



## روش ماتریسی جدید برای حل تقریبی یک مدل جدید لین-امدن تابعی منفرد غیرخطی

محمد ایزدی \*

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دبیر مسئول: محمود محسنی مقدم

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۴/۱۸

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۳/۲۱

چکیده: مطالعه حاضر به یافتن جواب‌های تقریبی یک مدل جدید از دستگاه معادلات لین-امدن منفرد غیرخطی مرتبه دوم با شرایط مرزی اختصاص داده شده است. روش ماتریسی پیش‌نهادی ما بر اساس توابع چلیشکوف به همراه نقاط هم‌محلی است تا دستگاه غیرخطی را به یک معادله ماتریسی اساسی جبری تبدیل کند. هم‌گرایی روش طیفی چلیشکوف نیز اثبات شده است. برای نشان دادن کارایی و دقت روش ارائه شده، سه مثال به صورت عددی حل شده است. هم‌چنین، مقایسه‌هایی با جواب‌های دقیق و با یک روش موجود در منابع انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: توابع چلیشکوف، نقاط هم‌محلی، معادلات دیفرانسیل تابعی، دستگاه لین-امدن منفرد.

رده‌بندی ریاضی: 65L60; 34K07

### ۱ مقدمه

هدف این مقاله، یافتن جواب‌های تقریبی یک دستگاه معادلات غیرخطی منفرد از نوع لین-امدن با یک روش ماتریسی بر اساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و نقاط هم‌محلی است. به‌طور دقیق‌تر، ما به معادلات دیفرانسیل تابعی مرتبه دوم زیر می‌پردازیم [۱]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2}(a\tau + b) + \frac{\gamma_1}{\tau} \frac{dX}{d\tau}(c\tau + d) + Y(\tau) X(e\tau + f) = g_1(\tau), \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2}(a\tau + b) + \frac{\gamma_2}{\tau} \frac{dY}{d\tau}(c\tau + d) + X(\tau) Y(e\tau + f) = g_2(\tau), \end{cases} \quad 0 < \tau < 1, \quad (1.1)$$

\*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: izadi@uk.ac.ir (M. Izadi)

که در آن مقادیر  $a, b, c, d, e, f$  و  $\gamma_1, \gamma_2$  ثابت‌اند، توابع  $g_i(\tau)$  برای  $i = 1, 2$  معلوم‌اند و شرایط مرزی (نویمن) زیر به همراه مدل (۱.۱) داده می‌شوند:

$$X'(0) = x_0, \quad X(1) = x_1, \quad Y'(0) = y_0, \quad Y(1) = y_1. \quad (1.2)$$

مسئله وجود جواب برای حالت کلی معادلات لین-امدن جفت‌شده تحت شرایط مرزی دیریکله همگن در منبع [۳۲] مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تابعی به شکل (۱.۱) دارای کاربردهای فراوانی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی است. از جمله می‌توان به مدل نرخ رشد جمعیت [۱۹]، الکترودینامیک [۵]، مدل واگیردار اچ-آی-وی [۲۸]، نرخ رشد مدل تومور [۲۸]، مدل جنبش‌های شیمیایی [۲۴]، مدل واگیردار ویروس هپاتیت B [۸]، و دستگاه تنظیم‌کننده ژن [۲] اشاره نمود. حالت‌های دیگر از مدل فوق تحت عنوان مدل لین-امدن جفت‌شده با شرایط اولیه و مرزی گوناگون نیز در منابع ذکر شده‌اند [۲۳، ۷]. حالت یک بعدی دستگاه معادلات فوق نیز در منابع [۱۵، ۱۶] مورد توجه قرار گرفته‌اند. با این وجود، روش‌های تحلیلی و تقریبی اندکی در منابع برای حل این دسته از معادلات معرفی شده است. از جمله می‌توان به روش تجزیه آدومیان در مقالات [۲۳، ۶] اشاره نمود. روش تکراری وردشی نیز در [۲۹] معرفی شده است. همچنین روش هم‌محلی سینک و روش فضای هیلبرت نیز در مقالات پژوهشی [۲۵، ۹] برای معادلات جفت‌شده توسعه داده شده است. در نهایت، روش ترکیبی از تابع گرین و تجزیه آدومیان در [۲۶] جدیداً مورد توجه قرار گرفته شده است.

