مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۱، ص ۴۴-۳۴

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2022.37301.1927

خواص پایه‌ای جبر تولیدشده توسط عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی فضاهای $L^p - L^\infty$

ابوالقاسم علیشاهی [1] ×، سعیده شمسی گمچی [2]، علی عبادیان [3]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی: ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی: ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۲/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۲۸

چکیده: در این مقاله، مطالعات انجام‌شده در مورد ویژگی‌های مجموع متناهی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی فضاهای اندازه‌پذیر L^p را ادامه می‌دهیم. در ابتدا شرایط لازم و کافی برای فشردگی این عملگر روی فضاهای اندازه‌پذیر و اتمیک L^p آورده و سپس در برخی از حالت‌ها کران‌هایی برای نرم اساسی این عملگر محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: عملگر ترکیبی وزن‌دار، فشردگی، فضاهای اندازه اتمیک، نرم اساسی.

رده‌بندی ریاضی: 47B20; 47B33,47B38

۱ مقدمه

فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای σ- متناهی، اندازه‌پذیر و کامل باشد. $L^p(X, \Sigma, \mu)$ همراه با نرم $||.||_{L^p(\mu)}$ یک فضای باناخ است. همچنین فرض کنیم $u : X \to \mathbb{C}$ یک تابع Σ - اندازه‌پذیر و $\varphi : X \to X$ یک تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد باشد. بنابر قضیه رادون نیکودیم تابع Σ - اندازه‌پذیر نامنفی h وجود دارد که برای هر $E \in \Sigma$، $\mu(\varphi^{-1}(E)) = \int_X h d\mu$. ما فضای خطی از تمام توابع مختلط مقدار Σ - اندازه‌پذیر روی X را با $L^\circ(\Sigma)$ نمایش می‌دهیم. برای زیرجبر σ - متناهی $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ و برای هر $f \in L^p(\mu)$، تابع منحصربه‌فرد $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیری وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_A f d\mu = \int_A E^{\mathcal{A}} f d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

$E^{\mathcal{A}}$ عملگر شرطی نمایی و خودتوان روی $L^p(\Sigma)$ است. برای اطلاع بیش‌تر در این مورد به [۱۱] مراجعه شود. عملگر ترکیبی وزن‌دار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$uC_\varphi f = uf \circ \varphi.$$

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: a_alishahy@pnu.ac.ir

مطالعه عملگرهای ترکیبی روی فضاهای L^p توسط پاروت شروع شد و توسط هالموس و نوردگرن ادامه یافت. بررسی رفتار این عملگر توسط سینک و تاکاگی ادامه یافت. در سال ۲۰۱۲ استارمی و جبارزاده [۸] به مطالعه مجموع متناهی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی L^p پرداختند. در ادامه تحقیق ایشان در ۲۰۱۸ ویژگی‌هایی از کران‌داری، فشردگی و محاسبه نرم اساسی این عمگر در حالت‌های مختلف $1 < p \leq \infty$ و $1 < q \leq \infty$ بررسی شد[۱]. در این مقاله سایر حالت‌های باقی‌مانده مورد بررسی قرار گرفته است.

۲ تعاریف و مقدمات

تعریف **۱.۲.** فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای σ- متناهی باشد. مجموعه $A \in \Sigma$ با شرط $\mu(A) > 0$ را اتم گوییم هرگاه برای هر $F \in \Sigma$ با $F \subset A$ داشته باشیم $\mu(F) = 0$ یا $\mu(A \backslash F) = 0$.

اگر مجموعه Σ -اندازه‌پذیر F شامل هیچ اتمی نباشد غیراتمی نامیده می‌شود.

لم **۲.۲.** فرض کنیم $E \in \Sigma$ یک مجموعه غیراتمی باشد و $\mu(E) > 0$. در این صورت

الف) دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های مجزا و Σ-اندازه‌پذیر از E مانند $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد به‌طوری که $\mu(E_n) > 0$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

ب) برای هر عدد حقیقی r با $0 < r < \mu(E)$ یک زیرمجموعه Σ-اندازه‌پذیر از E مانند F_r وجود دارد به‌طوری که $\mu(F_r) = r$.

اثبات. به [۴] ، گزاره ۲.۱ مراجعه شود. □

لم **۳.۲.** فرض کنیم X یک فضای σ -متناهی و $A \in \Sigma$ یک اتم باشد. در این صورت $\mu(A) > 0$.

اثبات. به [۴] ، بخش ۲.۱ مراجعه شود. □

لم **۴.۲.** فرض کنیم f یک تابع Σ - اندازه‌پذیر باشد. در این صورت f تقریبا همه‌جا نسبت به μ روی اتم A ثابت است.

