مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۱، دوره ۱۲، شماره ۲، ص ۱۸۵-۲۰۰

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/JAMM.2022.39845.2005

# کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تاخیری خطی با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت به‌کمک روش ترکیبی چبیشف بلاک پالس

سیدمحمد حسینی ×

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران

دبیر مسئول: علی‌رضا فخارزاده جهرمی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۲/۱۶

چکیده: در این مقاله کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت بررسی شده است. به‌کمک توابع ترکیبی چبیشف، روشی تقریبی برای به‌دست آوردن جواب بهینه‌ی مساله‌ی کنترل سیستم‌های تاخیری خطی ارایه شده است. به‌منظور ارایه‌ی روشی تقریبی، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب و تاخیر توابع ترکیبی چبیشف معرفی و برای حل مساله استفاده‌شده است. مساله‌ی کنترل بهینه به‌کمک ماتریس‌های عملیاتی به یک مساله‌ی بهینه‌سازی تبدیل و با حل آن جواب تقریبی مساله‌ی اصلی به‌دست می‌آید. مثال‌هایی از کنترل بهینه‌ی سیستم‌های تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت، حل و کارآیی روش نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه، سیستم‌های تاخیری، تاخیر قطعه‌ای‌ثابت، چندجمله‌ای‌های چبیشف، توابع ترکیبی.

رده‌بندی ریاضی: 49M25; 49M27; 49M37

## ۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تاخیری، نقش مهمی در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی در شاخه‌های مختلفی از علوم دارند. در تکنولوژی‌های عصر جدید، عموماً فرایندهای فیزیکی کنترل‌پذیرند؛ به این معنا که رفتار آن‌ها به‌کمک روش‌های موجود، به خواست و مطلوب ما وابسته است. فرایندهای کنترلی اغلب دارای زمان‌های تاخیر غیرقابل اغماض‌اند. این تاخیر زمانی به‌دلیل زمان مورد نیاز برای دریافت، درک اطلاعات و سپس واکنش نشان دادن به آن، ظاهر می‌شود. به‌علاوه، برای برخی از سیستم‌های فیزیکی، اثرات موروثی در نحوه‌ی فعالیت سیستم از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی قادر به توصیف سیستم‌هایی از این نوع نخواهد بود. بعد از جنگ جهانی اول، استفاده گسترده از سیستم‌های کنترلی و به‌خصوص سیستم‌های کنترل اتوماتیک، منجر به مطالعاتی در دسته‌ی کاملاً متفاوت با معادلات دیفرانسیل متداول، تحت عنوان معادلات دیفرانسیل تاخیری شد [۵].

×نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: sm.hoseini@abru.ac.ir (S.M. Hoseini)

از آن‌جا که ساختار طیف وسیعی از مسایل کنترل، تاخیری است و فرایند مربوط به تعیین پاسخ تحلیلی این سیستم‌ها پیچیده و در اغلب موارد امکان‌ناپذیر است، بنابراین ارایه‌ی یک روش عددی مناسب و کارآمد برای حل این سیستم‌ها از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. روش‌های موجود برای حل مسائل کنترل بهینه عمدتاً به دو دسته‌ی کلی روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم، تقسیم می‌شوند [۱]. در روش مستقیم، ایده‌ی اصلی مبتنی بر گسسته‌سازی مساله‌ی کنترل بهینه و تبدیل مساله‌ی اصلی به یک مساله بهینه‌سازی پارامتری یا یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی است، به طوری که با حل آن، تقریبی از جواب مساله اصلی به‌دست می‌آید. از جمله مزایای روش‌های مستقیم بر روش‌های غیرمستقیم، اجتناب از ظهور متغیرهای الحاقی در حل مساله است.

در مورد گسسته‌سازی مسایل کنترل، دسته‌بندی‌های گوناگونی وجود دارد. در این‌جا به یک دسته از آن‌ها اشاره می‌شود. سه دیدگاه در این دسته وجود دارند. دیدگاه اول از تقسیم کردن دامنه‌ی مساله به زیردامنه‌های کوچک‌تر به‌وجود می‌آید. در این دیدگاه دامنه‌ی مساله‌ی مورد نظر، به قطعاتی تقسیم و روی هر قطعه، تعداد اندکی از توابع پایه برای گسسته‌سازی استفاده می‌شوند. در این حالت، همگرایی گسسته‌سازی با افزایش تعداد قطعات به‌دست می‌آید. یکی از نمونه‌های این دسته، روش المان متناهی نام دارد. به‌دلیل این که در چنین روش‌هایی، بیش‌ترین قطر المان‌های متناهی را عموماً با $h$ نشان می‌دهند. به روش‌های موجود در این دسته، روش‌های $h$ اطلاق می‌گردد.

دیدگاه دوم، بر اساس ثابت نگه‌داشتن دامنه‌ی اصلی و تغییر تعداد توابع پایه برای گسسته‌سازی کار می‌کند. عموماً در این دیدگاه، تعداد توابع پایه‌ی استفاده‌شده را با $p$ نشان می‌دهند. به این جهت به چنین روش‌هایی اصطلاحاً روش‌های $p$ گفته می‌شود. در این گونه روش‌ها، همگرایی روش با افزایش مقدار $p$ حاصل می‌شود. در مورد مسایلی که جواب آن‌ها بینهایت‌بار هموار و خوش‌رفتار است، روش‌های $p$ ساختاری ساده و همگرایی نمایی دارند. برای نمونه مرجع [۲] پیش‌نهاد می‌شود.

از تلفیق دو دیدگاه فوق، دیدگاه سومی شکل می‌گیرد که به آن روش‌های $hp$ گفته می‌شود. در چنین روش‌هایی ابتدا دامنه‌ی مساله به چند زیردامنه تقسیم و سپس در هر زیردامنه با افزایش تعداد توابع پایه، تقریبی از جواب مساله حاصل می‌شود. هم‌چنین در صورت نیاز تعداد تقسیمات دامنه‌ی اصلی نیز قابل افزایش است. به این ترتیب در این روش‌ها همگرایی روش به دو پارامتر تعداد تقسیمات و تعداد توابع پایه‌ی استفاده‌شده در هر قطعه وابسته است.

یکی از روش‌های موجود در دسته روش‌های $hp$، با عنوان روش‌های ترکیبی یا روش توابع ترکیبی اخیراً مورد توجه واقع شده است. در روش توابع ترکیبی ابتدا یک مجموعه از توابع پایه انتخاب می‌شود. سپس با توجه به مساله‌ی مورد نظر، تعداد تقسیمات دامنه‌ی اصلی مساله به‌دست می‌آید. به‌عنوان نمونه از این روش در آنالیز سیستم‌های تاخیری با تاخیر ثابت در مرجع [۱۲] استفاده‌شده است. در یک مساله‌ی تاخیری با تاخیر ثابت، تحت مفروضاتی، تعداد و محل تقسیم‌ها کاملاً قابل محاسبه می‌باشد. لذا استفاده از روش‌های توابع ترکیبی در حل مسایل تاخیری با تاخیر ثابت، نتایج رضایت‌بخش و امیدوارکننده‌ای ارایه کرده است.

در برخی سیستم‌های تاخیری، تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت در نظر گرفته می‌شود. آنالیز و کنترل بهینه‌ی یک سیستم تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت و به‌دست آوردن جواب تحلیلی آن به‌مراتب پیچیده‌تر از فرایند حل سیستم تاخیری با زمان تاخیر ثابت است. در مورد آنالیز سیستم تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت می‌توان به مراجع [۳، ۴] اشاره نمود که در آن با استفاده از توابع متعامد بلاک-پالس این سیستم‌ها حل شده‌اند. اخیراً در مرجع [۱۰] با استفاده از توابع ترکیبی چبیشف، روشی کارآمد برای آنالیز سیستم‌های خطی تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت ارایه شده است. هم‌چنین در مرجع [۸] نیز مساله کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت به‌کمک توابع ترکیبی درون‌یاب حل و شرایط لازم بهینگی این مسایل به‌دست آمده است.

همان‌طور که مشهور است توابع پایه‌ی متعامد مانند چندجمله‌ای‌های لژاندر یا چبیشف تنها در مورد مسایل با جواب هموار، از نرخ همگرایی نمایی برخوردارند [۲]. اما با توجه به طبیعت سیستم‌های تاخیری، این توابع پایه‌ی متعامد که بر کل دامنه هموارند، هیچ‌کدام نمی‌توانند رفتار دینامیکی این سیستم‌ها را مدل‌سازی کنند. به‌دلیل این که تقریب یک تابع قطعه‌ای هموار عموماً به خاطر پدیده‌ی گیبس، همگرا نمی‌شود یا نرخ همگرایی آن تضعیف می‌شود. با توجه به ماهیت ناهموار جواب بهینه‌ی مسایل تاخیری به‌ویژه سیستم‌های با تاخیر قطعه‌ای‌ثابت، روش پیش‌نهادی در این مقاله، یک روش وفقی است؛ به این معنا که بعد از شناسایی نقاط ناهمواری جواب بهینه‌ی مساله‌ی کنترل بهینه، دامنه‌ی مورد نظر مساله را به چند بخش تقسیم می‌کند به‌نحوی که این نقاط در مرز زیربخش‌ها قرار بگیرد. در این مقاله به‌منظور به‌دست آوردن کنترل بهینه‌ی این مسایل از توابع ترکیبی چبیشف استفاده‌شده است.