روش‌های هم‌محلی بر اساس چندجمله‌ای‌های (متعامد) سابقه طولانی برای حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال دارند. از جمله می‌توان به کارهای پژوهشی [۲۲، ۳۰] اشاره نمود. همچنین نویسنده مقاله هم تجربیات گوناگونی با روش هم‌محلی با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر، بسل، چیبیشف و غیره برای حل مسائل مهم و کاربردی داشته است [۱۰، ۱۱، ۱۳]. در مقاله حاضر، یک روش ماتریسی بر اساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و نقاط هم‌محلی برای حل دستگاه معادلات غیرخطی (۱.۱) ارائه شده است. این چندجمله‌ای‌ها برای اولین بار در مقالات [۳، ۴] معرفی شدند. سپس مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. از جمله می‌توان به مقالات [۱۲، ۱۷، ۲۰] اشاره نمود که اخیراً انتشار یافته‌اند. به‌علاوه، استفاده از رهیافت ماتریسی بر اساس چندجمله‌ای‌های بسل، لژاندر و مُرگان-ویس در مقالات [۱۴، ۱۸، ۳۱] صورت گرفته است و کارایی و دقت این رهیافت برای مدل‌های دستگاهی متفاوتی مورد تأیید قرار گرفته است.

فصل‌بندی مطالب این پژوهش به‌صورت زیر است. در بخش بعد، ابتدا به مروری بر چندجمله‌ای‌های چلیشکوف پرداخته شده است. سپس، خاصیت هم‌گرایی آن‌ها بیان و ثابت شده است. در بخش ۳، جزئیات روش ماتریسی چلیشکوف بیان شده است و شرایط مرزی نیز به‌شکل ماتریسی نمایش داده شده‌اند. در بخش ۴، کارایی و دقت روش توسط مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در نهایت، بخش ۵ به نتیجه‌گیری نتایج مقاله اختصاص یافته شده است.

## ۲ مروری بر چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و اثبات هم‌گرایی آن‌ها

چندجمله‌ای‌های چلیشکوف برای اولین بار توسط چلیشکوف و از طریق چندجمله‌ای‌های کلاسیک ژاکوبی معرفی شدند [۳، ۴]. به‌عبارتی، اگر  $P_c^{a,b}(\eta)$  که در آن  $a, b > -1$  و  $c \geq 0$  دلالت بر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی کنند، آن‌گاه به‌ازای مقدار خاص از پارامترهای  $c, a, b$  به چندجمله‌ای‌های چلیشکوف به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$C_{R,r}(\tau) = (-1)^{R-r} \tau^r P_{R-r}^{0,2r+1}(2\tau - 1), \quad r = 0, 1, \dots, R.$$

در مقالات ذکرشده، نشان داده شده است که این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزنی  $\omega(\tau) \equiv 1$  متعامدند، یعنی داریم:

$$\int_0^1 C_{R,r}(\tau) C_{R,r'}(\tau) \omega(\tau) d\tau = \frac{\delta_{rr'}}{2r+1}, \quad r, r' \geq 0.$$

در این‌جا  $\delta_{rr'}$  تابع دلتای کرونکر است. به‌علاوه، فرمول صریح چندجمله‌ای‌های چلیشکوف با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$C_{R,r}(\tau) = \sum_{j=r}^R (-1)^{j-r} \binom{R-r}{j-r} \binom{R+j+1}{R-r} \tau^k, \quad r = 0, 1, \dots, R. \quad (1.2)$$