اثبات. به [۴] ، گزاره ۳.۱ مراجعه شود. □

قضیه **۵.۲.** هر فضای اندازه σ-متناهی X به‌طور یکتا به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$X = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup B,$$

که‌درآن $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک خانواده شمارش‌پذیر از اتم های مجزا و B یک مجموعه غیراتمی است.

اثبات. به [۴] ، بخش ۲.۱ مراجعه شود. □

تعریف **۶.۲.** نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X$ یک تبدیل اندازه‌پذیر گفته می‌شود، اگر برای هر $S \in \Sigma$، $\varphi^{-1}(S) \in \Sigma$. تبدیل اندازه‌پذیر φ را نامنفرد می‌نامیم اگر $\mu(\varphi^{-1}(S)) = 0$، هرگاه $\mu(S) = 0$.

برای تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد φ و برای هر $S \in \Sigma$ اندازه $\mu \circ \varphi^{-1}$ به‌صورت

$$\mu \circ \varphi^{-1}(S) := \mu(\varphi^{-1}(S))$$

تعریف می‌شود. به‌عبارت دیگر $\mu \circ \varphi^{-1}$ مطلقا پیوسته نسبت به μ بوده که با نماد $\mu \circ \varphi^{-1} \ll \mu$ نشان داده می‌شود. اگر μ یک اندازه σ-متناهی باشد، آنگاه بنابر قضیه رادون -نیکودیم تابع نامنفی یکتا مانند $h \in L^1(\Sigma)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $S \in \Sigma$ ،

$$\mu \circ \varphi^{-1}(S) = \int_S h d\mu.$$

تابع $h := \frac{d\mu\circ\varphi^{-1}}{d\mu}$ را مشتق رادون نیکودیم $\mu \circ \varphi^{-1}$ نسبت به μ می‌نامیم. همچنین فرض کنیم $u : X \to \mathbb{C}$ یک تابع Σ - اندازه‌پذیر و $\varphi : X \to X$ یک تبدیل اندازه‌پذیر نامنفرد باشد. در این صورت زوج (u, φ) یک عملگر خطی uC_φ از $L^p(\Sigma)$ به توی $L^0(\Sigma)$، با ضابطه

$$uC_\varphi(f) = uf \circ \varphi, \qquad f \in L^p(\Sigma),$$

القا می‌کند که به آن عملگر ترکیبی وزن‌دار می‌گوییم. اگر روی X، $u \equiv 1$ آنگاه عملگر ترکیبی C_φ و اگر برای هر $x \in X$، $\varphi(x) = x$ آنگاه عملگر ضربی M_u حاصل می‌شود. در این رساله ما مجموع متناهی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی $L^p(\Sigma)$ به فرم $W = \sum_{i=1}^{n} u_i C_{\varphi_i}$ را در نظر می‌گیریم. که‌در آن برای $1 \leq i \leq n$، مشابه نمادهای قبل $u_i : X \to \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر ، $\varphi_i : X \to X$ یک تبدیل نامنفرد و $h_i := \frac{d\mu\circ\varphi_i^{-1}}{d\mu}$ مشتق رادون–نیکودیم است. بنابراین تابع نامنفی، یکتا و $\varphi^{-1}(\Sigma)$–اندازه‌پذیر $E(|u|^p)$ روی X وجود دارد به‌طوری که برای هر $F \in \varphi^{-1}(\Sigma)$،

$$\int_F |u|^p d\mu = \int_F E(|u|^p) d\mu.$$

تابع $E(|u|^p)$ را تابع نمایی شرطی از $|u|^p$ نسبت به $\varphi^{-1}\Sigma$ می‌گوییم و برای سادگی آن را با نماد E نمایش می‌دهیم. متناظر با هر زیر σ-جبر متناهی $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$، عملگر $E = E^{\mathcal{A}}$ موسوم به عملگر امید شرطی ، تعریف شده روی فضای توابع اندازه‌پذیر نامنفی و یا روی فضای $L^p(\Sigma)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ با شرایط زیر به طور یکتا معین می‌شود:

الف) $E(f)$ یک تابع $\mathcal{A}$ - اندازه‌پذیر است.

ب) برای هر $A \in \mathcal{A}$ اگر $\int_A f d\mu$ موجود باشد، آنگاه $\int_A f d\mu = \int_A E(f) d\mu$.

