



## بررسی مدل ریاضی کبد انسان با رویکرد مشتق کسری کاپوتو

مهدی شبیبی<sup>۱</sup>، زهره زین‌العابدینی چرندابی<sup>۲</sup>، حکیمه محمدی<sup>۳</sup>، شهرام رضاپور<sup>۴\*</sup>

(۱) گروه ریاضی، واحد مهران، دانشگاه آزاد اسلامی، ایلام، ایران

(۲) گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

(۳) گروه ریاضی، واحد میاندوآب، دانشگاه آزاد اسلامی، میاندوآب، ایران

(۴) گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۱۹

چکیده: بررسی عملکرد ارگان‌های حیاتی بدن توسط مدل‌های ریاضی یکی از موضوعات مهم و جالب برای محققان است. در این کار ما قصد داریم با استفاده از مشتق مرتبه کسری با رویکرد کاپوتو مدل ریاضی کارکرد کبد انسان را بررسی کنیم. برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری که در مدل جدید کبد حاصل می‌شود، از روش تحلیلی تجزیه آدومیان (ADM) استفاده خواهد شد. همچنین با استفاده از داده‌های کلینیکی موجود یک شبیه‌سازی عددی برای نتایج حاصل از سیستم مرتبه کسری و سیستم مرتبه صحیح ارایه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حساب کسری، مدل ریاضی کسری، مشتق کاپوتو، کبد انسان، روش تجزیه آدومیان.

رده‌بندی ریاضی: 37A25; 34D20

### ۱ مقدمه

در این بخش ابتدا به تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای از حساب کسری پرداخته و روش تجزیه آدومیان برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل کسری با مشتق کاپوتو را یادآوری می‌کنیم.

## ۱.۱ حساب کسری

حساب دیفرانسیل کسری به‌عنوان یک ابزار مهم در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی استفاده می‌شود (ر.ک. [۱۴، ۱۶، ۱۸]). این شاخه از حساب دیفرانسیل تأثیر مهمی در توصیف دینامیک پدیده‌های پیچیده دارد و در طی سال‌های اخیر نتایج جدیدی در توصیف پدیده‌ها با مشتق کسری در شیمی، فیزیک، مهندسی، زیست‌شناسی و نظایر آن به‌دست آمده است (ر.ک. [۱۴، ۱۶، ۱۸، ۱۹]). اخیراً دانشمندان نشان داده‌اند که معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری قادرند پدیده‌های گوناگون را مناسب‌تر از مرتبه صحیح آن مدل کنند و این یک ابزار قدرتمند جهت توصیف ساختارهای یک سیستم با دینامیک پیچیده است. اکثر سیستم‌های موجود در طبیعت با دینامیک کسری بوده و با تقریب، مرتبه آن‌ها صحیح در نظر گرفته می‌شود. نظریه الکترومغناطیس [۱۲]، حرکت براونی کسری [۲۰] و دینامیک محیط متخلخل [۹] جزو این دسته از سیستم‌ها می‌باشند. در شاخه علوم زیستی و پزشکی نیز کارهای زیادی در مدل‌سازی بیماریها و انتقال ویروس‌ها با مدل مرتبه کسری انجام شده است که از آن جمله می‌توان به کارهای کوچا [۱۵]، بالانو و همکاران [۷]، شهزاد و همکاران [۱۱]، آتانگانا و همکاران [۳] و ارتورک و همکاران [۱۰] اشاره کرد. آلمیدا و همکاران در مرجع [۲] چند پدیده طبیعی را با مشتق کسری مدل‌سازی کرده و با محاسبات دقیق مزیت استفاده از مشتق کسری را بیان کرده‌اند. تابع پیوسته  $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ :  $f$  را در نظر بگیرید. مشتق کسری کاپوتو به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم  $f$  تابعی پیوسته باشد. مشتق کسری کاپوتو مرتبه  $\alpha$  عبارت است از:

$${}^c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds, \quad n = [\alpha] + 1.$$

تعریف ۲.۱. ([۶، ۱۴، ۱۸]) انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه  $\alpha$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \quad \alpha > 0.$$

