



ساخت تصویر و مکانیزم (سازوکار) توموگرافی دانش محور

لعیا افضلی پور^۱، تورج نیک آزاد^{۲*}

(۱) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱/۱۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۴

چکیده: در این مطالعه مسئله ساخت تصویر (مسئله وارون) و ارتباط معنایی آن با رده بزرگی از مسائل کاربردی و مهندسی تبیین می شود. سازوکار توموگرافی که نمونه ای از مسئله ساخت تصویر است، تشریح می گردد. پیرامون وجود جواب و یکتایی آن و همچنین تکنیک های منظم سازی بحث می شود. به منظور مصورسازی مفاهیم انتزاعی، فرایند دیجیتالی تصویربرداری اشعه ایکس با نرم افزار MATLAB ارائه می شود. تکنیک های بازسازی تصویر، براساس تبدیلات معکوس رادون و فوریه و همچنین روش های جبری تشریح می گردند. اثر انتخاب تعداد جهت ها در توموگرافی و نویز جمعی در داده ها بر کیفیت تصویر بازسازی شده بررسی می گردد. نتایج عددی و مقایسه تصویرهای بازسازی شده توسط روش های مختلف، بر توانمندی ویژه تکنیک های جبری در بازسازی تصویر صحنه می گذارند. علاوه بر این نشان داده می شود که در روش های جبری می توان ویژگی های مطلوبی هم چون مثبت بودن و همواری را برای تصویر بازسازی شده لحاظ کرد که تاثیر به سزایی در کاهش خطای تقریب دارد.

واژه های کلیدی: بازسازی تصویر، منظم سازی، تکنیک های جبری بازسازی تصویر، تبدیل معکوس رادون.

رده بندی ریاضی: 65F22; 65F10

۱ معرفی

توموگرافی، بازسازی تصویر از درون و ابعاد یک شی توسط تابش پرتوهای الکترومغناطیسی بر شی است. الگوریتم های توموگرافی بر توسعه روش هایی برای یافتن جواب مسئله ساخت و بازسازی تصویر تمرکز دارد و مفهوم دانش محور بودن بر افزایش و بهبود دقت جواب، مبتنی بر دانش اولیه دلالت دارد. نمونه ای از این دانش مقدماتی، قید مثبت بودن جواب و یا شرط همواری پاسخ است. کلمه توموگرافی از دو کلمه یونانی «Tomos» و «Graphos» تشکیل شده است که به ترتیب به معنای یک برش و توضیح دادن اند. انواع متفاوتی از توموگرافی وجود دارند که در علوم پزشکی، زیست، باستان شناسی، زمین شناسی، اقیانوس شناسی، علم مواد و اخترشناسی کاربرد فراوانی دارند. در هر

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (L. Afzalipour) l.afzalipour@gmail.com (T. Nikazad), Tnikazad@iust.ac.ir

مورد طیف خاصی از امواج الکترومغناطیس در شرایط متناسب آن، استفاده می‌شود. در مشهورترین نوع توموگرافی موسوم به اشعه ایکس، با استفاده از اطلاعات چشمه‌ی اشعه ایکس و یک آشکارساز یا فیلم، شدت پرتو عبور کرده از شی اندازه‌گیری می‌شود. این فرایند منجر به تشکیل مجموعه‌ای از تصاویر (پروجکشن‌ها) از شی تحت مطالعه می‌شود، مسئله اصلی چگونگی به‌دست آمدن تصویربازسازی‌شده از اطلاعات جمع‌آوری شده است که مسئله توموگرافی نامیده می‌شود.

در ادامه روابط ریاضی مربوط به مسئله توموگرافی معرفی می‌شود تا شمای بهتری از آن در ذهن خواننده مجسم شود. مسئله توموگرافی مبتنی بر اشعه ایکس در نظر گرفته می‌شود. پرتوهای ایکس، هنگام عبور از مقطع جسم دچار فرایند میرایی نمایی می‌شوند [۷]. فرض کنیم پرتوی ایکس تابیده‌شده، دارای شدت اولیه I_0 باشد و جسم تحت مطالعه، یکنواخت بوده و دارای ضریب میرایی خطی u باشد، در این صورت شدت پرتوی دریافتی که با نماد I نشان داده می‌شود پس از عبور از جسم یکنواخت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$I = I_0 e^{-ux}, \quad (1.1)$$

که x طول مسیری است که پرتو درون جسم طی کرده است. حال چنانچه پرتوی ایکس از مسیری عبور کند که متشکل از چندین ناحیه یکنواخت با ضریب میرایی u_i و طول ناحیه x_i باشد، در این صورت شدت پرتوی دریافتی به‌صورت زیر است:

$$I = I_0 e^{-\sum_i u_i x_i}. \quad (2.1)$$

در حالی که تعداد این نواحی یکنواخت عدد بسیار بزرگ و نامتناهی باشد، عمل گر \sum در (۲.۱) با انتگرال جای‌گزین می‌شود یعنی

$$I = I_0 e^{-\int_L u(x) dx}, \quad (3.1)$$

که در آن L معرف مسیر پیموده شده توسط پرتو تابش‌شده، است و $u(x)$ ضریب میرایی خطی و تابعی از مکان مسیر است. مسائل دوبعدی و سه‌بعدی را نیز در نظر می‌گیریم. در این حالت $u = u(x, y)$ و $u = u(x, y, z)$ است که ما آن را هم به فرم برداری $u = u(x)$ در نظر می‌گیریم. غالباً در حالت برداری اندازه مسیر بر حسب نماد S به‌صورت پارامتری زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$I = I_0 e^{-\int_L u(x) dS}. \quad (4.1)$$

با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه (۴.۱) معادله انتگرالی زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_L u(x) dS = -\log \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad (5.1)$$

که اساس توموگرافی کامپیوتری (CT) است. در توصیف شهودی (۵.۱) می‌توان گفت، تابع ضریب میرایی $u(x)$ توسط تابش پرتوهای متفاوت و اندازه‌گیرهای مکرر ضریب میرایی نواحی یکنواخت در امتداد پرتوهای تابش‌شده به جسم تقریب زده می‌شود. از منظر کاربردی یکی از راه‌حل‌های عمومی برای پیاده‌سازی فرایند توصیف‌شده، ایجاد مجموعه‌ای از جهت‌های گسسته از امتداد پرتوها است که در هر راستا دسته‌ای از پرتوهای موازی تابیده می‌شود. در انتهای این پروسه تصویری کامل از ضرایب میرایی نواحی مختلف جسم در امتداد هر جهت و پرتو به‌دست می‌آید. در حقیقت تصویر بازسازی‌شده یک پروجکشن از جسم در راستای یک سری از جهت‌های مشخص است. تصویربرداری توموگرافی یک تکنیک اندازه‌گیری غیر تهاجمی ضروری برای کشف و شهود تجربی است. گسسته‌سازی مسئله تصویربرداری توموگرافی و بازسازی آن منجر به یک دستگاه معادلات خطی تنک با مقیاس بزرگ می‌شود [۲۴، ۲۹]. برای بازسازی تصویر در مسایل تصویربرداری توموگرافی دو رویکرد عمده را می‌توان معرفی نمود. رویکرد اول انتخاب الگوریتم‌های حوزه‌ی پردازش سیگنال‌های دیجیتال [۱۲، ۲۹] است و رویکرد دوم تبیین مسئله بازسازی تصویر به‌صورت یک دستگاه معادلات خطی و استفاده از روش‌های بازسازی جبری است. الگوریتم‌های تکراری اغلب برای حل مسائل با مقیاس بزرگ مناسب‌اند، چندین کلاس از روش‌های جبری در [۸، ۱۲-۱۵] به‌خوبی تشریح شده است. مسائل وارون غالباً بدوضع‌اند و کنترل بدوضعی آن‌ها در [۱، ۱۶، ۱۹، ۲۲] مطالعه شده است. روش‌های پروکسیمال گرادینان افزایشی معرفی شده در [۱] همگرایی اولیه سریعی، دارند لذا از این روش می‌توان برای یافتن جواب سیستم‌هایی که دقت کم جواب در آن‌ها پذیرفته است استفاده نمود. فرایند محاسبات، مدل‌سازی، اندازه‌گیری و تکنیک‌های حل متأثر از نویز و خطا‌اند، انتشار خطا در مسئله بازسازی تصویر و توموگرافی سبب پدیده نیمه‌همگرایی می‌گردد. تعدادی از مطالعات بر کنترل اثر این پدیده تمرکز داشته‌اند [۳۰-۳۲]. یکی از ابزارها در کنترل پدیده نیمه‌همگرایی برترگزینی توسط تابع تغییرات کلی است که اثرات بسیار مطلوبی از آن گزارش شده است [۳۴، ۳۶، ۴۰]. جدا از جذابیت‌های ذاتی مسئله توموگرافی، کاربردهای متعدد آن در سایر زمینه‌های تحقیقاتی بر اهمیت این مسئله می‌افزاید. از این‌رو مطالعه مسئله توموگرافی و به‌دست آوردن این دانش بین رشته‌ای بسیار ارزشمند است. لذا هدف اصلی این مقاله بر تشریح مسئله توموگرافی و تبیین ارتباط معنایی ملزومات اولیه هم‌چون قید، همواری با جواب این مسئله، بنا شده است. در بخش ۲ مسئله وارون و ارتباط آن با علوم مهندسی ضمن یک مثال بیان می‌گردد. در بخش ۳ بدوضع‌ی ذاتی مسائل وارون و شرایط وجود جواب بررسی می‌شود. در بخش ۴ ساخت سینوگرام اطلاعاتی یک جسم براساس تبدیل رادون در توموگرافی اشعه ایکس تشریح خواهد شد. بخش ۵ به مرور تکنیک‌های بازسازی تصویر مبتنی بر تبدیل

معکوس فوریه و رادون اختصاص دارد. فرایند بازسازی تصویر از یک شی در نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی می‌گردد. همچنین در این بخش مدل‌سازی مسئله توموگرافی به‌عنوان دستگاه معادلات خطی ارائه می‌شود. در بخش ۶ تکنیک‌های منظم‌سازی سیستم‌های خطی بدووضع تبیین خواهند شد. یکی از مباحث مهم منظم‌سازی انتخاب پارامترهای منظم‌سازی است که در بخش ۷ پیرامون چگونگی انتخاب پارامترهای منظم‌سازی بحث می‌شود. در بخش ۸ سه خانواده از روش‌های جبری و تکراری کارآمد در بازسازی تصویر معرفی می‌گردند. سرعت همگرایی و عمل کرد آن‌ها در حضور قید مثبت بودن جواب بررسی خواهد شد.

