



بررسی عددی یک طرح تفاضلی جدید روی یک شبکه مدرج برای حل معادلات زیر-انتشار کسری زمانی-مکانی با جواب‌های ناهموار

مجتبی فردی^۱، ابراهیم امینی^۲

(^۱) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
(^۲) گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران ایران

دبیر مسئول: علی‌رضا فخارزاده چهرمی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۸/۱۴

چکیده: در این مقاله، یک طرح تفاضلی جدید روی یک شبکه مدرج برای حل مسائل زیر-انتشار کسری زمانی-مکانی ارائه می‌دهیم. در معادلات مذکور مشتقات زمانی از نوع کپوتو با مرتبه‌ی $\gamma \in (0, 1)$ و مشتقات مکانی از نوع ریس با مرتبه‌ی $\alpha \in (1, 2]$ است. پایداری و همگرایی طرح تفاضلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که اساس تئوری روش پیش‌نهادی است. نشان می‌دهیم که طرح تفاضلی جدید بدون قید و شرط پایدار است. همچنین، ثابت می‌کنیم که این طرح تفاضلی با مرتبه‌ی $\min\{2 - \gamma, r\gamma\}$ که $r \geq 1$ در زمان و مرتبه‌ی دو در مکان برای هر $\gamma \in (0, 1)$ و هر $\alpha \in (1, 2]$ همگرا است. در پایان، یک مثال عددی برای نشان دادن کارایی و دقت طرح تفاضلی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مشتق کپوتو، مشتق ریس، معادله‌ی زیر-انتشار، شبکه مدرج.

رده‌بندی ریاضی: 65M12, 65M60, 35R11

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، حسابان کسری (شامل مشتقات کسری و انتگرال‌های کسری) به عنوان ابزاری مفید، برای تحلیل دینامیکی بسیاری از دستگاه‌های پیچیده مورد استفاده قرار گرفته است. محققان برای توسعه مدل‌های ریاضی پیشرفته، به بررسی حسابان کسری می‌پردازند تا دستگاه‌های پیچیده را با دقت تمام پیش‌بینی کنند. مشتقات مرتبه کسری، برای ویژگی غیرموضعی که از ویژگی‌های اساسی دستگاه‌های پیچیده است مورد توجه قرار گرفته است. حسابان کسری، نقش مهمی در مدل‌سازی برخی از پدیده‌های مانند نظریه کنترل و سیستم‌های دینامیکی، مدل‌سازی‌های مالی، انتقال و انتشار غیرعادی، فن‌آوری نانو، گام‌های تصادفی، ویسکوالاستیک و مدل‌سازی‌های بیولوژیکی دارند [۱-۷]. در ادامه نمونه‌هایی از تحقیقات اخیر در حسابان کسری را بیان می‌کنیم.

در [۸] نویسنده ثابت سرعت وابسته به زمان را برای واکنش‌های انتشار-محدود با استفاده از روش عملگرهای دیفرانسیل مرتبه کسری به‌دست

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (M. Fardi) m.fardi@sku.ac.ir

آورده است. در [۹] نویسندگان نشان داده‌اند که با حسابان کسری، می‌توان تعمیمی برای مدل‌های کلاسیک فیزیکی با استفاده از نظریه خطی ویسکوالاستسیته به‌دست آورد. در [۱۰] دیتلم یک مدل کسری را برای شبیه‌سازی شیوع تب دانگ در سیستم‌های بیولوژیکی پیش‌نهاد کرد. در [۱۱] وینت یک روش جای‌گزین مبتنی بر حسابان کسری، برای توصیف مشخصه‌های جنبشی دسته‌ای ارائه نموده است. در [۱۲] نویسندگان با استفاده از حسابان کسری، یک تحلیل روی مدل‌های سه‌فازی تاخیری ارائه داده‌اند. در [۱۳] نویسندگان معادله‌ی کسری آمبرتوسومیان را با استفاده از مشتق کسری ریمان-لیوویل تحلیل کرده‌اند. در [۱۴] نویسندگان یک رابطه بین حساب کسری و فراکتال‌ها بیان کرده‌اند که این رابطه مبتنی بر ملاحظات فیزیکی و هندسی است. همچنین در [۱۵] نویسندگان جواب‌های موج معادله‌ی برگرز تعمیم‌یافته کسری- زمانی را تحلیل و بررسی کرده‌اند.

از آن‌جایی که مدل‌های کسری توانایی خوبی در مدل‌سازی برخی از پدیده‌ها دارند، بررسی معادلات دیفرانسیل کسری توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. در سال‌های اخیر، برخی از روش‌های عددی مانند تفاضل متناهی و عنصر محدود را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به‌کار برده‌اند [۱۶-۲۱]. همچنین روش‌های طیفی برای حل برخی معادلات کسری استفاده شده است [۲۲-۲۷]. علاوه بر مشتقات کسری زمانی می‌توان از مشتقات کسری مکانی برای مدل‌سازی برخی پدیده‌ها استفاده کرد. برای مثال می‌توان به مسئله‌های مکانیک کوانتم [۲۸]، فیزیک پلاسما [۲۹]، پراکندگی آلاینده‌ها [۳۰]، رسانه‌های متخلخل [۳۱] و معادلات انتشار در سیستم‌های بیولوژیکی [۳۲] اشاره کرد. اخیراً معادلات لاپلاسین کسری، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. در برخی از کاربردهای مدل‌های کسری از قبیل واکنش-انتشار [۳۳]، معادلات شبه زئستروفی [۳۴] و محیط متخلخل [۳۵]، لاپلاس مرتبه‌ی صحیح با لاپلاس کسری جای‌گزین شده است. در این مقاله، معادلات زیر-انتشار کسری مکانی را با کاربردهای مختلف مدل‌سازی ریاضی برای مسئله‌های فیزیکی، بیولوژیکی و شیمیایی در نظر می‌گیریم [۳۶]. معادلات زیر-انتشار کسری مکانی

$${}_C D_{\circ, t}^{\gamma} u(x, t) - (\mathcal{L}^{\alpha} u)(x, t) = f(x, t), \quad \circ < x < L, \quad \circ < t \leq T, \quad (1.1)$$

همراه با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x, \circ) = u_{\circ}(x), \quad \circ \leq x \leq L, \quad (2.1)$$

$$u(\circ, t) = u(L, t) = \circ, \quad \circ < t \leq T, \quad (3.1)$$

را در نظر می‌گیریم. در این معادلات t متغیر زمان و x متغیر مکان است. همچنین، u تابعی از x و t است. مشتق کسری مکانی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{L}^{\alpha} u)(x, t) = ({}_R D_{\circ, x}^{\alpha} + {}_R D_{x, L}^{\alpha}) u(x, t),$$

و $\alpha \in (1, 2]$ و عملگرهای چپ و راست ریمان-لیوویل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_R D_{\circ, x}^{\alpha} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \partial_{x^{\gamma}} \int_{\circ}^x (x-\xi)^{1-\alpha} u(\xi, t) d\xi,$$

$${}_R D_{x, L}^{\alpha} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \partial_{x^{\gamma}} \int_x^L (\xi-x)^{1-\alpha} u(\xi, t) d\xi.$$

مشتق کسری-زمانی ${}_C D_{\circ, t}^{\gamma}$ مشتق کسری کپوتو از مرتبه‌ی $1 < \gamma < \circ$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_C D_{\circ, t}^{\gamma} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\circ}^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^{\alpha}}, \quad (4.1)$$

در [۳۷] نویسندگان یکتایی جواب را برای مسئله (۱.۱) - (۳.۱) تحت شرایطی با استفاده از اصل ماکسیمم نتیجه گرفته‌اند. قضیه‌ی زیر را از این منبع می‌آوریم:

قضیه ۱.۱. اگر $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\circ} = \circ$ و $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = \circ$ آن‌گاه مسئله‌ی (۱.۱)-(۳.۱) جواب کلاسیک دارد. فرض کنیم

$$u_1(x, t), u_2(x, t) \in C^{2,1}([\circ, L] \times (\circ, T])$$

دو جواب کلاسیک معادله‌ی (۱.۱) باشند که در شرایط مرزی $u(\circ, t) = u(L, t) = \circ, \quad \circ < t \leq T, \quad i = 1, 2$ و شرایط اولیه $u_1(x, \circ) = u_{1,\circ}(x)$ و $u_2(x, \circ) = u_{2,\circ}(x)$ صدق می‌کنند، آن‌گاه نامساوی زیر برقرار است:

$$\|u_1 - u_2\|_{C([\circ, L] \times [\circ, T])} \leq \max_{x \in [\circ, L]} |u_{1,\circ}(x) - u_{2,\circ}(x)|.$$