## ۲.۱ روش تجزیه آدومین برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری

در منبع [۱۳] از روش تجزیه آدومین برای یافتن جواب‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی به‌صورت زیر استفاده شده است. سیستم معادلات دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^{\alpha_i} y_i(x) = N_i(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_i^{(k)}(0) = c_k^i, \end{cases} \quad 0 \leq k \leq [\alpha_i], \quad (1.1)$$

به‌طوری که  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$  و  $1 \leq i \leq n$  را بر طرفین (۱.۱) اعمال می‌کنیم:

$$y_i = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{x^k}{k!} + I^{\alpha_i} N_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.1)$$

برای حل سیستم معادلات (۱.۱) از روش تجزیه آدومین استفاده می‌کنیم. فرض کنیم:

$$y_i = \sum_{m=0}^{\infty} y_{im}. \quad (3.1)$$

همچنین

$$N_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}, \quad (4.1)$$

که در آن  $A_{im}$  ها چندجمله‌ای‌های آدومین‌اند که وابسته به مقادیر:

$$y_{10}, \dots, y_{1m}, y_{20}, \dots, y_{2m}, \dots, y_{n0}, \dots, y_{nm},$$

می باشند. با جای گذاری (۳.۱) و (۴.۱) در (۲.۱) برای  $1 \leq i \leq n$  خواهیم داشت:

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_{im} = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{x^k}{k!} + I^{\alpha_i} \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}(y_{10}, \dots, y_{1m}, \dots, y_{n0}, \dots, y_{nm}). \quad (5.1)$$

حال در نظر می گیریم:

$$y_{i,0}(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{x^k}{k!}, \quad (6.1)$$

$$y_{i,m+1}(x) = I^{\alpha_i} A_{im}(y_{10}, \dots, y_{1m}, \dots, y_{n0}, \dots, y_{nm}),$$

که در آن  $1 \leq i \leq n$  و  $m = 0, 1, 2, \dots$  هستند. برای یافتن چند جمله ای های آدومیان، پارامتر  $\lambda$  را در نظر می گیریم و رابطه (۴.۱) را به صورت زیر می نویسیم:

$$N_i \left( x, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \lambda^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \lambda^m. \quad (7.1)$$

فرض کنیم

$$y_{i\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} y_{im}(x) \lambda^m.$$

در این صورت:

$$A_{im} = \frac{1}{m!} \left[ \frac{d^m}{d\lambda^m} N_{i\lambda}(y_1, \dots, y_n) \right]_{\lambda=0}, \quad (8.1)$$

که در آن داریم:

$$N_{i\lambda}(y_1, \dots, y_n) = N_i(x, y_{1\lambda}, \dots, y_{n\lambda}). \quad (9.1)$$

از روابط (۸.۱) و (۹.۱) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} A_{im} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[ N_i(x, y_{1\lambda}, \dots, y_{n\lambda}) \right]_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left[ N_i \left( x, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0} \\ &= \left[ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} N_i \left( x, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

بنابراین از روابط (۶.۱) و (۱۰.۱) روابط بازگشتی زیر حاصل می شوند:

$$y_{i,0}(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha_i]} c_k^i \frac{x^k}{k!}, \quad (11.1)$$

$$y_{i,m+1}(x) = I^{\alpha_i} \left[ \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} N_i \left( x, \sum_{m=0}^{\infty} y_{1m} \lambda^m, \dots, \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \lambda^m \right) \right]_{\lambda=0},$$

که در آن  $m = 0, 1, 2, \dots$  است. می توان جواب  $y_i$  را به صورت تقریبی زیر به دست آورد:

$$f_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} y_{im}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_{ik} = y_i(x).$$

برای تعیین همگرایی روش بالا به [۱] مراجعه شود.

## ۲ مدل ریاضی کارکرد کبد انسان با رویکرد مشتق کسری کاپوتو

سلجوفسکا یک مدل ساده ریاضی با مشتق معمولی را برای توصیف کارکرد کبد انسان بیان کرده است (ر.ک. [۸]). در این کار برای مشخص کردن پارامترها، از داده‌های بالینی که با استفاده از تست  $BSP$  به دست می‌آیند، استفاده می‌شود. در کار با این تست یک ماده رنگی به نام بروموسولفتالین  $BSP$  به خون تزریق می‌شود و سپس سطح  $BSP$  در زمان‌های مختلف اندازه‌گیری می‌شود.