این عملگر ابزار اصلی در کار ما خواهد بود. با فرض این‌که توابع f، g و $\cdots$ اعضایی از دامنه تعریف عملگر امید شرطی E باشند، برخی از ویژگی‌های مهم این عملگر عبارت‌اند از:

۱) اگر f و g حقیقی مقدار با شرط $f \leq g$ باشند، آنگاه $E(f) \leq E(g)$.

۲) اگر a تابع مختلط مقدار و $\mathcal{A}$- اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $E(af) = aE(f)$.

۳) اگر $f \in L^p(\Sigma)$ ، $g \in L^p(\Sigma)$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ، آنگاه $E|fg| \leq (E|f|^p)^{\frac{1}{p}} (E|g|^q)^{\frac{1}{q}}$.

۴) $(E|f|)^p \leq E|f|^p$.

۵) $E(1) = 1$.

۶) $|E(f)|^p \leq E|f|^p$.

۷) اگر $f > 0$، آنگاه $E(f) > 0$.

بنابر موارد ذکرشده در [۲] تابع یکتای Σ–اندازه‌پذیر $E(|u^p|) \circ \varphi^{-1}$ وجود دارد به‌طوری که تقریبا همه‌جا روی X، $(E(|u^p|) \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = E(|u^p|))$. با استفاده از فرمول تغییر متغیر برای $E \in \Sigma$ داریم:

$$m_p(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |u|^p d\mu = \int_{\varphi^{-1}(E)} E(|u|^p) d\mu = \int_{\varphi^{-1}(E)} (E(|u|^p) \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi d\mu = \int_E E(|u|^p) \circ \varphi^{-1} d(\mu \circ \varphi^{-1}) = \int_E hE(|u|^p) \circ \varphi^{-1} d\mu.$$

بنابر یکتایی در قضیه رادون - نیکودیم نتیجه می‌شود که تقریبا همه‌جا روی X،

$$\left[\frac{dm_p}{d\mu}\right] = hE(|u|^p) \circ \varphi^{-1}.$$

برای عملگر ترکیبی C_φ، $hE(|u|^p) \circ \varphi^{-1} = h$ و برای عملگر ضربی M_u، $hE(|u|^p) \circ \varphi^{-1} = |u|^p$ تقریبا همه‌جا روی X برقرار است. نماد مورد استفاده در این مقاله برای عملگر امید شرطی $E_i = E^{\varphi_i^{-1}(\Sigma)}$ است.

۳ نتیجه‌گیری

در این بخش ابتدا شرط‌های لازم و کافی برای فشردگی W روی $L^\infty(\mu)$ آورده شده است.

قضیه **۱.۳.** فرض کنیم X یک فضای اتمیک، $1 < p < \infty$، $J = \sum_{i=1}^n h_i E_i(|u_i|^p) \circ \varphi_i^{-1}$ ،
$N_\epsilon(\sqrt[p]{J}) = \{x \in X \ ; \ \sqrt[p]{J(x)} \geq \epsilon\}$ ، $\mu(X) < \infty$.

در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu(A_i)} < \infty$ و $N_\epsilon(\sqrt[p]{J})$ شامل تعدادای متناهی اتم باشد، آنگاه W روی $L^\infty(\mu)$ یک عملگر فشرده است.

۲. فرض کنیم u_iها نامنفی و دنباله $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری نداشته باشد. در این صورت اگر

$$W : L^\infty(\mu) \to L^\infty(\mu)$$

فشرده باشد، آنگاه $N_\epsilon(\sqrt[p]{J})$ شامل تعدادی متناهی اتم است.

اثبات. (۱) فرض کنیم $N_\epsilon(\sqrt[p]{J})$ شامل تعداد متناهی اتم A_ϵ^1 ، $\cdots$ و A_ϵ^k باشد. قرار می‌دهیم: $E = \cup_{i=1}^k A_\epsilon^i$. عملگر W' را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $W' = WM_{\chi_E}$. واضح است که W' یک عملگر با بعد متناهی است و برای هر $f \in L^\infty(\mu)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\|Wf - W'f\|_\infty^p &= \sup_{0<\mu(A)<\infty \ , \ A\in\Sigma} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |Wf - W'f|^p d\mu \\
&\leq \sup_{0<\mu(A)<\infty \ , \ A\in\Sigma} \frac{1}{\mu(A)} \int_X |Wf - W'f|^p d\mu \\
&= n^{p-1} \sup_{0<\mu(A)<\infty \ , \ A\in\Sigma} \frac{1}{\mu(A)} \int_{X\setminus E} J|f| d\mu \\
&\leq n^{p-1} \sup_{0<\mu(A)<\infty \ , \ A\in\Sigma} \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{X\setminus E} J|f|^p d\mu \\
&< n^{p-1} M\epsilon \|f\|_\infty^p \mu(X).
\end{aligned}$$