دست آوردهای کار اخیر را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(الف) یک طرح تفاضلی جدید برای حل مسئله زیر- انتشار زمانی- کسری (۳.۱)-(۱.۱) ارائه می شود.
 (ب) پایداری و همگرایی طرح تفاضلی مورد بررسی قرار گرفته است که نشان می دهد طرح تفاضلی جدید، بدون قید و شرط پایدار است. همچنین نشان داده شده است که این طرح تفاضلی با مرتبه $\min\{2-\gamma, r\gamma\}$ که $r \geq 1$ در زمان و مرتبه دو در مکان برای هر $\gamma \in (1, 2]$ و هر $\alpha \in (1, 2]$ همگراست.
 باقی مانده مقاله به شرح زیر سازمان دهی شده است. در بخش ۲، نحوه گسسته سازی مشتقات کسری زمانی و مکانی بیان شده است. در بخش ۳، یک طرح تفاضلی جدید برای مسئله (۳.۱)-(۱.۱) پیش نهاد می شود. پایداری و همگرایی طرح تفاضلی در همین بخش بررسی می شود. در بخش ۴، نتایج عددی را برای تایید یافته های تئوری و نشان دادن کارآمدی طرح تفاضلی می آوریم. سرانجام مقاله با نتیجه گیری در بخش ۵ پایان می یابد.

۲ گسسته سازی زمانی و مکانی

برای گسسته سازی زمانی و مکانی یک شبکه مدرج روی $[0, L] \times [0, T]$ ، نقاط زیر را تعریف می کنیم:

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

با $h = \frac{L}{M}$ و

$$t_n = T(n/N)^r, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

که در آن $r \in \mathbb{R}$ و معمولاً فرض می کنیم که $r \geq 1$.

لم ۱.۲. فرض کنیم $0 < \gamma < 1$ و $0 < \tau_n = t_n - t_{n-1}, n = 1, 2, \dots, N$ اگر ثابت مثبت C موجود باشد به طوری که

$$\left| \frac{\partial^s u(\cdot, t)}{\partial t^s} \right| \leq c(1 + t^{\gamma-s}), \quad s = 0, 1, 2,$$

در این صورت داریم:

$${}_C D_{0,t}^\gamma u(x_m, t_n) = D_N^\gamma u(x_m, t_n) + O(n^{-\min\{2-\gamma, r\gamma\}}),$$

که در آن

$$D_N^\gamma u(x, t_n) = \mathbf{b}_{\backslash, n} u(x, t_n) - \mathbf{b}_{n, n} u(x, t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} u(x, t_{n-k}) [\mathbf{b}_{k+1, n} - \mathbf{b}_{k, n}],$$

و

$$\mathbf{b}_{k, n} = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)\tau_{n-k+1}} [(t_n - t_{n-k})^{1-\gamma} - (t_n - t_{n-k+1})^{1-\gamma}]. \quad (1.2)$$

□

اثبات. به [۳۸] مراجعه شود.

فرض: نامساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial t^s} \right| \leq c(1 + t^{\gamma-s}) \quad s = 0, 1, 2.$$

این نامساوی در همه لمها، قضایا و نتایج برقرار است.

لم ۲.۲. ضرایب $\mathbf{b}_{k,n}$ تعریف شده با رابطه‌ی (۱.۲) در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \mathbf{b}_{k+1,n} &\leq \mathbf{b}_{k,n} \\ \text{ب) } \mathbf{b}_{1,n} &= \frac{\tau_n^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma-\gamma)} \\ \text{پ) } \frac{(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma)}(t_n - t_{n-k})^{-\gamma} &\leq \mathbf{b}_{k,n} \leq \frac{(1-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\gamma)}(t_n - t_{n-k+1})^{-\gamma} \quad n = 2, 3, \dots, N \end{aligned}$$

□

اثبات. به [۳۸] مراجعه شود.

لم ۳.۲. فرض کنیم $1 < \alpha < 2$ ، آن‌گاه داریم:

$$(\mathcal{L}^{(\alpha)}u)(x_m, t) = L_h^\alpha u(x_m, t) + O(h^2), \tag{۳.۲}$$

که در آن

$$L_h^\alpha u(x_m, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} u(x_k, t),$$

$$p_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \bar{p}_{m,k}^{(\alpha)}, & k < m-1, \\ \bar{p}_{m,m-1}^{(\alpha)} + \tilde{p}_{m,m-1}^{(\alpha)}, & k = m-1, \\ \bar{p}_{m,m}^{(\alpha)} + \tilde{p}_{m,m}^{(\alpha)}, & k = m, \\ \bar{p}_{m,m+1}^{(\alpha)} + \tilde{p}_{m,m+1}^{(\alpha)}, & k = m+1, \\ \tilde{p}_{m,k}^{(\alpha)}, & k > m+1, \end{cases} \tag{۳.۲}$$

$$\bar{p}_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} \bar{d}_{m-1,k} - 2\bar{d}_{m,k} + \bar{d}_{m+1,k}, & k \leq m-1, \\ -2\bar{d}_{m,m} + \bar{d}_{m+1,m}, & k = m, \\ \bar{d}_{m+1,m+1}, & k = m+1, \\ 0, & k > m+1, \end{cases}$$

$$\tilde{p}_{m,k}^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, & k < m-1, \\ \tilde{d}_{m-1,m-1}, & k = m-1, \\ -2\tilde{d}_{m,m} + \tilde{d}_{m-1,m}, & k = m, \\ \tilde{d}_{m-1,k} - 2\tilde{d}_{m,k} + \tilde{d}_{m+1,k}, & m+1 \leq k \leq M, \end{cases}$$

$$\bar{d}_{j,k} = \begin{cases} (j-1)^{\gamma-\alpha} - j^{\gamma-\alpha}(j-2+\alpha), & k = 0, \\ (j-k+1)^{\gamma-\alpha} - 2(j-k)^{\gamma-\alpha} + (j-k-1)^{\gamma-\alpha}, & 1 \leq k \leq j-1, \\ 1, & k = j, \end{cases}$$

9

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ (k-j+1)^{\gamma-\alpha} - 2(k-j)^{\gamma-\alpha} + (k-j-1)^{\gamma-\alpha}, & j+1 \leq k \leq M-1, \\ (2-\alpha-M+j)(M-j)^{\gamma-\alpha} + (M-j-1)^{\gamma-\alpha}, & k = M. \end{cases}$$

□

اثبات. به [۳۹] مراجعه شود.

لم ۴.۲. ضرایب $\bar{p}_{m,k}^{(\alpha)}$ و $\tilde{p}_{m,k}^{(\alpha)}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \bar{p}_{m,k}^{(\alpha)} &> 0, (k < m-1) \\ \text{ب) } \tilde{p}_{m,k}^{(\alpha)} &> 0, (k > m+1) \\ \text{پ) } \bar{p}_{m,m+1}^{(\alpha)} &= \tilde{p}_{m,m-1}^{(\alpha)} = 1 \\ \text{ج) } \bar{p}_{m,m}^{(\alpha)} &= \tilde{p}_{m,m}^{(\alpha)} = -2 + 2(2-\alpha) \end{aligned}$$

□

اثبات. به [۴۰] مراجعه شود.

لم ۵.۲. ضرایب $p_{m,k}^{(\alpha)}$ که با رابطه‌ی (۳.۲) تعریف می‌شوند در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) $p_{m,k}^{(\alpha)} > 0, (k \neq m)$

ب) $p_{m,k}^{(\alpha)} < 0, (m = k)$

پ) $\sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} < 0$

□

اثبات. به [۴۰] مراجعه شود.

