با داده‌های بعد بالا مشکلاتی را به همراه دارد. از آن‌جاکه رتبه یک ماتریس متناظر با تعداد مقادیر ویژه ناصفر

[۲]Tensors
[۳]Big Data
[۴]Low-rank Tensor Completion

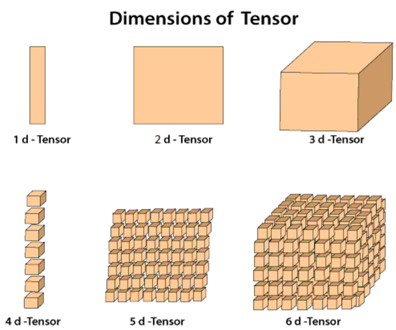
است، کمینه‌سازی رتبه می‌تواند با کمینه‌سازی نرم هسته جای‌گزین شود که مجموع مقادیر ویژه ماتریس است [۱۲]. روش‌های بسیاری برای این کار در نظر گرفته‌شده است، که از آن جمله می‌توان به آستانه مقادیر تکین[۵] و روش ضریب لاگرانژی افزوده[۶] اشاره نمود[۷]. روش‌هایی نیز وجود دارند که تجزیه مقدار تکین در الگوریتم‌های خود بهره برده‌اند. یک روش نامحدب در [۱۳] ارائه‌شده است. در مواردی مدل‌های آماری برای بازیافت داده‌های تنسوری گسسته به‌کار رفته‌اند. اگرچه الگوریتم‌های متعددی برای بازیافت درآیه‌های گم‌شده تنسورها ارائه‌شده، تاکنون کاری در زمینه بازیافت داده‌های تنسوری تک‌بیتی صورت نگرفته است [۴]. در این‌جا مساله بازیافت تصاویر فراطیفی به‌عنوان نمونه‌ای از داده‌های گسسته دودویی بررسی می‌شود، تعمیم تکمیل ماتریسی تک‌بیتی برای تکمیل تنسوری اعمال شده و نتایج بر داده‌های ماهواره‌ای تک‌بیتی فراطیفی نمونه اجرا می‌شود.

سازمان‌دهی مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، تعاریف و مقدمات مرتبط با تنسورها، مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری و مباحث مرتبط بیان می‌شود. بخش سوم، الگوریتم تکمیل تنسوری تک‌بیتی را به‌صورت مشروح بیان نموده و مبانی را مطرح می‌کند. بخش چهارم، شامل پیاده‌سازی الگوریتم بر بستر مثال‌هایی است که کارآیی آن را بررسی می‌نماید. در نهایت، بخش پنجم شامل نتیجه‌گیری و بیان راه‌کارهایی برای پژوهش‌های آتی است.

۲ تعاریف و مقدمات

در این بخش پاره‌ای مفاهیم و مقدمات از حساب تنسوری و مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری را بیان می‌کنیم. خواننده علاقه‌مند برای جزییات و توضیحات بیشتر می‌تواند منابع [۲] ، [۹] و [۱۱] را ببینند.

تعریف ۱.۲. تنسور یک آرایه چندبعدی است که بعد آن به‌صورت مرتبه توصیف می‌شود. یک تنسور مرتبه N-ام آرایه‌ای N-مسیری است که با X نشان داده می‌شود. واژگان مرتبه به بعد تنسور بر می‌گردد. مجموعه همه تنسورهای مرتبه n-ام را برای مرتبه m با $T_{m,n}$ نمایش می‌دهیم، تنسور A را متقارن نامیم، هرگاه همه $a_{i_1,\ldots,i_n}$ تحت هر جایگشتی از اندیس‌ها پایا باشند. مجموعه همه ماتریس‌های متقارن حقیقی از بعد n و مرتبه m را با $S_{m,n}$ نشان می‌دهیم، شکل ۲ دیده شود.



شکل ۲: نمایش تنسورها به‌عنوان آرایه‌های n-بعدی.

ملاحظه ۲.۲. از مفاهیم مهم و مورد توجه در سال های اخیر کمیت تنسور است که تعمیمی از مفهوم بردار و ماتریس است. یک تنسور آرایه ی m مسیری است. تنسور کمیتی است که عناصر آن با بیشتر از دو اندیس آدرس‌دهی می شوند. هر بردار تنسور مرتبه‌ی ۱ و هرماتریس تنسور مرتبه‌ی ۲ است. به‌وضوح تنسورها، تعمیم بردارها و ماتریس‌هایند، مثلا یک تنسور مرتبه سوم (یا سه مسیری) دارای سه حالت (اندیس یا بعد) است. یک تنسور مرتبه صفر، در عمل یک اسکالر، یک تنسور مرتبه یک، یک بردار و یک تنسور مرتبه دوم، یک ماتریس است. تنسورهای با رتبه سه یا بالاتر، تنسورهای مرتبه بالا نامیده می‌شوند. توجه داشته باشیم که آن‌چه در فیزیک و هندسه تنسور خوانده می‌شود، در واقع میدان تنسوری است. به‌صورت رسمی، میدان تنسوری یک تابع تنسور مقدار است، که در یک دستگاه مختصاتی مقدار آن در یک نقطه برابر با یک تنسور می‌شود. میدان‌های تنسوری کاربردهای فراوانی در فیزیک و هندسه دارند. از جمله پرکاربردترین تنسورها در هندسه و فیزیک می‌توان به تنسور خمیدگی ریمانی، میدان تنسوری گرانش، تنسور اینرسی و استرس و متریک تنسور اشاره نمود.