مطالب این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲ یک تعریف عمومی از توابع ترکیبی چبیشف-بلاک پالس بر اساس تقسیم‌بندی بازه به $N$ زیربازه‌ی دلخواه ارایه شده است. ماتریس‌های عملیاتی انتگرال، حاصل‌ضرب و هم‌چنین ماتریس عملیاتی تاخیر، برای توابع ترکیبی مذکور، در این بخش معرفی شده است. مساله‌ی کنترل بهینه تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای ثابت، در بخش ۳ معرفی و روش توابع ترکیبی چبیشف برای به‌دست آوردن تقریبی از کنترل بهینه‌ی چنین سیستم‌هایی استفاده‌شده است. بخش ۴ به مثال‌هایی از سیستم‌های کنترل بهینه‌ی تاخیری مذکور و حل آن‌ها با روش پیشنهادی اختصاص یافته است تا کارآمدی و اعتبار روش پیشنهادی نمایان شود.

## ۲ توابع ترکیبی چبیشف

فرض کنیم دامنه‌ی اصلی مساله با $[t_0, t_f]$ نشان داده شود. ابتدا بازه‌ی $[t_0, t_f]$ را به $N$ زیربازه با طول دلخواه اکیداً بزرگ‌تر از صفر تقسیم می‌کنیم. فرض کنیم نقاطی که منجر به این تقسیم‌بندی می‌شود به‌صورت $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t_f$

در نظر گرفته شود. در این مقاله بازه‌ی $[t_{n-۱}, t_n)$ را زیربازه‌ی $n$ام نامیده و از نماد $\mathbf{I}_n$ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. بنابراین به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, N$ داریم $\mathbf{I}_n = [t_{n-۱}, t_n)$. از آن‌جا که در ادامه به طول زیربازه‌ها نیاز خواهد شد، نماد $\Delta t_n$ برای نمایش طول زیربازه‌ی $n$ام به‌کار گرفته شده است، یعنی $\Delta t_n = t_n - t_{n-۱}$. در ادامه به معرفی و بررسی خواص توابع پایه ترکیبی چیبشف یا به‌طور مختصر توابع ترکیبی چیبشف می‌پردازیم. توابع ترکیبی چیبشف روی بازه $[t_۰, t_f)$ توسط نماد $\mathsf{T}_{nm}(t)$ به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, N$ و $m = ۰, ۱, \ldots, M$ نمایش داده شده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathsf{T}_{nm}(t) = \begin{cases} \mathsf{T}_m\left(\frac{۱}{\Delta t_n}(۲t - t_{n-۱} - t_n)\right), & t \in \mathbf{I}_n, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن $\mathsf{T}_m$ چندجمله‌ای چیبشف مرتبه $m$ است. چندجمله‌ای‌های چیبشف روی بازه‌ی $[-۱, ۱]$ با رابطه‌ی زیر معرفی می‌شوند:

$$\mathsf{T}_m(\tau) = \cos m\theta, \qquad \tau = \cos\theta,$$

که نسبت به تابع وزن $w(\tau) = (۱ - \tau^۲)^{-۱/۲}$ متعامدند. حال فرض کنیم $w_n(t)$ انتقال یافته‌ی تابع وزن چندجمله‌ای‌های چیبشف به زیربازه‌ی $n$ام باشد، یعنی

$$w_n(t) = w\Big(\frac{۲}{\Delta t_n}\, t + \frac{t_{n-۱} - t_n}{\Delta t_n}\Big), \qquad t \in \mathbf{I}_n. \tag{۲.۲}$$

در این صورت تابع وزن ترکیبی $W(t)$ به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$W(t) = \begin{cases} w_۱(t), & t \in \mathbf{I}_۱, \\ \vdots & \vdots \\ w_N(t), & t \in \mathbf{I}_N. \end{cases} \tag{۳.۲}$$

ازاین‌رو، توابع ترکیبی چیبشف روی بازه‌ی $[t_۰, t_f]$ نسبت به توابع وزن $W(t)$ متعامدند و داریم:

$$\int_{t_۰}^{t_f} \mathsf{T}_{nm}(t)\, \mathsf{T}_{kl}(t)\, W(t)\, dt = \frac{\pi\, \mathfrak{c}_m\, \Delta t_n}{۴}\, \delta_{nk}\, \delta ml, \tag{۴.۲}$$

که در آن $\delta$ تابع دلتای کرونکر است و $\mathfrak{c}_۰ = ۲$ و به‌ازای $m = ۱, ۲, \ldots, M$ داریم $\mathfrak{c}_m = ۱$. در این مقاله بسط یک تابع دلخواه $u \in \mathcal{L}^۲_W(t_۰, t_f)$ برحسب توابع ترکیبی چیبشف توسط نماد $\mathfrak{P}^N_\infty(u)$ نشان داده و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathfrak{P}^N_\infty(u)(t) = \sum_{n=۱}^{N} \sum_{m=۰}^{\infty} \hat{u}_{nm}\, \mathsf{T}_{nm}(t), \tag{۵.۲}$$

که در آن ضرایب بسط، یعنی $\hat{u}_{nm}$ به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots, N$ و $m = ۰, ۱, \ldots$ عبارت‌اند از

$$\hat{u}_{nm} = \frac{۴}{\pi\, \mathfrak{c}_m\, \Delta t_n} \int_{\mathbf{I}_n} u(t)\, \mathsf{T}_{nm}(t)\, w_n(t)\, dt. \tag{۶.۲}$$

هم‌چنین بسط متناهی ترکیبی تابع $u \in \mathcal{L}^۲(t_۰, t_f)$ تا مرتبه $M$ توسط نماد $\mathfrak{P}^N_M(u)$ نشان داده شده است و

$$\mathfrak{P}^N_M(u)(t) = \sum_{n=۱}^{N} \sum_{m=۰}^{M} \hat{u}_{nm}\, \mathsf{T}_{nm}(t). \tag{۷.۲}$$

همگرایی بسط ترکیبی تابع $u$ با افزایش $M$ و $N$ توسط قضیه‌ی زیر بیان می‌شود که اثبات آن در مرجع [۹] ارایه شده است. در این قضیه، $H^s_W(a, b)$ فضای سوبولف مجهز به نرم زیر را نشان می‌دهد:

$$\|u\|_{H^s_W(a,b)} = \left(\sum_{k=۰}^{s} \|u^{(k)}\|^۲_{\mathcal{L}^۲_W(a,b)}\right)^{۱/۲},$$

که در آن $u^{(k)}$ مشتق مرتبه‌ی $k$ از $u$ و $\mathcal{L}^۲_W(a, b)$ فضای هیلبرت شامل تمام توابع مربع انتگرال‌پذیر نسبت به تابع وزن $W(t)$ است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $u \in H^s_W(0,t_f)$ به‌ازای $s \geq 0$ برقرار باشد. در این‌صورت داریم:

$$\|u - \mathfrak{P}^N_M(u)\|_{\mathcal{L}^2_W(0,t_f)} \leq CM^{-s}|u|_{H^{0;s;M}_W(0,t_f)},$$

و به‌ازای $s \geq 1$ و $1 \leq r \leq s$ نامساوی زیر صادق است:

$$\|u - \mathfrak{P}^N_M u\|_{H^r_W(0,t_f)} \leq CM^{2r-\frac{1}{2}-s}|u|_{H^{r;s;M}_W(0,t_f)}, \tag{8.2}$$

که در آن‌ها

$$|u|_{H^{r;s;M}_W(0,t_f)} = \left(\sum_{k=\min(s,M+1)}^{s} N^{2r-2k}\|u^{(k)}_n\|^2_{\mathcal{L}^2_W(0,t_f)}\right)^{1/2}. \tag{9.2}$$

## ۱.۲ ماتریس‌های عملیاتی توابع ترکیبی

در این بخش ماتریس‌های عملیاتی توابع ترکیبی چیبشف ارایه شده است. به این جهت به نمایش ماتریسی بسط تابع دلخواهی مانند $u \in \mathcal{L}^2_W(t_0,t_f)$ نیاز است. فرض کنیم بردار $\Phi(t)$ یک بردار $N(M+1)$ مولفه‌ای به‌صورت زیر باشد:

$$\Phi(t) \;=\; \left[\mathsf{T}_{10}(t),\ldots,\mathsf{T}_{1M}(t),\mathsf{T}_{20}(t),\ldots,\mathsf{T}_{2M}(t),\ldots,\mathsf{T}_{N0}(t),\ldots,\mathsf{T}_{NM}(t)\right]^{\mathsf{t}}, \tag{10.2}$$