بنابراین $\|W - W'\| \to 0$ و لذا W یک عملگر فشرده است.
(۲) به برهان خلف فرض کنیم برای $\epsilon > 0$، $N_\epsilon(\sqrt[p]{J})$ شامل تعداد نامتناهی اتم مجزای $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ باشد. قرار می‌دهیم: $f_j = \chi_{A_j}$.
در این صورت برای هر $A \in \Sigma$ که $0 < \mu(A) < \infty$، ازاین‌که $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری ندارد، مجموعه $\{j \in \mathbb{N} \ ; \ A_j \subseteq A\}$ متناهی است و لذا برای jهای به‌اندازه کافی بزرگ $\mu(A_j \cap A) = 0$. پس $\int_X f_j \chi_A d\mu = \mu(A_j \cap A) \to 0$ و بنابراین $f_j \to^w 0$. با توجه به‌این‌که W فشرده است، داریم: $\|Wf_j\|_\infty \to 0$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
\|Wf_j\|_\infty \mu(X) &\geq \|Wf_j\|_p^p \\
&= \int_X |Wf_j|^p d\mu \\
&= \int_X \left| \sum_{i=1}^n u_i \chi_{A_j} \circ \varphi_i \right|^p d\mu \\
&\geq \int_X J\chi_{A_j} d\mu \\
&> \epsilon^p \mu(A_j) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

که تناقض است. $\square$

در قضیه دوم این بخش شرط‌های لازم و کافی برای فشردگی $W : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ آورده شده است.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $\mu(X) < \infty$، $۱ < p < \infty$ و $J = \sum_{i=۱}^n h_i E_i(|u_i|^p) \circ \varphi_i^{-۱}$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. فرض کنیم u_iها نامنفی و دنباله $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری نداشته باشد. در این صورت اگر $W : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ فشرده باشد، آنگاه $\lim_{i\to\infty} J(A_i) = ۰$.

۲. فرض کنیم X یک فضای اتمیک و $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{۱}{\mu(A_i)} < \infty$. در این صورت اگر $\lim_{i\to\infty} J(A_i) = ۰$، آنگاه $W : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ یک عملگر فشرده است.

اثبات. (۱) نشان می‌دهیم: $\lim_{i\to\infty} J(A_i) = ۰$. به‌برهان خلف $\epsilon_۰ > ۰$ و زیردنباله $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $k \in \mathbb{N}$، $J(A_{j_k}) > \epsilon_۰^p$. برای هر $k \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $f_k = \frac{\chi_{j_k}}{\sqrt[p]{\mu(A_{j_k})}}$. واضح است که $\|f_k\|_p = ۱$. در این صورت برای هر $A \in \Sigma$ که $۰ < \mu(A) < \infty$، ازاین‌که $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری ندارد، مجموعه $\{j \in \mathbb{N} \,;\, A_j \subseteq A\}$ متناهی است و لذا برای jهای به‌اندازه کافی بزرگ $\mu(A_j \cap A) = ۰$. پس $\int_X f_j \chi_A d\mu = \mu(A_j \cap A) \to ۰$ و بنابراین $f_j \to^w ۰$. با توجه به‌این‌که W فشرده است، داریم $\|Wf_k\|_\infty \to ۰$. از طرف دیگر

$$
\begin{aligned}
\|Wf_k\|_\infty^p \mu(X) &\geq \|Wf_k\|_p^p \\
&= \int_X |Wf_k|^p d\mu \\
&= \int_X \left| \sum_{i=۱}^n u_i \frac{\chi_{A_{j_k}} \circ \varphi_i}{\sqrt[p]{\mu(A_{j_k})}} \right|^p d\mu \\
&\geq \frac{۱}{\mu(A_{j_k})} \int_X J \chi_{A_{j_k}} d\mu \\
&> \epsilon_۰^p,
\end{aligned}
$$

که تناقض است.

(۲) فرض کنیم $\lim_{i\to\infty} J(A_i) = ۰$. برای هر $m \in \mathbb{N}$، $k_m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $i > k_m$، $J(A_i) < \frac{۱}{m^p}$. قرار می‌دهیم : $E = \cup_{j=۱}^m A_j$. عملگر W' را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $W' = WM_{\chi_E}$. واضح است که W' یک عملگر با بعد متناهی است و برای هر $f \in L^p(\mu)$ مشابه اثبات قسمت اول قضیه ۱.۳ داریم:

$$
\|Wf - W'f\|_\infty^p \;<\; n^{p-۱} M \left(\frac{۱}{m^p}\right) \|f\|_p^p.
$$

بنابراین

$$
\|W - W'\| \;<\; n^{p-۱} M \left(\frac{۱}{m^p}\right),
$$

و وقتی $m \to \infty$، $\|W - W'\| \to ۰$. بنابراین W یک عملگر فشرده است. □

دراین قضیه کران پایینی برای نرم اساسی $W : L^\infty(\mu) \to L^q(\mu)$ در یک فضای اتمیک محاسبه شده است ($۱ < q < \infty$).