۳ تقریب تفاضلی جدید

فرض می‌کنیم که مسئله (۳.۱)-(۱.۱) دارای جواب $u(x, t)$ است به طوری که

$$\left| \frac{\partial^s u(\cdot, t)}{\partial t^s} \right| \leq c(1 + t^{\gamma-s}), s = 0, 1, 2.$$

ابتدا در (۱.۱) قرار می‌دهیم $(x, t) = (x_m, t_n)$ ، آن‌گاه به دست می‌آوریم:

$${}_C D_{\circ, t}^\gamma u(x_m, t_n) - (\mathcal{L}^\alpha u)(x_m, t_n) = f(x_m, t_n), \tag{۱.۳}$$

مشتق زمانی در رابطه‌ی (۱.۳) را با استفاده از لم ۱.۲ و مشتقات مکانی در (۱.۳) را با استفاده از لم ۳.۲ گسسته‌سازی می‌کنیم. با جای‌گزین کردن $u(x_m, t_n)$ با جواب تقریبی u_m^n می‌توان یک مسئله‌ی گسسته برای (۱.۱)-(۳.۱) را به صورت زیر به دست آورد: مسئله‌ی گسسته: $u_m^n (m = 1, 2, \dots, M - 1, n = 1, 2, \dots, N)$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که

$$\begin{cases} D_N^\gamma u_m^n - L_h^\alpha u_m^n = f(x_m, t_n), 1 \leq m \leq M - 1, 1 \leq n \leq N, \\ u_m^0 = u_\circ(x_m), 0 \leq m \leq M, \\ u_\circ^n = u_M^n = 0, 0 < n \leq N, \end{cases} \tag{۲.۳}$$

که در آن

$$L_h^\alpha u_m^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} u_k^n,$$

$$D_N^\gamma u_m^n = \mathbf{b}_{1,n} u_m^n - \mathbf{b}_{n,n} u_m^0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_{k+1,n} - \mathbf{b}_{k,n}], 1 \leq n \leq N,$$

و

$$\mathbf{b}_{k,n} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \gamma)\tau_{n-k+1}^\alpha} [(t_n - t_{n-k})^{1-\gamma} - (t_n - t_{n-k+1})^{1-\gamma}].$$

لذا (۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{1,n} u_m^n - \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} u_k^n = \mathbf{b}_{n,n} u_m^0 \\ + \sum_{k=1}^{n-1} u_m^{n-k} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] + f(x_m, t_n), 1 \leq m \leq M - 1, 1 \leq n \leq N, \\ u_m^0 = u_\circ(x_m), 0 \leq m \leq M, \\ u_\circ^n = u_M^n = 0, 0 < n \leq N. \end{cases} \tag{۳.۳}$$

۱.۰.۳ آنالیز پایداری

در این بخش، پایداری طرح تفاضلی (۳.۳) را بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۳. جواب مسئله‌ی (۳.۳) در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\|u^n\|_\infty \leq \frac{1}{b_{1,n}} [b_{n,n} \|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1} [b_{k,n} - b_{k+1,n}] \|u^{n-k}\|_\infty + \|f^n\|_\infty], \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

که در آن $f^n = [f_0^n, f_1^n, \dots, f_M^n]^T$ و $u^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n]^T$

اثبات. فرض کنیم $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ ثابت است. هم‌چنین قرار می‌دهیم:

$$u^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n]^T.$$

اکنون $\hat{m} \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|u_{\hat{m}}^n| = \|u^n\|_\infty$. اگر $(x, t) = (x_{\hat{m}}, t_n)$ باشد، آن‌گاه به‌دست می‌آوریم:

$$b_{1,n} u_{\hat{m}}^n - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{\hat{m},k}^{(\alpha)} u_k^n = b_{n,n} u_{\hat{m}}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{\hat{m}}^{n-k} [b_{k,n} - b_{k+1,n}] + f_{\hat{m}}^n, \quad 1 \leq n \leq N,$$

که در آن $f_{\hat{m}}^n = f(x_{\hat{m}}, t_n)$ بنا بر لم ۲.۲، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_{1,n} |u_{\hat{m}}^n| &\leq b_{1,n} |u_{\hat{m}}^n| - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{\hat{m},k}^{(\alpha)} |u_{\hat{m}}^n| \\ &\leq [b_{1,n} - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} p_{\hat{m},\hat{m}}^{(\alpha)}] |u_{\hat{m}}^n| - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0, k \neq \hat{m}}^M p_{\hat{m},k}^{(\alpha)} |u_{\hat{m}}^n| \\ &\leq [b_{1,n} - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} p_{\hat{m},\hat{m}}^{(\alpha)}] |u_{\hat{m}}^n| - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0, k \neq \hat{m}}^M p_{\hat{m},k}^{(\alpha)} |u_k^n| \\ &\leq |b_{1,n} u_{\hat{m}}^n - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{\hat{m},k}^{(\alpha)} u_k^n|, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (5.3)$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$b_{1,n} \|u^n\|_\infty \leq |b_{n,n} u_{\hat{m}}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{\hat{m}}^{n-k} [b_{k,n} - b_{k+1,n}] + f_{\hat{m}}^n|, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (6.3)$$

اکنون با استفاده از لم ۲.۲، به‌دست می‌آوریم:

$$\|u^n\|_\infty \leq \frac{1}{b_{1,n}} [b_{n,n} \|u^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1} [b_{k,n} - b_{k+1,n}] \|u^{n-k}\|_\infty + \|f^n\|_\infty], \quad 1 \leq n \leq N, \quad (7.3)$$

□

که در آن $f^n = [f_0^n, f_1^n, \dots, f_M^n]^T$

لم ۲.۳. جواب مسئله‌ی (۳.۳) در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + \frac{1}{b_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} \|f^s\|_\infty, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3)$$

که در آن

$$\mathbf{u}^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_M^n], \quad \mathbf{f}^s = [f_0^s, f_1^s, \dots, f_M^s],$$

و

$$\chi_{n,n} = 1, \quad \chi_{s,n} = \sum_{k=1}^{n-s} \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \chi_{s,n-k}. \quad (9.3)$$

اثبات. درستی این عبارت را با استقراء روی n نشان می دهیم. ابتدا فرض کنیم $n = 1$ آن گاه داریم:

$$\|\mathbf{u}^1\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,1}} [\mathbf{b}_{1,1} \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \|\mathbf{f}^1\|_\infty] = \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,1}} \chi_{1,1} \|\mathbf{f}^1\|_\infty, \quad (10.3)$$

لذا برای $n = 1$ رابطه ی (۸.۳) درست است.

اکنون فرض کنید (۸.۳) برای $k < n$ برقرار باشد، آن گاه نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|_\infty &\leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} [\mathbf{b}_{n,n} \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] (\|\mathbf{u}^0\|_\infty + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} \sum_{s=1}^{n-k} \chi_{s,n-k} \|\mathbf{f}^s\|_\infty) + \|\mathbf{f}^n\|_\infty] \\ &= \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} [\mathbf{b}_{1,n} \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} \sum_{s=1}^{n-k} \chi_{s,n-k} \|\mathbf{f}^s\|_\infty + \|\mathbf{f}^n\|_\infty]. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n\|_\infty &\leq \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \left[\sum_{s=1}^{n-1} \|\mathbf{f}^s\|_\infty \sum_{k=1}^{n-s} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} \chi_{s,n-k} + \|\mathbf{f}^n\|_\infty \right] \\ &= \|\mathbf{u}^0\|_\infty + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} \|\mathbf{f}^s\|_\infty, \quad (11.3) \end{aligned}$$

بنابراین برای $k = n$ هم برقرار است و در نتیجه اثبات قضیه کامل می شود.

□

قضیه ۳.۳. (پایداری تقریب تفاضل ضمنی) فرض کنید $\mathbf{u}^n, n = 1, 2, \dots, N$ جواب دقیق مسئله ی (۳.۳) با فرض

$$\mathbf{u}^0 = [u_0^0, u_1^0, \dots, u_M^0]^T$$

باشد. به علاوه $\tilde{\mathbf{u}}^n, n = 1, 2, \dots, N$ جواب تقریبی مسئله ی (۳.۳) با شرط اولیه ی

$$\tilde{\mathbf{u}}^0 = [\tilde{u}_0^0, \tilde{u}_1^0, \dots, \tilde{u}_M^0]^T$$

باشد. آن گاه مسئله ی (۳.۳) بدون قید و شرط پایدار است.