تعریف ۳.۲. ضرب داخلی دو تنسور X و Y از اندازه یکسان به‌صورت $< X, Y >$ تعریف می‌شود. این ضرب را می‌توان به

[۵] Singular Value Thresholding

[۶] Augmented Lagrange Multiplier

این صورت در نظر گرفت [۸]:

$$< X,Y >:= \sum_{i_1=1}^{I_1}\sum_{i_2=1}^{I_2}\cdots\sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1,i_2,\cdots,i_N}\, y_{i_1,i_2,\cdots,i_N}. \qquad (۱.۲)$$

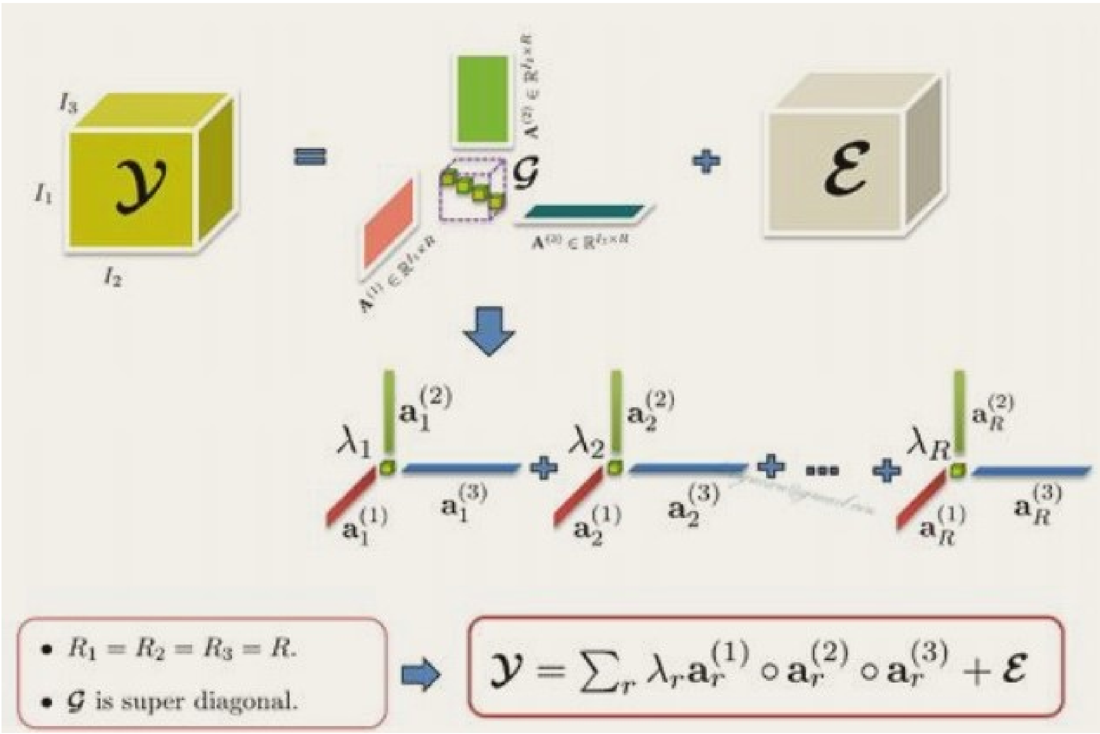
تعریف ۴.۲. با تعمیم ازنرم فروبنیوس[۷] ماتریسی، F-نرم به این صورت تعریف می‌شود:

$$||X||_F := \sqrt{< X,X >} = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1}\sum_{i_2=1}^{I_2}\cdots\sum_{i_N=1}^{I_N} X^2_{i_1,i_2,\cdots,i_N}}. \qquad (۲.۲)$$

تعریف ۵.۲. فرض کنیم X تنسوری متقارن از $S_{m,n}$، r عدد صحیح مثبت و $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ برای $k \in \{1,\cdots,r\}$ چنان موجود باشند که

$$X = \sum_{k=1}^{r}(u^{(k)})^m. \qquad (۳.۲)$$

بنابراین X تنسور کاملا مثبت[۸] و معادله (۳) تجزیه کاملا مثبت برای X نامیده می‌شود. در این معادله کمینه مقدار r رتبه کاملا مثبت تنسور X نامیده می‌شود، برای جزییات شکل ۳ دیده‌شود.



شکل ۳: نمایش تجزیه یک تنسور رتبه سوم.

تعریف ۶.۲. مساله تکمیل ماتریسی[۹] به‌صورت مساله بهینه‌سازی:

$$Min_X \frac{1}{2}||X - M||^2_\Omega,$$
$$(s.t.) \quad rank(X) \leq r.$$

[۷] Frobenius norm
[۸] completely positive tensor (CP)
[۹] Matrix Completion (MC) problem

بیان می‌شود که در آن، $X, M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و مولفه‌های M در مجموعه Ω ارائه می‌شوند، در حالی‌که عناصر باقی‌مانده مورد نیاز هستند. در عمل، در تلاشیم که ماتریس رتبه پایین X را با مولفه‌های گم‌شده آن تقریب بزنیم. مساله تکمیل ماتریسی نخستین بار در سیستم رتبه‌بندی سایت اشتراک فیلم نت فلیکس [۱۰] در مساله توصیه‌گر فیلم به کاربران مطرح شد.

ملاحظه ۷.۲. در تکمیل ماتریسی باید حتما حداقل یک درآیه در هر سطر یا ستون مشاهده‌شده باشد، اگر چنین نباشد، درآیه‌های آن سطر یا ستون می‌توانند هر مقدار دلخواهی باشند، بنابراین روش در این حالت پاسخگو نیست. از طرفی برای کارآمدی روش‌های تکمیل ماتریسی، باید رابطه

$$m \geq Cn^{5}rlog(n). \tag{۴.۲}$$

برقرار باشد، تا ماتریس بازیافت‌شده از طریق تکمیل ماتریسی، منحصربه‌فرد گردد، جایی‌که ماتریس M ماتریسی $p\times q$ از رتبه r است که $n = max(p, q)$. فرض بر این است که m درآیه از ماتریس M با موقعیت‌های نمونه‌گیری‌شده یکنواخت تصادفی وجود دارد و C و c نیز ثابت‌های عددی وجودیند. به‌دلیل این محدودیت‌ها مساله تکمیل تنسوری به‌عنوان تعمیمی از تکمیل ماتریسی مطرح شده است.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم T تنسور رتبه پایینی با درآیه‌های گم‌شده (مثلا در رتبه کاملا مثبت) باشد، مساله تکمیل تنسوری با هدف تکمیل T می‌تواند به این‌صورت فرمول‌بندی شود:

$$\begin{aligned} &Min_X \frac{1}{2}||X - Y||_F^2,\\ &(s.t.) \quad ||X||_{tr} \leq c,\\ &Y_\Omega = T_\Omega. \end{aligned}$$