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $W : L^\infty(\mu) \to L^q(\mu)$ عملگری کران‌دار ، $\mu(X) < \infty$، $J = \sum_{i=۱}^n h_i E_i(|u_i|^q) \circ \varphi_i^{-۱}$ و $۱ < q < \infty$. در این صورت اگر

۱. $\alpha = \inf\{r > ۰ \,;\, N_r(\sqrt[q]{J})$ شامل تعداد متناهی اتم است$\}$،

۲. u_iها نامنفی و دنباله $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری نداشته باشد،

آنگاه $\|W\|_e \geq \frac{\alpha}{\sqrt[q]{M}}$.

اثبات. فرض کنیم برای هر $0 < \epsilon < \alpha$، $N_{\alpha-\epsilon}(\sqrt[q]{J})$ شامل تعدادی نامتناهی اتم مجزای $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ باشد. قرار می‌دهیم $f_j = \chi_{A_j}$. واضح است که $\|f_j\|_\infty = 1$. در این صورت برای هر $A \in \Sigma$ که $0 < \mu(A) < \infty$، ازاین‌که $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu(A_i)} < \infty$، داریم:

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \frac{1}{M} \neq 0.$$

بنابراین دنباله $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری ندارد. پس مجموعه

$$\{j \in \mathbb{N}\,;\ A_j \subseteq A\}$$

متناهی است و لذا برای jهای به‌اندازه کافی بزرگ $\mu(A_j \cap A) = 0$ و در نتیجه

$$\int_X f_j\chi_A d\mu = \mu(A_j \cap A) < \left(\frac{1}{j}\right) \to 0,$$

و بنابراین $f_j \to^w 0$. با توجه به‌این‌که W فشرده است، داریم $\|Wf_j\|_q \to 0$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
\|Wf_j\|_q^p &= \int_X |Wf_j|^q d\mu \\
&= \int_X \left|\sum_{i=1}^n u_i\chi_{A_j}\circ\varphi_i\right|^q d\mu \\
&\geq \int_X J\chi_{A_j} d\mu \\
&> (\alpha-\epsilon)^q \mu(A_j) \\
&> (\alpha-\epsilon)^q \inf_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \\
&= \frac{(\alpha-\epsilon)^q}{M}.
\end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned}
\|W\|_e &\geq \|W-T\| - \epsilon \\
&\geq \|Wf_j - Tf_j\|_q - \epsilon \\
&\geq \|Wf_j\|_q - \|Tf_j\|_q - \epsilon \\
&\geq \frac{(\alpha-\epsilon)}{\sqrt[q]{M}} - \epsilon.
\end{aligned}$$

چون ϵ دلخواه است، پس $\|W\|_e \geq \frac{\alpha}{\sqrt[q]{M}}$.

□

در این قضیه یک کران پایین برای نرم اساسی $W : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ در یک فضای اتمیک محاسبه شده است ($1 < q < p < \infty$).

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $W : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ عملگری کران‌دار، $1 < q < p < \infty$ و $J = \sum_{i=1}^n h_i E_i(|u_i|^q)\circ\varphi_i^{-1}$. در این صورت اگر

۱. $\mu(X) < \infty$،

۲. $\{N_r(\sqrt[q]{J})$ شامل تعداد متناهی اتم است $:\ r > 0\}$ $\alpha = \inf$،

۳. u_iها نامنفی و دنباله $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری نداشته باشد،

آنگاه $\|W\|_e \geq \frac{\alpha}{M^{\frac{p-q}{pq}}}$.