در ادامه، بردار پایه‌ای شامل چندجمله‌ای‌های چلیشکوف از مرتبه صفر تا مرتبه  $R$  را به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$\mathbf{C}_R(\tau) = [C_{R,0}(\tau) \quad C_{R,1}(\tau) \quad \dots \quad C_{R,R}(\tau)] = \mathbf{M}_R(\tau) \mathbf{Q}_R^T, \quad (2.2)$$

که در آن  $\mathbf{M}_R(\tau)$  بردار شامل توابع پایه‌ای با ضرایب پیش‌رو یک است و به‌شکل زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{M}_R(\tau) = [1 \quad \tau \quad \tau^2 \quad \dots \quad \tau^R].$$

در این جا، ماتریس پایین مثلثی  $Q_R$  از اندازه  $(R+1) \times (R+1)$  است و دارای نمایش ماتریسی زیر برای  $R$  فرد است:

$$Q_R = \begin{pmatrix} \binom{R+1}{R} \binom{R}{\circ} & \circ & \dots & \circ & \circ \\ -\binom{R+2}{R} \binom{R}{1} & \binom{R+2}{R-1} \binom{R-1}{\circ} & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{2R}{R} \binom{R}{R-1} & -\binom{2R}{R-1} \binom{R-1}{R-2} & \dots & \binom{2R}{1} \binom{1}{\circ} & \circ \\ -\binom{2R+1}{R} \binom{R}{R} & \binom{2R+1}{R-1} \binom{R-1}{R-1} & \dots & \binom{2R+1}{1} \binom{1}{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

بیان ماتریس  $Q_R$  برای  $R$  زوج به صورت زیر است:

$$Q_R = \begin{pmatrix} \binom{R+1}{R} \binom{R}{\circ} & \circ & \dots & \circ & \circ \\ -\binom{R+2}{R} \binom{R}{1} & \binom{R+2}{R-1} \binom{R-1}{\circ} & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\binom{2R}{R} \binom{R}{R-1} & \binom{2R}{R-1} \binom{R-1}{R-2} & \dots & \binom{2R}{1} \binom{1}{\circ} & \circ \\ \binom{2R+1}{R} \binom{R}{R} & -\binom{2R+1}{R-1} \binom{R-1}{R-1} & \dots & -\binom{2R+1}{1} \binom{1}{1} & 1 \end{pmatrix}.$$

هدف غایی ما نوشتن جواب های مدل مسئله (۱.۱) به صورت ترکیب خطی از توابع چلیشکوف است:

$$X(\tau) \approx X_R(\tau) = \sum_{r=0}^R a_{r,1} C_{R,r}(\tau), \quad Y(\tau) \approx Y_R(\tau) = \sum_{r=0}^R a_{r,2} C_{R,r}(\tau). \quad (3.2)$$

با معرفی بردار مجهولات  $\mathbf{A}_j = [a_{\circ,j} \ a_{1,j} \ \dots \ a_{R,j}]^T$  برای  $j = 1, 2$  و به کارگیری رابطه (۲.۲)، می توان جواب های تقریبی فوق را به صورت فشرده زیر بیان نمود:

$$X_R(\tau) = \mathbf{C}_R(\tau) \mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_R(\tau) \mathbf{Q}_R^T \mathbf{A}_1, \quad Y_R(\tau) = \mathbf{C}_R(\tau) \mathbf{A}_2 = \mathbf{M}_R(\tau) \mathbf{Q}_R^T \mathbf{A}_2. \quad (4.2)$$