فرض کنیم  $y_1$  و  $y_2$  به ترتیب مقدار  $BSP$  در خون و کبد در زمان  $t$  را نشان دهند. مدل ساده فرایند استخراج  $BSP$  در خون و کبد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1(t) + by_2(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = ay_1(t) - (b + d)y_2(t),$$

که در آن داریم  $I = y_1(0)$  یا  $I > 0$ ،  $y_2(0) = 0$ ،  $a$  و  $b$  ضرایب ثابت نامشخصی‌اند، که سرعت انتقال  $BSP$  را نشان می‌دهند و نتایج عددی در مشاهدات بالینی این ضرایب را مشخص می‌کنند.

مشتق معمولی حافظه داخلی سیستم را حفظ نمی‌کند ولی مشتق مرتبه کسری حافظه داخلی سیستم را به خوبی حفظ کرده و توانایی بالایی در توصیف دینامیک پدیده‌ها دارد. از این‌رو، برای بررسی کارکرد کبد از سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتق مرتبه کسری استفاده می‌کنیم. مشتق مرتبه کسری کاپوتو سازگاری بیشتری با پدیده‌های طبیعی دارد به این خاطر یک سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتق کاپوتو به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$${}^c D_t^\alpha y_1(t) = ay_1(t) + by_2(t),$$

$${}^c D_t^\beta y_2(t) = ay_1(t) - (b + d)y_2(t), \quad (1.2)$$

که در آن  ${}^c D^\alpha$  مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  و  $\beta$  متعلق به  $(0, 1)$  هستند و  $y_1$  و  $y_2$  به ترتیب سطح  $BSP$  در زمان  $t$  در خون و کبد را نشان می‌دهند به طوری که  $I = y_1(0)$ ،  $y_2(0) = 0$  و  $I > 0$ .

### ۱.۲ پایداری و نقطه تعادل

برای تعیین نقاط تعادل سیستم (۲.۱)، طرف دوم معادلات را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$ay_1(t) + by_2(t) = 0,$$

$$ay_1(t) - (b + d)y_2(t) = 0.$$

با حل معادلات جبری بالا نقطه تعادل  $E = (0, 0)$  به دست می‌آید. با توجه به ماتریس ژاکوبین سیستم به صورت:

$$J = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -(b + d) \end{bmatrix}$$

و معادله مشخصه

$$\lambda^2 + (a + b + d)\lambda + ad = 0,$$

به دست می‌آید که یک معادله مرتبه دوم است و چون  $(a + b + d) > 0$  و  $ad > 0$ ، بنابراین مقادیر ویژه منفی بوده و سیستم پایدار است.

## ۳ حل عددی

برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل کسری بالا از روش تجزیه آدومیان که در [۱۳] ارایه شده است، استفاده می‌کنیم. با توجه به این روش قسمت غیرخطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_1(\bar{y}) = -ay_1 + by_2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j},$$

$$N_2(\bar{y}) = ay_1 - (b+d)y_2 = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}.$$

با توجه به (۱۰.۱) چندجمله‌ای‌های آدومیان  $A_{i,j}$  با  $i = 1, 2$  و  $j = 0, 1, \dots$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_{10} &= -ay_{10} + by_{20}, \\ A_{11} &= -ay_{11} + by_{21}, \\ A_{12} &= -ay_{12} + by_{22}, \\ A_{13} &= -ay_{13} + by_{23}, \\ A_{14} &= -ay_{14} + by_{24}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} A_{20} &= ay_{10} - (b+d)y_{20}, \\ A_{21} &= ay_{11} - (b+d)y_{21}, \\ A_{22} &= ay_{12} - (b+d)y_{22}, \\ A_{23} &= ay_{13} - (b+d)y_{23}, \\ A_{24} &= ay_{14} - (b+d)y_{24}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