که در آن نماد $\mathsf{t}$ به معنای ترانهاده است. هم‌چنین ضرایب بسط تابع $u$ را در یک بردار به نام بردار ضرایب قرار می‌دهیم. فرض کنیم بردار ضرایب بسط تابع $u$ توسط $U$ که یک بردار $N(M+1)$ مولفه‌ای است، نمایش داده‌شده و به‌صورت زیر معرفی شود:

$$U \;=\; \left[\hat{u}_{10},\ldots,\hat{u}_{1M},\hat{u}_{20},\ldots,\hat{u}_{2M},\ldots,\hat{u}_{N0},\ldots,\hat{u}_{NM}\right]^{\mathsf{t}}, \tag{11.2}$$

که در آن $\hat{u}_{nm}$ برای $n = 1,2,\ldots,N$ و $m = 0,1,\ldots,M$، از رابطه‌ی (۶.۲) محاسبه می‌شوند. به این ترتیب رابطه‌ی (۷.۲) را می‌توان به‌فرم ماتریسی زیر بیان نمود:

$$\mathfrak{P}^N_M(u)(t) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{M}\hat{u}_{nm}\,\mathsf{T}_{nm}(t) = U^{\mathsf{t}}\Phi(t). \tag{12.2}$$

### ۱.۱.۲ ماتریس عملیاتی انتگرال

در این قسمت در مورد انتگرال از بردار توابع پایه چیبشف ترکیبی صحبت می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از بردار $\Phi(t)$ داریم:

$$\int_{t_0}^{t}\Phi(s)ds \simeq \mathcal{P}\Phi(t), \tag{13.2}$$

که در آن $\mathcal{P}$ ماتریس عملیاتی انتگرال توابع ترکیبی چیبشف یا به‌اختصار ماتریس عملیاتی انتگرال نامیده می‌شود که یک ماتریس با ابعاد $N(M+1)\times N(M+1)$ است. ساختار کلی این ماتریس به‌فرم زیر است [۱۱]:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} E_1 & H_1 & H_1 & \ldots & H_1 \\ 0 & E_2 & H_2 & \ldots & H_2 \\ 0 & 0 & E_3 & \ldots & H_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E_N \end{bmatrix}, \tag{14.2}$$

که در آن

$$H_n = \Delta t_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{(-1)^{M-1}+1}{2((M-1)^2-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{(-1)^{M}+1}{2(M^2-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و

$$E_n = \frac{\Delta t_n}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^{M-1}}{(M-2)^2-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2(M-1)} & 0 \\ \frac{(-1)^{M}}{(M-1)^2-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{2(M-2)} & 0 & \frac{1}{2M} \\ \frac{(-1)^{M+1}}{(M+1)^2-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-1}{2(M-1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

### ۲.۱.۲ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب

در این بخش ماتریس حاصل‌ضرب توابع ترکیبی چبیشف را به‌دست خواهیم آورد. به این منظور، از دو خاصیت توابع ترکیبی استفاده می‌کنیم. با توجه به خاصیت متمایز بودن این مجموعه، برای هر دو تابع ترکیبی $\mathsf{T}_{ni}(t)$ و $\mathsf{T}_{lj}(t)$ داریم:

$$\mathsf{T}_{ni}(t)\,\mathsf{T}_{lj}(t) \equiv 0, \qquad n \neq l. \tag{۱۵.۲}$$

به‌سادگی مشاهده می‌شود که بسط حاصل‌ضرب دو تابع ترکیبی $\mathsf{T}_{ni}(t)$ و $\mathsf{T}_{nj}(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\mathsf{T}_{ni}(t)\,\mathsf{T}_{nj}(t) = \sum_{m=0}^{M} \ell_{ijm}\,\mathsf{T}_{nm}(t), \tag{۱۶.۲}$$

که در آن

$$\ell_{ijm} = \frac{2}{\pi\,\mathfrak{c}_m}\int_{-1}^{1} \mathsf{T}_i(\tau)\,\mathsf{T}_j(\tau)\,\mathsf{T}_m(\tau)\,w(\tau)\,d\tau = \frac{2}{\pi\,\mathfrak{c}_m} g_{ijm}.$$

با توجه به خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف [۲]، برای محاسبه‌ی $g_{ijm}$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$g_{ijm} = \frac{1}{2}\big(\delta_{i+j,m} + \delta_{|i-j|,m}\big). \tag{۱۷.۲}$$

اکنون به معرفی ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب می‌پردازیم. به این منظور باید ماتریس حاصل‌ضرب، یعنی $\Phi(t)\,\Phi^T(t)$ را محاسبه کنیم. در مورد توابع ترکیبی چبیشف ماتریس ضرب $\Phi(t)\,\Phi^T(t)$، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\Phi(t)\,\Phi^T(t)\,U \simeq \tilde{U}\,\Phi(t), \tag{۱۸.۲}$$

که در آن $U$ بردار ضرایب بسط تابع $u(t)$ بر حسب توابع ترکیبی چبیشف و $\tilde{U}$ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب توابع ترکیبی و با ابعاد $N(M+1)\times N(M+1)$ است و به‌فرم زیر قابل نمایش است:

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{U}_N \end{bmatrix}. \tag{۱۹.۲}$$

زیرماتریس‌های $\tilde{U}_n$، برای $n = 1, 2, \dots, N$، ماتریس‌های از بعد $(M+1) \times (M+1)$ بوده و درایه‌های آن‌ها به‌صورت زیر قابل محاسبه‌اند

$$[\tilde{U}_n]_{i,j} = \sum_{m=0}^{M} \hat{u}_{nm}\, \ell_{imj}.$$

در این‌جا منظور از $[\tilde{U}_n]_{i,j}$، درایه‌ی واقع در مکان $(i,j)$ام از ماتریس $\tilde{U}_n$ است.

### ۳.۱.۲ ماتریس عملیاتی تاخیر

هدف از این بخش ارایه‌ی ساختار ماتریس عملیاتی تاخیر متناظر با توابع ترکیبی است. فرض کنیم $\Phi(t)$ بردار پایه‌ی توابع ترکیبی را نشان دهد. می‌خواهیم ماتریس $\mathcal{D}$ را به‌گونه‌ای بیابیم که

$$\Phi\Big(t - \tau(t)\Big) = \mathcal{D}\,\Phi(t), \tag{۲۰.۲}$$

که در آن $\tau(t)$ تابع تاخیر وابسته به زمان و قطعه‌ای‌ثابت است. ماتریس $\mathcal{D}$ را ماتریس عملیاتی تاخیر توابع ترکیبی یا به‌اختصار ماتریس تاخیر می‌نامند. دقت نمایید که مقدار $N$، یعنی تعداد تقسیمات بازه را در ادامه به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم تا ماتریس عملیاتی تاخیر دارای یک فرم ساده و در عین حال تنک باشد. فرض کنیم

$$\tau(t) = \begin{cases} \tau_1, & T_0 \le t < T_1, \\ \tau_2, & T_1 \le t < T_2, \\ \vdots & \vdots \\ \tau_\kappa, & T_{\kappa-1} \le t \le T_\kappa, \end{cases} \tag{۲۱.۲}$$

که در آن $t_0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{\kappa-1} < T_\kappa = t_f$، و $\tau_i$ برای $i = 1, \dots, \kappa$ ثابت‌هایی مثبت و معلوم‌اند. به‌علاوه فرض کنیم مجموعه‌ی $\mathfrak{A} = \{i : \tau_i \neq 0\}$ غیرتهی و $\tau_i$، برای هر $i = 1, 2, \dots, \kappa$ عددی کسری و نامنفی باشد. همچنین $T_i \in \mathbb{Q}$، به‌ازای $i = 0, 1, \dots, \kappa$، باشد.