۲ مسئله وارون

منظور از تصویر مقادیر مجهول در یک سیستم اند. یک سیستم مدلی ریاضی است که یک فرایند فیزیکی را توصیف می‌کند و هدف از بازسازی و ساخت تصویر یافتن جواب آن سیستم است. فرض کنیم دو نفر زیر آب با یکدیگر صحبت می‌کنند، نفر اول صدایی ساطع می‌کند و پس از فروشکست صوت در آب یک موج صوتی توسط نفر دوم دریافت می‌شود، که ممکن است شبیه صوت و مفهوم اولیه بیان شده، نباشد. در این مثال صوت نفر اول مصداق تصویر و صوتی که نفر دوم دریافت کرده‌است، مصداق داده‌ی اندازه‌گیری شده است. مجموعه تمام تصاویر ممکن فضای تصویر نامیده می‌شود، همچنین مجموعه‌ی تمام داده‌های در دسترس فضای داده نامیده می‌شود. منظور از مسئله مستقیم محاسبه مقادیر قابل اندازه‌گیری تحت عنوان داده است. داده‌ها توسط تصویر و سیستم معرفی شده، قابل اندازه‌گیری اند. به‌عنوان مثال در انتقال صدا در آب سیستم، فرمولاسیون مربوط به فروشکست موج صوت در آب خواهد بود و تصویر شدت موج اولیه ساطع شده توسط فرد اول است و داده‌ها همان موج صوتی دریافت شده توسط فرد دوم است. مسئله مستقیم شامل چگونگی نگاشت صوت ساطع شده اصلی به صوت فرو شکست شده دریافتی است و مسئله وارون فرایند بازسازی تصویر از داده‌ها و سیستم معلومات است. در خصوص مثال طرح شده، تعیین گفته‌های نفر اول براساس شنیده‌های نفر دوم و مکانیزم عمل کرد سیستم فروشکست صوت در آب، یک مسئله وارون است. معمولاً داده‌ها متأثر از نویز اند، این نویز می‌تواند از خطای اندازه‌گیری، خطای گرد کردن و یا خطای برشی در نمایش سینگال‌ها در محاسبات کامپیوتری نشأت بگیرد. همچنین در علوم مهندسی، مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی و تکنیک‌های حل پیشنهادی برای آن‌ها نیز همراه با آستانه‌ی قابل قبولی از خطا است. اگر تصویر با f ، سیستم حاکم بر پدیده‌ی فیزیکی با K و داده‌ها با g نمایش داده شوند، فرم کلی مسئله وارون به‌صورت زیر است:

$$\text{determine } f \text{ from } Kf = g \text{ given } K, g. \quad (1.2)$$

فرض کنیم داده‌ها متأثر از نویز تجمعی باشند بنابراین:

$$g = g^{exact} + e, \quad (2.2)$$

که e معرف نویز است. همان‌طور که ذکر شد، خطا و نویز در سیستم K نیز وجود دارد. به‌عنوان مثال اگر K به‌صورت یک سیستم خطی گسسته‌سازی شده باشد، فرایند گسسته‌سازی خود دارای خطا است. برخلاف مسئله مستقیم حل، مسئله وارون با پیچیدگی‌های قابل ملاحظه همراه است و دلیل این امر مفهومی تحت عنوان بدووضع است.

۳ بدووضع

مسائل وارون غالباً بدووضع‌اند. هادامارد [۲۰] شرایط خوش وضع بودن برای مسئله (۱.۲) را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

۱. متناظر با هر داده‌ی g از فضای داده‌ای، جواب f برای (۱.۲) وجود داشته باشد.

۲. جواب f در فضای تصاویر یکتا باشد.

۳. نگاشت وارون $f : K^{-1} \rightarrow g$ پیوسته باشد.

هرگاه یکی از این سه شرط برقرار نباشد، مسئله بدووضع است. شرط سه به‌نوعی پایداری جواب را تضمین می‌کند و مبین آن است که جواب باید به‌صورت پیوسته وابسته به داده‌ها باشد. اگر شرط‌های ۱ و ۲ برقرار نباشند، می‌توان با اعمال تغییراتی وضعیت مسئله را بهبود بخشید. به‌عنوان مثال اگر مسئله فوق معین باشد، جواب دقیق وجود ندارد. این مشکل را می‌توان با حل مسئله جای‌گزین تقریب کم‌ترین مربعات زیر برطرف کرد

$$f_{LS} = \arg \min_f \|Kf - g\|_2. \quad (1.3)$$

در این صورت جوابی برای مسئله (۱.۳) وجود دارد. اگرچه ممکن است یکتا نباشد. برای این که مسئله (۱.۳) دارای جواب یکتا باشد، می توان با در نظر گرفتن ویژگی جدیدی به جواب یکتا رسید. یکی از این ویژگی ها انتخاب جواب با کمترین نرم $\|f\|_{LS}$ در میان جواب های ممکن است. بزرگترین چالش در ارتباط با مسائل بدوضع شرط سوم است. اگر نداشت وارون پیوسته، نباشد در این صورت با وجود این که داده ی در دست اقدام به اندازه کافی دقیق و مناسب است، تضمینی برای آن که تصویر محاسبه شده نیز به همان اندازه به تصویر واقعی نزدیک باشد، وجود ندارد. در حقیقت اندازه خطا در تصویر ساخته شده توسط عدد وضعیت عمل گر K ارزیابی می شود و عدد وضعیت عمل گر K به صورت زیر

$$\kappa(K) = \|K\| \|K^{-1}\|, \quad (2.3)$$

تعریف می شود که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است. عدد وضعیت، انتشار خطای نسبی داده ها به جواب را کنترل می کند. به عبارت دیگر اگر Δg یک آشفتگی از داده ها باشد و $\Delta f = K^{-1} \Delta g$ آشفتگی متناظر آن در جواب باشد، آن گاه

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} \leq \kappa(K) \frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \quad (3.3)$$

زیرا با توجه به تعریف نرم یک عمل گر و خاصیت آن داریم:

$$\|K^{-1} \Delta g\| \leq \|K^{-1}\| \|\Delta g\|, \quad (4.3)$$

به طور مشابه برای $Kf = g$ داریم:

$$\|K\| \|f\| \geq \|g\|. \quad (5.3)$$

بنابراین

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|K\| \|f\|} \leq \|K^{-1}\| \frac{\|\Delta g\|}{\|g\|} \quad (6.3)$$

که معادل (۳.۳) است. در حقیقت هرگاه یک آشفتگی و نویز کوچک در داده ها موجود باشد، شرط لازم کوچک بودن خطای نسبی در تصویر بازسازی شده، آن است که عدد وضعیت متناظر با سیستم یک عدد کوچک باشد. اگر این خاصیت برقرار باشد، مسئله (۱.۲) خوش وضع و در غیراین صورت بدوضع نامیده می شود.

۴ بازسازی براساس تبدیل رادون

یک خانواده از روش های بازسازی توموگرافی براساس تبدیل رادون است. فضای مشترک بین تمام تصاویر شی، تحت عنوان تبدیل رادون نام گذاری می شود. به عبارت دیگر مجموعه ای از اندازه های میرایی شی را می توان به صورت تبدیل رادون بیان نمود. سپس شی مجازی با استفاده از تبدیل معکوس یا سایر تکنیک ها، بازسازی خواهد شد. تنظیمات و ملاحظات هندسی متفاوتی برای اندازه گیری میرایی شی وجود دارد، در تبدیل رادون از پرتوها و تصاویر موازی مشابه آن چه در (شکل ۱) نشان داده شده است، استفاده می شود. سایر روش ها در [۲۶] تشریح شده است.

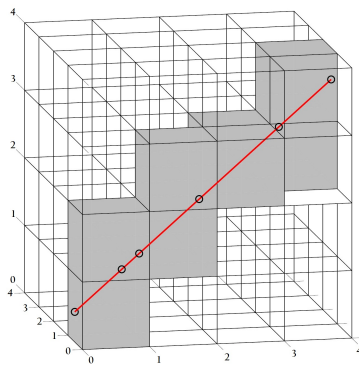
تبدیل رادون، رابطه نزدیک و متقابلی با (۵.۱) دارد. برای تابع شدت $u(x, y)$ مفروض روی دامنه دوبعدی D ، تبدیل رادون عبارت است از تمام انتگرال های خط

$$\mathcal{R}u(x, y) = \int_L u(x, y) ds, \quad (1.4)$$

که L می تواند هر خط گذرنده از درون دامنه D باشد. متناظر با هر پرتو یک تبدیل رادون موجود است، یکی از مناسب ترین روش ها برای ردگیری پرتوها نمایش هر پرتو توسط دو پارامتر $\rho \in \mathbb{R}$ و $\phi \in [0, \pi]$ است یعنی:

$$\rho = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad (2.4)$$

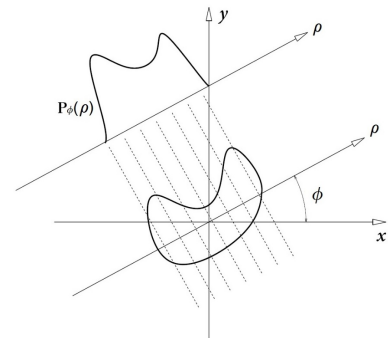
تعبیر هندسی این رویه در (شکل ۱) نشان داده شده است. رابطه (۲.۴) معادله دسته خطوط موازی است که همگی دارای شیب ثابت $m = -\cot(\phi)$ و عرض از مبداهای متفاوت $\frac{\rho}{\sin(\phi)}$ اند. ϕ زاویه محور ρ نسبت به جهت مثبت محور x است. خط (۲.۴) بر محور ρ



(ج)

$x_1 = f_{11}$	$x_6 = f_{12}$	$x_{11} = f_{13}$	$x_{16} = f_{14}$	$x_{21} = f_{15}$
$x_2 = f_{21}$	$x_7 = f_{22}$	$x_{12} = f_{23}$	$x_{17} = f_{24}$	$x_{22} = f_{25}$
$x_3 = f_{31}$	$x_8 = f_{32}$	$x_{13} = f_{33}$	$x_{18} = f_{34}$	$x_{23} = f_{35}$
$x_4 = f_{41}$	$x_9 = f_{42}$	$x_{14} = f_{43}$	$x_{19} = f_{44}$	$x_{24} = f_{45}$
$x_5 = f_{51}$	$x_{10} = f_{52}$	$x_{15} = f_{53}$	$x_{20} = f_{54}$	$x_{25} = f_{55}$

(ب)



(ا)

شکل ۱: (ا): پرتوهای موازی و تصویر شی (ب): تناظر بردار x و تصویر دوبعدی f ، مسیر عبور یک پرتو از یک شی دوبعدی (ج): مسیر عبور یک پرتو از واکسل های یک شی سه بعدی

عمود است. مجموعه‌ی تمام انتگرال‌های خط که برای یک ϕ ثابت جمع‌آوری می‌شوند یک، پروجکشن را تشکیل می‌دهد. در (شکل ۱ا) هر خط از دسته پرتوهای موازی توسط زوج یکتایی از (ρ, ϕ) مشخص می‌شود. با استفاده از (۲.۴) نمایش دیگر تصاویر رادون به صورت زیر خواهد بود

$$[\mathfrak{R}u](\rho, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \delta(\rho - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy, \quad (۳.۴)$$

که در آن $\delta(\cdot)$ تابع دلتا دیراک است و برای هر تابع دلخواه g و نقطه ثابت t_0 داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0).$$

برای مقدار ثابت ρ تبدیل رادون با

$$P_\phi(\rho) = [\mathfrak{R}u](\rho, \phi),$$

نمایش داده می‌شود [۶، ۲۷]. به منظور دریافت بصری جامع‌تر، در بخش بعدی شبیه‌سازی دیجیتالی از فرایند تشریح شده در محیط نرم افزار MATLAB ارائه می‌گردد.