که در آن، X, Y, T ماتریس‌های n-مدیند. در این‌جا نرم نشان نرم [۱۱] تنسوری بر پایه رتبه کاملا مثبت به این‌صورت بیان می‌شود:

$$||X||_{tr} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ||X_i||_{tr}. \tag{۵.۲}$$

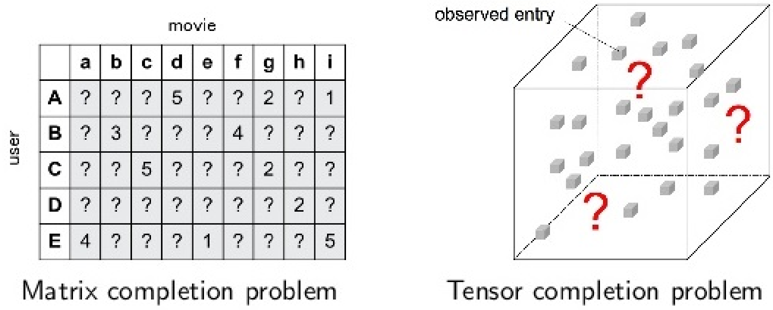
در واقع، نشان نرم تنسور T میانگین نشان نرم‌های همه ماتریس‌های بازشده در هر مد آن است.

ملاحظه ۹.۲. مساله تکمیل تنسوری، تعمیمی از مساله تکمیل ماتریسی برای حل نقاط ضعف آن و استفاده در حل مسایل بعد بالای کلان‌داده‌ها و تعمیم و گسترش کارآیی آن‌هاست؛ این مساله به‌صورت‌های گوناگونی قابل بیان و حل است، دو صورت کاربردی مساله تکمیل تنسوری، براساس تجزیه (باز کردن) و بهینه‌سازی است. در تکمیل تنسوری، برای جلوگیری از نامعین و غیر قابل کنترل بودن مساله، شرط رتبه پایین را اعمال می‌کنیم تا درجات آزادی درآیه‌های گم‌شده را محدود نماییم، به بیان ساده این مساله مربوط به تکمیل کردن مقادیر (درآیه‌های) ناموجود، نویزی یا پرت در یک ماتریس است، شکل ۴ نمایی مقایسه‌ای بین مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری را نشان می‌دهد.

روش‌های گوناگونی برای حل مسایل تکمیل تنسوری وجود دارد، که از آن‌جمله می‌توان به روش‌های مبتنی بر نرم، مبتنی بر تجزیه، کمترین مربعات و نیوتنی اشاره نمود. برای اطلاعات و جزییات درباره انواع روش‌های حل مسایل تکمیل تنسوری [۹] دیده‌شود.

[۱۰] Netflix Movie Recommender

[۱۱] trace norm



شکل ۴: نمای مقایسه‌ای بین مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری.

ملاحظه ۱۰.۲. لازم‌به‌ذکر است که نکات مطرح‌شده در این‌جا، مربوط به ماتریس‌ها و تنسورها با درآیه‌های حقیقی است، برای مواردی که درآیه‌های گسسته یا کمی‌سازی‌شده در مبنای مثلا دو (درآیه‌ها تنها ارقام صفر و یک) است، نسخه‌های تک‌بیتی مطرح می شوند، به‌عبارت دیگر با مسایل تکمیل ماتریسی و تنسوری تک‌بیتی مواجه می‌شویم. در عمل، ابتدا یک مرحله کمی‌سازی در مبنای مورد نظر براساس وزن‌های مشخص دینامیکی یا استاتیکی صورت می‌گیرد، سپس الگوریتم‌های معمول اجرا می‌شود، برای توضیحات بیش‌تر [۱] دیده‌شود. این مبحث در مجموع به‌عنوان یادگیری تنسورها از مشاهدات تک‌بیتی یا اندازه‌گیری‌های مشاهده‌شده جزیی شناخته می‌شود، برای جزییات بیشتر درباره این مبحث [۶] دیده‌شود.

در بخش بعدی به الگوریتم تکمیل تنسوری تک‌بیتی پرداخته، اساس نظری و ریاضی الگوریتم را بیان می‌کنیم.