در نهایت سری تجزیه آدومیان به دنباله بازگشتی زیر منتهی می‌شود:

$$\begin{aligned} y_{10} &= I, & y_{1,m+1} &= I^\alpha A_{1m} \\ y_{20} &= 0, & y_{2,m+1} &= I^\beta A_{2m}, \end{aligned}$$

که در آن  $m = 0, 1, \dots$  است. در اولین مرحله داریم:

$$y_{11} = I^\alpha(A_{10}) = I^\alpha(-ay_{10} + by_{20}) = \frac{-aI}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha.$$

همچنین داریم:

$$y_{21} = I^\beta(A_{20}) = I^\beta(ay_{10} - (b+d)y_{20}) = \frac{aI}{\Gamma(\beta + 1)} t^\beta.$$

جملات بعدی عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}
 y_{12} &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha} + \frac{abI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\alpha+\beta} \right), \\
 y_{22} &= \frac{\lambda}{\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha+\beta} - \frac{a(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta} \right), \\
 y_{13} &= \frac{\lambda}{(\Gamma(\alpha + 1))^2} \left[ \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha} + \frac{a^\nu bI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} \right] \\
 &\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left[ \frac{a^\nu bI}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} - \frac{ab(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta+\alpha} \right], \\
 y_{23} &= \frac{a}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left[ \frac{a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} + \frac{abI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\alpha+\nu\beta} \right] \\
 &\quad - \frac{b+d}{(\Gamma(\beta + 1))^2} \left[ \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha+\nu\beta} - \frac{a(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta} \right].
 \end{aligned}$$

با استفاده از جملات فوق، حاصل جواب سیستم معادلات مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} + \dots \\
 &= I + \frac{-aI}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)} \left( \frac{a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha} + \frac{abI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\alpha+\beta} \right) \\
 &\quad + \left[ \frac{\lambda}{(\Gamma(\alpha + 1))^2} \left( \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha} + \frac{a^\nu bI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{a^\nu bI}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} - \frac{ab(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta+\alpha} \right) \right].
 \end{aligned}$$

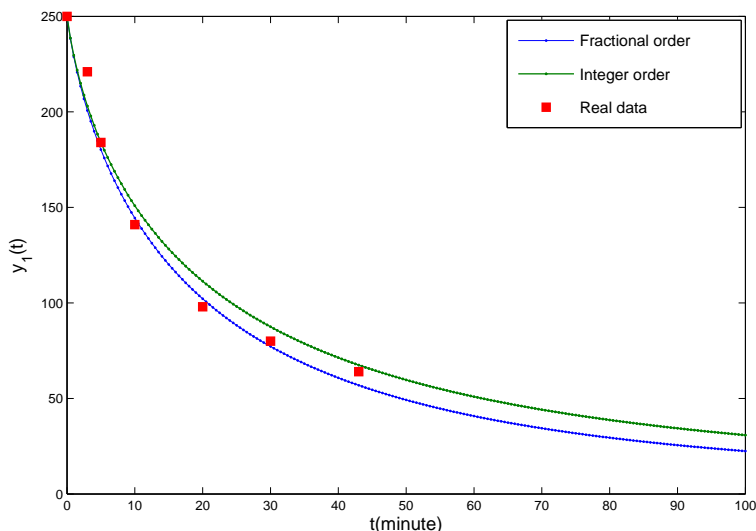
همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
 y_2 &= y_{21} + y_{22} + y_{23} + \dots \\
 &= \frac{aI}{\Gamma(\beta + 1)} t^\beta + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha+\beta} - \frac{a(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta} \right) \\
 &\quad + \left[ \frac{a}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\nu\alpha+\beta} + \frac{abI}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\alpha+\nu\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b+d}{(\Gamma(\beta + 1))^2} \left( \frac{-a^\nu I}{\Gamma(\alpha + 1)} t^{\alpha+\nu\beta} - \frac{a(b+d)I}{\Gamma(\beta + 1)} t^{\nu\beta} \right) \right].
 \end{aligned}$$