اثبات. فرض کنیم برای هر $\circ < \epsilon < \alpha$، $N_{\alpha-\epsilon}(\sqrt[q]{J})$ شامل تعدادی نامتناهی اتم مجزای $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ باشد. قرار می‌دهیم $f_j = \frac{\chi_{A_j}}{\sqrt[p]{\mu(A_j)}}$. واضح است که $\|f_j\|_p = ۱$. در این صورت برای هر $A \in \Sigma$ که $\circ < \mu(A) < \infty$، ازاین‌که $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{۱}{\mu(A_i)} < \infty$ نتیجه می‌شود که $\inf_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \frac{۱}{M} \neq \circ$ و بنابراین $\{\mu(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری ندارد. پس مجموعه $\{j \in \mathbb{N}\ ;\ A_j \subseteq A\}$ متناهی است و لذا برای jهای به‌اندازه کافی بزرگ $\mu(A_j \cap A) = \circ$. در نتیجه $\circ \leftarrow \left(\frac{۱}{j}\right)^{۱-\frac{۱}{p}} > \frac{\mu(A_j\cap A)}{\sqrt[p]{\mu(A_j)}} = \int_X f_j \chi_A d\mu$ و بنابراین $f_j \to^w \circ$. با توجه به‌این‌که W فشرده است، داریم $\|Wf_j\|_q \to \circ$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
\|Wf_j\|_q^p &= \int_X |Wf_j|^q d\mu \\
&= \int_X \left|\sum_{i=۱}^{n} u_i \frac{\chi_{A_j}\circ\varphi_i}{\sqrt[p]{\mu(A_j)}}\right|^q d\mu \\
&\geq \frac{۱}{\mu(A_j)^{\frac{q}{p}}} \int_X J\chi_{A_j} d\mu \\
&> (\alpha-\epsilon)^q \mu(A_j)^{۱-\frac{q}{p}} \\
&> (\alpha-\epsilon)^q \inf_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)^{۱-\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned}
\|W\|_e &\geq \|W-T\| - \epsilon \\
&\geq \|Wf_j - Tf_j\|_q - \epsilon \\
&\geq \|Wf_j\|_q - \|Tf_j\|_q - \epsilon \\
&\geq \frac{(\alpha-\epsilon)}{M^{\frac{p-q}{pq}}} - \epsilon.
\end{aligned}$$

چون ϵ دلخواه است، پس $\|W\|_e \geq \frac{\alpha}{M^{\frac{p-q}{pq}}}$.

□

در این قضیه $W : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ عملگری کران‌دار و X یک فضای اتمیک در نظر گرفته می‌شود ($۱ < p < \infty$).

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $W : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ عملگری کراندار، $۱ < p < \infty$ و $J = \sum_{i=۱}^{n} h_i E_i(|u_i|^p) \circ \varphi_i^{-۱}$. در این صورت اگر

۱. $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{۱}{\mu(A_i)} < \infty$،

۲. $\alpha = \inf\{r > \circ\ :\ N_r(\sqrt[p]{J})$ شامل تعداد متناهی اتم است $\}$،

آنگاه $\|W\|_e \leq \alpha(n^{p-۱}M)^{(\frac{۱}{p})}$.

اثبات. فرض کنیم $\epsilon > \circ$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $K = N_{\alpha+\epsilon}(\sqrt[p]{J})$، $u_i' = u_i \chi_{\varphi_i^{-۱}(K)}$ و $W' = \sum_{i=۱}^{n} u_i' C_{\varphi_i}$. بنابر تعریف α، K شامل تعداد متناهی اتم است و لذا W' با بعد متناهی است. برای هر $f \in L^p(\mu)$ مشابه اثبات قسمت دوم قضیه ۲.۳ داریم:

$$\|Wf - W'f\|_\infty^p < n^{p-۱}M\,(\alpha+\epsilon)^p\,\|f\|_p^p.$$

بنابراین $\|W - W'\| \leq (n^{p-۱}M)^{(\frac{۱}{p})}(\alpha+\epsilon)$ و لذا $\|W\|_e \leq \alpha(n^{p-۱}M)^{\frac{۱}{p}}$. □

در پایان $W : L^\infty(\mu) \to L^\infty(\mu)$ عملگری کران‌دار و X یک فضای اتمیک در نظر گرفته می‌شود $(1 < p < \infty)$.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $W : L^\infty(\mu) \to L^\infty(\mu)$ عملگری کران‌دار، $1 < p < \infty$ و $J = \sum_{i=1}^n h_i E_i(|u_i|^p) \circ \varphi_i^{-1}$. در این صورت اگر