۳ بیان الگوریتم

قبل از آغاز این بخش، مختصری به کاربردهای تنسورها و مباحث مرتبط در زمینه پردازش کلان داده‌ها پرداخته، سپس بنیاد نظری و ریاضی الگوریتم را بیان می‌کنیم. تنسورها و میدان های تنسوری دارای قابلیت های بسیار بالایی در فشرده‌سازی داده‌ها و انجام محاسبات پیشرفته هستند. در این میان مشابه با تکمیل ماتریسی، تکمیل تنسوری که تعمیمی از آن است، برای حل مسایل داده‌های گم‌شده و پرت، به‌کار می‌رود. نمایش داده‌ها با تنسورها می‌تواند شکل بعد بالای داده‌ها و ارتباط ساختاری بین اطلاعات داده‌ها را حفظ نماید. برای مثال، تصاویر RGB تنسورهای سه‌بعدی (ارتفاع، عرض و کانال)، ویدیوها تنسورهای چهاربعدی (ارتفاع، عرض، کانال و زمان) و سیگنال‌های نوار مغزی دارای سه بعد (اندازه، دنباله و زمان) هستند. تکمیل تنسوری، مساله پرکردن داده‌های ورودی (درآیه‌های) گم‌شده یا مشاهده‌نشده از تنسورهای مشاهده‌شده جزیی است. تکمیل تنسوری روش بازیافت عناصر گم‌شده و داده‌های ناقص با استفاده از مقادیر عناصر مرجع (در دسترس) و فرضیات ساختاری (پیشین) از داده‌ها است. تنها زمانی که عناصر مرجع و گم‌شده مستقل باشند، مثلا در حالت نویز سفید، تکمیل کارآمد نیست. بااین‌حال ویژگی‌های خاص داده‌های دنیای واقعی نظیر تقارن، تکرار و پراکندگی، برای تکمیل به‌کار می‌روند. به‌دلیل مشخصه چندبعدی تنسورها در توصیف مجموعه داده‌های پیچیده، الگوریتم‌های تکمیل تنسوری و کاربردهای آن‌ها، توجهات بسیاری را به خود جلب نموده و شاهد پیشرفت‌های فراوانی در زمینه‌هایی نظیر داده‌کاوی، بینایی‌ماشین، پردازش تصاویر و علوم اعصاب هستند. روش‌ها و الگوریتم‌های پیشرفته تکمیل ماتریسی برای تصاویر سیاه و سفید و تکمیل تنسوری برای تصاویر رنگی وجود دارند، که با دقت بالایی نسبت به روش‌های موجود، قادر به ثبت، ذخیره‌سازی، فشرده‌سازی، بازسازی و بازیافت تصاویر دیجیتالی هستند، برخی از این روش‌ها می‌توانند تصاویر مخدوش شده تا سطح ۹۹ درصد را نیز تحت شرایط مشخصی بازیافت نمایند. اکنون به بیان اساس نظری و ریاضی الگوریتم ارائه‌شده می‌پردازیم.

در این روش به‌دنبال یافتن یک تنسور رتبه پایین ناشناخته $T \in \mathbb{R}^{I_۱\times\dots\times I_n}$ از مشاهدات جزیی دودویی

$$Y = P_\Omega(Q(T)).$$

هستیم، که در آن $\Omega \subset \{۱,\cdots,I_۱\}\times\cdots\times\{۱,\cdots,I_n\}$ مجموعه اندیس‌گذاری درآیه‌های مشاهده‌شده و P_Ω عملگر نمونه‌گیری تصادفی است که درآیه‌ها را در Ω نگاه‌داشته و بیرون از این مجموعه، صفر در نظر می‌گیرد. علاوه بر این تابع $Q(.) : \mathbb{R} \to F$ مرتبط با کمی‌ساز عددی نایکنواختی است که یک عدد حقیقی را به مجموعه‌ای از دو برچسب مرتب براساس $F = \{۱,۲\}$

$$Q(x) = \begin{cases} ۱ & if \quad w_۰ < x \leq w_۱, \\ ۲ & if \quad w_۱ < x \leq w_۲. \end{cases}$$

می‌نگارد، که در آن $\{w_۰, w_۱, w_۲\}$ نمایشی از مجموعه مرزهای کمی‌سازی‌شده همه اندازه‌گیری‌ها است که در

$$w_۰ \leq w_۱ \leq w_۲.$$

صدق می‌نماید. برای اعمال الگوریتم تکمیل تنسوری ۱-بیتی جهت بازیافت درآیه‌های گم‌شده، مقادیر حقیقی تنسور رتبه پایین T از مشاهدات دودویی جزیی را بازیافت می‌نماییم. تنسور اندازه‌گیری‌شده $Y \in \mathbb{R}^{I_۱ \times \cdots \times I_n}$ را به N ماتریس باز نموده و برای هر یک از آن‌ها، الگوریتم تکمیل ماتریسی را اعمال می‌کنیم. n-امین ماتریس، نسخه بازشده ماتریس‌سازی‌شده حالت n از تنسور Y نامیده‌شده و با

$$unfold_n(Y) = \mathbb{Y}_{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times \prod_{j \neq n} I_j}.$$

نمایش داده می‌شود و متناظر با یک ماتریس با ستون‌هایی است که بردارهای آن با ثابت گرفتن همه اندیس های Y بجز اندیس n-ام به‌دست می‌آیند. تنسور ارزیابی‌شده

$$Z_n = fold_n(\mathbb{Z}_n), \quad n = ۱, \cdots, N.$$

با جمع‌کردن هر یک از ماتریس‌های بازیافت شده $\mathbb{Z}_n$ به‌گونه‌ای حاصل می‌شود که

$$T = \sum_{n=۱}^{N} a_n . Z_n.$$

جایی‌که $a_n, n = ۱, \cdots, N$ وزن‌هایی هستند که وابسته به خطای برازش بوده و در رابطه

$$\sum_{n=۱}^{N} a_n = ۱.$$

صدق می نمایند. وزن‌ها را می‌توان بسته به مساله به‌جای ایستا به صورت پویا نیز در نظر گرفت.

در بخش بعدی، الگوریتم را بر چند نمونه تصویر آزموده و توانایی و کارآیی آن را براساس پارامترهای مشخص، می‌سنجیم.

۴ پیاده‌سازی الگوریتم

در این بخش برای اجرا و آزمون الگوریتم از تصاویر ماهواره‌ای گرفته‌شده از چندین پایگاه و منطقه هوایی (ماهواره‌ای)، به‌ویژه تصاویر فراطیفی در منطقه کاج‌های هندی[۱۲] در مرکز پاویا[۱۳] از پایگاه مرکز هوایی کندی آمریکا[۱۴]، شامل چندین مجموعه تصویر ماهواره‌ای استفاده شده است، کلیه پیاده‌سازی‌ها بر بستر یک لپ‌تاپ ایسوس از مدل $A۵۳Sv$ به مشخصات ارائه‌شده در جدول ۱ صورت گرفته است.