با هدف تعیین تعداد تقسیم‌های مورد نیاز، برای حل سیستم‌های تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت، به شیوه‌ی زیر عمل می‌شود. این روش تعیین $N$ در مقاله‌های [۸، ۱۰] معرفی و استفاده‌شده است. در این‌جا، با اندکی تغییر و اصلاح، روش مذکور ارایه می‌شود. $\gamma$ را کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم که شرایط زیر را برآورده کند:

$$\gamma\,\tau_i \in \mathbb{Z}, \qquad \forall i \in \mathfrak{A}, \qquad\qquad \gamma\,(T_j - T_0) \in \mathbb{Z}, \qquad j = 1, \dots, \kappa. \tag{۲۲.۲}$$

فرض کنیم $\mathsf{r} = |\mathfrak{A}|$. اکنون $\lambda$ را به‌عنوان بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد صحیحی که در رابطه‌ی (۲۲.۲) بیان شد، معرفی می‌کنیم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$\lambda = \gcd\,\Big(\gamma\,\tau_1, \gamma\,\tau_2, \dots, \gamma\,\tau_{\mathsf{r}}, \gamma\,(T_1 - T_0), \dots, \gamma\,(T_\kappa - T_0)\Big).$$

در این صورت تعداد تقسیمات دامنه‌ی مساله به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$N = \frac{\gamma}{\lambda}\,(t_f - t_0). \tag{۲۳.۲}$$

به‌منظور استفاده از روش توابع ترکیبی در حل مسایل تاخیری مورد نظر در این مقاله، بازه‌ی $[t_0, t_f]$ به $N$ زیربازه‌ی با فاصله‌ی مساوی، افراز می‌شود. بنابراین زیربازه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$[\,t_0, t_0 + \mathsf{h}\,), [\,t_0 + \mathsf{h}, t_0 + 2\mathsf{h}\,), \;\dots\;, [\,t_0 + (N-1)\mathsf{h}, t_0 + N\mathsf{h}\,],$$

که در آن $\mathsf{h} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{t_f - t_0}{N}$ است. اکنون از معادلات (۲۲.۲)-(۲۳.۲)، اعداد صحیح $k_i$ و $l_j$ به‌دست می‌آیند به طوری که

$$\tau_i = k_i\,\mathsf{h}, \qquad i \in \mathfrak{A}, \qquad\qquad T_j - T_0 = l_j\,\mathsf{h}, \qquad j = 1, \dots, \kappa.$$

در ضمن برای $i \notin \mathfrak{A}$ قرار می‌دهیم $k_i = ۰$. ازاین‌رو، تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت $\tau(t)$ را می‌توان به‌فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\tau(t) = \begin{cases} k_۱\mathsf{h}, & ۰ \leq t - t_۰ < l_۱\mathsf{h}, \\ \vdots & \vdots \\ k_\kappa\mathsf{h}, & l_{\kappa-۱}\mathsf{h} \leq t - t_۰ \leq l_\kappa h. \end{cases}$$

در ادامه از تابع $k(i)$ که آن را تابع انتقال اندیس می‌نامیم و در زیر معرفی شده است، استفاده خواهیم کرد:

$$k(i) = \begin{cases} k_۱, & ۰ < i \leq l_۱, \\ \vdots & \vdots \\ k_\kappa, & l_{\kappa-۱} < i \leq l_\kappa. \end{cases} \tag{۲۴.۲}$$

از طرفی با توجه به تعریف تابع تاخیر و تابع اندیس و هم‌چنین با تقسیم دامنه مساله به $N$ زیربازه، رابطه‌ی زیر برقرار می‌شود:

$$\Phi\Big(t - \tau(t)\Big) = \begin{cases} \Phi(t - k(۱)\mathsf{h}), & t_۰ \leq t < t_۱, \\ \vdots & \vdots \\ \Phi(t - k(N)\mathsf{h}), & t_{N-۱} \leq t < t_N, \end{cases} \tag{۲۵.۲}$$

که در آن به‌ازای $N, \ldots, ۲, ۱ = n$ داریم $t_n = t_۰ + n\,\mathsf{h}$. به‌منظور ساخت ماتریس $\mathcal{D}$، نخست ماتریس‌های $D_n$ به‌ازای $N, \ldots, ۲, ۱ = n$ را به‌صورتی که رابطه‌ی زیر برقرار باشد به‌دست می‌آوریم:

$$\Phi(t - k(n)\mathsf{h}) = D_n\Phi(t), \qquad t_{n-۱} \leq t < t_n.$$

با استفاده از تعریف توابع ترکیبی یعنی رابطه‌ی (۱.۲) نتیجه می‌شود که برای $t_{n-۱} \leq t < t_n$ تنها برخی جملات غیرصفر می‌ماند. در واقع، جملات $\mathsf{T}_{(n-k(n))m}(t - k(n)\mathsf{h})$، به‌ازای $M, \ldots, ۱, ۰ = m$ باقی می‌ماند. از طرفی با توجه به تقسیمات با فاصله‌ی مساوی، رابطه زیر صادق است:

$$\mathsf{T}_{(n-k(n))m}(t - k(n)\mathsf{h}) = \mathsf{T}_{nm}(t), \qquad m = ۰, ۱, \ldots, M.$$

با بسط تمامی مولفه‌های $\Phi(t - k(n)\mathsf{h})$، بر حسب $\Phi(t)$، ماتریس همانی $(M+۱) \times (M+۱)$ را به‌عنوان ضرایب مربوط به بسط نتیجه می‌دهد. بنابراین،

$$D_n = S_n \otimes I_{M+۱}, \qquad n = ۱, ۲, \ldots, N,$$

که در آن $I_{M+۱}$ ماتریس همانی $(M+۱) \times (M+۱)$ و $S_n$ یک ماتریس $N \times N$ است. تنها یک درایه‌ی $S_n$ غیرصفر و برابر ۱ است. این درایه‌ی غیرصفر در محل سطر$(n - k(n))$ام و ستون $n$ام قرار دارد. اگر $n - k(n) \leq ۰$ باشد، در این صورت $S_n$ یک ماتریس صفر از مرتبه‌ی $N \times N$ خواهد بود. بنابراین اگر $\Phi\Big(t - \tau(t)\Big)$ بر حسب توابع ترکیبی $\Phi(t)$ بسط داده شود، ماتریس تاخیر به‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\mathcal{D} = D_۱ + D_۲ + \ldots + D_N. \tag{۲۶.۲}$$

باید توجه داشت که نحوه‌ی انتخاب مقدار $N$، به‌شیوه‌ای انجام گرفت تا علاوه بر مینیمم‌شدن تعداد زیربازه‌های مورد نیاز، ماتریس تاخیر $\mathcal{D}$ فرم ساده و تنک داشته باشد. این فرم ساده و تنک در مثال‌هایی که در ادامه خواهد آمد، به‌خوبی مشاهده می‌گردد.

## ۳ سیستم‌های تاخیری خطی با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت

مساله‌ی کنترل بهینه مربعی خطی زیر را در نظر می‌گیریم. تابعی ارزش (cost functional)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \frac{۱}{۲}\,\mathbf{x}^{\mathsf{t}}(t_f)\,S\,\mathbf{x}(t_f) + \frac{۱}{۲}\int_{t_۰}^{t_f} \Big[&\mathbf{x}^{\mathsf{t}}(t)\,Q(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathsf{t}}(t)\,R(t)\,\mathbf{u}(t) \\ &+\mathbf{x}^{\mathsf{t}}(t-\tau(t))\,E(t)\,\mathbf{x}(t-\tau(t)) + \mathbf{u}^{\mathsf{t}}(t-\tau(t))\,F(t)\,\mathbf{u}(t-\tau(t))\Big]dt, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

را مشروط به دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری خطی زیر مینیمم می‌کنیم:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + B(t)\,\mathbf{x}(t-\tau(t)) + C(t)\,\mathbf{u}(t) + D(t)\,\mathbf{u}(t-\tau(t)), \quad t \in (t_۰, t_f), \tag{۲.۳}$$

$$\mathbf{x}(t) = \psi^{\mathbf{x}}(t), \qquad t_۰ - \alpha \leq t \leq t_۰, \tag{۳.۳}$$

$$\mathbf{u}(t) = \psi^{\mathbf{u}}(t), \qquad t_۰ - \alpha \leq t < t_۰, \tag{۴.۳}$$

که در آن $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{\mathsf{p}}$، $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{\mathsf{q}}$ و ماتریس‌های $A(t)$ و $B(t)$ ماتریس‌هایی معلوم با ابعاد $\mathsf{p} \times \mathsf{p}$ و ماتریس‌های $C(t)$ و $D(t)$ ماتریس‌هایی مشخص‌شده با ابعاد $\mathsf{p} \times \mathsf{q}$ است. تابع تاخیر $\tau(t)$ یک تابع قطعه‌ای‌ثابت تعریف‌شده در دامنه مساله است که فرم کلی آن در رابطه‌ی (۲۱.۲) داده شده است و $\alpha = \max\{\tau_۱, \ldots, \tau_\kappa\}$ در نظر گرفته شده است. ماتریس‌های $S$ و $Q(t)$ ماتریس‌های مثبت نیم‌معین با ابعاد $\mathsf{p} \times \mathsf{p}$ و $R(t)$ ماتریس مثبت معین با ابعاد $\mathsf{q} \times \mathsf{q}$ است. در این‌جا، هدف یافتن کنترل بهینه $\mathbf{u}(t)$ و مسیر بهینه‌ی متناظر آن $\mathbf{x}(t)$، برای $t \in [t_۰, t_f]$ است به‌گونه‌ای که در معادلات (۲.۳)-(۴.۳) صدق کرده و تابعی ارزش $\mathcal{J}$ را حداقل کند.