۱. $\mu(X) < \infty$،

۲. $M = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mu(A_i)} < \infty$،

۳. $\alpha = \inf\{r > 0 \ : \ $ شامل تعداد متناهی اتم است $N_r(\sqrt[p]{J})\}$،

آنگاه $\|W\|_e \le \alpha(n^{p-1}M\mu(X))^{(\frac{1}{p})}$ و اگر u_iها نامنفی باشند، آنگاه $\|W\|_e \ge \frac{\alpha}{\sqrt[p]{M\mu(X)}}$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $K = N_{\alpha+\epsilon}(\sqrt[p]{J})$، $u_i' = u_i\chi_{\varphi_i^{-1}(K)}$ و $W' = \sum_{i=1}^n u_i' C_{\varphi_i}$. بنابر تعریف α، K شامل تعداد متناهی اتم است و لذا W' با بعد متناهی است. برای هر $f \in L^\infty(\mu)$ مشابه اثبات قسمت دوم قضیه ۲.۳ داریم:

$$\|Wf - W'f\|_\infty^p \quad < \quad n^{p-1}M\,(\alpha+\epsilon)^p\,\mu(X)\|f\|_\infty^p.$$

بنابراین $\|W - W'\| \le (n^{p-1}M\mu(X))^{(\frac{1}{p})}\,(\alpha+\epsilon)$ و لذا $\|W\|_e \le \alpha(n^{p-1}M\mu(X))^{\frac{1}{p}}$. همچنین اگر u_iها نامنفی باشند، فرض کنیم $N_{\alpha-\epsilon}(\sqrt[p]{J})$ شامل تعدادی نامتناهی اتم باشد و $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ اتمهایی مجزا در $N_{\alpha-\epsilon}(\sqrt[p]{J})$ باشند. قرار می‌دهیم $f_j := \chi_{A_j}$ و فرض کنیم $A \in \Sigma$ به‌طوری که $0 < \mu(A) < \infty$. از این‌که دنباله $\{\mu(A_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ هیچ زیردنباله همگرا به صفری ندارد، نتیجه می‌شود مجموعه $\{j \in \mathbb{N}\,;\ A_j \subseteq A\}$ متناهی است و بنابراین برای jهای به‌اندازه کافی بزرگ $\mu(A_j \cap A) = 0$ و بنابراین

$$\left|\int_X f_j\chi_A\right| = \mu(A\cap A_j) \to 0.$$

که نتیجه می‌دهد دنباله f_j به‌طور ضعیف همگرا به صفر است. از این‌که W فشرده است نتیجه می‌شود که $\|Wf_j\| \to 0$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\|Wf_j\|_\infty^p\mu(X) &\ge \|Wf_j\|_p^p \\
&= \int_X |Wf_j|^p d\mu \\
&= \int_X |\sum_{i=1}^n u_i f_j \circ \varphi_i|^p d\mu \\
&= \int_X J\chi_{A_j} d\mu \\
&\ge (\alpha-\epsilon)^p \inf_j \mu(A_j) \\
&= \frac{(\alpha-\epsilon)^p}{M}.
\end{aligned}$$

درنتیجه $\|Wf_j\|_\infty \ge \frac{\alpha-\epsilon}{(M\mu(X))^{\frac{1}{p}}}$. به‌علاوه

$$\begin{aligned}
\|W\|_e &> \|W - T\| - \epsilon \\
&\ge \|Wf_j - Tf_j\|_\infty - \epsilon \\
&\ge \|Wf_j\|_\infty - \|Tf_j\|_\infty - \epsilon \\
&\ge \frac{\alpha-\epsilon}{(M\mu(X))^{\frac{1}{p}}} - \epsilon.
\end{aligned}$$

از این‌که $\epsilon > 0$ دلخواه است نتیجه می‌شود که $\|W\|_e \ge \frac{\alpha}{(M\mu(X))^{\frac{1}{p}}}$. □

مثال

مثال **۷.۳**. فرض کنیم $X = \mathbb{N}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و مثبت باشد. اندازه μ روی $P(\mathbb{N})$ را برای هر $E \in P(\mathbb{N})$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(E) = \sum_{n\in E} w_n.$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $u_1(n) = \alpha_n$، $u_2(n) = \beta_n$، $\varphi_1(n) = n$، $\varphi_2(n) = n$. با محاسبه مستقیم نتیجه می‌شود که $h_1(n) = 1$، $h_2(n) = 1$، $J_1(n) = \alpha_n$، $J_2(n) = \beta_n$. بنابراین موارد زیر را داریم:

۱. اگر $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n|\alpha_n + \beta_n|^{\frac{p}{p-q}} < \infty$، آنگاه W یک عملگر فشرده از $L^p(X)$ به توی $L^q(X)$ برای $q < p$ است.

۳. اگر $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n|\alpha_n + \beta_n| < \infty$، آنگاه برای $1 < q < \infty$، W یک عملگر فشرده از $L^\infty(X)$ به توی $L^q(X)$ است.