اثبات. با استفاده از رابطه ی (۳.۳)، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{1,n} [u_m^n - \tilde{u}_m^n] - \frac{1}{\Gamma(\varphi - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} [u_k^n - \tilde{u}_k^n] &= \mathbf{b}_{n,n} [u_m^0 - \tilde{u}_m^0] \\ + \sum_{k=1}^{n-1} [u_m^{n-k} - \tilde{u}_m^{n-k}] [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}], \quad 1 \leq m \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (12.3) \end{aligned}$$

بنابراین، با استفاده از (۱۲.۳) و لم ۲.۳، خواهیم داشت:

$$\|\mathbf{u}^n - \tilde{\mathbf{u}}^n\|_\infty \leq \|\mathbf{u}^0 - \tilde{\mathbf{u}}^0\|_\infty, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (13.3)$$

□

و اینجا اثبات قضیه کامل می شود.

۲.۵.۳ تخمین خطا و آنالیز همگرایی

اکنون چندین لم را برای به دست آوردن تخمین خطا بیان می‌کنیم.

لم ۴.۳. فرض کنید $e_m^n = u(x_m, t_n) - u_m^n$ خطا در نقطه گرهی (x_m, t_n) باشد، آن‌گاه داریم:

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} (h^\nu + s^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (14.3)$$

که در آن $\chi_{s,n}$ در رابطه (۹.۳) تعریف شده است.

اثبات. با استفاده از (۳.۳)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_{1,n} e_m^n - \frac{1}{\Gamma(\nu - \alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^M p_{m,k}^{(\alpha)} e_k^n - \mathbf{b}_{n,n} e_m^n \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} e_m^{n-k} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] = TE_m^n, \quad 1 \leq m \leq M-1, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned} \quad (15.3)$$

که در آن TE_m^n خطای برش (۳.۳) در نقطه (x_m, t_n) است. اکنون با استفاده از لم‌های (۱.۲) و (۳.۲)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$|TE_m^n| \leq C(h^\nu + n^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}}). \quad (16.3)$$

هم‌چنین با به کار بردن لم ۲.۳، خواهیم داشت:

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} \|TE^s\|_\infty, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (17.3)$$

که در آن $TE^n = [TE_0^n, TE_1^n, \dots, TE_M^n]^T$ و $e^n = [e_0^n, e_1^n, \dots, e_M^n]^T$ بنابراین با استفاده از (۱۶.۳) و (۱۷.۳) خواهیم داشت:

$$\|e^n\|_\infty \leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} (h^\nu + s^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (18.3)$$

□

و این‌جا اثبات قضیه کامل می‌شود.

لم ۵.۳. برای $n = 1, 2, \dots, N$ نامساوی زیر را داریم:

$$\frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} s^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}} \leq \frac{\Gamma(\nu - \gamma)}{(1 - \gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19.3)$$

اثبات. این نامساوی را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $n = 1$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathbf{b}_{1,1}} \sum_{s=1}^1 \chi_{s,1} s^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}} = \frac{1}{\mathbf{b}_{1,1}} = \frac{1}{\Gamma(\nu-\gamma) T_1^{-\gamma}} \leq \Gamma(\nu - \gamma) T^\gamma N^{-r\gamma} \\ & \leq \Gamma(\nu - \gamma) T^\gamma N^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}} \leq \frac{\Gamma(\nu - \gamma)}{(1 - \gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\nu-\gamma, r\gamma\}}, \end{aligned} \quad (20.3)$$

لذا برای $n = 1$ رابطه‌ی (۱۹.۳) درست است.

فرض کنید رابطه‌ی (۱۹.۳) برای مقادیر $k < n$ برقرار باشد، آن گاه داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} s^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} &= \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \chi_{n,n} n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} + \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{s=1}^{n-1} \chi_{s,n} s^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \\
 &= \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \chi_{n,n} n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} + \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{s=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-s} \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda, n-k}} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \chi_{s, n-k} \right] s^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \\
 &= \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \chi_{n,n} n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} + \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda, n-k}} \sum_{s=1}^{n-k} \chi_{s, n-k} s^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \\
 &\leq \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} + \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \left[\frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \right] \\
 &= \frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} [n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} - \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \right]] \\
 &\quad + \frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}}, \tag{۲۱.۳}
 \end{aligned}$$

اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آن گاه رابطه‌ی (۱۹.۳) برای $k = n$ نیز برقرار است.

$$n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} - \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \right] \leq 0.$$

برای اثبات نامساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \right] &= \left[\frac{t_n^{1-\gamma} - (t_n - t_1)^{1-\gamma}}{\Gamma(\psi-\gamma) \tau_1} \right] \left[\frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \right] \\
 &= T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \left[\frac{t_n^{1-\gamma} - (t_n - t_1)^{1-\gamma}}{\tau_1 (\lambda-\gamma)} \right] \\
 &= T^\gamma N^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \frac{T^{1-\gamma} [n^{r(1-\gamma)} - (n^r - 1)^{1-\gamma}]}{N^{r(1-\gamma)} T N^{-r} (\lambda-\gamma)} = \left[\frac{n^{r(1-\gamma)} - (n^r - 1)^{1-\gamma}}{\lambda-\gamma} \right] N^{r\gamma - \min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \\
 &\geq n^{-r\gamma} N^{r\gamma - \min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} = n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \left(\frac{N}{n} \right)^{r\gamma - \min\{\psi-\gamma, r\gamma\}} \geq n^{-\min\{\psi-\gamma, r\gamma\}}. \tag{۲۲.۳}
 \end{aligned}$$

□

بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود.

لم ۶.۳. برای $n = 1, 2, \dots, N$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} \leq \frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma. \tag{۲۳.۳}$$

اثبات. اکنون این نامساوی را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $n = 1$ باشد، آن گاه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mathbf{b}_{\lambda,1}} \sum_{s=1}^1 \chi_{s,1} = \frac{1}{\Gamma(\psi-\gamma) \tau_1} \leq \Gamma(\psi-\gamma) T^\gamma \leq \frac{\Gamma(\psi-\gamma)}{(\lambda-\gamma)} T^\gamma,$$

بنابراین رابطه‌ی (۲۳.۳) برای $n = 1$ برقرار است.

فرض کنید رابطه‌ی (۲۳.۳) برای مقادیر $k < n$ برقرار باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^n \chi_{s,n} &= \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \chi_{n,n} + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^{n-1} \chi_{s,n} \\ &= \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \chi_{n,n} + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{s=1}^{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-s} \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \chi_{s,n-k} \right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \chi_{n,n} + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n-k}} \sum_{s=1}^{n-k} \chi_{s,n-k} \\ &\leq \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} + \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbf{b}_{k,n} - \mathbf{b}_{k+1,n}] \left[\frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma \right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{b}_{1,n}} \left[1 - \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma \right] \right] + \frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma. \end{aligned} \quad (24.3)$$

برای تکمیل فرضیه‌ی استقرایی، نشان می‌دهیم:

$$1 - \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma \right] \leq 0.$$

برای این منظور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n,n} \left[\frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma \right] &= \frac{t_n^{1-\gamma} - (t_n - t_1)^{1-\gamma}}{\Gamma(\Psi - \gamma) \tau_1} \left[\frac{\Gamma(\Psi - \gamma)}{(\Psi - \gamma)} T^\gamma \right] \\ &= T^\gamma \left[\frac{t_n^{1-\gamma} - (t_n - t_1)^{1-\gamma}}{\tau_1 (\Psi - \gamma)} \right] = T^\gamma \frac{T^{1-\gamma} [n^{r(1-\gamma)} - (n^r - 1)^{1-\gamma}]}{N^{r(1-\gamma)} T N^{-r} (\Psi - \gamma)} \\ &= \frac{[n^{r(1-\gamma)} - (n^r - 1)^{1-\gamma}]}{N^{-r\gamma} (\Psi - \gamma)} \geq N^{r\gamma} n^{-r\gamma} = \left(\frac{N}{n}\right)^{r\gamma} \geq 1. \end{aligned} \quad (25.3)$$

□

بنابراین اثبات قضیه کامل می‌شود.

اکنون با استفاده از لم‌های ۴.۳، ۵.۳ و ۶.۳ قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۷.۳. (تخمین خطا) برای $n = 1, 2, \dots, N$ ، نامساوی زیر را داریم:

$$\|e^n\|_\infty \leq C_{T,\gamma} (h^\Psi + N^{-\min\{\Psi-\gamma, r\gamma\}}), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

که در آن C ثابت حقیقی مستقل از T و γ است.