۵ تکنیک‌های بازسازی تصویر

روش مبتنی بر روی کرد فوریه، الگوریتم تصویر پسرو فیلترشده «Filtered-Backprojection-Algorithm» و روش‌های بازسازی جبری و تکراری را می‌توان به عنوان سه روش اصلی از روش‌های بازسازی تصویر مطرح کرد.

قضیه ۱.۵ (برش فوریه). فرض کنیم برای تصویر دوبعدی $f(x, y)$ تبدیل فوریه $\hat{f}(\omega_x, \omega_y)$ ، تبدیل رادون $P_\phi(\rho)$ و تبدیل فوریه یک بعدی (برحسب ρ) آن نیز $\hat{P}_\phi(\omega)$ موجود باشد، آن‌گاه

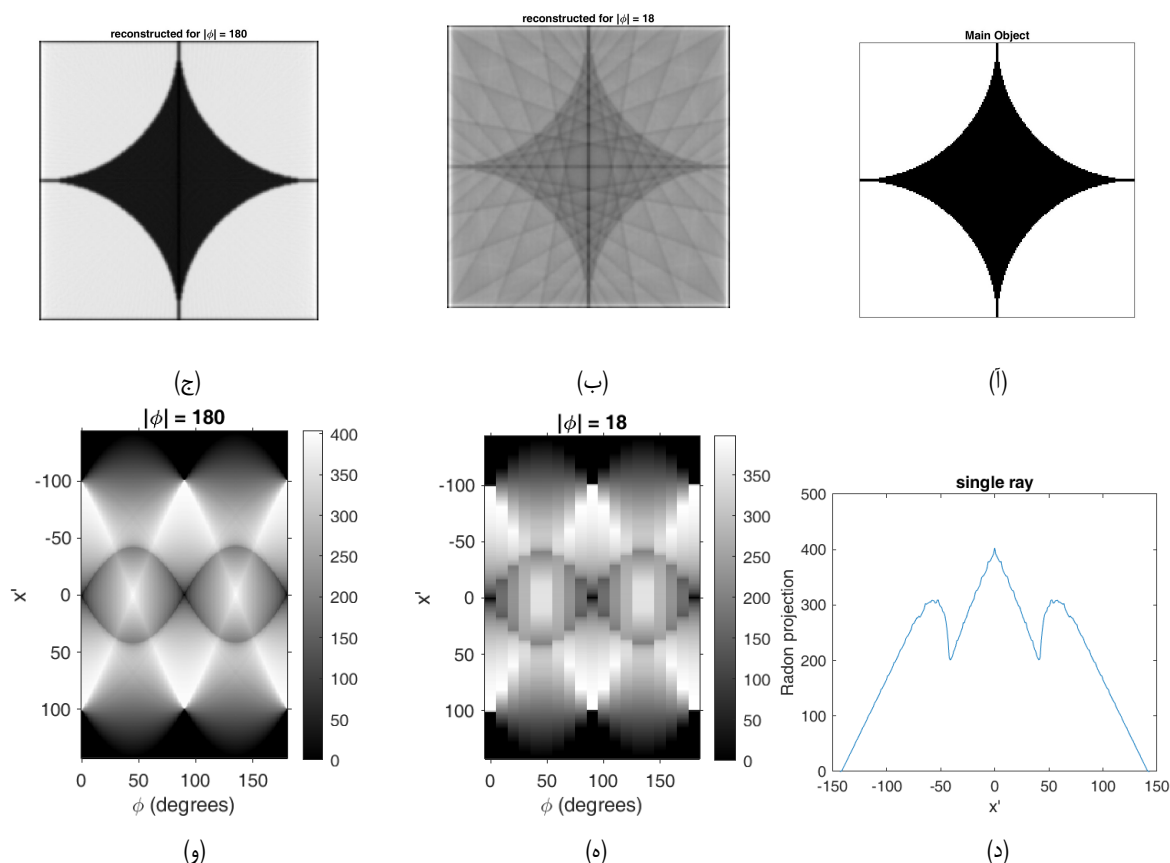
$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = \hat{P}_\phi(\omega),$$

که $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2$ و $\tan \phi = \omega_y / \omega_x$

قضیه ۱.۵ بیان‌گر آن است که تبدیل فوریه دوبعدی یک شی با تبدیل فوریه یک بعدی تصاویر رادون آن برابر است. در روش بازسازی تصویر مبتنی بر روی کرد فوریه، برای بازسازی تصویر از تبدیل معکوس فوریه استفاده می‌شود.

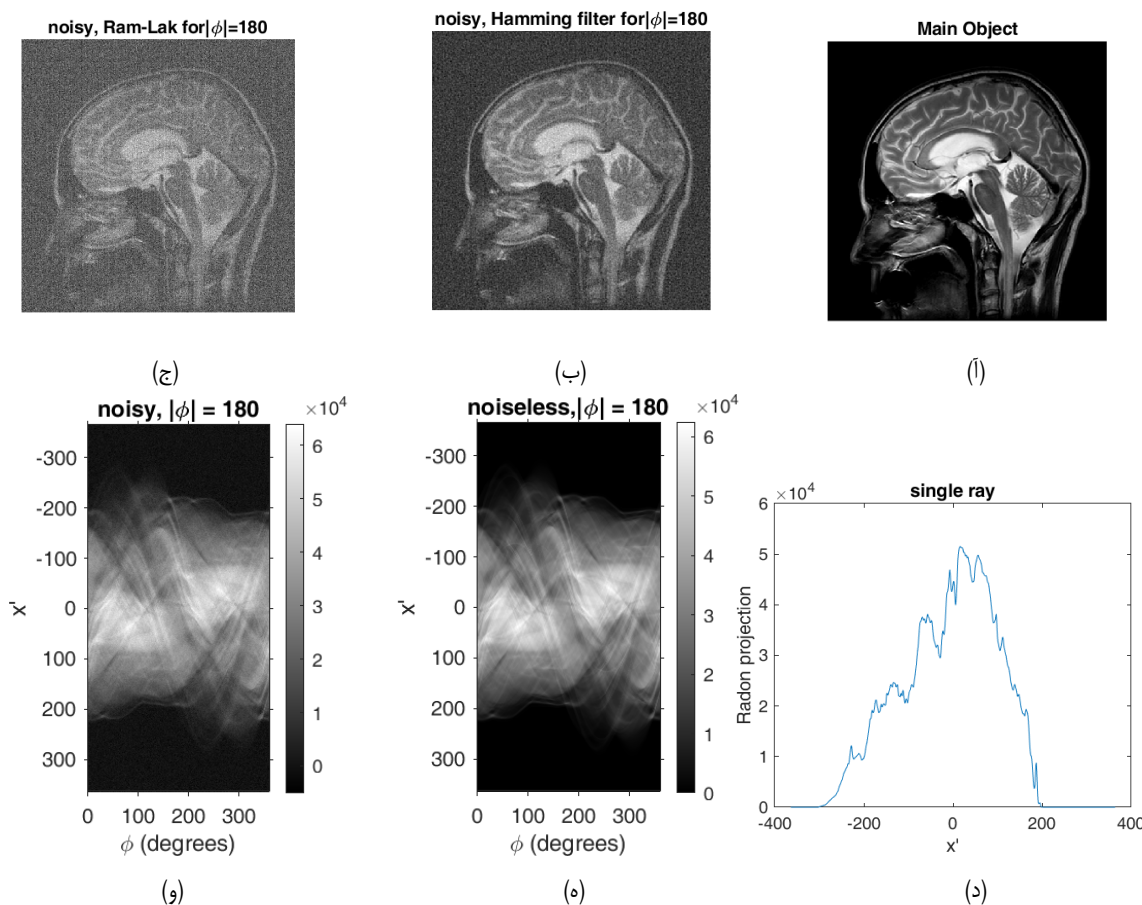
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_x, \omega_y) e^{i2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y.$$

تبدیل فوریه سریع FFT ، تک تک پروجکشن‌های رادون نمایش داده شده در (شکل ۲د) در مختصاب قطبی محاسبه می‌گردد. به منظور بهره‌مندی از روال عادی تبدیل معکوس فوریه در بازسازی تصویر لازم است تا پیش از اعمال این تبدیل، اطلاعات گردآوری شده در مختصات قطبی به مختصات دکارتی نگاشت شود. این نگاشت با استفاده از درونیابها تقریب زده می‌شود. سپس با استفاده از تبدیل معکوس فوریه تصویر مجازی بازسازی می‌گردد. بنابراین خطای درونیابی در فرایند بازسازی تصویر بسیار تأثیرگذار است. روش دقیق‌تر دیگری که می‌توان در ساخت تصویر از آن بهره برد، روش تصویر پسر و فیلتر شده است که از تبدیل معکوس رادون استفاده می‌کند. تبدیل معکوس رادون بر اساس تبدیل معکوس فوریه بازسازی می‌شود. این ارتباط در قضیه ۱.۵ تبیین شده است. در روش تصویر پسر و فیلتر شده، بعد از محاسبه تبدیل فوریه تصاویر رادون، در محاسبات تبدیل معکوس رادون در مختصات قطبی از سیگنال‌های کاهنده نویز تحت عنوان فیلتر استفاده می‌گردد. یکی از معروف‌ترین این فیلترها همینگ «Hamming» است [۱۸، ۲۹]. شی نشان داده شده در (شکل ۲آ) یک جسم متجانس و متقارن



شکل ۲: (آ): شی اصلی. (ب) و (ج): به ترتیب تصویر بازسازی شده به ازای تابش ۱۸ و ۱۸۰ دسته پرتو. (د)، (ه)، (و): تصویر رادون ساخته شده به ازای تابش یک، ۱۸ و ۱۸۰ دسته پرتو است. این شکل تأثیر انتخاب تعداد زوایای تابش پرتو در توموگرافی را نشان می‌دهد.