در ادامه، خاصیت هم گرایی توابع چلیشکوف مورد بررسی قرار می گیرد. در این راستا، فضای تولید شده توسط این توابع را در نظر می گیریم:

$$\mathbb{V}_R := \text{span}\{C_{R,\circ}, C_{R,1}, \dots, C_{R,R}\}.$$

در این صورت نتیجه هم گرایی زیر برای جواب تقریبی  $X_R(\tau)$  بیان و اثبات می شود. اثبات مشابه برای  $Y_R(\tau)$  برقرار است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم  $X(\tau) \in \mathcal{C}^{R+1}(\circ, 1]$  و  $X_R(\tau) = \mathbf{C}_R(\tau) \mathbf{A}_1$  دلالت بر بهترین تقریب تابع  $X(\tau)$  در نرم  $L_{2,\omega}$  باشد. در این صورت یک کران بالا برای خطای تقریب به شکل زیر داده می شود:

$$\|X(\tau) - X_R(\tau)\|_{\omega} \leq \frac{S_{\infty}}{\sqrt{2R+3} (R+1)!}, \quad S_{\infty} := \sup_{\tau \in (\circ, 1]} |X^{(R+1)}(\tau)|.$$

اثبات. با استفاده از بسط تیلور تابع  $X(\tau)$  روی بازه  $[\circ, 1]$  داریم:

$$X(\tau) = X(\circ^+) + X'(\circ^+) \tau + X''(\circ^+) \frac{\tau^2}{2!} + \dots + X^{(R)}(\circ^+) \frac{\tau^R}{R!} + X^{(R+1)}(q_\tau) \frac{\tau^{R+1}}{(R+1)!},$$

که در آن  $q_\tau \in (\circ, \tau)$ . همچنین فرمول خطای باقی‌مانده برای تقریب  $\chi_R(\tau) = \sum_{r=\circ}^R \frac{X^{(r)}(\circ^+) \tau^r}{r!}$  در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$|X(\tau) - \chi_R(\tau)| = \frac{1}{(R+1)!} |X^{(R+1)}(q_\tau) \tau^{R+1}|.$$

از طرفی چون تابع  $X_R(\tau)$  بهترین تقریب جواب  $X(\tau)$  در فضای  $\mathbb{V}_R$  است، بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\|X(\tau) - X_R(\tau)\|_\omega \leq \|X(\tau) - V(\tau)\|_\omega, \quad \forall V \in \mathbb{V}_R.$$

اکنون با انتخاب ویژه  $V(\tau) := \chi_R(\tau)$  در نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \|X(\tau) - X_R(\tau)\|_\omega^2 &\leq \|X(\tau) - \chi_R(\tau)\|_\omega^2 = \int_\circ^1 |X(\tau) - \chi_R(\tau)|^2 \omega(\tau) d\tau \\ &= \int_\circ^1 \left| \frac{X^{(R+1)}(q_\tau) \tau^{R+1}}{(R+1)!} \right|^2 \omega(\tau) d\tau \leq \left[ \frac{S_\infty}{(R+1)!} \right]^2 \int_\circ^1 \tau^{2R+2} d\tau \\ &\leq \left[ \frac{S_\infty}{(R+1)!} \right]^2 \int_\circ^1 \tau^{2R+2} d\tau = \left[ \frac{S_\infty}{(R+1)!} \right]^2 \frac{1}{2R+3}, \end{aligned}$$

□

با گرفتن جذر از طرفین رابطه بالا، اثبات کامل می‌شود.

### ۳ روش ماتریسی مبتنی بر توابع چلیشکوف

ابتدا، دستگاه معادلات (۱.۱) را به فرم ماتریسی بازنویسی می‌کنیم. با معرفی ماتریس و بردارهای زیر

$$\mathbf{z}(\tau) = \begin{pmatrix} X(\tau) \\ Y(\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1}{\tau} & \circ \\ \circ & \frac{\gamma_2}{\tau} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\tau) = \begin{pmatrix} g_1(\tau) \\ g_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix},$$

به نمایش فشرده دستگاه معادلات (۱.۱) به صورت زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{z}^{(2)}(a\tau + b) + \mathbf{K}(\tau) \mathbf{z}^{(1)}(c\tau + d) + \mathbf{L}_1 \mathbf{z}_{11}(e\tau + f) + \mathbf{L}_2 \mathbf{z}_{12}(e\tau + f) = \mathbf{g}(\tau), \quad \circ < \tau < 1, \quad (1.3)$$