## ۱.۳ گسسته‌سازی مساله به‌کمک توابع ترکیبی چبیشف

به‌منظور ارایه‌ی روش تقریبی پیش‌نهادی، ابتدا دامنه‌ی اصلی مساله، یعنی $[t_۰, t_f]$ را به $N$ زیربازه‌ی با فاصله‌ی مساوی تقسیم می‌کنیم. برای یافتن $N$ مناسب از رابطه‌ی (۲۳.۲) کمک می‌گیریم. بعد از مشخص شدن $N$ و تعیین تعداد مورد نیاز توابع ترکیبی چبیشف، یعنی $M$، مساله به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود. ابتدا از طرفین معادله‌ی (۲.۳) در فاصله‌ی $[t_۰, t)$ انتگرال گرفته، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_۰) = \int_{t_۰}^{t} \Big( A(s)\,\mathbf{x}(s) + B(s)\,\mathbf{x}(s-\tau(s)) + C(s)\,\mathbf{u}(s) + D(s)\,\mathbf{u}(s-\tau(s)) \Big) ds. \tag{۵.۳}$$

فرض کنیم

$$\mathbf{x}(t) = [\,x_۱(t), x_۲(t), \ldots, x_{\mathsf{p}}(t)\,]^{\mathsf{t}}, \tag{۶.۳}$$

$$\mathbf{u}(t) = [\,u_۱(t), u_۲(t), \ldots, u_{\mathsf{q}}(t)\,]^{\mathsf{t}}. \tag{۷.۳}$$

با استفاده از بسط ترکیبی چبیشف، هر یک از $x_i(t)$ها را، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, \mathsf{p}$ و همچنین هر کدام از $u_j(t)$ها را، به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, \mathsf{q}$ می‌توان بر حسب توابع ترکیبی چبیشف به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\mathfrak{P}_M^N(x_i)(t) = \sum_{n=۱}^{N} \sum_{m=۰}^{M} \hat{x}_{inm}\, \mathsf{T}_{nm}(t) = \Phi^{\mathsf{t}}(t)\, X_i,$$

$$\mathfrak{P}_M^N(u_j)(t) = \sum_{n=۱}^{N} \sum_{m=۰}^{M} \hat{u}_{jnm}\, \mathsf{T}_{nm}(t) = \Phi^{\mathsf{t}}(t)\, U_j,$$

که در آن $\Phi(t)$ بردار پایه‌ی ترکیبی چبیشف و $\mathsf{T}_{nm}(t)$ مولفه‌های آن است که در رابطه‌ی (۱.۲) معرفی شد. در این‌جا ضرایب بسط متغیرهای وضعیت و متغیرهای کنترل مجهول‌اند و هدف به‌دست آوردن مقادیر مجهول $X_i$ به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, \mathsf{p}$ و $U_j$ به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, \mathsf{q}$ است. معادلات (۶.۳) و (۷.۳) را می‌توان به‌فرم زیر نمایش داد:

$$\mathfrak{P}_M^N(\mathbf{x})(t) = (I_{\mathsf{p}} \otimes \Phi^{\mathsf{t}}(t))X, \tag{۸.۳}$$

$$\mathfrak{P}_M^N(\mathbf{u})(t) = (I_{\mathsf{q}} \otimes \Phi^{\mathsf{t}}(t))U, \tag{۹.۳}$$

که در آن $I_{\mathsf{p}}$ و $I_{\mathsf{q}}$ ماتریس‌های همانی به‌ترتیب $\mathsf{p} \times \mathsf{p}$ و $\mathsf{q} \times \mathsf{q}$ بُعدی‌اند و $\otimes$ حاصل‌ضرب کرونکر [۶] را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که $X$ و $U$ بردارهایی به‌ترتیب $۱ \times \mathsf{p}N(M+۱)$ و $۱ \times \mathsf{q}N(M+۱)$ بُعدی‌اند که به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$X = [\,X_۱^{\mathsf{t}}, X_۲^{\mathsf{t}}, \ldots, X_{\mathsf{p}}^{\mathsf{t}}\,]^{\mathsf{t}}, \qquad U = [\,U_۱^{\mathsf{t}}, U_۲^{\mathsf{t}}, \ldots, U_{\mathsf{q}}^{\mathsf{t}}\,]^{\mathsf{t}}.$$

همچنین، به بسط توابع اولیه $\psi^{\mathbf{x}}(t-\tau(t))$ و $\psi^{\mathbf{u}}(t-\tau(t))$ نیاز خواهد شد. مجدداً چنانچه هر یک از مولفه‌های تابع اولیه بر حسب توابع ترکیبی چبیشف بسط داده شود، آنگاه نتیجه می‌شود:

$$\mathfrak{P}_M^N\big(\psi^{\mathbf{x}}(t-\tau(t))\big) = (I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\mathsf{R}, \tag{۱۰.۳}$$
$$\mathfrak{P}_M^N\big(\psi^{\mathbf{u}}(t-\tau(t))\big) = (I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\mathsf{S}, \tag{۱۱.۳}$$

که در آن $\mathsf{R}$ از بعد $\mathsf{p}N(M+۱)\times ۱$ و $\mathsf{S}$ از بعد $\mathsf{q}N(M+۱)\times ۱$ است و ساختاری به‌فرم $\mathsf{R}=[\,\mathsf{R}_۱^{\mathsf{t}},\mathsf{R}_۲^{\mathsf{t}},\dots,\mathsf{R}_{\mathsf{p}}^{\mathsf{t}}\,]^{\mathsf{t}}$ و $\mathsf{S}=[\,\mathsf{S}_۱^{\mathsf{t}},\mathsf{S}_۲^{\mathsf{t}},\dots,\mathsf{S}_{\mathsf{q}}^{\mathsf{t}}\,]^{\mathsf{t}}$ دارند. به طور مشابه با بسط درایه‌های ماتریس‌های ضریب در سیستم تاخیری (۲.۳) بر حسب توابع ترکیبی چبیشف روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_M^N(A)(t) &= A^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi(t)), \quad \mathfrak{P}_M^N(B)(t)=B^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi(t)),\\ \mathfrak{P}_M^N(C)(t) &= C^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t)), \quad \mathfrak{P}_M^N(D)(t)=D^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t)),\end{aligned}$$

که در آن ماتریس‌های $A$ و $B$ ماتریس‌هایی با درایه‌های ثابت و با ابعاد $\mathsf{p}\times\mathsf{p}N(M+۱)$ و ماتریس‌های $C$ و $D$ نیز ماتریس‌هایی ثابت $\mathsf{p}\times\mathsf{q}N(M+۱)$ بُعدی‌اند. همچنین، هر یک از بردارهای تاخیر $\mathbf{x}(t-\tau(t))$ و $\mathbf{u}(t-\tau(t))$ را می‌توان برحسب توابع ترکیبی به‌فرم زیر بسط داد:

$$\mathfrak{P}_M^N\big(\mathbf{x}(t-\tau(t))\big) = (I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\Big(\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,X\Big), \quad t_۰\le t\le t_f, \tag{۱۲.۳}$$
$$\mathfrak{P}_M^N\big(\mathbf{u}(t-\tau(t))\big) = (I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\Big(\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,U\Big), \quad t_۰\le t\le t_f, \tag{۱۳.۳}$$

که در آن $\mathcal{D}$ ماتریس عملیاتی تاخیر مربوط به تابع تاخیر $\tau(t)$ است. از طرف دیگر، با توجه به ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب توابع ترکیبی چبیشف، جملات دینامیک سیستم را می‌توان به‌فرم زیر نمایش داد:

$$\mathfrak{P}_M^N\big(A(t)\,\mathbf{x}(t)\big) = A^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi(t))(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,X=(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\tilde{A}^{\mathsf{t}}X, \tag{۱۴.۳}$$
$$\mathfrak{P}_M^N\big(C(t)\,\mathbf{u}(t)\big) = C^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t))(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,U=(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\tilde{C}^{\mathsf{t}}U, \tag{۱۵.۳}$$

که در آن $\tilde{A}$ و $\tilde{C}$ را می‌توان به طور مشابه با ساختار ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب توابع ترکیبی چبیشف محاسبه کرد. به طور مشابه در خصوص جملات تاخیر در دینامیک سیستم، روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_M^N\big(B(t)\,\mathbf{x}(t-\tau(t))\big) &= B^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi(t))(I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,[\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})X]\\ &= (I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\tilde{B}^{\mathsf{t}}\,[\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,X]\,,\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$
$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_M^N\big(D(t)\,\mathbf{u}(t-\tau(t))\big) &= D^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t))(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,[\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})U]\\ &= (I_{\mathsf{p}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t))\,\tilde{D}^{\mathsf{t}}\,[\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,U]\,.\end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