است، متناظر با آن تصویر رادون نمایش داده شده در (شکل ۲د) نیز دارای الگوی منظم و متقارن است. این تصویر از تابش یک پرتو با زاویه $\phi = 45^\circ$ ساخته شده است که در آن x' موقعیت شعاعی سنجدیده شده پیکسل‌ها نسبت به پیکسل مرکزی تصویر، در راستای زاویه ϕ است. اگر فضای مشترک میان فضای تصویر حاصل از تابش دسته پرتوهای موازی در مجموعه‌ای از جهت‌ها در نظر گرفته شود فضای دوبعدی بنام سینوگرام به دست می‌آید که در (شکل‌های ۲ه، ۲و) نمایش داده شده است که در ترسیم آن‌ها به ترتیب ۱۸ و ۱۸۰ جهت با فاصله خطی در بازه ۰ تا 180° لحاظ شده است. (شکل ۲) قسمت‌های (ب) و (ج) اثر تعداد زوایای تابش پرتو بر کیفیت شی مجازی بازسازی شده را نشان می‌دهد. نماد $|\phi|$ معرف تعداد جهت‌هایی است که در فرایند ساخت تصاویر رادون استفاده شده است. هرچه تعداد زوایای بیش‌تری به جسم تابش کند، سینوگرام به دست آمده شامل اطلاعات بیش‌تر و به تبع آن تصویر بازسازی شده نیز جزئیات بیش‌تری از شی اصلی را منعکس می‌نماید. سینوگرام نمایش داده شده در (شکل ۲و) که متشکل از فضای مشترک ۱۸۰ تصویر رادون است از (شکل ۲ه) بسیار هموارتر است، همچنین منعکس کننده اطلاعات بیش‌تری از شی اصلی است. لذا طبیعی است که شی مجازی بازسازی شده در (شکل ۲ج) کیفیت بهتری از شی مجازی بازسازی شده در (شکل ۲ب) داشته باشد. تابع $radon$ و $iradon$ در MATLAB به ترتیب سینوگرام شی تحت مطالعه را به ازای زوایای دلخواه و فرایند تشریح شده در بازسازی تصویر از سینوگرام شی و روش تصویر پسر و فیلتر شده، را شبیه‌سازی می‌کنند. شی نمایش داده شده در (شکل ۲آ) نمونه‌ای از یک (CT) پزشکی است که درون جمجمه انسان را آشکار می‌کند. (شکل ۲ه) تصاویر رادون متعلق به طیف زوایای تابش شده در بازه $[0, 180]^\circ$ درجه است. طبیعت فرایند اندازه‌گیری و نمایش دیجیتال سیگنال‌ها همراه با نویز و خطا است.



شکل ۳: (ا): درون جمجه انسان. (ب) و (ج): به ترتیب تصویر بازسازی شده از سینوگرام بدون خطا و سینوگرام متأثر از ۵٪ نویز سفید است. (د)، (ه): تصویر رادون ساخته شده به ازای تابش یک و 18° دسته پرتو است. (و): سینوگرام متشکل از تصویر رادون به انضمام ۵٪ نویز سفید است. این شکل تأثیرات نویز و انتخاب فیلتر بر کیفیت تصویر بازسازی شده را نشان می دهد.

(شکل ۳و) همان سیگنال رادون نمایش داده شده در (شکل ۳ه) است که متأثر از ۵٪ نویز است. در سیستم توموگرافی نویز دارای دو توزیع احتمالاتی پواسن یا غالباً توزیع احتمالاتی $N(0, 1)$ است که به نویز سفید معروف است. وجود نویز در سینوگرام بخشی از اطلاعات تصویر را مخدوش می کند و در کیفیت تصویر مجازی بازسازی شده از سینوگرام تأثیر به سزایی دارد. در (شکل های ۳ب، ۳ج) عمل کرد الگوریتم تصویر پسر و فیلتر شده در حضور نویز، نشان داده شده است. در بازسازی تصاویر (شکل های ۳ب، ۳ج) به ترتیب از دو فیلتر «Hamming» و «Ram-Lak» استفاده شده است. همان طور که مشهود است، انتخاب فیلتر در عمل کرد الگوریتم تصویر پسر و فیلتر شده و جزئیات مشهود در تصویر بازسازی شده بالاخص همواری تصویر نقش ویژه ای دارد. از سوی دیگر در برخی از زمینه های کاربردی از مسائل ساخت تصویر وجود لبه های واضح تر در تصاویر بازسازی شده مطلوب تر است. همچنین اگر تصویر حاوی اندازه و اطلاعات شاخص های مثبت تعریف شده در یک سیستم باشند، لازم است تا حین فرایند بازسازی تصویر قید مثبت بودن نیز برآورده شود. به کمک ابزار بازسازی جبری و نمایش جبری مسئله ساخت تصویر می توان تصاویر با ویژگی های مطلوب را بازسازی کرد.

۱.۵ نمایش جبری مسائل توموگرافی و مسئله وارون خطی

برای تقریب تصویر f دسته ای از پرتوها در یک دامنه از پیش تعریف شده به جسم تابیده می شود و میزان میرایی انرژی پرتوها، اندازه گیری می گردد. فرض کنیم شی تحت تصویربرداری در جعبه d - بعدی، $\Omega = [0, N]^d$ محصور شده باشد. برای شی و تصویر دوبعدی و سه بعدی به ترتیب d برابر ۲ و ۳ خواهد بود. در این صورت تصویر f یک تابع $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ است. هر بعد از دامنه Ω به N قسمت واحد تحت عنوان پیکسل (تصویر دوبعدی) و یا واکسل (تصویر سه بعدی) تقسیم شده است. تصویر گسسته دوبعدی با $f \in \mathbb{R}^{N \times N}$ نمایش داده می شود. بردار $x \in \mathbb{R}^{N^T \times 1}$ از به صف شدن تمام ستون های f در یک ستون به دست می آید. تجسم شهودی این صف و همچنین مسیر عبور یک پرتو و اندیس های بردار x که از آن پرتو متأثر اند، در (شکل ۱ب) نشان داده شده اند. در (شکل ۱ج) مسیر عبور یک پرتو از میان واکسل های جسم سه بعدی نمایش داده شده است. اگر f یک تصویر سه بعدی متشکل از $l, j, i, l = 1, \dots, N$ باشد، در این

صورت اندیس p - ام بردار x

$$x_p = f_{ijl} \iff p = (l - 1)N^2 + (j - 1)N + i.$$

بردار b متشکل از سطح انرژی تضعیف‌شده در انتهای مسیر یکایک پرتوها است. اگر در مجموع m پرتو به جسم تابش کرده باشد، b یک بردار m تایی خواهد بود. فرض کنیم طول مسیری که اشعه i - ام از درون پیکسل (واکسل) j - ام می‌پیماید برابر a_{ij} باشد. اگر اشعه i - ام از درون پیکسل (واکسل) j - ام عبور نکند $a_{ij} = 0$. به دلیل کوچک بودن پیکسل (واکسل)ها میزان میرایی در هر پیکسل تقریباً ثابت است. لذا مقدار تصویر در کل یک پیکسل (واکسل) ثابت فرض می‌شود. توجه کنیم که هر درایه از تصویر در واقع ضریب میرایی متناظر با قسمتی از شی است که در پیکسل (واکسل) متناظر با آن درایه قرار دارد. لذا سهم i - امین انتگرال خط از j - ام پیکسل (واکسل) معادل حاصل ضرب طول مسیر پیموده‌شده در مقدار پیکسل (واکسل) است. اگر فرایند توصیف‌شده برای هر m پرتو لحاظ شود آن‌گاه:

$$b_i = \sum_{j=1}^{n=N^2} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

و نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$Ax = b, \quad (2.5)$$

که $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ و $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. یک نمایش از جواب (۲.۵) براساس تجزیه مقدار تکین ماتریس A است.

۲.۵ تجزیه مقدار تکین

قضیه ۲.۵. فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ در این صورت

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

که U و V به ترتیب ماتریس یکانی از مرتبه m و n اند. Σ یک ماتریس قطری از مرتبه $m \times n$ که عناصر قطری آن مقادیر تکین A اند.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

هم‌چنین

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0,$$

که r رتبه ماتریس A است. [۲]

شایان ذکر است که ستون‌های U و V به ترتیب پایه‌های متعامد از فضای $Range(A)$ و $Ker(A)$ اند. اگر $m = n$ و A وارون‌پذیر باشد، در این صورت جواب یکتا (۲.۵) همان $x = A^{-1}b$ است، در غیر این صورت یک جواب یکتا به صورت

$$x_{LS} = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2, \quad (3.5)$$

خواهد بود که x_{LS} جواب با کم‌ترین نرم است. اگر $A^T A$ وارون‌پذیر باشد می‌توان x_{LS} را برحسب تجزیه مقدار تکین نمایش داد. شرط وارون‌پذیر بودن $A^T A$ معادل با شرط

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0,$$

است. لذا

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T,$$

عناصر قطری $\Sigma^T \Sigma$ همان مقادیر ویژه از $A^T A$ یعنی σ_i^2 اند. لذا $A^T A$ وارون‌پذیر است. برای محاسبه x_{LS} می‌بایست بردایان تابع هدف در (۳.۵) محاسبه و برابر صفر قرار داده شود، لذا

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 \right) = \frac{1}{2} \nabla (Ax - b)^T (Ax - b),$$

$$A^T Ax - A^T b = 0 \iff (A^T A)x = A^T b. \quad (4.5)$$

رابطه (۴.۵) به معادله نرمال برای مسئله تقریب کم‌ترین مربعات (۳.۵) معروف است. لذا

$$x_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b, \quad (5.5)$$

و بنابر خاصیت یکانی U و V

$$x_{LS} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i. \quad (6.5)$$

زمانی که هر دوی $\langle u_i, b \rangle$ و σ_i اعداد کوچک در همسایگی صفر باشند محاسبه (۶.۵) نیازمند ملاحظات بیش‌تری است. برای همگرا بودن محاسبات (۶.۵) لازم است تا $\{\langle u_i, b \rangle\}_{i=1}^n$ خیلی سریع‌تر از $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ به صفر میل کند و $\{v_i\}_{i=1}^n$ نیز کران‌دار باشند، این شرط به شرط پیکارد گسسته مشهور است. دو مشکل عمده در محاسبات مسائل بدوضع رخ می‌دهد. ممکن است مقدار تکین آهسته به صفر برسد و از دقت ماشین کم‌تر شود. یا آن‌که ناگهانی $k -$ امین مقدار تکین کوچک شود و به صفر میل کند که در این حالت رتبه ماتریس ضرایب همان k است. این حالت بدوضعی رتبه تباهیده «Rank-Deficient» نامیده می‌شود. اگر مقادیر تکین خیلی سریع به سمت صفر میل کند مسئله شدیداً بدوضع است و اگر کاهش مقادیر تکین خیلی کند باشد، بدوضعی ملایم بر مسئله حاکم است [۲۲].

۶ منظم‌سازی

در مسائل ساخت تصویر، بدوضعی مسئله سبب می‌شود تا تصویر ساخته‌شده به اندازه کافی منعکس‌کننده خواص مطلوب جواب نباشد. لذا با به‌کارگیری ابزاری تحت عنوان منظم‌سازی سعی در کنترل این آشفتگی و عدم مطلوبیت دارند. مطالعات زیادی در این زمینه انجام گرفته است از جمله [۳، ۵، ۱۶، ۱۹، ۲۸، ۳۹]. دو مورد از پرکاربردترین روش‌های منظم‌سازی برای سیستم‌های خطی روش شهودی SVD تقطیع‌شده و روش معروف تیخانوف اند. در هر دو روش پارامتر منظم‌سازی وجود دارد که رابطه بین شرایط داده‌ای و همواری تصویر را کنترل می‌کند.