جدول ۱: پیکربندی سیستم رایانه‌ای مورد استفاده برای اجرای الگوریتم.

CPU	Ci7-2670QM (8 Cores)
Frequency	2.2-3.1 GHz
RAM	16 GB (DDR3)
GPU	Nvidia Geforce GT 540M (2GB)
O.S.	Windows-10 Pro (64bit)
Software	MATLAB R2021a (64bit)

مراحل انجام کار به‌این‌صورت است:

۱. ابتدا الگوریتم در حالت کمی‌سازی‌شده برای هر نسخه بازشده از تنسور اجرا می‌شود.

۲. کمی‌سازی تک‌بیتی درآیه‌های تنسوری اصلی با استفاده از مقدار میانگین آستانه برای هر پیکسل از تصویر اجرا می‌شود.

[۱۲] Indian Pines

[۱۳] Pavia Center

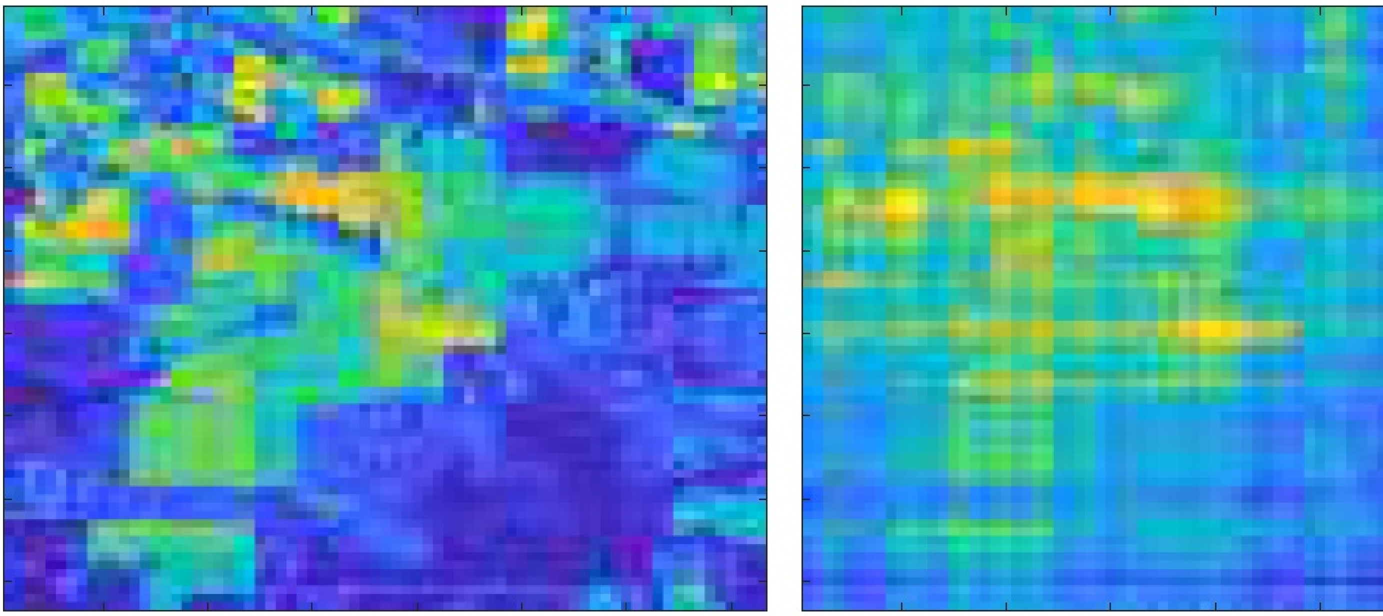
[۱۴] Kennedy Space Center

۳. اکنون کران‌های کمی‌سازی بالا و پایین هر اندازه‌گیری محاسبه می‌شوند.

۴. تنسور در یک حالت ماتریس‌سازی‌شده، باز می‌شود.

۵. حالت ماتریس‌سازی‌شده به تنسور باز گردانده شده و مشتق تابع ارتباطی وارون محاسبه و الگوریتم تکمیل ماتریسی اجرا شده و خروجی نمایش داده می‌شود.