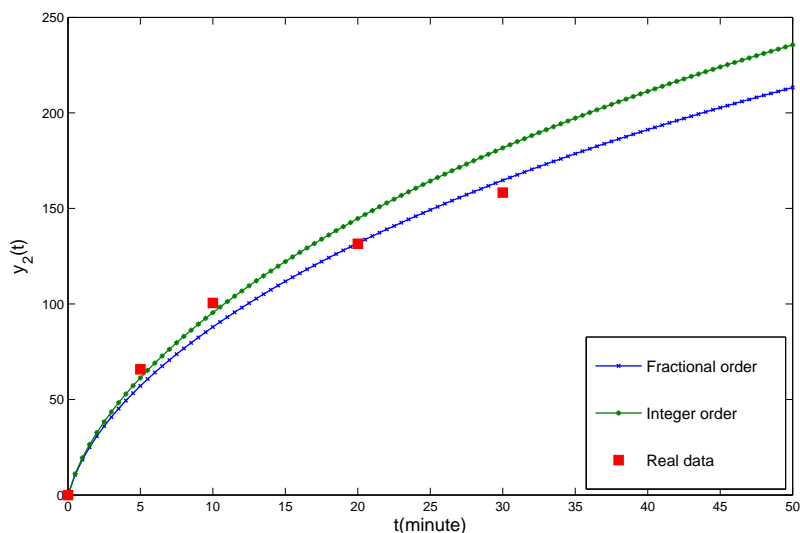
#### ۴ شبیه‌سازی عددی

در این بخش بر پایه داده‌های کلینیکی موجود و با استفاده از نرم‌افزار متلب یک شبیه‌سازی عددی ارائه می‌کنیم. بر اساس نتایج تجربی ارائه شده در [۸]، مقادیر عددی ضرایب را  $a = 0.0547241$ ،  $b = 0.0152577$  و  $d = 0.0003903$  در نظر می‌گیریم و همچنین

برای مقایسه بهتر نتایج حاصل با نتایج تجربی، مقدار اولیه را به‌طور مشابه  $I = 250$  در نظر می‌گیریم. ابتدا برای تعیین بهترین مرتبه مشتق کسری برای سیستم (۱.۱)، نتایج حاصل از سیستم را با داده‌های کلینیکی موجود برازش می‌کنیم و مشاهده می‌شود که سیستم با مرتبه کسری  $\alpha = 0.973$  و  $\beta = 0.952$  کم‌ترین مقدار خطا را با داده‌های کلینیکی موجود دارد و برای نمایش توانایی سیستم معادلات کسری در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی، نتایج حاصل از سیستم مرتبه کسری برای  $y_1$  و  $y_2$  و نتایج حاصل از سیستم مرتبه صحیح با مرتبه  $\alpha = 1$  را به همراه داده‌های تجربی موجود در شکل‌های ۱ و ۲ رسم کرده‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نتایج حاصل از سیستم مرتبه کسری خطای کم‌تری نسبت به سیستم مرتبه صحیح دارد و بهتر داده‌های واقعی را دنبال می‌کند.

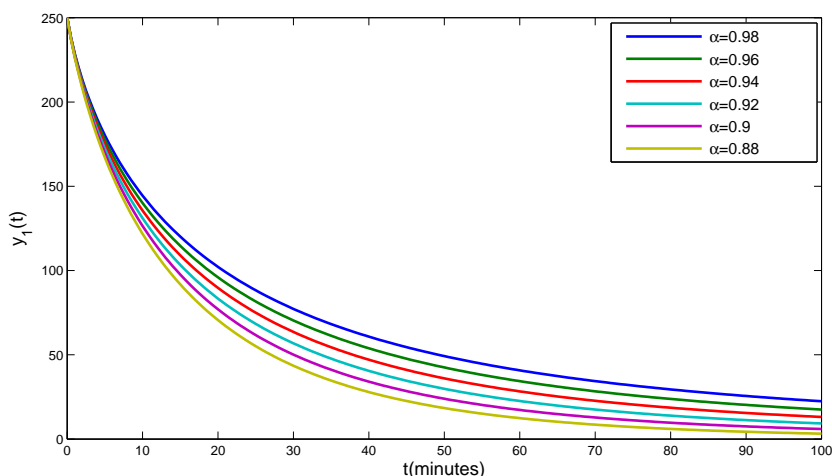


شکل ۱: نمودار  $y_1$  با مرتبه کسری  $\alpha = 0.973$  و مرتبه صحیح  $\alpha = 1$  به همراه داده‌های واقعی