که در آن، مجدداً $\tilde{B}$ و $\tilde{D}$ را می‌توان به طور مشابه با ساختار ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب توابع ترکیبی چبیشف محاسبه کرد. در ضمن ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ از بعد $\mathsf{p}N(M+۱)\times\mathsf{p}N(M+۱)$ و ماتریس‌های $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ ماتریس‌هایی $\mathsf{p}N(M+۱)\times\mathsf{q}N(M+۱)$ بُعدی‌اند. از طرفی با توجه به شرایط مرزی $\mathbf{x}(t)$ روی نقطه‌ی $t_۰$ نتیجه می‌شود:

$$\mathfrak{P}_M^N\big(\psi_i^{\mathbf{x}}(t_۰)\big)=\Phi^{\mathsf{t}}(t)X_{۰_i}.$$

حال قرار می‌دهیم $X_۰=[X_{۰_۱}^{\mathsf{t}},X_{۰_۲}^{\mathsf{t}},\dots,X_{۰_{\mathsf{p}}}^{\mathsf{t}}]^{\mathsf{t}}$. با جای‌گذاری روابط به‌دست‌آمده، در معادله انتگرالی (۵.۳) و با توجه به استقلال خطی مولفه‌های بردار پایه $\Phi(t)$ دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}X-X_۰ &= (I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{P}^{\mathsf{t}})\Big(\tilde{A}^{\mathsf{t}}X+\tilde{B}^{\mathsf{t}}\,[\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,X]+\tilde{C}^{\mathsf{t}}U\\ &\quad +\tilde{D}^{\mathsf{t}}\,[\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,U]\Big).\end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

که در آن، ماتریس $\mathcal{P}$ ماتریس عملیاتی انتگرال توابع ترکیبی چبیشف است که در رابطه‌ی (۱۴.۲) معرفی شد.

اکنون تابعی معیار $\mathcal{J}$ را به‌کمک توابع ترکیبی چبیشف تقریب می‌زنیم. به این منظور از روش تقریب انتگرال ارایه‌شده در مراجع [۷، ۹] استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} \;\simeq\; & \mathcal{J}(X,U) = \frac{۱}{۲}\, X^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{p}} \otimes \Phi(t_f))\, S\, (I_{\mathsf{p}} \otimes \Phi^{\mathsf{t}}(t_f))X \\ & + \frac{t_f}{۲N}\sum_{n=۱}^{N}\left(G_{n۰} - \sum_{m=۲}^{M-۱}\frac{۱+(-۱)^m}{m^۲-۱}\,G_{nm} - \frac{۱+(-۱)^M}{۲(M^۲-۱)}\,G_{nM}\right). \qquad (۱۹.۳)\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} G_{nm} \;=\; & \frac{۲}{M}\sum_{j=۰}^{M}\bar{\mathfrak{c}}_j \cos\left(\frac{mj\pi}{M}\right)\Big[X^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t_{nj}))Q(t_{nj})(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t_{nj}))X \\ & + U^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t_{nj}))R(t_{nj})(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t_{nj}))U \\ & + (\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,X)^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t_{nj}))E(t_{nj})(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t_{nj}))(\mathsf{R}+(I_{\mathsf{p}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,X) \\ & + (\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,U)^{\mathsf{t}}(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi(t_{nj}))F(t_{nj})(I_{\mathsf{q}}\otimes\Phi^{\mathsf{t}}(t_{nj}))(\mathsf{S}+(I_{\mathsf{q}}\otimes\mathcal{D}^{\mathsf{t}})\,U),\end{aligned}$$

و نقاط $t_{nj}$ به‌ازای $n=۱,۲,\ldots,N$ و $j=۰,۱,\ldots,M$ عبارت‌اند از

$$t_{nj} = t_۰ + \frac{t_f - t_۰}{۲N}\Big(\cos\big(\frac{m\pi}{M}\big) + ۲n - ۱\Big).$$

بنابراین مساله‌ی کنترل بهینه‌ی (۱.۳)-(۴.۳) به یک مساله بهینه‌سازی به‌فرم زیر تبدیل می‌شود. بردارهای مجهول $X$ و $U$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $\mathcal{J}(X,U)$ مینیمم شود و قیود داده شده در (۱۸.۳) برقرار گردند. این مساله را، که یک مساله‌ی بهینه‌سازی پارامتری نام دارد، می‌توان توسط الگوریتم‌های موجود از قبیل روش ضرایب لاگرانژ یا روش SQP حل کرد.

## ۲.۳ شرایط لازم بهینگی سیستم‌های تاخیری خطی

در این‌جا به‌عنوان یک حالت خاص، شرایط لازم بهینگی برای سیستم‌های کنترل تاخیری خطی به‌فرم بیان‌شده در روابط (۱.۳)-(۴.۳) ارایه خواهد شد. با توجه به گزاره‌های به‌دست‌آمده در مرجع [۸] در خصوص شرایط لازم بهینگی مسایل تاخیری با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت، نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

**قضیه ۱.۳.** فرض کنیم $\mathbf{u}^*(t)$ کنترل بهینه‌ی محلی برای مساله کنترل بهینه‌ی تاخیری خطی (۱.۳)-(۴.۳) باشد. در این صورت تابع الحاقی $\lambda^*(t)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که شرایط زیر به‌ازای $t\in[t_۰,t_f]$ برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t)\,\mathbf{x}^*(t) + B(t)\,\mathbf{x}^*(t-\tau(t)) + C(t)\,\mathbf{u}^*(t) + D(t)\,\mathbf{u}^*(t-\tau(t)), \quad t_۰ < t < t_f,\\
&\mathbf{x}^*(t) = \psi^{\mathbf{x}}(t), \qquad t_۰-\alpha \le t \le t_۰,\\
&\mathbf{u}^*(t) = \psi^{\mathbf{u}}(t), \qquad t_۰-\alpha \le t < t_۰,\\
&\dot{\lambda}^*(t) = -Q(t)\,\mathbf{x}^*(t) - A^{\mathsf{t}}(t)\,\lambda^*(t)\\
&\qquad - \sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},\,T_i)}(t+\tau_i)\Big[E(t+\tau_i)\,\mathbf{x}^*(t) + B^{\mathsf{t}}(t+\tau_i)\,\lambda^*(t+\tau_i)\Big],\\
&\lambda^*(t_f) = S\,\mathbf{x}^*(t_f),\\
&۰ = R(t)\,\mathbf{u}^*(t) + C^{\mathsf{t}}(t)\,\lambda^*(t)\\
&\qquad + \sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},T_i)}(t+\tau_i)\Big[F(t+\tau_i)\,\mathbf{u}^*(t) + D^{\mathsf{t}}(t+\tau_i)\,\lambda^*(t+\tau_i)\Big].
\end{aligned}$$

اثبات. ابتدا تابع هامیلتونی مربوط به مساله (۱.۳)–(۳.۳) را بر اساس مرجع [۸] به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathcal{H}\Big(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{v}(t)),\lambda(t),t\Big) = \frac{۱}{۲}\Big[\mathbf{x}^{\mathrm{t}}(t)\,Q(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^{\mathrm{t}}(t)\,R(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{y}^{\mathrm{t}}(t)\,E(t)\,\mathbf{y}(t)$$
$$+\mathbf{v}^{\mathrm{t}}(t)\,F(t)\,\mathbf{v}(t)\Big] + \lambda^{T}(t)\Big[A(t)\,\mathbf{x}^*(t) + B(t)\,\mathbf{y}^*(t) + C(t)\,\mathbf{u}^*(t) + D(t)\,\mathbf{v}^*(t)\Big],$$

که در آن $\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t-\tau(t))$ و $\mathbf{v}(t)=\mathbf{u}(t-\tau(t))$. در ادامه‌ی اثبات، به‌منظور راحتی در نگارش از نماد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathcal{H}^*[t] = \mathcal{H}\Big(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{y}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{v}^*(t)),\lambda^*(t),t\Big).$$

اکنون شرایط لازم بهینگی عبارت‌اند از:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\lambda}[t], \tag{۲۰.۳}$$
$$\mathbf{x}^*(t) = \psi^{\mathbf{x}}(t), \qquad t_{۰}-\alpha\le t\le t_{۰}, \tag{۲۱.۳}$$
$$\mathbf{u}^*(t) = \psi^{\mathbf{u}}(t), \qquad t_{۰}-\alpha\le t< t_{۰}, \tag{۲۲.۳}$$
$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\mathbf{x}}[t] - \sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},\,T_i)}(t+\tau_i)\frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\mathbf{y}}[t+\tau_i], \tag{۲۳.۳}$$
$$\lambda^*(t_f) = S\,\mathbf{x}^*(t_f), \tag{۲۴.۳}$$
$$۰ = \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\mathbf{u}}[t] + \sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},\,T_i)}(t+\tau_i)\frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\mathbf{v}}[t+\tau_i]. \tag{۲۵.۳}$$