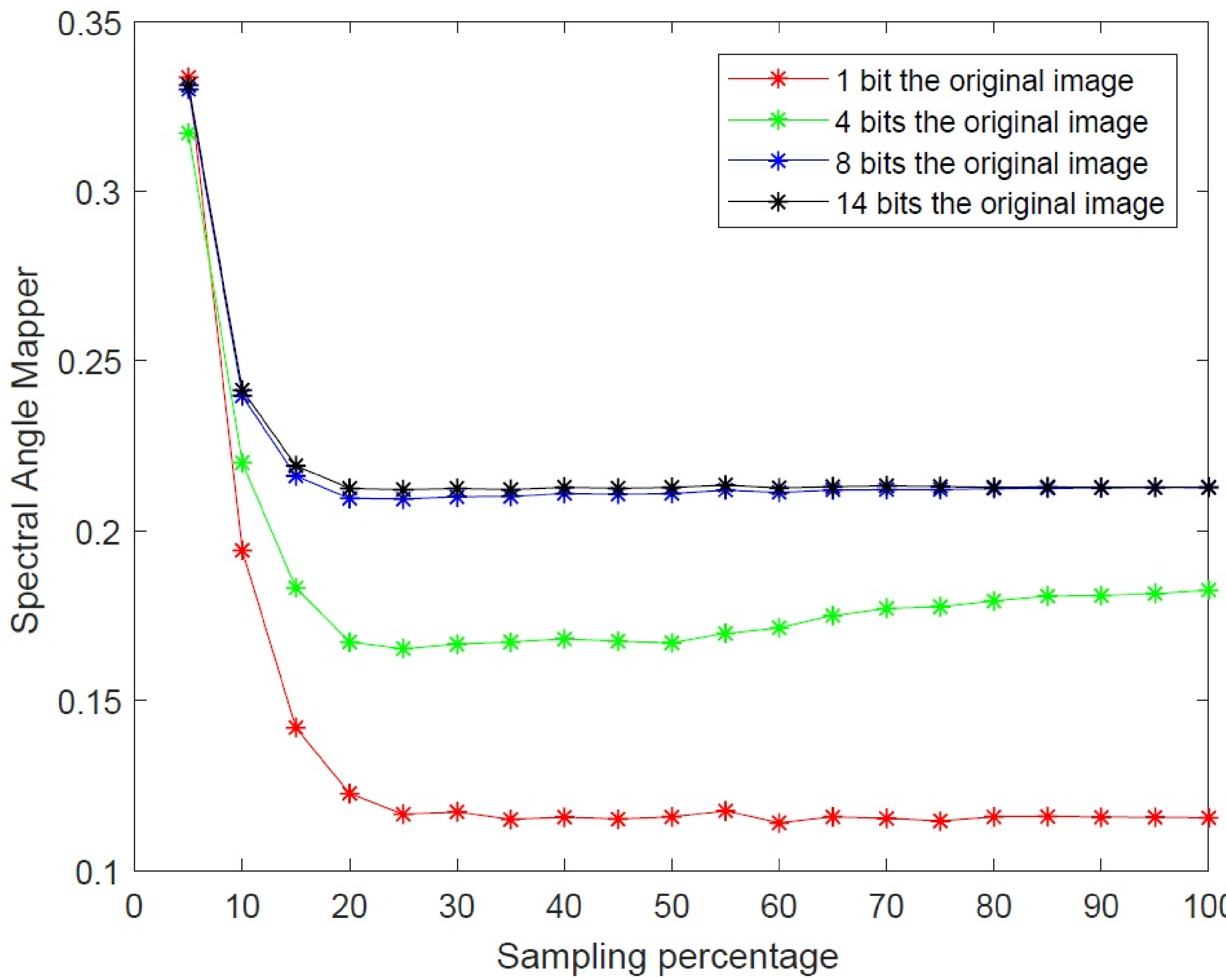
نتایج آزمایشات صورت‌گرفته بر روی مجموعه تصاویر ماهواره‌ای ثبت شده، نشان می‌دهد که بسته به هر نوع تصویر باید از تعداد بیت‌های متفاوتی در هر پیکسل تصویر استفاده نماییم. به‌عنوان مثال در مورد تصویر ماهواره‌ای کاج‌های هندی از ۱۴ بیت در هر پیکسل تصویر استفاده شده است، این در حالی است که برای مجموعه تصاویر دیگر از ۱۳و ۱۶ بیت در هر پیکسل بهره برده‌ایم. برای بررسی کارآیی از معیاری به نام تصویرگر زاویه طیفی [۱۵] استفاده می‌کنیم؛ این روشی طیفی برای اندازه‌گیری میزان تشابه طیف پیکسل تصویر به طیف تصویر بازیافتی است. در شکل ۵، می‌توان دید که تصاویر اصلی و بازیافت‌شده برای ۲۰ درصد نمونه‌گیری با استفاده از تصویر فراطیفی یکسان و مدل یکسان به چه صورتی هستند.



شکل ۵: تصویر اصلی و بازسازی‌شده کاج‌های هندی برای ۲۰ درصد نمونه‌گیری شده با استفاده از مدل ارائه‌شده.

همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، هر چه نسبت بیت بر پیکسل تصویر اصلی کم‌تر باشد، کارآیی بهتری در بازسازی حاصل می‌شود. در مجموع، روش ارائه‌شده تا حد ۲۰ درصد مشاهده در تصاویر طیفی با گسسته‌سازی و کمی‌سازی پیکسل‌های تصاویر قابل اجرا است. نکته جالب این است که، به‌جای استفاده از تصویر پیوسته اصلی با درآیه‌های حقیقی، از نسخه کمی و گسسته‌سازی‌شده آن در مبنای دودویی (ارقام صفر و یک) استفاده می‌کنیم، که کار فشرده‌سازی را راحت‌تر نموده و محاسبات را مقرون به‌صرفه‌تر می‌نماید.

[۱۵] Spectral Angle Mapper (SAM)



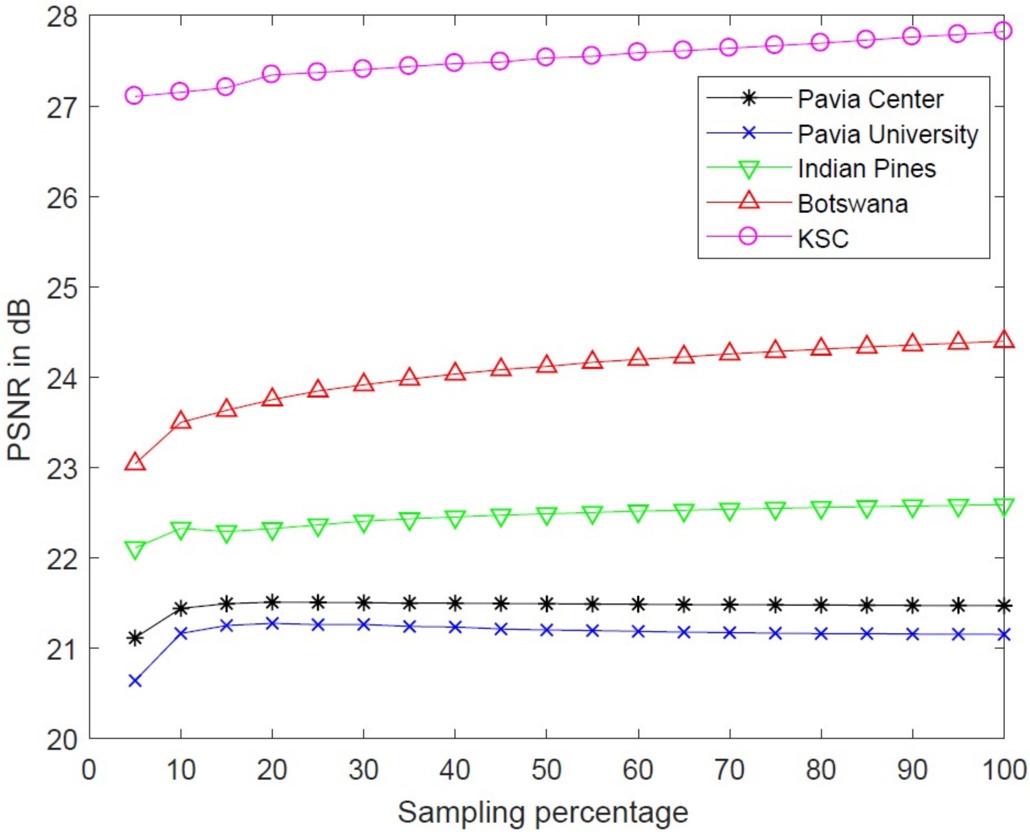
شکل ۶: خطای بازسازی برای هر تعداد بیت در پیکسل تصویر اصلی با استفاده از مدل ارائه‌شده.