بنابر قضیه‌ی ۷.۳، می‌توان نتیجه‌ی زیر را برای همگرایی به‌دست آورد:

نتیجه ۸.۳. (همگرایی تقریب تفاضلی) جواب عددی طرح تفاضل (۳.۳) وقتی که $h \rightarrow 0$ و $N \rightarrow \infty$ میل می‌کند، به جواب دقیق همگرا است.

بنابر قضیه‌ی ۷.۳، نتیجه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۹.۳. (تخمین خطا) اگر $r \geq \frac{\Psi-\gamma}{\gamma}$ ، آن‌گاه برای $n = 1, 2, \dots, N$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\|e^n\|_\infty \leq C_{T,\gamma} (h^\Psi + N^{-(\Psi-\gamma)}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (26.3)$$

که در آن C ثابت حقیقی مستقل از T و γ است.

۴ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده سازی روش تفاضلی جدید را روی معادله ی زیر- انتشار کسری مکانی- زمانی- مکانی ارائه خواهد شد. برنامه ها با استفاده از نرم افزار Maple نوشته شده و روی کامپیوتر با مشخصات $GH - 370 \circ GH - 970 \circ @370 \circ GH - 970 \circ$ با $16GB$ حافظه RAM اجرا شده است. یک مثال عددی، برای نشان دادن همگرایی و دقت روش پیش نهادی ارائه می دهیم.

مثال ۱.۴. معادله ی زیر-انتشار کسری مکانی-زمانی (۱.۱) را در ناحیه ی مستطیلی شکل $[0, 1] \times [0, 1]$ ، با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = x^2 - x, \quad x \in [0, 1],$$

و شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

در نظر بگیرید. تابع $f(x, t)$ طوری انتخاب می شود که جواب دقیق مسئله به صورت $u(x, t) = (1 + t + t^\gamma)(x^2 - x)$ است. در این مثال به منظور نشان دادن کارایی روش پیش نهادی، ماکسیمم خطا در نقاط گرهی را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$e_{\max}(M, N) = \max_{0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N} |u(x_m, t_n) - u_m^n|.$$

در جدول های ۵-۱ مقادیر خطای $e_{\max}(M, N)$ برای مقادیر مختلف α و γ و مقادیر مختلف $r \geq 1$ با

$$M = N = 2^i, \quad i = 4, 5, 6, 7,$$

گزارش شده است. همان طوری که از نتایج مشخص است طرح تفاضلی ارائه شده در این مقاله دارای دقت بالای عددی است. همان طوری که در قضیه همگرایی بیان شد داریم:

$$\|e^n\|_\infty = o(h^2 + N^{-\min\{2-\gamma, r\gamma\}})$$

و در صورتی که $r \geq \frac{2-\gamma}{\gamma}$ ، داریم:

$$\|e^n\|_\infty = o(h^2 + N^{2-\gamma})$$

هم چنین برای $r < \frac{2-\gamma}{\gamma}$ داریم:

$$\|e^n\|_\infty = o(h^2 + N^{-r\gamma})$$

یعنی انتظار داریم برای $r \geq \frac{2-\gamma}{\gamma}$ مرتبه ی همگرایی زمانی بیش تر از سرعت همگرایی برای $r < \frac{2-\gamma}{\gamma}$ باشد. حال می خواهیم ببینیم که نتایج عددی هم این موضوع را تایید می کنند. در جدول های ۱-۵ سرعت همگرایی زمانی برای $r \geq \frac{2-\gamma}{\gamma}$ بیش تر از سرعت همگرایی $r = 1$ است. برای $r \geq \frac{2-\gamma}{\gamma}$ سرعت همگرایی زمانی نزدیک به $(2 - \gamma)$ است و تقریب های بهتری حاصل شده است. در شکل های ۱-۴ مقادیر خطای $\log_{10}(e_{\max}(M, N))$ برای مقادیر مختلف α و γ و مقادیر مختلف $r \geq 1$ با

$$M = N = 2^i, \quad i = 4, 5, 6, 7,$$

گزارش شده است. در این شکل ها برای مقادیر $(195, 0.95), (17, 0.8), (17, 0.8), (17, 0.8), (17, 0.8), (19, 0.9)$ و $(\alpha, \gamma) = (19, 0.9), (17, 0.9), (17, 0.8), (17, 0.8), (195, 0.95)$ مقادیر $r = \frac{2-\gamma}{\gamma}, \frac{2(2-\gamma)}{\gamma}, \frac{3(2-\gamma)}{\gamma}, \frac{10(2-\gamma)}{\gamma}$ مقادیر خطا نشان داده شده است. که نشان می دهد طرح تفاضلی ارائه شده در این مقاله، دارای دقت بالای عددی است. نمودار جواب تقریبی برای مقادیر $0.8, 0.9, \gamma = 0.8$ در شکل های ۵ آورده شده است.

	$N = M = 2^4$	$N = M = 2^5$	$N = M = 2^6$	$N = M = 2^7$
$r = 1$	$2,7395e - 3$	$1,2900e - 3$	$7,7998e - 4$	$5,5912e - 4$
Rate	-	۱,۰۸۶۵	۰,۷۲۵۹	۰,۴۸۰۳
$r = \frac{2-\gamma}{\gamma}$	$2,7267e - 3$	$1,2872e - 3$	$6,2377e - 4$	$3,0676e - 4$
Rate	-	۱,۰۸۲۹	۱,۰۴۵۱	۱,۰۲۴۰
$r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,6862e - 3$	$1,2781e - 3$	$6,2168e - 4$	$3,0629e - 4$
Rate	-	۱,۰۷۸۱۶	۱,۰۴۴۳	۱,۰۲۳۳
$r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,6440e - 3$	$1,2680e - 3$	$6,1936e - 4$	$3,0576e - 4$
Rate	-	۱,۰۷۵۳	۱,۰۳۱۸	۱,۰۲۳۸
$r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,4531e - 3$	$1,1209e - 3$	$6,0326e - 4$	$3,0141e - 4$
Rate	-	۱,۱۲۹۹	۰,۸۹۳۸	۱,۰۰۱۰
time(s)	۳۱	۸۶	۱۱۲	۲۲۱

جدول ۱: مقادیر خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی و سرعت همگرایی برای $\alpha = 1/9$ و $\gamma = 0/8$.

	$N = M = 2^4$	$N = M = 2^5$	$N = M = 2^6$	$N = M = 2^7$
$r = 1$	$2,7332e - 3$	$1,4521e - 3$	$1,3037e - 3$	$1,0175e - 3$
Rate	-	۰,۹۱۲۵	۰,۱۵۵۵	۰,۳۵۷۶
$r = \frac{2-\gamma}{\gamma}$	$2,7144e - 3$	$1,2851e - 3$	$6,2338e - 4$	$3,0670e - 4$
Rate	-	۱,۰۷۸۸	۱,۰۴۳۷	۱,۰۲۳۳
$r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,6646e - 3$	$1,2741e - 3$	$6,2101e - 4$	$3,0620e - 4$
Rate	-	۱,۰۶۴۴	۱,۰۳۶۸	۱,۰۲۰۱
$r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,6167e - 3$	$1,2614e - 3$	$6,1826e - 4$	$3,0560e - 4$
Rate	-	۱,۰۵۲۷	۱,۰۲۸۷	۱,۰۱۶۶
$r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma}$	$2,3949e - 3$	$1,1861e - 3$	$5,9896e - 4$	$3,0036e - 4$
Rate	-	۱,۰۱۳۷	۰,۹۸۵۷	۰,۹۹۵۸

جدول ۲: مقادیر خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی و سرعت همگرایی برای $\alpha = 1/9$ و $\gamma = 0/7$.

	$N = M = 2^4$	$N = M = 2^5$	$N = M = 2^6$	$N = M = 2^7$
$r = 1$	$6,1644e - 3$	$2,8976e - 3$	$1,5227e - 3$	$1,1412e - 3$
Rate	-	۱,۰۸۹۱	۰,۹۲۸۲	۰,۴۱۶۱
$r = \frac{2-\gamma}{\gamma}$	$6,1558e - 3$	$2,8957e - 3$	$1,4010e - 3$	$6,8863e - 4$
Rate	-	۱,۰۸۸۰	۱,۰۴۷۵	۱,۰۲۴۷
$r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma}$	$6,1249e - 3$	$2,8888e - 3$	$1,3995e - 3$	$6,8827e - 4$
Rate	-	۱,۰۸۴۲	۱,۰۴۵۶	۱,۰۲۳۹
$r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma}$	$6,0900e - 3$	$2,8807e - 3$	$1,3976e - 3$	$6,8785e - 4$
Rate	-	۱,۰۸۰۰	۱,۰۴۳۵	۱,۰۲۲۸
$r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma}$	$5,8233e - 3$	$2,8137e - 3$	$1,3816e - 3$	$6,8412e - 4$
Rate	-	۱,۰۴۹۴	۱,۰۲۶۱	۱,۰۱۴۰

جدول ۳: مقادیر خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی و سرعت همگرایی برای $\alpha = 1/7$ و $\gamma = 0/7$.