۱.۶ روش SVD تقطیع‌شده (TSVD)

روش SVD تقطیع‌شده یک رویکرد منظم‌سازی مستقیم مبتنی بر شرط پیکارد گسسته است. براساس این روش در رابطه (۶.۵) صرفاً جملاتی که در شرط پیکارد صدق کنند، لحاظ می‌شوند. به عبارت دیگر با انتخاب پارامتر منظم‌سازی $\kappa \leq n$ تصویر ساخته‌شده به صورت زیر است:

$$x_{\kappa} = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i. \quad (1.6)$$

نمایش دیگری از (۱.۶) با استفاده از عامل فاکتور فیلتر $\varphi_i^{[\kappa]}$

$$x_{\kappa} = \sum_{i=1}^n \varphi_i^{[\kappa]} \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i, \quad (2.6)$$

که

$$\varphi_i^{[\kappa]} = \begin{cases} 1, & i \leq \kappa \\ 0, & i > \kappa. \end{cases} \quad (3.6)$$

در مسائل با مقیاس بزرگ محاسبه همه مقادیر تکین عملی پر هزینه و ناموجه اند. در عوض منظم‌سازی معروف و کارآمد دیگری تحت عنوان منظم‌سازی تیخانوف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲.۶ منظم‌سازی تیخانوف

منظم‌سازی تیخانوف یکی از معروف‌ترین رویکردهای منظم‌سازی است. ایده اصلی این روش در لحاظ کردن خاصیت همواری برای جواب در یک مسئله بهینه‌سازی به صورت زیر است

$$x_\lambda = \arg \min_x \{ \|Ax - b\|_2^2 + \lambda^2 \|x\|_2^2 \}, \quad (۴.۶)$$

که در آن λ پارامتر منظم‌سازی است و اهمیت نسبی دو عبارت در تابع هدف را مشخص می‌کند. x_λ جواب همواری است که کاهنده $\|Ax - b\|_2^2$ است. برای نمایش فرم صریح x_λ می‌توان گرادینان تابع هدف (۴.۶) را برابر صفر قرار دارد و نتیجه گرفت

$$x_\lambda = (A^T A + \lambda^2 I)^{-1} A^T b. \quad (۵.۶)$$

با جای‌گذاری تجزیه SVD ماتریس A داریم

$$x_\lambda = V (\Sigma^2 + \lambda^2 I)^{-1} \Sigma U^T b, \quad (۶.۶)$$

و فرم مؤلفه‌ای آن به صورت زیر است

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} u_i^T b v_i \\ &= \sum \varphi_i^{[\lambda]} \frac{\langle u_i, b \rangle}{\sigma_i} v_i, \end{aligned} \quad (۷.۶)$$

که در آن

$$\varphi_i^{[\lambda]} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

همان عامل فاکتور فیلتر است. اگر $\lambda \gg \sigma_i$ باشد، عامل فاکتور فیلتر $\varphi_i^{[\lambda]}$ عددی نزدیک به ۱ خواهد بود و اگر $\lambda \ll \sigma_i$ آن‌گاه $\varphi_i^{[\lambda]}$ به عدد $\frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}$ نزدیک می‌شود. بنابراین مقادیر تکین بزرگ نقش به‌سزایی در بازسازی تصویر تحت مطالعه خواهد داشت و برای مقادیر تکین کوچک سهم آن‌ها وزنی معادل ۱ $\frac{\sigma_i^2}{\lambda^2} < 1$ خواهد بود.

(۳.۶) جوابی فیلترشده مشابه (۷.۶) است که توسط عامل همواری و مقادیر تکین A به دست آمده است. عمل کرد عامل $\|x\|_2^2$ توسط پارامتر منظم‌سازی λ کنترل می‌شود. نکته حائز اهمیت دیگر، نحوه انتخاب پارامترهای منظم‌ساز است [۹، ۱۹].

۷ انتخاب پارامترهای منظم‌ساز

در این مجال چند تکنیک برای انتخاب پارامترهای منظم‌ساز λ و κ در روش تیخانوف و TSVD ارائه می‌شود تا بتوان در مطالعات آتی از ایده مشابه با آن‌ها بهره برد.

۱.۷ اصل اختلاف

یکی از ساده‌ترین روش‌هایی که می‌توان به کمک آن پارامتر منظم‌سازی را انتخاب کرد، اصل اختلاف «Discrepancy-Principle» یا dp است. در داده‌های متأثر از نویز بردار خطای e ، حل دقیق دستگاه $Ax = b$ را غیرممکن می‌کند و هرگز مقدار باقی‌مانده $\|Ax - b\|_2 = 0$ نخواهد بود. بنابراین پارامتر λ طوری انتخاب می‌شود که $\|e\|_2 \approx \|Ax_\lambda - b\|_2$. لذا با معرفی ضریب اطمینان «Safety-Factors» v_{dp} ، λ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که

$$\|Ax_\lambda - b\|_2 = v_{dp} \|e\|_2. \quad (۱.۷)$$

در [۱۰] براساس دسته‌ای از الگوریتم‌های آموزش‌دیده انتخاب‌های دیگری برای مقدار v_{dp} معرفی شده است. در روش TSVD پارامتر منظم‌سازی κ یک عدد صحیح است. بنابراین محاسبه κ به صورتی که تساوی زیر همیشه برقرار باشد، میسر نیست

$$\|Ax_\kappa - b\|_2 = v_{dp} \|e\|_2. \quad (۲.۷)$$

بنابراین می توان κ را بزرگترین عدد صادق در نابرابری

$$\|Ax_{\kappa} - b\|_2 \geq v_{dp} \|e\|_2, \quad (3.7)$$

انتخاب کرد. اساسی ترین مسئله ای که برای روش اصل اختلاف وجود دارد وابستگی محاسبات این روی کرد به سطح خطای $\|e\|_2$ منتشر شده در سیگنال اندازه گیری شده، است. معمولاً e بردار نامعلومی است و مقدار $\|e\|_2$ باید تقریب زده شود و این روش حساسیت بالایی به مقدار تقریب زده شده دارد و بعضاً برآورد انجام شده منجر به جواب زودرس در فرایند منظم سازی می شود. برخلاف شرایط ذکر شده روش اصل اختلاف همچنان از محبوبیت زیادی برخوردار است، چراکه سادگی این روش محاسبه جواب نظری مناسب را سهل الوصول می نماید.

۲.۷ منحنی L

روش دیگری که در محاسبه پارامترهای منظم سازی می تواند مورد اعتماد باشد، روش منحنی L است. [۲۱] در محاسبات این روش نیازی به مقدار بردار خطای e و برآورد آن نیست. در ایده روش منحنی L به دنبال بازسازی تصویری اند که تا حد امکان در معادلات صدق کند و همزمان نسبت به جواب بی پلایش اولیه هموارتر باشد. برای x مفروض دو شاخص $\|Ax - b\|_2$ و $\|x\|_2$ را در نظر بگیریم. اگر نمودار دکارتی این دو شاخص، برای تعدادی از انتخاب های λ ترسیم شود، یک منحنی شبیه حرف L تولید می شود که دلیل نام گذاری این روش نیز است. در این نمودار هر چه مقدار هر دو شاخص $\|x\|_2$ و $\|Ax - b\|_2$ کمتر باشد، مناسب تر است. بنابراین نقطه ای که متناظر با گوشه شکستگی منحنی L است، جواب و تصویر بازسازی شده مطلوب تری است و λ که منجر به بازسازی این جواب شده است، مناسب ترین مقدار برای پارامتر منظم سازی λ خواهد بود.

۳.۷ روش های آماری

از آن جایی که داده ها دارای نویز تصادفی است یک ایده، استفاده از روی کرد آماری در تعیین بهترین پارامترهای منظم سازی است. هنگامی که داده ها دارای نویز سفید با توزیع احتمالاتی $N(0, 1)$ (توزیع نرمال استاندارد) هستند، می توان از تکنیک تناوب نما تجمعی نرمال شده «Normalised-Cumulative-Periodogram» استفاده کرد. در این روش پارامتر منظم سازی به گونه ای انتخاب می شود که بردار باقی مانده محاسبه شده تنها شامل اطلاعات متعلق به نویز باشد و دیگر اطلاعاتی از سیگنال داده ها در آن بردار باقی مانده نمانده باشد. در خصوص روش منظم سازی TSVD بردار باقی مانده $r_{\kappa} = Ax_{\kappa} - b$ است و در این روش κ به نحوی انتخاب می شود که r_{κ} شبیه نویز شده باشد. به عبارت دیگر، κ ای انتخاب می شود که توان طیفی r_{κ} متناظر با آن ایستا باشد. یکی از ویژگی های نویز سفید این است که توان طیفی ایستا دارد. بنابراین وقتی بردار داده ها متأثر از نویز سفید باشد، در روش TSVD، r_{κ} نیز به توان طیفی ایستا می رسد، به این معنی که بردار r_{κ} از اطلاعات مربوط به داده ها تهی شده و صرفاً شامل اطلاعات مربوط به نویز با توزیع احتمالاتی $N(0, 1)$ است. منظور از ایستا بودن توان طیفی داده های وابسته به زمان این است که میانگین و واریانس آن ها در هر زمان دلخواه t ، مستقل از زمان است.

تعریف ۱.۷. توان طیفی

توان طیفی معمولاً بر اساس تبدیل فوریه از تابع خودهمبستگی تعریف می شود، در حالت پیوسته و گسسته به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$ps(f) = \frac{1}{T} \int_0^T r_{xx}(t) e^{-i2\pi mf(t)} dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

$$ps[m] = \sum_{n=1}^N r_{xx}[n] e^{-\frac{i2\pi mn}{N}}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (5.7)$$

که $r_{xx}(t)$ و $r_{xx}[n]$ توابع خودهمبستگی از داده های وابسته به زمان اند و f فرکانس بنیادی سیگنال زمان پیوسته است. توضیحات بیش تر را در فصل چهارم از [۳۸] می توان بازبینی نمود.