شکل ۷ کارآیی روش به‌کاررفته بر بستر پارامتر مهم دیگری را به نام نسبت سیگنال‌به‌نویز [۱۶] نشان می‌دهد. نسبت سیگنال‌به‌نویز بالاتر بین تصویر اصلی و تصویر بازیافت‌شده، نشان‌دهنده کیفیت بهتر تصویر بازیافت‌شده است. فرمول محاسبه نسبت سیگنال‌به‌نویز به این صورت است

$$PSNR = ۱۰.log_{۱۰}(\frac{R^۲}{MSE}).$$

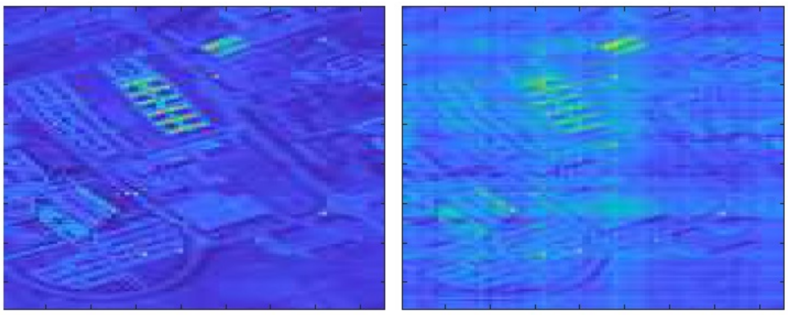
جایی‌که، R نوسانات بیشینه در نوع داده تصویری ورودی و MSE خطای مربعی میانگین است که به‌صورت میانگین مربعات تفاضلات بین سیگنال های اصلی و بازیافتی (ارزیابی) تعریف می‌شود.

[۱۶] signal to noise ratio (PSNR)



شکل ۷: نسبت سیگنال‌به‌نویز برای هر تصویر فراطیفی با استفاده از مدل ارائه‌شده.

به‌عنوان آزمایشی دیگر از نمونه‌گیری تصویر تا سطح ۵۰ درصد بر روی تصاویر مرکز پاویا استفاده می‌کنیم، همان‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، در این نرخ مشاهده، تصاویر بازیافتی از کیفیت بالاتری برخودار هستند.



شکل ۸: تصویر اصلی و بازسازی‌شده مرکز پاویا برای ۵۰ درصد نمونه‌گیری شده با استفاده از مدل ارائه‌شده.

ملاحظه ۱.۴. براساس نتایج حاصل می‌توان چنین نتیجه گرفت که الگوریتم تکمیل تنسوری تک‌بیتی با کمی‌سازی داده‌های تصویری ضمن فشرده‌سازی و کاهش زمان محاسبه و در نتیجه افزایش صرفه محاسباتی، قادر به بازیافت تصاویر تا سطح مشاهده ۲۰ درصد با دقت قابل قبول و سطح سیگنال‌به‌نویز مناسب است. محاسبات انجام شده بر بستر یک سیستم رایانه‌ای از نوع لپ‌تاپ خود گویای این مطلب است که برای این کار نیاز به سیستم‌های رایانه‌ای سنگین یا سرورهای رایانه‌ای نیست و می‌توان از سبک‌های پردازشی نظیر محاسبات در مبدا یا محل (روش های محاسبات لبه ای[۱۷] یا در مه[۱۸]) استفاده کرد، این امر مقیاس‌پذیری و توزیع‌پذیری بالای این روش را در پردازش تصاویر دیجیتالی به‌ویژه تصاویر فراطیفی نشان می‌دهد.