با توجه به تعریف تابع هامیلتونی، از معادله‌ی (۲۰.۳) نتیجه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial\mathcal{H}^*}{\partial\lambda}[t] = A(t)\,\mathbf{x}^*(t) + B(t)\,\mathbf{y}^*(t) + C(t)\,\mathbf{u}^*(t) + D(t)\,\mathbf{v}^*(t),$$

که همان شرط اول بیان شده در صورت قضیه است. همچنین برای معادلات (۲۳.۳) و (۲۵.۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^*(t) &= -Q(t)\,\mathbf{x}^*(t) - A^{\mathrm{t}}(t)\,\lambda^*(t)\\ &\quad -\sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},\,T_i)}(t+\tau_i)\Big[E(t+\tau_i)\,\mathbf{y}^*(t+\tau_i) + B^{\mathrm{t}}(t+\tau_i)\,\lambda^*(t+\tau_i)\Big],\\ ۰ &= R(t)\,\mathbf{u}^*(t) + C^{\mathrm{t}}(t)\,\lambda^*(t)\\ &\quad +\sum_{i=۱}^{\kappa}\chi_{[T_{i-۱},T_i)}(t+\tau_i)\Big[F(t+\tau_i)\,\mathbf{v}^*(t) + D^{\mathrm{t}}(t+\tau_i)\,\lambda^*(t+\tau_i)\Big].\end{aligned}$$

اکنون با جای‌گذاری تعریف $\mathbf{y}$ و $\mathbf{v}$ در روابط فوق، معادلات شرایط لازم به‌دست می‌آیند و اثبات تمام می‌شود. □

از این شرایط لازم بهینگی به‌عنوان معیاری برای اعتبار بخشیدن به نتایج تقریبی به‌دست‌آمده توسط روش توابع ترکیبی استفاده خواهد شد.

# ۴ مثال‌های کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری خطی

در این بخش دو مثال از روش توابع ترکیبی برای حل تقریبی کنترل بهینه سیستم‌های تاخیری خطی با تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت ارایه می‌شود.

## ۱.۴ مثال ۱

مساله کنترل بهینه تاخیری خطی زیر را در نظر می‌گیریم. مینیمم کنیم

$$\mathcal{J} = \frac{۳}{۲}x^{۲}(۱) + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} u^{۲}(t)\,dt,$$

مشروط به سیستم تاخیری زیر:

$$\dot{x}(t) = x(t-\tau(t)) + u(t), \qquad ۰ < t < ۱, \tag{۱.۴}$$
$$x(t) = ۱, \qquad ۰ \geq t, \tag{۲.۴}$$

که در آن تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\tau(t) = \begin{cases} ۰/۲, & ۰ \leq t < ۰/۴, \\ ۰/۵, & ۰/۴ \leq t \leq ۱. \end{cases}$$

در این مساله بر مبنای تابع تاخیر قطعه‌ای ثابت داده‌شده داریم $\tau_۱ = ۰/۲$، $\tau_۲ = ۰/۵$، $T_۱ - T_۰ = ۰/۴$ و $T_۲ - T_۰ = ۱$. بنابراین کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت که در شرایط (۲۲.۲) صدق کند $\gamma = ۱۰$ است و داریم $\lambda = \gcd(۲,۵,۴,۱۰) = ۱$ و با توجه به رابطه‌ی (۲۳.۲)، مقدار $N = ۱۰$ به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن مقدار $M = ۵$، بر اساس روش توابع ترکیبی چبیشف، مساله‌ی کنترل بهینه‌ی فوق به مساله‌ی بهینه‌سازی زیر تبدیل می‌شود: مینیمم کنیم

$$\mathcal{J} = \frac{۳}{۲}X^{\mathsf{t}}\Phi(۱)\Phi^{\mathsf{t}}(۱)X + ۰/۰۵\sum_{n=۱}^{۱۰}\Big(G_{n۰} - \frac{۲}{۳}G_{n۲} - \frac{۲}{۱۵}G_{n۴}\Big),$$

مشروط به

$$X - X_۰ = \mathcal{P}^{\mathsf{t}}\Big(\mathsf{R} + \mathcal{D}^{\mathsf{t}}X + U\Big),$$

که در آن $G_{nm}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$G_{nm} = ۰/۴\sum_{j=۰}^{۵}\bar{\mathfrak{c}}_j\cos\Big(\frac{mj\pi}{۵}\Big)U^{\mathsf{t}}\Phi(t_{nj})\Phi^{\mathsf{t}}(t_{nj})U,$$

و به ازای $N = ۱۰$، $M = ۵$ و $t_f = ۱$ بردار $\Phi(t)$ در (۱۰.۲)، ماتریس عملیاتی انتگرال در (۱۴.۲) و ماتریس عملیاتی تاخیر در (۲۶.۲) معرفی شده است. همچنین بردار $\mathsf{R}$ با توجه به (۲.۴) و رابطه‌ی (۱۰.۳) محاسبه می‌شود. با حل مساله‌ی بهینه‌سازی فوق و تعیین بردارهای مجهول $X$ و $U$، متغیر کنترل بهینه $u(t)$ و وضعیت بهینه‌ی $x(t)$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$x(t) = X^{\mathsf{t}}\Phi(t), \qquad u(t) = U^{\mathsf{t}}\Phi(t).$$

در این مساله، جواب تحلیلی کنترل و وضعیت بهینه به‌دست آمد. در ادامه به‌منظور یافتن جواب تحلیلی این مساله، شرایط لازم بهینگی به‌کار گرفته شده است. از قضیه ۱.۳ شرایط لازم بهینگی به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\begin{cases} \lambda^*(t+۰/۲) + \lambda^*(t+۰/۵), & ۰ \leq t < ۰/۲, \\ \lambda^*(t+۰/۵), & ۰/۲ \leq t < ۰/۵, \\ ۰, & ۰/۵ \leq t < ۱. \end{cases}$$

از طرفی $\lambda^*(۱) = ۳x^*(۱)$ و $u^*(t) + \lambda^*(t) = ۰$. با حذف متغیر الحاقی نتیجه می‌شود: $u^*(۱) + ۳x^*(۱) = ۰$ و

$$\dot{u}^*(t) = -\begin{cases} u^*(t+۰/۲) + u^*(t+۰/۵), & ۰ \leq t < ۰/۲, \\ u^*(t+۰/۵), & ۰/۲ \leq t < ۰/۵, \\ ۰, & ۰/۵ \leq t < ۱. \end{cases} \tag{۳.۴}$$

از حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی (۱.۴)–(۳.۴) جواب‌های دقیق مساله به‌فرم زیر قابل حصول‌اند:

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{805625}{12717712}\,t^2 + \frac{3705875}{12717712}\,t - \frac{934525}{423904}, & 0 \le t < 0.2, \\ \frac{805625}{635856}\,t - \frac{805625}{423904}, & 0.2 \le t < 0.5, \\ -\frac{805625}{635856}, & 0.5 \le t \le 1. \end{cases}$$

و

$$x^*(t) = \begin{cases} -\frac{805625}{3815136}\,t^3 + \frac{3705875}{25434424}\,t^2 - \frac{510621}{423904}\,t + 1, & 0 \le t < 0.2, \\ -\frac{805625}{152605440}\,t^4 + \frac{4028125}{7630272}\,t^3 - \frac{694013}{25434424}\,t^2 & \\ -\frac{22875737}{381513600}\,t + \frac{359529097}{381513600}, & 0.2 \le t < 0.4, \\ \frac{805625}{12717712}\,t^2 - \frac{381721}{4239040}\,t + \frac{362493797}{381513600}, & 0.4 \le t < 0.5, \\ -\frac{805625}{152605440}\,t^4 + \frac{1127875}{1907568}\,t^3 - \frac{4781609}{3391232}\,t^2 & \\ +\frac{11078347}{152605440}\,t + \frac{3523304827}{6104217600}, & 0.5 \le t < 0.7, \\ -\frac{161125}{152605440}\,t^5 + \frac{805625}{5086848}\,t^4 - \frac{1293103}{3391232}\,t^3 & \\ +\frac{1823479}{381513600}\,t^2 - \frac{990836413}{6104217600}\,t + \frac{78269136470}{101736960000}, & 0.7 \le t < 0.9, \\ \frac{805625}{3815136}\,t^3 - \frac{487697}{635856}\,t^2 + \frac{55657561}{190756800}\,t + \frac{3357251}{4891200}, & 0.9 \le t \le 1, \end{cases}$$

لازم به‌ذکر است که با حل مساله اصلی به‌روش مستقیم با کمک توابع ترکیبی چبیشف، جواب دقیق به‌ازای $N = 10$ و $M = 5$ حاصل شد.