۸ روش های جبری و تکراری در بازسازی تصویر

برای مسائل با مقیاس بزرگ «Large-Scale» محاسبه (۶.۵) ناموجه است، لذا بهره مندی از روش های تکراری و ابزار منظم سازی تعبیه شده ی درونی آن ها راه گشا است [۸، ۱۱]. اگر قید و ویژگی مطلوبی را بر جواب معادلات (۲.۵) و (۳.۵) لحاظ شود آن گاه

$$x_{LS} = \arg \min_{x \in S} \frac{1}{\gamma} \|Ax - b\|_2^2, \quad (1.8)$$

که \mathcal{S} می تواند بر خاصیت مثبت بودن یا کران دار بودن تصویر دلالت کند. اگر ویژگی متمایزی برای تصویر مدنظر نباشد آن گاه $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ برای (۱.۵) قرار می دهیم:

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x, a^i \rangle = b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

که a^i معرف سطر i -ام ماتریس A است. برای $x^\circ \in \mathbb{R}^n$ دلخواه تصویر متعامد بتوی H_i ، یعنی

$$P_{H_i}(x^\circ) = \frac{b_i - \langle a^i, x^\circ \rangle}{\|a^i\|_2^2} a^i,$$

محاسبه می گردد. یک ترکیب محدب از $P_{H_i}(x^\circ)$ به عنوان تکرار x^1 در نظر گرفته می شود. نمای هندسی این توصیف در (شکل ۱۴) نمایش داده شده است. این فرایند برای تولید x^{k+1} با داشتن x^k به کار گرفته می شود و داریم

$$x^{k+1} = x^k + \sum_{i=1}^m \lambda_k w_i^{(k)} \frac{b_i - \langle a^i, x^k \rangle}{\|a^i\|_2^2} a^i, \quad (2.8)$$

که نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k A^T M (b - Ax^k), \quad M = \text{diag}\left(\frac{w_1^{(k)}}{\|a^1\|_2^2}, \dots, \frac{w_m^{(k)}}{\|a^m\|_2^2}\right). \quad (3.8)$$

این روش تکنیک تکراری همزمان (SIRT) نامیده می شود. نام دیگر این خانواده از روش های تکراری لندوبر است [۸، ۱۱، ۱۴]. در الگوریتم لندوبر برای تسریع همگرایی پارامتر تخفیف λ_k و همچنین ماتریس های وزن و پیش شرط ساز متفاوتی می تواند استفاده شود. این دو ماتریس به ترتیب با M و S نمایش داده می شوند. M یک ماتریس متقارن و معین مثبت (SPD) است. از اعضای مشهور خانواده (SIRT) می توان به روش های «CIMMINO»، «CAV»، «LANDWEBER» اشاره نمود. در روش «CIMMINO» ماتریس وزن $M = M_C = \frac{1}{m} \text{diag}(\|a_i\|_2^2)$ در نظر گرفته می شود، که در آن a_i سطر i -ام ماتریس A است. در روش «CAV» ماتریس $M = \text{diag}(\|a_i\|_2^2)$ است. N_j معرف تعداد عناصر مخالف صفر در ستون j -ام ماتریس A است. اگر $M = I$ آن گاه روش «LANDWEBER» کلاسیک خواهد بود. متناظر با الگوریتم (SIRT) در تمام این روش ها $S = I$ اگر در فضای $\mathcal{S} \neq \mathbb{R}^n$ آن گاه در انتهای هر تکرار:

$$x^{k+1} = P_{\mathcal{S}}(x^k)$$

که $P_{\mathcal{S}}$ نمایشگر تصویر متعامد بتوی \mathcal{S} است [۱۵]. برای قیود ساده ای همچون مثبت بودن و کران داری جواب، محاسبه این پروجکشن بی هزینه خواهد بود. اگر $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ آن گاه پروجکشن متعامد عمل گر همانی خواهد بود. شرایط انتخاب λ_k برای همگرایی الگوریتم (SIRT) در قضیه ۱.۸ بیان شده است.

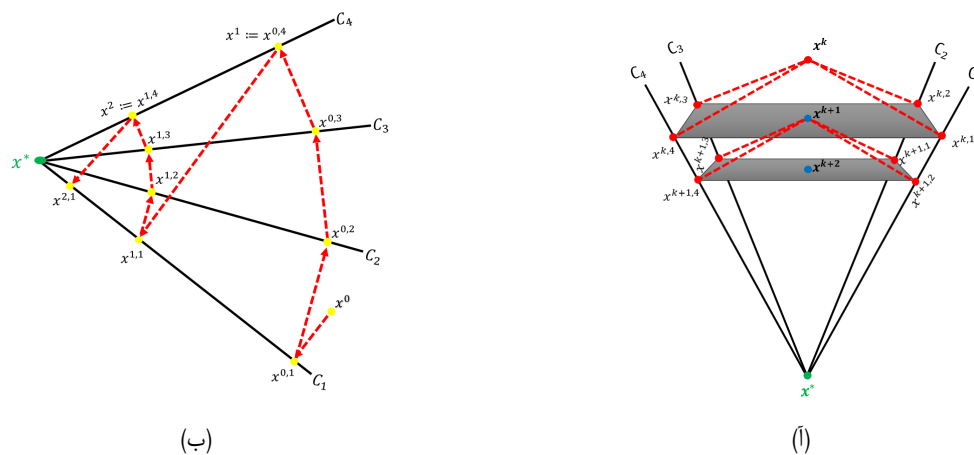
قضیه ۱.۸. [۱۵] فرض کنیم M یک ماتریس متقارن معین مثبت باشد و

$$0 < \epsilon \leq \lambda = \lambda_k \leq (2 - \epsilon) / \rho(A^T M A), \quad (4.8)$$

آن گاه دنباله ای تولید شده توسط الگوریتم (SIRT) به جواب مسئله

$$x_{LS} = \arg \min_{x \in \mathcal{S}} \|Ax - b\|_M, \quad (5.8)$$

همگرا است. برای ماتریس B نماد $\rho(B)$ معرف شعاع طیفی آن است و برای بردار دلخواه ν و ماتریس M متقارن معین مثبت، نرم وزنی به صورت $\|\nu\|_M = \langle \nu, M\nu \rangle$ است.



شکل ۴: (ا) نمای هندسی الگوریتم (SIRT) (ب): نمای هندسی الگوریتم (ART)

الگوریتم ۱: (SIRT)

۱. بردار دلخواه x^0 مفروض است. M و S را انتخاب نمایید.
۲. برای $k = 1, 2, \dots$ قرار دهید:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k S A^T M (b - A x^k),$$

$$x^{k+1} = P_S(x^{k+1}).$$

انتخاب‌های دیگری برای ماتریس وزن و پارامتر تخفیف می‌توان در نظر گرفت، به طوری که این دو پارامتر در هر تکرار از الگوریتم (SIRT) متناسب با اطلاعات بردار تکرارها به‌هنگام شوند [۳۲، ۳۳]. فرض کنیم x^* جواب دقیق (۱.۸) باشد، برای ماتریس وزن M مفروض، λ_k ی کمینه‌کننده خطای تقریب $\|x - x^*\|_M$ و آنالیز همگرایی دنباله تولیدشده به این روش در [۳۲] معرفی شده است. لذا اگر $M = I$ آن‌گاه

$$\lambda_k = \frac{\|A^T(b - A x^{k-1})\|^2}{\|A A^T(b - A x^{k-1})\|^2}, \quad (6.8)$$

مینیمم‌کننده خطای تقریب $\|x - x^*\|$ خواهد بود. در قسمت آزمایش الگوریتم‌های عددی از این پارامتر تخفیف استفاده خواهد شد. یکی دیگر از الگوریتم‌های تکراری بازسازی تصویر که غالباً نسبت به خانواده «LANDWEBER» سرعت همگرایی بیش‌تری دارد، الگوریتم ترتیبی (ART) یا کاکزمارز «Kaczmarz» است. در این الگوریتم در تکرار $k - m$ با شروع از نقطه x^k تصویر متعامد بتوی H_1 یعنی $H_1(x^k) = P_{H_1}(x^k) = x^{k,1}$ محاسبه می‌گردد. در زیر تکرار بعدی از نقطه $x^{k,1}$ تصویر متعامد بتوی H_2 محاسبه می‌گردد، این روند تا ملاقات ابرصفحه H_m ادامه می‌یابد این پیمایش یک دور نامیده می‌شود و $x^{k,m} = x^{k+1}$ [۱۳، ۳۱]. ترتیب در توالی انتخاب H_i ها بر سرعت همگرایی الگوریتم مؤثر است [۳۰]. نمای هندسی و پیکربندی این فرایند در الگوریتم (ART) و (شکل ۴ ب) تبیین شده است. در مسائل با مقیاس بزرگ زمان اجرای روش (ART) قابل ملاحظه خواهد بود.

یکی دیگر از روش‌های تکراری موفق، مزدوج گرادیان (CGLS) «Conjugate-Gradient-Least-Square» [۲۵، ۳۷] است. روش (CGLS) از خانواده روش‌های زیرفضای کرلیف است که تعمیم‌یافته الگوریتم مزدوج گرادیان (CG) [۴، ۳۷] برای حل معادله نرمال (۴.۵) است. الگوریتم (CGLS) معادله (۳.۵) را حل می‌کند و دنباله تولیدشده در این روش به x_{LS} همگرا خواهد بود. شایان ذکر است که در این نسخه از الگوریتم امکان لحاظ نمودن شرط مثبت بودن جواب امکان‌پذیر نیست ولی در [۱۷] نسخه‌ای از الگوریتم مزدوج گرادیان با نام (NN-FCGLS) برای حل (۱.۸)، هنگامی که \mathcal{S} زیر فضای مثبت باشد، بدون آنالیز همگرایی ارائه شده است. به‌منظور نمایش بصری عمل کرد الگوریتم‌های جبری در بازسازی تصویر، ماتریس‌های متناظر با رابطه (۲.۵) توسط بسته ابزاری AIRTools در نرم‌افزار MATLAB معرفی شده در [۲۳]، استفاده می‌شود. ابعاد تصویر مجسمه انسان 512×512 است. برای ساختن ماتریس A ، 18° زاویه و جهت با فاصله خطی در بازه $[0, 179^\circ]$ در نظر گرفته و در هر جهت ۷۱۲ اشعه تابش می‌شود، در نهایت ابعاد ماتریس A برابر 262144×130320 خواهد بود. همان‌طور که گفته شد مدل‌سازی و اندازه‌گیری سیگنال‌ها دارای درصد قابل قبولی از خطا است. در فرایند تولید داده‌ها ۵٪ نویز سفید به بردار b اضافه شده است. در مسائل متأثر از نویز دنباله $\{x^k\}$ در تکرارهای ابتدایی به خوبی به جواب دقیق (۲.۵) نزدیک می‌شود، اما پیش از همگرایی به جواب مسئله، به سبب وجود نویز دچار انحراف می‌شود که به این پدیده نیمه‌همگرایی

الگوریتم ۲: (ART)

۱. بردار دلخواه x° مفروض است. برای $k = 1, 2, \dots$ قرار دهید:

$$x^{k,\circ} = x^k,$$

۲. برای $i = 1, 2, \dots, m$ حساب کنید:

$$x^{k,i} = x^{k,i-1} + \frac{b_i - a_i^T x^{k,(i-1)}}{\|a_i\|_2^2} a_i,$$

۳. قرار دهید:

$$x^{k+1} = \mathbf{P}_S(x^{k,m}).$$

الگوریتم ۳ (CGLS)