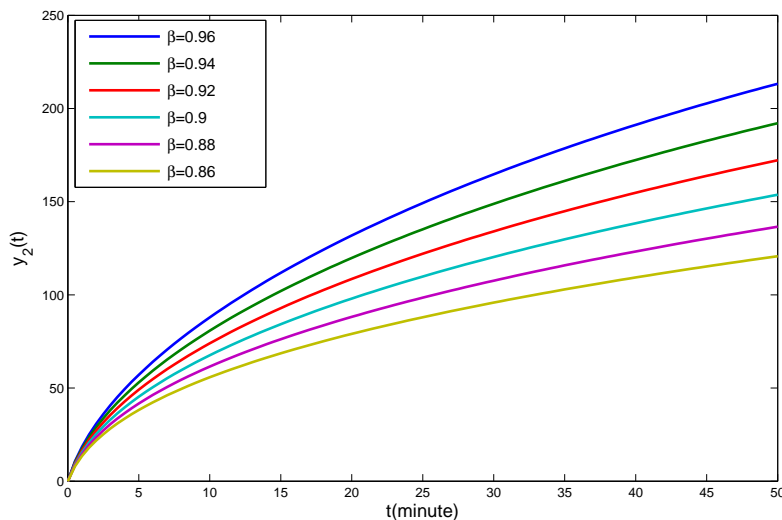


شکل ۲: نمودار  $y_2$  با مرتبه کسری  $\beta = 0.952$  و مرتبه صحیح  $\beta = 1$  به همراه داده‌های واقعی

برای بررسی تاثیر مرتبه مشتق‌گیری بر نتایج حاصل از سیستم، نتایج را برای چند مرتبه مختلف کسری محاسبه کرده و در شکل‌های ۳ و ۴ رسم کرده‌ایم. همان‌طور که نمودارها نشان می‌دهند، تغییر کوچک در مرتبه مشتق‌گیری بر رفتار کلی توابع حاصل از نظر صعودی و نزولی بودن تاثیر ندارد ولی از نظر مقادیر عددی حاصل تفاوت قابل مشاهده‌ای ایجاد می‌کند.



شکل ۳: نمودار  $y_1$  با چند مرتبه مختلف کسری



شکل ۴: نمودار  $y_2$  با چند مرتبه مختلف کسری

## ۵ نتیجه گیری

امروزه مفهوم مشتق مرتبه کسری با ویژگی‌های خاص خود بسیاری از مسایل مربوط به جهان واقعی را مدل‌سازی کرده است. در این کار یک مدل ریاضی برای کارکرد کبد انسان با استفاده از مشتق کاپوتو مورد بررسی قرار گرفته است. پایداری سیستم در نقطه تعادل بررسی شده و با استفاده از روش تحلیلی آدومیان جواب‌های تقریبی سیستم محاسبه شده است. مرتبه کسری مطلوب برای سیستم با برازش نتایج با داده‌های کلینیکی محاسبه شده است و همچنین نتایج سیستم مرتبه کسری و مرتبه صحیح با داده‌های کلینیکی مقایسه شده است و نتایج نشان می‌دهند که سیستم مرتبه کسری بهتر از سیستم مرتبه صحیح داده‌های واقعی را دنبال می‌کند و با توجه به این‌که مشتق مرتبه کسری حافظه سیستم را نیز حفظ می‌کند، بنابراین می‌تواند جایگزین مناسبی برای مشتق مرتبه صحیح در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی باشد. همچنین



نتایج سیستم مرتبه کسری را برای چند مرتبه مختلف کسری رسم نموده و مشاهده کردیم که تغییرات کوچک در مرتبه مشتق‌گیری در رفتار کلی توابع حاصل، تاثیر چندانی ندارد اما از نظر مقادیر عددی حاصل تفاوت قابل توجهی وجود دارد.