مثال **۸.۳**. فرض کنیم $\mu(n) = n$، $u_1(n) = \frac{1}{n^3}$، $\varphi_1(n) = n$، $u_2(n) = \frac{1}{n^4}$، $\varphi_2(n) = n$. با محاسبه نتیجه می‌شود $h_1(n) = 1 = h_2(n)$، $J_1(n) = \frac{1}{n^{3p}}$ و $J_2(n) = \frac{1}{n^{4p}}$.

۱. برای $1 < q < p < \infty$، W فشرده است و همچنین $\sum_{n\in\mathbb{N}} J(n)^{\frac{p}{p-q}}\mu(n) < \infty$.

۲. برای $1 < q < \infty$ و $J(n) = \frac{1}{n^{3q}} + \frac{1}{n^{4q}}$، W فشرده است و همچنین $\sum_{n\in\mathbb{N}} J(n)\mu(n) < \infty$.

۳. برای $1 < p < \infty$ و $J(n) = \frac{1}{n^{3q}} + \frac{1}{n^{4q}}$، W فشرده است؛ زیرا $\lim_{n\to\infty} J(n) = 0$ وقتی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

فهرست منابع

[1] Alishahi A, Shamsi Gamchi S and Ebadian A., *Basic property of finite sum of weighted composition operators*, Filimat, Vol(32) **11** (2018), 4005-4019.

[2] Capbell J. T and Jaminson J. E., *On some classes of wieghed composition operators*, Glasgow Math. J., **32**(1900), 74–87.

[3] Chan J. T., *A note on campact wieghed composition operators on $L^p(\mu)$*, Acta Sci. Math. (Szeged), **56** (1992), 165-168.

[4] Ching - on L., *Weighted composition operators between L^p-spaces*, A thesis for the degree of master of philosophy, Hong Kong, (2002).

[5] Estaremi Y., *Unbounded weighted conditional expectation operators*, Complex Anal. Oper. Theory, **10** (2016), 567-580.

[6] Estaremi Y and Jabbarzadeh M. R., *Weighted Lambert type operators on L^p-spaces*, Oper. Matric., **7**(1) (2013), 101-116.

[7] Hoover T, Lambert A and QuinnJ., *The Marcov proses determind by a wieghed composition operators*, Studia Math. Hungar., **72** (1982), 225-235.

[8] Jabbarzadeh M. R and Estarmi Y., *Essential norm of substitution oprators on $L^p(\mu)$-spaces*, Indian J. Pure Appl. Math. **43**(3)(2012), 263-278.

[9] Jabbarzadeh M. R and Poureza E., *Anote on weighted composition operators on L^p-spaces*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol 29 No. 1 (2003), 47-54.

[10] Jabbarzadeh M. R and Khalil Sarbaz S., *Lambert multipliers between L^p spaces*, Csechoslovak Math. J., **60** (135) (2010), 31–43.

[11] Jabbarzadeh M. R., *Conditional multipliers and essential norm of uC_φ between L^p spaces*, Banach J. Math. Anal., **4** (2010), 158–168.

[12] Komowitz H., *Compact weighed endomorphisms of $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **83** (1982), 517-521.

[13] Lambert A., *Localising sets for sigma-algebras and related point transformations*, Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A, **118** (1991), 111-118.

[14] Yan Ch, Chou, Day W. L and Shyang J., *On the Banach-Ston problem for $L^p(\mu)$-spaces*, Taiwanese J. Math., **10**(1) (2006), 233-241.

Basic properties of algebra generated by weighted composition operators on $L^p - L^\infty$

Aboalghasem Alishahi[1 †], **Saeedeh Shamsi Gamchi**[2], **Ali Ebadian**[3]

(1) Department of Mathematics, Payame Noor University, P. O. Box 19395-3697, Tehran, Iran
(2) Department of Mathematics, Payame Noor University, P. O. Box 19395-3697, Tehran, Iran
(3) Department of Mathematics, Faculty of Science, Urmia University, Urmia, Iran

Communicated by: Amir H. Sanatpour

Received: 2021/4/30 Accepted: 2022/2/17

Abstract: In this paper, we continue the study of finite sum of weighted composition operators between different L^p- spaces . Indeed, we first obtain some necessary and sufficient conditions for the compactness of finite sum of weighted composition operators between distinct L^p of atomic measure space. We also estimate essential norms of these operators.

Keywords: weighted composition operator, Compactness, Atomic measure space, Essential norm.

©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

†Corresponding author.
E-mail addresses: a_alishahy@pnu.ac.ir (A. Alishahi), saeedeh.shamsi@gmail.com (S. Shamsi), ebadian.ali@gmail.com (A. Ebadian).