[۱۷] Edge Computing
[۱۸] Fog Computing

۵ نتیجه‌گیری

در این کار، روشی جدید را برای بازیافت تصاویر تنسوری رتبه پایین از مجموعه داده‌های ناقص درآیه‌های دودویی (بیتی) ارائه نمودیم. این مساله در زمینه‌های گوناگونی نظیر پردازش تصاویر و فشرده‌سازی بسیار حائز اهمیت است. در مسایل تکمیل تنسوری مشاهدات گسسته‌ای در شکل اندازه‌گیری دودویی به‌صورت کدهای صفر و یک وجود دارند که نیازمند بهینه‌سازی روش‌های تکمیل تنسوری موجودند، این‌کار منجر به روش تکمیل تنسوری تک‌بیتی می‌شود، که در این‌جا ارائه و بررسی شد. روش‌های ساده‌ای نظیر درون‌یابی خطی به مسایل بدوضع[۱۹] ختم می‌شوند، حتی اگر اندازه‌گیری‌های دودویی برای هر درآیه تنسوری صورت گرفته باشد. نتایج تجربی در داده‌های واقعی نشان می‌دهد که در نظر گرفتن کمی‌سازی اندازه‌گیری‌ها در مقایسه با آزمون آن‌ها به‌عنوان مقادیر مشاهدات واقعی، بهتر عمل می‌نماید. نتایج آزمایشات انجام‌شده در این‌جا، نشان می‌دهد که بسته به هر نوع تصویر باید از تعداد بیت‌های متفاوتی در هر پیکسل تصویر استفاده نماییم. در مجموع، روش ارائه‌شده تا حد ۲۰ درصد مشاهده در تصاویر طیفی با گسسته‌سازی و کمی‌سازی پیکسل‌های تصاویر قابل اجرا است. نکته جالب این است که به‌جای استفاده از تصویر پیوسته اصلی با درآیه‌های حقیقی، از نسخه کمی و گسسته‌سازی شده آن در مبنای دودویی (ارقام صفر و یک) استفاده می‌کنیم، که کار فشرده‌سازی را راحت‌تر نموده و محاسبات را مقرون به‌صرفه‌تر می‌نماید. براساس تجربیات اجرای الگوریتم، می‌توان چنین نتیجه گرفت که، روش مطرح‌شده از مقیاس‌پذیری و توزیع‌پذیری بالایی از منظر توان محاسباتی و پردازشی برخوردار است و قابلیت اجرا بر روی سیستم‌های قابل‌حمل و سبک محاسباتی را دارد.

فهرست منابع

[1] Aidini A., Tsagkatakis G. and Tsagkatakis P. (2018). 1-Bit Tensor Completion, Image Processing: Algorithms and Systems, 6, 261-266.

[2] Bach F.R. (2008). Consistency of trace norm minimization, Journal of Machine Learning Research, 5, 1019-1048.

[3] Cande‘s E. J. and Recht B. (2009). Exact matrix completion via convex optimization, Foundations of Computational mathematics 9, 717-730.

[4] Gandy S., Recht B. and Yamada, I. (2011). Tensor completion and n-low-rank tensor recovery via convex optimizatio, Inverse Problems, 27, 1-19.

[5] Giannopoulos M., Savaki S., Tsagkatakis G. and Tsagkatakis P. (2009). Application of Tensor and Matrix Completion on Environmental Sensing Data, Springer.

[6] Li B., Zhang X., Li X. and Lu H. (2019). Tensor Completion From One-Bit Observations, IEEE Transactions on Image Processing, 28(1), 170-180.

[7] Liu J., Musialski P., Wonka P. and Ye J. (2013). Tensor completion for estimating missing values in visual data, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11(2), 208–220.

[8] Rovi A. and J. Thierselder (2010). Analysis of 2-Tensors, MAI mathematics: MS.C. thesis, Linkopings University.

[9] Song Q., Ge H., Hu J. and Hu X. (2019). Tensor Completion Algorithms in Big Data Analytics, ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD), 6(13), 1-48.

[10] Savvaki S., Tsagkatakis G., Panousopoulou A. and Tsagkatakis P. (2017). Matrix and Tensor Completion on a Human Activity Recognition Framework, IEEE journal of biomedical and health informatics, 21(6), 1554-1561.

[۱۹] Ill-Condition

[11] Zhao Q., Zhang Li. and Cichocki A. (2015). Bayesian CP-Factorization of incomplete Tensors with Automatic Rank Determination, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 9(37), 1751-1763.

[12] Xu Y., Hao R., Yin W. and Su Z. (2015). Parallel matrix factorization for low-rank tensor completion, American Institute of Mathematical Science, 9(2), 601-624.

[13] Wen Z., Yin W., and Zhang Y. (2012). Solving a low-rank factorization model for matrix completion by a nonlinear successive over-relaxation algorithm, Mathematical Programming Computation, Springer, 4, 333-361.

Application of the optimized 1-bit tensor completion method in the recovery of noisy digital images

Mohsen Shahrezaei[1, 20] , , **Alireza Shojaiefard**[2], , **Hamid Reza Yzadni**[3]

(1) Faculty of Defense and Engineering, Imam Hossein University, Tehran, Iran,
(2) Department of Mathematics and Statistics, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran,
(3) Department of Mathematics and Statistics, Imam Hossein Comprehensive University, Tehran, Iran.

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2021/10/17 Accepted: 2021/11/19

Abstract: Higher-order tensor structured data appear in many imaging scenarios, including hyperspectral imaging and colorful video. The recovery of a tensor from an incomplete set of its entries, known as tensor completion (TC), is significant in applications like compression. Moreover, in many illustrations, observations are not only incomplete but also highly quantized. Quantization is a critical step for high dimensional data transmission and storage in order to reduce storage requirements and power consumption, especially for energy-limited systems. In this paper, we propose a novel approach for the recovery of low-rank tensors from a small number of binary (1-bit) measurements. The proposed method called $1 - bit$ Tensor Completion relies on the application of 1-bit matrix completion over different matricizations of the underlying tensor. Experimental results on hyperspectral images confirm that directly operating with the binary measurements, rather than treating them as real values, results in lower recovery error. Here a given third-order tensor with binary arrays is recovered. In practice, we open the tensor as a 3-matrix and apply the quantified tensor completion algorithm to all models of the matrix tensor. The data space here is distorted satellite spectral images for the purpose of image recovery.

Keywords: Digital Image Recovery, Higher-order tensor, Tensor, Tensor Completion.

[20]Corresponding author.
E-mail addresses: mshahrezaee@mail.bmn.ir (M. Shahrezaei), ashojaeifard@ihu.ac.ir (A. R. Shojaeifard), hamidreza.yazdani@gmail.com (H.R. Yazdani)