	$N = M = ۲^۴$	$N = M = ۲^۵$	$N = M = ۲^۶$	$N = M = ۲^۷$
$r = ۱$ Rate	$۱,۵۰۲۷e - ۳$ -	$۷,۱۳۸۴e - ۴$ $۱,۰۷۳۹$	$۵,۴۶۹۳e - ۴$ $۰,۳۸۴۲$	$۳,۷۱۳۴e - ۴$ $۰,۵۵۸۶$
$r = \frac{۲-\gamma}{\gamma}$ Rate	$۱,۴۹۳۲e - ۳$ -	$۷,۱۱۴۰e - ۴$ $۱,۰۶۹۷$	$۳,۴۶۵۴e - ۴$ $۱,۰۳۷۶$	$۱,۷۰۹۸e - ۴$ $۱,۰۱۹۲$
$r = \frac{۲(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۴۵۶۹e - ۳$ -	$۷,۰۱۶۸e - ۴$ $۱,۰۵۴۰$	$۳,۴۳۹۳e - ۴$ $۱,۰۲۸۷$	$۱,۷۰۳۱e - ۴$ $۱,۰۱۴۰$
$r = \frac{۳(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۴۲۶۴e - ۳$ -	$۶,۹۲۴۴e - ۴$ $۱,۰۴۲۶$	$۳,۴۱۵۱e - ۴$ $۱,۰۱۹۸$	$۱,۶۹۶۶e - ۴$ $۱,۰۰۹۳$
$r = \frac{۱۰(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۲۷۴۵e - ۳$ -	$۶,۴۶۸۲e - ۴$ $۰,۹۷۸۵$	$۳,۲۶۹۵e - ۴$ $۰,۹۸۴۳$	$۱,۶۵۴۶e - ۴$ $۰,۹۸۲۶$

جدول ۴: مقادیر خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی و سرعت همگرایی برای $\alpha = ۱,۹۵$ و $\gamma = ۰,۸۵$.

	$N = M = ۲^۴$	$N = M = ۲^۵$	$N = M = ۲^۶$	$N = M = ۲^۷$
$r = ۱$ Rate	$۱,۴۹۶۹e - ۳$ -	$۱,۲۴۴۲e - ۳$ $۰,۲۶۶۸$	$۱,۰۳۳۸e - ۳$ $۰,۲۶۷۳$	$۷,۶۴۸۱e - ۴$ $۰,۴۳۴۸$
$r = \frac{۲-\gamma}{\gamma}$ Rate	$۱,۴۸۰۱e - ۳$ -	$۷,۰۸۴۱e - ۴$ $۱,۰۶۳۰$	$۳,۴۶۰۰e - ۴$ $۱,۰۳۳۸$	$۱,۷۰۸۷e - ۴$ $۱,۰۱۷۸۷$
$r = \frac{۲(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۴۳۵۰e - ۳$ -	$۶,۹۶۱۹e - ۴$ $۱,۰۴۳۵$	$۳,۴۲۸۱e - ۴$ $۱,۰۲۲۱$	$۱,۷۰۱۱e - ۴$ $۱,۰۱۰۹$
$r = \frac{۳(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۳۹۳۹e - ۳$ -	$۶,۸۵۳۲e - ۴$ $۱,۰۲۴۳$	$۳,۳۹۸۰e - ۴$ $۱,۰۱۲۱$	$۱,۶۹۲۹e - ۴$ $۱,۰۰۵۲$
$r = \frac{۱۰(۲-\gamma)}{\gamma}$ Rate	$۱,۲۱۸۳e - ۳$ -	$۶,۲۳۲۹e - ۴$ $۰,۹۶۶۹$	$۳,۲۱۷۸e - ۴$ $۰,۹۵۳۸$	$۱,۶۴۲۰e - ۴$ $۰,۹۷۰۶$

جدول ۵: مقادیر خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی و سرعت همگرایی برای $\alpha = ۱,۹۵$ و $\gamma = ۰,۸۵$.

مثال ۲.۴. معادله‌ی زیر-انتشار کسری مکانی-زمانی (۱.۱) را در ناحیه‌ی مستطیلی شکل $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ ، با شرایط اولیه

$$u(x, ۰) = ۰, \quad x \in [۰, ۱],$$

و شرایط مرزی

$$u(۰, t) = u(۱, t) = ۰, \quad t \in [۰, ۱],$$

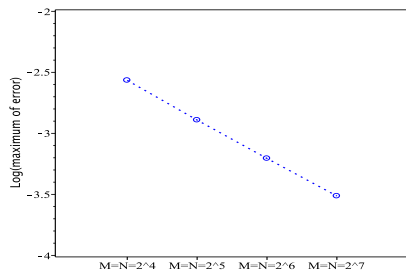
در نظر می‌گیریم. تابع $f(x, t) = t^x(1-x)$ و جواب دقیق مسئله مجهول است. در این مثال به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، ماکسیمم خطا در نقاط گرهی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$E_{\max}(M, N) = \max_{0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N} |u_m^n - u_{\gamma m}^n|.$$

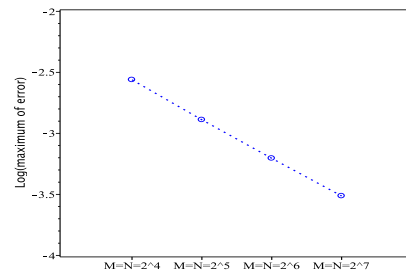
در شکل‌های ۶ مقادیر خطای $\log_{۱۰}(E_{\max}(M, N))$ برای مقادیر $\alpha = ۱,۹$ و $\gamma = ۰,۸$ و مقادیر $r = \frac{۲-\gamma}{\gamma}, \frac{۲(۲-\gamma)}{\gamma}$ با

$$M = N = ۲^i, i = ۳, ۴, ۵, ۶,$$

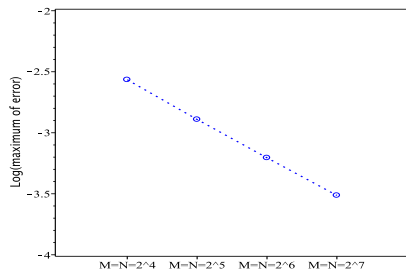
گزارش شده است.



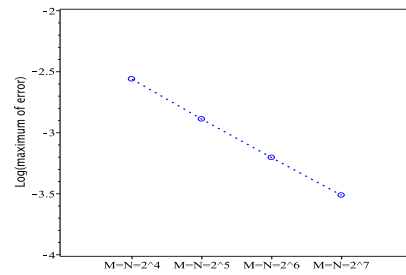
$$(f_2) \left(r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$



$$(f_1) \left(r = \frac{2-\gamma}{\gamma} \right)$$

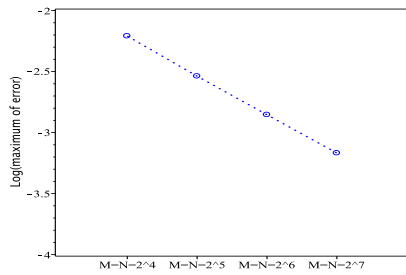


$$(f_4) \left(r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

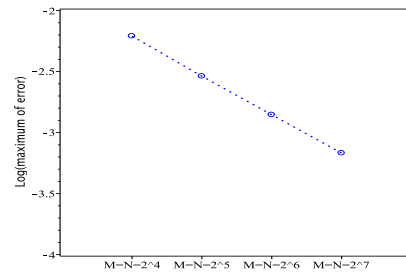


$$(f_3) \left(r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

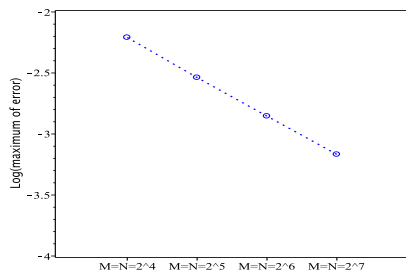
شکل ۱: مقادیر لگاریتم خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی برای $\alpha = 1/9$ و $\gamma = 0.9$.