## ۲.۴ مثال ۲

مساله کنترل بهینه تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم. تعیین کنیم مینیمم تابعی ارزش

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}x^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2(t) + u^2(t))dt,$$

مشروط به سیستم تاخیری با دو تابع تاخیر قطعه‌ای‌ثابت زیر:

$$\dot{x}(t) = \sin(t)x(t) + t\cos(t)x(t - \tau(t)) - u(t), \quad 0 < t < 1, \qquad (4.4)$$

$$x(t) = t^2 + 1, \quad 0 \ge t, \qquad (5.4)$$

که در آن تابع تاخیر $\tau(t)$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$\tau(t) = \begin{cases} 0.2, & 0 \le t < 0.3, \\ 0.1, & 0.3 \le t < 0.5, \\ 0.7, & 0.5 \le t < 0.6, \\ 0.3, & 0.6 \le t \le 1, \end{cases} \qquad (6.4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۳.۲) مقدار ۱۰ برای $N$ اختیار می‌شود. پس از آن که مقدار $M$ تعیین شد، مساله‌ی کنترل بهینه بر اساس مطالب بخش ۱.۳ به یک مساله‌ی بهینه‌سازی تبدیل می‌شود و با حل آن کنترل و وضعیت بهینه‌ی مساله به‌صورت تقریبی به‌دست می‌آیند.

در جدول ۱ مقدار بهینه تابعی عمل‌کرد به‌ازای $N = 10$ و مقادیر مختلف $M$ گزارش شده است. همچنین به‌منظور تایید نتایج تقریبی به‌دست‌آمده، شرایط لازم بهینگی برای این مساله بررسی می‌شود. با توجه به تابع تاخیر داده‌شده، از قضیه ۱.۳ نتیجه می‌شود $u^*(t) - \lambda^*(t) = 0$. با حذف متغیر الحاقی $\lambda^*(t)$ شرایط لازم بهینگی برحسب $x$ و $u$ بیان خواهد شد. داریم:

$$\dot{u}^*(t) = \begin{cases} -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t) - (t+0.2)\cos(t+0.2)\,u^*(t+0.2), & 0 \le t < 0.1, \\ -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t), & 0.1 \le t < 0.2, \\ -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t) - (t+0.1)\cos(t+0.1)\,u^*(t+0.1), & 0.2 \le t < 0.3, \\ -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t) - ((t+0.1)\cos(t+0.1)\,u^*(t+0.1) & \\ +(t+0.3)\cos(t+0.3)\,u^*(t+0.3)), & 0.3 \le t < 0.4, \\ -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t) - (t+0.3)\cos(t+0.3)\,u^*(t+0.3), & 0.4 \le t < 0.7, \\ -x^*(t) - \sin(t)\,u^*(t), & 0.7 \le t < 1. \end{cases}$$

خطاهای $E_1$، $E_2$ و $E_3$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \max\{\,|\,\dot{x}(t)-\sin(t)\,x(t)-t\cos(t)\,x(t-\tau(t))+u(t)\,|:\ 0\le t\le 1,\,\},\\
E_2 &= \max\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\},\\
E_3 &= |\,u(1)-x(1)\,|,
\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
e_1 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t)-(t+0/2)\cos(t+0/2)\,u(t+0/2))\,|:\\
&\qquad 0\le t<0/1\,\},\\
e_2 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t))\,|:\ 0/1\le t<0/2\,\},\\
e_3 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t)-(t+0/1)\cos(t+0/1)\,u(t+0/1))\,|:\\
&\qquad 0/2\le t<0/3\},\\
e_4 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t)-((t+0/1)\cos(t+0/1)\,u(t+0/1)\\
&\qquad +(t+0/3)\cos(t+0/3)\,u(t+0/3)))\,|:\ 0/3\le t<0/4\},\\
e_5 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t)-(t+0/3)\cos(t+0/3)\,u(t+0/3))\,|:\\
&\qquad 0/4\le t<0/7\},\\
e_6 &= \max\{\,|\,\dot{u}(t)-(-x(t)-\sin(t)\,u(t))\,|:\ 0/7\le t\le 1\,\}.
\end{aligned}$$

خطاهای $E_1$، $E_2$ و $E_3$ مربوط به شرایط لازم بهینگی برای این مساله در جدول ۱ ارایه گردیده است. نتایج گزارش‌شده در جدول ۱ نشان از کارآمدی روش ترکیبی چبیشف و انطباق خوب با شرایط لازم بهینگی دارد. همچنین به لحاظ زمان اجرا و دقت نسبت به روش تفاضلات متناهی چبیشف [۷، ۹] بسیار بهتر عمل کرده است و اگرچه نسبت به روش ترکیبی بر پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر از دقت یکسانی برخوردارند اما زمان اجرای روش پیش‌نهادی تقریباً نصف زمان اجرای روش [۸] است.

| روش | زمان(ثانیه) | $\mathcal{J}$ | $E_3$ | $E_2$ | $E_1$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| روش مرجع [۷، ۹] | ۳.۵۳ | ۰/۸۷۱۲۲۶۷۴۵۵۶۷ | – | – | – | ۶ |
| روش مرجع [۸] | ۱۵.۲۴ | ۰/۸۷۱۲۲۶۷۴۵۵۵۸۴۸۵۴ | – | – | – | ۶ |
| روش پیش‌نهادی | | | | | | |
| | ۱.۷۲ | ۰/۸۷۱۲۲۶۷۴۹ | $2/2e-04$ | $7/4e-03$ | $1/4e-03$ | ۲ |
| | ۳.۹۴ | ۰/۸۷۱۲۲۶۷۴۵۵۵۸۴۸۵۶ | $8/9e-08$ | $5/9e-06$ | $3/2e-07$ | ۴ |
| | ۷.۰۱ | ۰/۸۷۱۲۲۶۷۴۵۵۵۸۴۸۵۱۷ | $2/3e-12$ | $6/2e-10$ | $1/6e-10$ | ۶ |

جدول ۱: مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده برای مثال ۲.۴ با روش‌های ترکیبی مختلف به‌ازای $N=10$.

## تشکر و قدردانی

نویسنده‌ی مقاله بر خود لازم می‌داند از داوران محترم که پیش‌نهادهای سازنده و موثری در راستای بهبود این اثر ارائه کردند، تشکر و قدردانی نماید.

## فهرست منابع

[1] Betts J. T., *Survey of numerical methods for trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21 (1998), 193–207.

[2] Canuto C. Hussaini M. Y. Quarteroni A., and Zang T. A., *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Scientific Computation, Berlin: Springer, 2006.

[3] Chen W. L., and Jeng B. S., *Analysis of piecewise constant delay systems via block-pulse functions*. International Journal of Systems Science, 12 (1981), 625–633.

[4] Chen W.-L., and Meng C.-H., *A general procedure of solving the linear delay system via block pulse functions*. Computers and Electrical Engineering, 9(3-4) (1982), 153–166.

[5] Erneux T., *Applied Delay Differential Equations*. vol.3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2009.

[6] Lancaster P., *Theory of Matrices*. New York, Academic Press, 1969.

[7] Marzban H. R., and Hoseini S. M., *Solution of linear optimal control problems with time delay using a composite Chebyshev finite difference method*. Optimal Control Applications and Methods, 34 (2013), 253–274.

[8] Marzban H. R., and Hoseini S. M., *Numerical treatment of non-linear optimal control problems involving piecewise constant delay*. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 33 (2016), 1103–1134.

[9] Marzban H. R., and Hoseini S. M., *An efficient discretization scheme for solving nonlinear optimal control problems with multiple time delays*. Optimal Control Applications and Methods, 37 (2016), 682–707.

[10] Marzban H. R., and Shahsiah M., *Solution of piecewise constant delay systems using hybrid of block-pulse and Chebyshev polynomials*. Optimal Control Applications and Methods, 32 (2011), 647–659.

[11] Razzaghi M., and Marzban H. R., *Direct method for variational problems via hybrid of block-pulse and Chebyshev functions*. Mathematical Problems in Engineering, 6 (2000), 85–97.

[12] Razzaghi M., and Marzban H. R., *A hybrid domain analysis for systems with delays in state and control*. Mathematical Problems in Engineering, 7 (2001), 337–353.

# Optimal control of linear delay systems involving piecewise constant delay function using hybrid Chebyshev–block pulse method

**Sayyed Mohammad Hoseini** †

Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Ayatollah Boroujerdi University, Boroujerd, Iran

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Received: 2022/1/24 Accepted: 2022/5/6

**Abstract:** In this paper, the optimal control of delay systems with piecewise constant delay function is investigated. Using Chebyshev hybrid functions, an approximate method is proposed to obtain the optimal solution to the control problem of linear delay systems. In order to present an approximate method, integral, product of multiplication and delay operational matrices of the hybrid functions have been introduced and used to solve the problem. The optimal control problem is transformed into an optimization problem with the help of the operational matrices and then solving it, an approximate solution to the original problem is obtained. Efficiency and accuracy of the proposed method are illustrated with two examples of the optimal control problem.

**Keywords**: Optimal control, Delay system, piecewise constant delay, Chebyshev polynomials, hybrid functions.



† Corresponding author.

*E-mail addresses:* sm.hoseini@abru.ac.ir (S.M. Hoseini).