۱. برای بردار دلخواه x° مفروض قرار دهید:

$$\begin{aligned} r^\circ &= b - Ax^\circ, \\ d^\circ &= A^T r^\circ, \end{aligned}$$

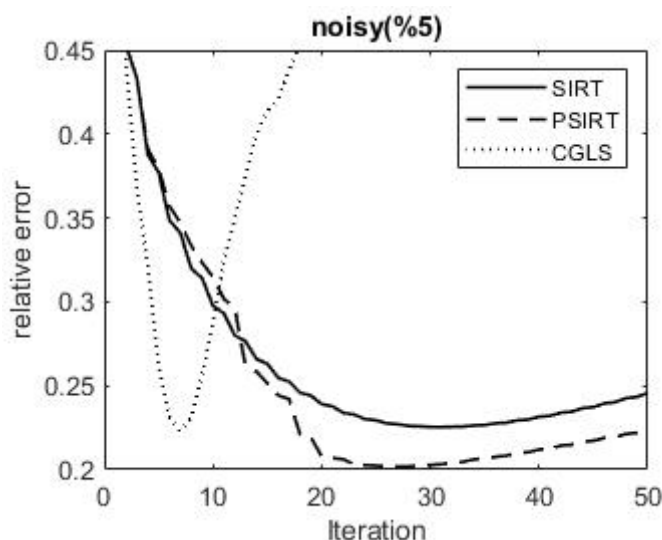
۲. برای $k = 1, 2, \dots$ قرار دهید:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k &= \|A^T r^{k-1}\|_2 / \|Ad^{k-1}\|_2, \\ x^k &= x^{k-1} + \bar{\alpha}_k d^{k-1}, \\ r^k &= r^{k-1} - \bar{\alpha}_k Ad^{k-1}, \\ \bar{\beta}_k &= \|A^T r^k\|_2 / \|A^T r^{k-1}\|_2, \\ d^k &= A^T r^k + \bar{\beta}_k d^{k-1}. \end{aligned}$$

گفته می شود [۲۹]. این پدیده به خوبی در (شکل ۵) برای نمودار نقطه چین (CGLS) نشان داده شده است. پدیده نیمه همگرایی در نمودار خطای نسبی دو روش دیگر ملایم است. در این شکل خطای نسبی به صورت زیر تعریف شده است

$$\text{relative error}(k) = \frac{\|x^k - x^*\|}{\|x^*\|}$$

بر حسب شماره تکرارها برای سه روش (PSIRT)، (SIRT) و (CGLS) ترسیم شده است. منظور از (PSIRT) همان الگوریتم (SIRT) است که در آن شرط مثبت بودن جواب به مسئله توموگرافی لحاظ شده است. در روش های (SIRT) و (PSIRT) پارامتر تخفیف بر حسب (۶۸) و ماتریس های وزن و پیش شرط ساز ماتریس همانی اند. این انتخاب بر کنترل پدیده نیمه همگرایی در خطای نسبی این دو روش تأثیر ویژه داشته است. اضافه شدن قید مثبت بودن جواب، منجر به تقلیل خطای نسبی به 0.2° شده است. در شکل (۶) تصاویر بازسازی توسط سه الگوریتم فوق در تکرار 5° -ام و تکرار متناظر با کمترین خطای نسبی متناظر با آن روش نشان داده شده است. برای روش های (SIRT)، (PSIRT) و (CGLS) کمترین خطا به ترتیب متعلق به تکرار 3° ، 5° و 7° است. این توالی و نمودارهای خطای نسبی در شکل ۵ قیاسی بر سرعت همگرایی این سه الگوریتم ارائه می کند. نمودار خطای نسبی روش (CGLS) در تکرارهای اولیه سریعاً به کران 0.2° نزدیک می شود و در تکرار 7° ام به کمترین مقدار خود رسیده است و سریعاً نیز واگرا می شود به طوری که در تکرار 2° ام مقدار خطای نسبی آن از 1° بیش تر است. برای روش های خانواده لندور حد اقل 2° تکرار نیاز است تا خطای نسبی به کران 0.2° نزدیک شود. سرعت واگرایی در این خانواده به همین میزان کند است به طوری که بعد از 5° تکرار خطای تکرار در آستانه 0.2° است. در مسائل توموگرافی آستانه خطای 0.3° قابل قبول است. همان طور در (شکل ۶) مشهود است تصویر بازسازی شده در جزئیات شباهت زیادی به تصویر اصلی در (شکل ۱۲) دارد.



شکل ۵: خطای نسبی روش های جبری (SIRT)، (PSIRT)، (CGLS) برای داده های متاثر از ۵٪ نویز درون مجسمه انسان

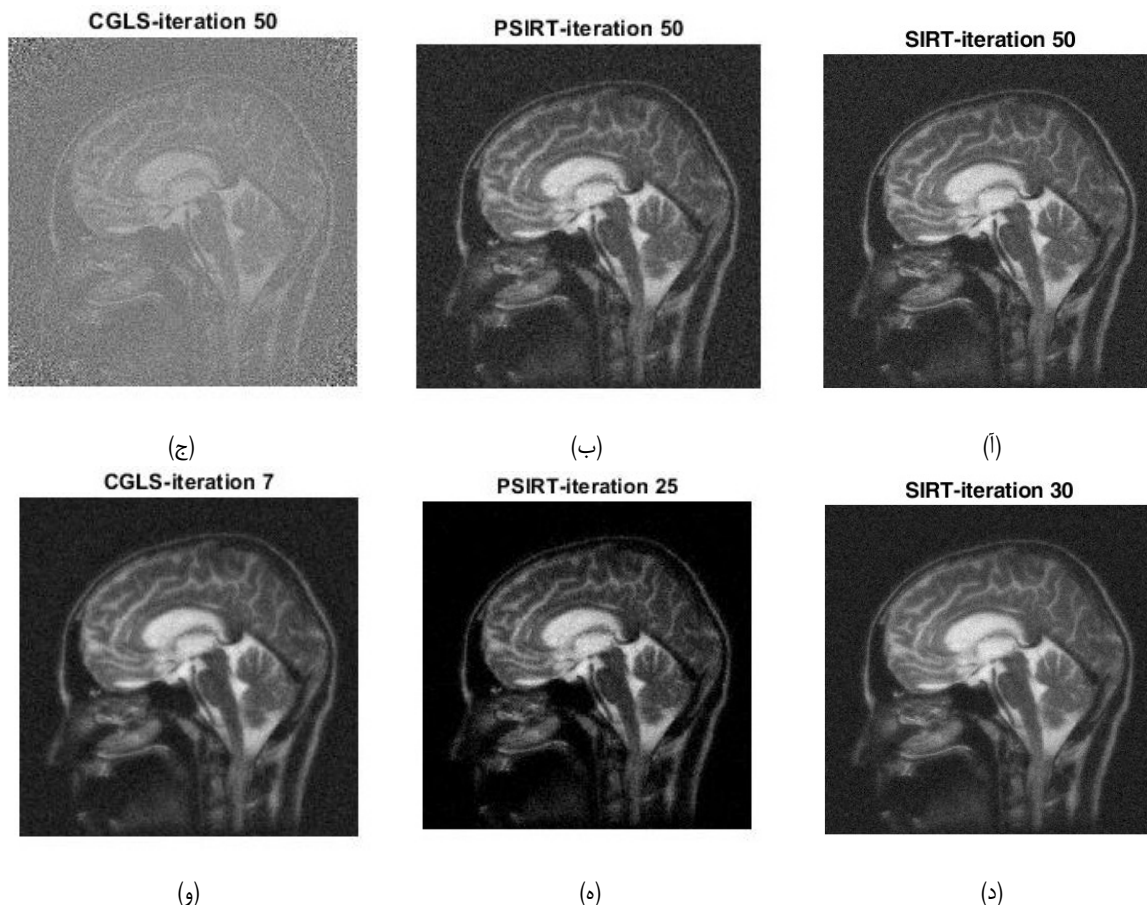
مطالعات حوزه توموگرافی معمولاً بر یافتن دو راه حل متمرکز است. اول آن که با انتخاب یک قاعده توقف به عنوان پارامتر منظم سازی، تکرارها پیش از شروع نیمه همگرایی متوقف شوند [۳، ۹، ۱۰، ۱۷]. دوم آن که تا حد امکان شروع پدیده نیمه همگرایی به تعویق افتد [۲۲، ۲۳، ۳۶، ۴۰]، در این حالت، نبود یک قاعده توقف مناسب و کارآمد و یا توقف دیر هنگام تکرارها، اثر منفی بر کیفیت تصویر بازسازی شده ندارد و صرفاً هزینه محاسبات بیشتری در بر خواهد داشت. مقایسه تصاویر در (شکل های ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹) اهمیت این هدف را به خوبی نشان می دهد. بارز است که تصویر بازسازی شده به روش (CGLS) در تکرار 5° -ام فاصله زیادی از تصویر اصلی در (شکل ۱۲) دارد. اگر x^k جواب (۳.۵) باشد آن گاه

$$x^k = \arg \min_{x \in \mathcal{K}_k} \|Ax - b\|_2^2,$$

که \mathcal{K}_k فضای کرلیف متشکل از

$$\mathcal{K}_k = \text{span}\{A^T b, (A^T A)A^T b, (A^T A)^2 A^T b, \dots, (A^T A)^{k-1} A^T b\}$$

این بدان معنا است که فضای \mathcal{K}_k به اندازه کافی به فضای تولید شده توسط k تا از مهم ترین بردارهای تکین A نزدیک شده است. حال هر چه در توالی تکرارها تلاش بر بزرگ تر کردن \mathcal{K}_k باشد، در این صورت بردارهای کم اهمیت تر به فضای تقریب اضافه می شوند. این نکته



شکل ۶: (أ) و (د): به ترتیب تصویر بازسازی شده در تکرار 50° و 30° در روش (SIRT) است، (ب) و (ه): به ترتیب تصویر بازسازی شده در تکرار 50° و 7° در روش (CGLS) است. این شکل (ج) و (و): به ترتیب تصویر بازسازی شده در تکرار 50° و 25° در روش (PSIRT) است. (ز) و (و): به ترتیب تصویر بازسازی شده در تکرارهای متفاوت از روش های (SIRT)، (PSIRT) و (CGLS) را برای داده‌های متأثر از ۵٪ نویز سفید نشان می‌دهد.