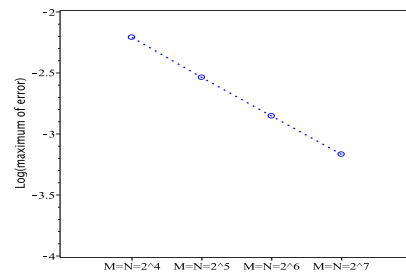
$$(f_6) \left(r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$



$$(f_5) \left(r = \frac{2-\gamma}{\gamma} \right)$$

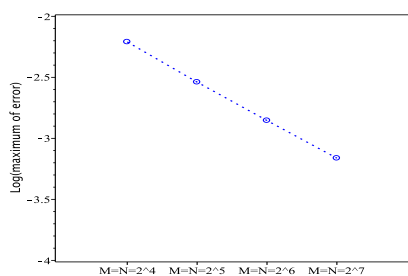


$$(f_8) \left(r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

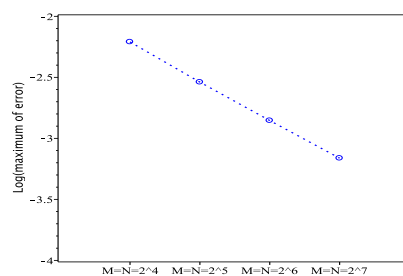


$$(f_7) \left(r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

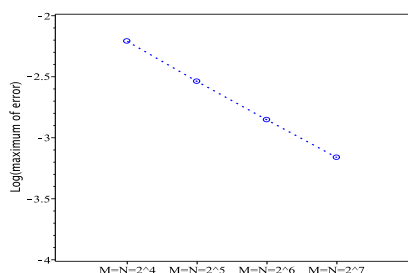
شکل ۲: مقادیر لگاریتم خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی برای $\alpha = 1/7$ و $\gamma = 0.9$.



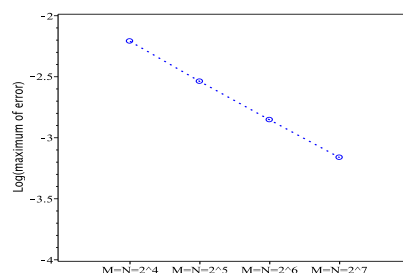
$$(f_{10}) \left(r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$



$$(f_9) \left(r = \frac{2-\gamma}{\gamma} \right)$$

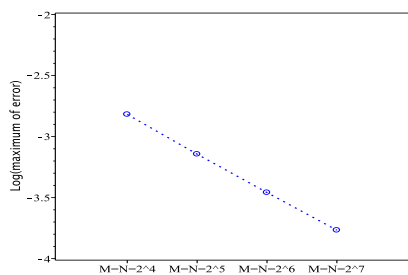


$$(f_{12}) \left(r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

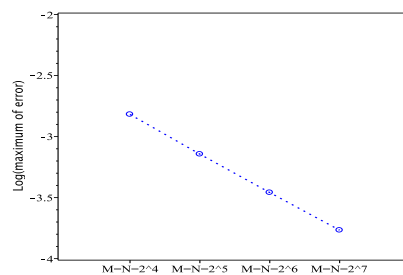


$$(f_{11}) \left(r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

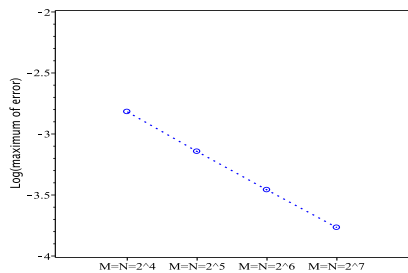
شکل ۳: مقادیر لگاریتم خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی برای $\alpha = 1/7$ و $\gamma = 0.8$.



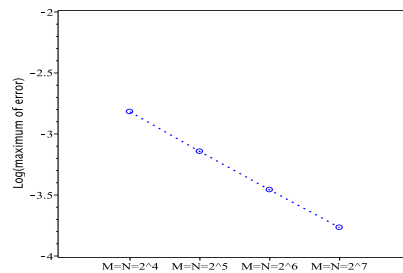
$$(f_{14}) \left(r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$



$$(f_{13}) \left(r = \frac{2-\gamma}{\gamma} \right)$$

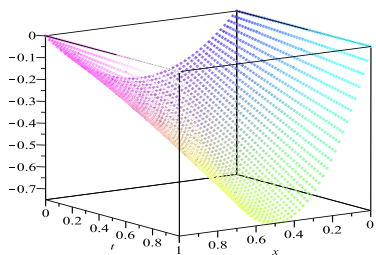


$$(f_{16}) \left(r = \frac{10(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

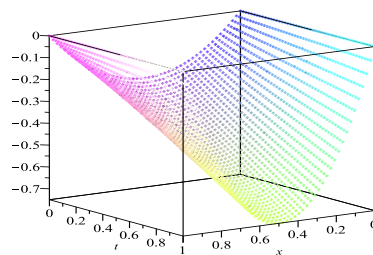


$$(f_{15}) \left(r = \frac{3(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$

شکل ۴: مقادیر لگاریتم خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی برای $\alpha = 1/5$ و $\gamma = 0.95$.

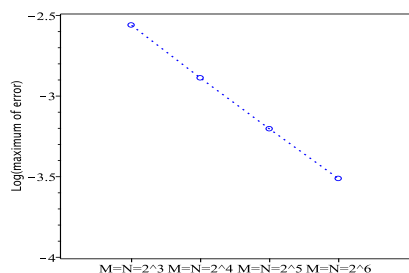


$$\gamma = 0.8$$

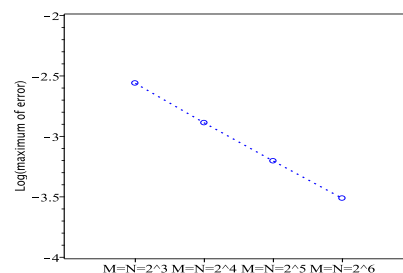


$$\gamma = 0.9$$

شکل ۵: جواب تقریبی به دست آمده از روش تفاضلی برای مقادیر $\gamma = 0.8, 0.9$.



$$(f18) \left(r = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma} \right)$$



$$(f17) \left(r = \frac{2-\gamma}{\gamma} \right)$$

شکل ۶: مقادیر لگاریتم خطای ماکسیمم به دست آمده با استفاده از روش تفاضلی برای $\alpha = 1.9$ و $\gamma = 0.8$.

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، یک طرح تفاضلی جدید روی یک شبکه مدرج زمانی برای حل معادلات زیر انتشار کسری مکانی-زمانی ارائه شده است که در آن مرتبه‌های مشتقات کسری زمان و مکان به ترتیب متعلق به بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, 2)$ می‌باشند. ثابت کرده‌ایم که سرعت همگرایی طرح تفاضلی ارائه شده در زمان و مکان به ترتیب $\min\{2 - \gamma, r\gamma\}$ و 2 است. آنالیز پایداری و برآورد خطا ارائه شده است که نتایج حاصل از مثال‌های عددی آن‌ها را تایید می‌کند.

در پایان برخی جهت‌گیری‌های تحقیقاتی آینده را به صورت زیر اشاره می‌کنیم:

- (الف) این طرح تفاضلی را می‌توان بر روی شبکه غیریکنواخت برای حل معادلات انتشار کسری زمانی غیرخطی ارائه داد.
- (ب) از شبکه غیریکنواخت می‌توان برای حل معادلات انتشار کسری زمانی از مرتبه‌ی توزیع شده استفاده کرد.

فهرست منابع

[1] D. A. Benson, R. Schumer, M. M. Meerschaert and S. W. Wheatcraft, Fractional Dispersion Levy Motion and the MADE Tracer Tests, *Transport in Porous Media*, **42**(2001), 211–240.

[2] A. Benson, W. David, Stephen Wheatcraft and Mark M. Meerschaert, The fractional-order governing equation of Levy motion, *Water resources research*, **36**(2000), 1413-1423.