## فهرست منابع

- [1] Abbaoui K., Cherruault Y., *New ideas for proving convergence of decomposition methods*, Computers and Mathematics with Applications, 29(7) (1995), 103–108.
- [2] Almeida R., Bastos N. R. O., Monteiro M. T. T., *Modelling some real phenomena by fractional differential equations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39(16) (2016), 4846–4855.
- [3] Atangana A., Alkahtani B. S. T., *Analysis of the Keller-Segel model with a fractional derivative without singular kernel*, Entropy, 17(6) (2015), 4439–4453.
- [4] Atangana A., Secer A., *A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions*, In Abstract and applied analysis, Vol. 2013, Article ID 279681 (2013), 1–8.
- [5] Atangana A., Bildik N., *The use of fractional order derivative to predict the groundwater flow*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2013, Article ID 543026 (2013), 1–9.
- [6] Baleanu D., Mustafa O. G., *On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations*, Computers and Mathematics with Applications, 59(5) (2010), 1835–1841.
- [7] Baleanu D., Guvenc Z. B., Teneiro Machado J. A., *New Trends in Nano-Technology and Fractional Calculus Applications*, Springer, Dordrecht, (2010).
- [8] Celechovska L., *A simple mathematical model of the human liver*, Applications of Mathematics, 49 (2004), 227–246.
- [9] Dholkawala Z. F., Sarma H.K., Kam S. I., *Application of fractional flow theory to foams in porous media*, Petroleum Science and Engineering, 57(2007), 152–165.
- [10] Erturk V. S., Zaman G., Momani S., *A numeric analytic method for approximating a giving up smoking model containing fractional derivatives*, Computers and Mathematics with Applications, 64(10) (2012), 3065–3074.
- [11] Haq F., Shah K., Ur-Rahman G., Shahzad N., *Numerical analysis of fractional order model of HIV-1 infection of CD4<sup>+</sup> T-cells*, Computational Methods for Differential Equations, 5(1) (2017), 1–11.
- [12] Jesus I. S., Tenreiro Machado J. A., *Implementation of fractional-order electromagnetic potential through a genetic algorithm*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(5) (2009), 1838–1843.
- [13] Jafari H., Daftardar-Gejji V., *Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 196(2) (2006), 644–651.
- [14] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, (2006).

- [15] Koca I., *Analysis of rubella disease model with non-local and non-singular fractional derivatives*, An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA), 8(1), (2018), 17–25.
- [16] Miller K. S., Ross B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation*, John Wiley, (1993).
- [17] Oldham K., Spanier J., *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, New York, (1974).
- [18] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, (1999).
- [19] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Fractional Integral and Derivative, Theory and Applications*, Gordon and Breach, (1993).
- [20] Sottinen T., *Fractional Brownian motion, random walks and binary market models*, Finance and Stochastics, 5 (2001), 343–355.



## Investigation of mathematical model of human liver by Caputo fractional derivative approach

Mehdi Shabibi<sup>1</sup>, Zohreh Zeinalabedini Charandabi<sup>2</sup>, Hakimeh Mohammadi<sup>3</sup>,  
Shahram Rezapour<sup>4, †</sup>

(1) Department of Mathematics, Mehran Branch, Islamic Azad University, Ilam, Iran

(2) Department of Mathematics, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran

(3) Department of Mathematics, Miandoab Branch, Islamic Azad University, Miandoab, Iran

(4) \*Department of Mathematics, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 2021/4/8

Accepted: 2022/1/14

**Abstract:** The study of the function of vital organs of the body by mathematical models is one of the most important and interesting topics for researchers. In this work, we intend to study the mathematical model of human liver function using the fractional order derivative with Caputo approach. The Adomian Analytical Analysis (ADM) method will be used to solve the system of fractional-order differential equations obtained in the new model of the liver. We also provide a numerical simulation for the results obtained from the fractional order system and the integer order system using the available clinical data.

**Keywords:** Fractional calculus, Fractional mathematical model, Caputo derivative, human liver, Adomian decomposition method.



©2021 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>†</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: [rezapourshahram@yahoo.ca](mailto:rezapourshahram@yahoo.ca)