که در آن جملات غیرخطی  $\mathbf{z}_{12}(e\tau + f)$  و  $\mathbf{z}_{11}(e\tau + f)$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{z}_{11}(e\tau + f) = [Y(\tau) X(e\tau + f)], \quad \mathbf{z}_{12}(e\tau + f) = [X(\tau) Y(e\tau + f)].$$

در گام بعدی ما به معرفی نقاط هم‌محلی  $\{\tau_j\}_{j=\circ}^R$  می‌پردازیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tau_j = \eta + \frac{(1-\eta)j}{R}, \quad j = \circ, 1, \dots, R, \quad \circ < \eta < 1. \quad (2.3)$$

توجه کنیم در این جا پارامتر  $\eta$  به گونه‌ای اختیار می‌شود که نقطه صفر جزو نقاط هم‌محلی قرار نمی‌گیرد. سپس، جواب‌های تقریبی  $X_R(\tau)$  و  $Y_R(\tau)$  در رابطه (۱.۳) جانشین می‌کنیم و  $\mathbf{z}_R(\tau) \approx \mathbf{z}(\tau)$  را به عنوان جواب تقریبی آن در نظر می‌گیریم. با جانشینی نقاط هم‌محلی (۲.۳) در معادلات (۱.۳) برای  $j = \circ, 1, \dots, R$  نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{z}_R^{(2)}(a\tau_j + b) + \mathbf{K}(\tau_j) \mathbf{z}_R^{(1)}(c\tau_j + d) + \mathbf{L}_1 (\mathbf{z}_R)_{11}(e\tau_j + f) + \mathbf{L}_2 (\mathbf{z}_R)_{12}(e\tau_j + f) = \mathbf{g}(\tau_j).$$

در نمایش ماتریسی، می‌توان معادلات فوق را به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{Z}_{a,b}^{(2)} + \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{Z}_{c,d}^{(1)} + \widehat{\mathbf{L}}_1 \mathbf{Z}_{e,f}^{(1)} + \widehat{\mathbf{L}}_2 \mathbf{Z}_{e,f}^{(2)} = \mathbf{G}, \quad (3.3)$$

که در آن برای  $i, j = 1, 2$  داریم:

$$\mathbf{Z}_{a,b}^{(2)} = \begin{pmatrix} z_R^{(2)}(a\tau_0 + b) \\ z_R^{(2)}(a\tau_1 + b) \\ \vdots \\ z_R^{(2)}(a\tau_R + b) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{c,d}^{(1)} = \begin{pmatrix} z_R^{(1)}(c\tau_0 + d) \\ z_R^{(1)}(c\tau_1 + d) \\ \vdots \\ z_R^{(1)}(c\tau_R + d) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{e,f}^{ij} = \begin{pmatrix} (z_R)_{ij}(e\tau_0 + f) \\ (z_R)_{ij}(e\tau_1 + f) \\ \vdots \\ (z_R)_{ij}(e\tau_R + f) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}(\tau_0) & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \mathbf{K}(\tau_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \mathbf{K}(\tau_R) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{L}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_j & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \mathbf{L}_j & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \mathbf{L}_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\tau_0) \\ \mathbf{g}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\tau_R) \end{pmatrix}.$$

هدف ما در ادامه بیان بردارهای مجهولات برحسب ماتریس‌ها و بردارهای بخش قبل است. برای این منظور، ابتدا توجه کنیم که می‌توان بردار جواب تقریبی  $\mathbf{z}_R(\tau) = [X_R(\tau), Y_R(\tau)]^T$  را با توجه به روابط (۴.۲) به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{z}_R(\tau) = \widehat{\mathbf{M}}(\tau) \widehat{\mathbf{Q}} \mathbf{A}, \quad (4.3)$$