[3] V. Gafiychuk, B. Datsko and V. Meleshko, Mathematical modeling of time fractional reaction-diffusion systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **220**(2008), 215-225.

[4] R. Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, Singapore: World Scientific. 2000.

- [5] R. L. Magin, Fractional calculus in bioengineering, New York: Begell., 2021.
- [6] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York, NY: Wiley., 1993.
- [7] O. Bavi, M. Hosseininia, M. Heydari and N. Bavi, SARS-CoV-2 rate of spread in and across tissue, groundwater and soil: A meshless algorithm for the fractional diffusion equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, **138** (2022), 108–117.
- [8] S. Traytak, The use of fractional-order derivatives for determination of the time-dependent rate constant, Chemical Physics Letters, **173**(1990), 63-66.
- [9] C. Friedrich, H. Schiesse and A. Blumen, Constitutive behavior modeling and fractional derivatives, Rheology Series, **8**(1999), 429-466.
- [10] K. A. Diethelm, A fractional calculus based model for the simulation of an outbreak of Dengue fever, Nonlinear Dyn. **71**(2013), 613-619.
- [11] L. Vinnett, M. Alvarez-Silva, A. Jaques, F. Hinojosa, and J. Yianatos, Batch flotation kinetics: Fractional calculus approach, Minerals Engineering, **77**(2015), 167-171.
- [12] S. Abo-Dahab, A. Kilany, E. A. Abdel-Salam and A. Hatem, Fractional derivative order analysis and temperature-dependent properties on p- and SV-waves reflection under initial stress and three-phase-lag model, Results in Physics, **18**(2020), 103-270.
- [13] E. El-Zahar, A. Alotaibi, A. Ebaid, A. Aljohani and J. G. Aguilar, The Riemann–Liouville fractional derivative for Ambartsumian equation, Results in Physics, **19**(2020), 103-551.
- [14] S. Butera and M. D. Paola, A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry, Annals of Physics, **350**(2014), 146-158.
- [15] N. Faraz, M. Sadaf, G. Akram, I. Zainab and Y. Khan, Effects of fractional order time derivative on the solitary wave dynamics of the generalized ZK–Burgers equation, Results in Physics, **25**(2021), 104-217.
- [16] X. Li and P. J. Wong, High order approximation to new generalized Caputo fractional derivatives and its applications, Journal of Computational Physics, **281**(2018), 787-805.
- [17] W. Tian, H. Zhou and W. Deng, A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations, Mathematics of Computation, **84**(2015), 1703-1727.
- [18] Z. Hao and W. Cao, An Improved Algorithm Based on Finite Difference Schemes for Fractional Boundary Value Problems with Nonsmooth Solution, Journal of Scientific Computing, **73**(2017), 395-415.
- [19] H. Wang and T. S. Basu, A Fast Finite Difference Method for Two-Dimensional Space-Fractional Diffusion Equations, SIAM Journal on Scientific Computing, **34** (5) (2012) , A2444-A2458.
- [20] Z. Hao, M. Park, G. Lin and Z. Cai, Finite Element Method for Two-Sided Fractional Differential Equations with Variable Coefficients: Galerkin Approach, Journal of Scientific Computing, **79**(2018), 700-717.
- [21] W. Zeng, A Space-Time Petrov-Galerkin Spectral Method for Time Fractional Fokker-Planck Equation with Nonsmooth Solution, East Asian Journal on Applied Mathematics, **10**(2020), 89-105.

- [22] M. Habibli and M. Noori Skandari, Fractional Chebyshev pseudospectral method for fractional optimal control problems, *Optimal Control Applications and Methods*, **40**(3) (2019), 558–572.
- [23] Y. Huang, F. Mohammadi Zadeh, M. Hadi Noori Skandari, H. Ahsani Tehrani and E. Tohidi, Space–time Chebyshev spectral collocation method for nonlinear time-fractional Burgers equations based on efficient basis functions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**(5) (2020), 4117–4136.
- [24] N. Peykayegan, M. Ghovatmand and M. H. Noori Skandari, On the convergence of Jacobi-Gauss collocation method for linear fractional delay differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**(2) (2020), 2237–2253.
- [25] N. Peykayegan, M. Ghovatmand and M. H. N. Skandari, An efficient method for linear fractional delay integro-differential equations. *Computational and Applied Mathematics*, **40**(7)(2021).
- [26] P. Xiaobing, X. Yang, M. H. Noori Skandari, E. Tohidi and S. Shateyi, A new high accurate approximate approach to solve optimal control problems of fractional order via efficient basis functions. *Alexandria Engineering Journal*, **61**(8)(2022), 5805–5818.
- [27] Y. Yang and H. M. Noori Skandari, Pseudospectral method for fractional infinite horizon optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*, **41**(6)(2020), 2201–2212.
- [28] Y. Zhang, X. Liu, M. R. Belić, W. Zhong, Y. Zhang and M. Xiao, Propagation Dynamics of a Light Beam in a Fractional Schrödinger Equation, *Physical Review Letters*, **115**(18)(2015), 180403.
- [29] D. del Castillo-Negrete and L. Chac on, Parallel heat transport in integrable and chaotic magnetic fields, *Phys. Plasmas*, **19**(5) (2012), 056112.
- [30] Y. Zhang, M. M. Meerschaert and R. M. Neupauer, Backward fractional advection dispersion model for contaminant source prediction, *Water Resour. Res.*, **52**(2016), 2462–2473.
- [31] L. P lociniczak, Analytical studies of a time-fractional porous medium equation. Derivation, approximation and applications, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **24**(2015), 169–183.
- [32] R. Metzler, J. H. Jeon, A. G. Cherstvy and E. Barkai, Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **16**(2014), 24128–24164.
- [33] M. Yamamoto, Asymptotic expansion of solutions to the dissipative equation with fractional Laplacian, *SIAM J. Math. Anal.*, **44**(2012), 3786–3805.
- [34] P. Constantin and J. Wu, Behavior of solutions of 2D Quasi-geostrophic equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **30**(1999), 937–948.
- [35] A. de Pablo, F. Quirós, A. Rodríguez, & J. L. Vazquez, A fractional porous medium equation, *Adv. Math.*, **226**(2011), 1378–1409.
- [36] S. Duo, L. Ju and Y. Zhang, A fast algorithm for solving the space–time fractional diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **75**(6)(2018), 1929–1941.
- [37] H. Ye, F. Liu, V. Anh and I. Turner, Maximum principle and numerical method for the multi-term time–space Riesz–Caputo fractional differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, **227** (2014), 531–540.

- [38] M. Stynes, E. Oriordan and J. L. Gracia, Error Analysis of a Finite Difference Method on Graded Meshes for a Time-Fractional Diffusion Equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **55**(2017), 1057-1079.
- [39] C. Li and F. Zeng, *Numerical methods for fractional calculus*, Boca Raton, FL: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.
- [40] M. Chen, W. Deng and Y. Wu, Superlinearly convergent algorithms for the two-dimensional space-time Caputo-Riesz fractional diffusion equation, *Applied Numerical Mathematics*, **70**(2013), 22-41.



Numerical investigation of a new difference scheme on a graded mesh for solving the time-space fractional sub-diffusion equations with nonsmooth solutions

M. Fardi^{1, †}, E. Amini²

(¹) Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, Shahrekord University, Shahrekord, P. O. Box 115, Iran.

(²) Department of Mathematics, Payme Noor University, P. O. Box 19395-4697 Tehran, IRAN.

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Received: 2021/11/5

Accepted: 2022/6/17

Abstract: In this paper, we provide a new difference scheme on a graded mesh for solving the time-space fractional diffusion problem. In this equation the time derivative is the Caputo of order $\gamma \in (0, 1)$ and the space derivative is the Riesz of order $\alpha \in (1, 2]$. The stability and convergence of the difference scheme are discussed which provides the theoretical basis of the proposed schemes. We prove that the new difference scheme is unconditionally stable. Also, we find that the difference scheme is convergent with order $\min\{2 - \gamma, r\gamma\}$, where $r \geq 1$, in time for all $\gamma \in (0, 1)$ and $\alpha \in (1, 2]$. A test example is given to verify the efficiency and accuracy of the difference scheme.

Keywords: Caputo derivative, Riesz derivative, Sub-diffusion equation, Graded mesh.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: m.fardi@sku.ac.ir (M. Fardi).