در هم‌آهنگی با تکنیک‌های منظم‌سازی است. روش دیگری که در دو دهه‌ی اخیر مورد توجه محققین حوزه‌ی مسائل وارون قرار گرفته است، روش برترگزینی و استفاده از الگوریتم‌های برآشفته در کنترل پدیده نیمه‌همگرایی است. خانواده‌ای از این روش‌ها مبتنی بر الگوریتم‌های (SIRT) و (ART) اند. [۳۴-۳۶، ۴۰] و برخی از آن‌ها مبتنی بر روش‌های زیرفضای کرلیف می‌باشند [۴۰] که معروف‌ترین آن‌ها (S-CG-CD) است. این روش‌ها نیز در کلاس تکنیک‌های مدرن منظم‌سازی قرار می‌گیرند. ایده اصلی راهبرد برترگزینی شبیه روش منظم سازی تیخانوف است. در (۴.۶) به جای استفاده از تابع جریمه $\|x\|_2^2$ می‌توان از توابع دیگر استفاده نمود. فرض کنیم ویژگی هموار بودن جواب مسئله حائز اهمیت باشد، در این صورت یک انتخاب برای تابع ثانویه در روش برترگزینی تابع تغییرات کلی TV است،

$$TV(q) = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \sqrt{(q_{gh+1} - q_{gh})^2 + (q_{g+1h} - q_{gh})^2}, \quad (7.8)$$

که q یک تصویر دوبعدی با ابعاد $G \times H$ است. لذا تصویر بازسازی شده به این روش هموارتر خواهد بود و مرز قسمت‌های مختلف درون تصویر با وضوح بیش‌تری بازسازی می‌شود. در روش‌های متأثر از راهبرد برترگزینی نیز هم‌چنان تمرکز اصلی بر کنترل پدیده نیمه‌همگرایی و به‌تعمیق انداختن نیمه‌همگرایی است، مگر آن که قاعده توقف قابل اعتمادی در دسترس باشد [۳۶، ۴۰].

۹ نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله وارون به خصوص مسئله توموگرافی دانش‌محور مطالعه شده است، هم‌چنین فرایند تصویربرداری اشعه ایکس در نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شد. اثر انتخاب تعداد جهت‌های چشمه ساطع‌کننده پرتو بر کیفیت نمای سینوگرام بررسی شد. بنابر نتایج عددی، هرچه تعداد این زوایا بیشتر باشد، سینوگرام حاصل منعکس‌کننده اطلاعات و جزئیات بیشتری از شی خواهد بود. لذا کیفیت تصویر بازسازی شده نیز بهتر خواهد بود و به شی اصلی شباهت بیشتری دارد. هم‌چنین اثر حضور نویز بر کیفیت سینوگرام و تصویر بازسازی شده نشان داده شد. در شبیه‌سازی دیجیتال فرایند ساخت سینوگرام وجود نویز سبب مخدوش و غبارآلود شدن نمای سینوگرام می‌گردد. از این رو کیفیت تصویر بازسازی شده نیز کاهش می‌یابد. در بررسی عمل‌کرد خانوادهای از روش‌های کلاسیک‌تر بازسازی تصویر که در طبقه مباحث پردازش سیگنال قرار دارند و مبتنی بر تبدیلات معکوس فوریه و رادون اند، مشخص شد که از میان تمام فیلترهای کاهنده نویز، فیلتر «Hamming» نتیجه و اثر مطلوب‌تری دارد. از تکنیک‌های جبری و الگوریتم‌های (SIRT)، (PSIRT) (CGLS) برای بازسازی تصویر استفاده شد و همان‌طور که در بخش نتایج عددی دیده شد، تصاویر بازسازی شده با استفاده از تکنیک‌های جبری به مراتب بهتر و با شباهت بیشتر به شی اصلی به دست آمد. تصویر بازسازی شده به روش (PSIRT) ویژگی مطلوب مثبت بودن را نیز دارا است و بیش‌ترین شباهت را به شی اصلی دارد. در روش‌های جبری ابزار بیش‌تری برای کنترل اثر حضور نویز در دسترس است. یکی از این ابزارها بهره‌مندی از راهبرد برترگزینی و الگوریتم‌های برآشفتنه در به‌تعویق انداختن پدیده نیمه‌همگرایی است. یکی از معروف‌ترین برترگزینی‌ها توسط تابع تغییرات کلی (TV) است که سبب همواری مطلوب تصویر بازسازی شده می‌شود. لذا روش‌های جبری بازسازی تصویر بیش‌تر مورد توجه مطالعات امروز قرار گرفته است.

فهرست منابع

- [1] M. S. Andersen, and P. C. Hansen, Generalized row-action methods for tomographic imaging, Numerical Algorithms. **7(1)** (2014) 121–144.
- [2] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, 2nd edn, John Wiley & Sons, 1987.
- [3] A.B. Bakushinskii, Remarks on choosing a regularization parameter using the quasioptimality and ratio criterion, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. **24(4)** (1984) 181–182.
- [4] Å. Björck, *Numerical Methods in Matrix Computations*, Springer, 2015.
- [5] E. Boy, *Regularization of inverse problems by the landweber iteration*, Masters' thesis, 2019.
- [6] R. N. Bracewell, *Two-Dimensional Imaging*, Prentice Hall, 1995.
- [7] W. L. Briggs and V. E. Henson, *The DFT - An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM, 1995.
- [8] Y. Censor, and T. Elfving, Block-iterative algorithms with diagonally scaled oblique projections for the linear feasibility problem, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. **24(1)** (2002) 40–58.
- [9] M. Defrise, C. De Mol and P. C. Sabatier, A note on stopping rules for iterative regularization methods and filtered SVD, Inverse Problems : An interdisciplinary Study ed P C Sabatier. (1987) 261–268.
- [10] T. Elfving, T. Nikazad, Stopping rules for Landweber-type iteration, Inverse Problem. **23(4)** (2007) 1417–1432.
- [11] T. Elfving, T. Nikazad, Properties of a class of block-iterative methods, Inverse Problem. **25(11)** (2009), 115011.
- [12] T. Elfving, T. Nikazad, and C. Popa. A class of iterative methods: semi-convergence, stopping rules, inconsistency, and constraining. In Y. Censor, M. Jiang, and G. Wang, editors, Biomedical Mathematics: Promising Directions in Imaging, Therapy Planning, and Inverse Problems. Medical Physics Publishing, Madison, WI. (2010) 157–184.

- [13] T. Elfving, P. C. Hansen and T. Nikazad, Semi-convergence properties of Kaczmarz's method, *Inverse Problems*. **30(5)** (2014) 055007.
- [14] T. Elfving, T. Nikazad And P. C. Hansen, Semi-convergence and relaxation parameters for a class of SIRT algorithms, *ETNA*. **37(274)** (2010) 321–336.
- [15] T. Elfving, P. C. Hansen, T. Nikazad, Semi-convergence and relaxation parameters for Projected SIRT algorithms, *SIAM Journal on Scientific Computing*. **34(4)** (2017) A2000–A2017.
- [16] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Springer Science & Business Media, 2000.
- [17] S. Gazzola, Y. Wiaux, Fast nonnegative least squares through flexible Krylov subspaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*. **39(2)** (2017) A655–A679.
- [18] J. D. Gibson, A. Bovik, *Handbook of Image and Video Processing*, Academic press, 2000.
- [19] M. S. Gockenbach, *Linear Inverse Problems and Tikhonov Regularization*, **32**, American Mathematical Soc, 2016.
- [20] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, 1923.
- [21] P. C. Hansen, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM review*. **34(4)** (1992) 561–580.
- [22] P. C. Hansen, Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problem, numerical aspects of linear inversion, SIAM. Philadelphia, 1998.
- [23] P. C. Hansen, M. Saxild-Hansen, AIRTools- a MATLAB package of algebraic iterative reconstruction methods *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **236(8)** (2012) 2167–78.
- [24] G. T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*, Springer, 2009.
- [25] M. R. Hestenes and E. Stiefel, Methods of Conjugate Gradient for Solving Linear Systems, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **49(1)** Washington, DC: NBS, (1952).
- [26] A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, SIAM, 2001.
- [27] J. S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Englewood Cliffs, 1990.
- [28] V. A. Morozov and M. Stessin, *Regularization methods for ill-posed problems*, CRC press Boca Raton, FL, 1993.
- [29] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons Ltd, 2001.
- [30] D. Needell, J. A. Tropp, Paved with good intentions: analysis of randomized block Kaczmarz method, *Linear Algebra Appl.* **441** (2014) 199–221.
- [31] T. Nikazad, M. Karimpour, Controlling noise error in block iterative methods, *Numerical Algorithms*. **73(4)** (2016) 907–925.
- [32] T. Nikazad, M. Abbasi and T. Elfving, Error minimizing relaxation strategies in Landweber and Kaczmarz type iterations, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. **25(1)** (2017) 35–56.

- [33] T. Nikazad, M. Karimpour, and M. Abbasi, Notes on flexible sequential block iterative methods, *Computers & Mathematics with Applications*. **76(6)** (2018) 1321–1332.
- [34] T. Nikazad, R. Davidi, G. T. Herman, Accelerated perturbation-resilient block-iterative projection methods with application to image reconstruction, *Inverse Problems*. **28(3)** (2012) 035005.
- [35] T. Nikazad, M. Abbasi, Perturbation-resilient iterative methods with an infinite pool of mappings, *SIAM J. Numerical Analysis*. **53 (1)** (2015) 390–404.
- [36] T. Nikazad, M. Abbasi, L. Afzalipour, T. Elfving, A new step size rule for the superiorization method and its application in computerized tomography, *Numerical Algorithms*. (2021) 1–25.
- [37] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear System*, PWS Publishing Company, 1996.
- [38] J. Semmlow, *Circuits, signals and systems for bioengineers: A MATLAB-based introduction* Academic Press, 2017.
- [39] I. Tomba, *Iterative regularization methods for ill-posed problems*, PHD thesis, 2013.
- [40] M.V. W. Zebetti, C. Lin and G. T. Herman, Total variation superiorized conjugate gradient method for image reconstruction, *Inverse Problems*. **34(3)** (2018) 034001.



Image Reconstruction and Knowledge-base Tomography Mechanism

Laya Afzalipour¹, Touraj Nikazad² †

(1) Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics, Iran University of Science & Technology, Tehtan, Iran

(2) Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2022/1/24

Accepted: 2022/3/16

Abstract: In this study, the problem of image reconstruction (Inverse Problem) and its semantic relationship with a large range of applied and engineering problems are explained. The mechanism of tomographic which is an example of the image reconstruction problem is described. The existence and uniqueness of solutions and also regularization techniques are discussed. In order to better imagine that abstract concepts, the process of digital X-ray imaging is presented using MATLAB. Image reconstruction techniques are described by Radon and Fourier transforms and algebraic methods. The effects of selecting the number of angles in tomography and additive noise in the data, on the quality of the reconstructed image are investigated. The numerical results and the comparison of images reconstructed by different methods confirm the special ability of algebraic techniques in image reconstruction. In addition, it is shown that in algebraic methods, desirable features such as positivity and smoothness can be considered for the reconstructed image, which has a significant effect on reducing the approximation error.

Keywords: Image Reconstruction, Regularization, Algebraic Image Reconstruction Technique, Radon Inverse Transform.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

†Corresponding author.

E-mail addresses: Tnikazad@iust.ac.ir (T. Nikazadr), l.afzalipour@gmail.com (L. Afzalipour).