که در آن

$$\widehat{\mathbf{M}}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_R(\tau) & \circ \\ \circ & \mathbf{M}_R(\tau) \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_R^T & \circ \\ \circ & \mathbf{Q}_R^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، بر اساس رابطه (۴.۳) و مشتق‌گیری و جای‌گذاری  $(a\tau + b)$  و  $(c\tau + d)$  می‌توان بردارهای  $\mathbf{Z}_{c,d}^{(1)}$  و  $\mathbf{Z}_{a,b}^{(2)}$  در رابطه (۳.۳) را محاسبه نمود. در این راستا، ابتدا  $\mathbf{z}_R$  را بیان و اثبات می‌کنیم

لم ۱.۳. الف) رابطه بین  $\mathbf{M}_R(\tau)$  و مشتقات آن  $\frac{d^k}{d\tau^k} \mathbf{M}_R(\tau)$  برای  $k = 1, 2$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{d^k}{d\tau^k} \mathbf{M}_R(\tau) = \mathbf{M}_R(\tau) (\mathbf{B}^T)^k, \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \ddots & R \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix}_{(R+1) \times (R+1)}. \quad (5.3)$$

ب) رابطه بین  $\mathbf{M}_R(\tau)$  و  $\mathbf{M}_R(\alpha\tau + \beta)$  و مشتقات آن  $\frac{d^k}{d\tau^k} \mathbf{M}_R(\alpha\tau + \beta)$  برای  $k = 1, 2$  و ثابت‌های دلخواه  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  به صورت زیر بیان می‌شود

$$\frac{d^k}{d\tau^k} \mathbf{M}_R(\alpha\tau + \beta) = \mathbf{M}_R(\tau) (\mathbf{B}^T)^k \mathbf{N}_{\alpha,\beta}^T, \quad (6.3)$$

که در آن ماتریس  $\mathbf{N}_{\alpha,\beta}^T$  وابسته به پارمترهای  $\alpha, \beta$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{N}_{\alpha,\beta}^T = \begin{pmatrix} \binom{R}{0} \alpha^0 \beta^0 & \binom{R}{1} \alpha^0 \beta^1 & \binom{R}{2} \alpha^0 \beta^2 & \dots & \binom{R}{R} \alpha^0 \beta^R \\ \circ & \binom{R}{1} \alpha^1 \beta^0 & \binom{R}{2} \alpha^1 \beta^1 & \dots & \binom{R}{R} \alpha^1 \beta^{R-1} \\ \circ & \circ & \binom{R}{2} \alpha^2 \beta^0 & \dots & \binom{R}{R} \alpha^2 \beta^{R-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \binom{R}{R} \alpha^R \beta^0 \end{pmatrix}.$$

اثبات. برای اثبات «الف»، به سادگی دیده می‌شود که رابطه برای  $k = 1$  برقرار است. به ازای  $k > 1$  اثبات با تکیه بر استقراء نتیجه می‌شود. برای اثبات «ب»، طبق تعریف  $M_R(\tau)$  بنابر رابطه (۲.۲) داریم:

$$M_R(\alpha\tau + \beta) = [1 \quad (\alpha\tau + \beta) \quad (\alpha\tau + \beta)^2 \quad \dots \quad (\alpha\tau + \beta)^R].$$

برای محاسبه مولفه‌های این بردار از بسط دوجمله‌ای کمک می‌گیریم:

$$(\alpha\tau + \beta)^r = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \alpha^i \beta^{r-i} \tau^i, \quad r = 0, 1, \dots, R.$$

لذا با توجه به تعریف ماتریس  $N_{\alpha,\beta}$  می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$M_R(\alpha\tau + \beta) = M_R(\tau) N_{\alpha,\beta}^T.$$

□ اکنون با مشتق‌گیری از رابطه فوق و به کارگیری قسمت «الف» لم، حکم قسمت «ب» اثبات می‌شود.

لم ۲.۳. نمایش ماتریسی توابع  $\frac{d}{d\tau} z_R(c\tau + d)$  و  $\frac{d^2}{d\tau^2} z_R(a\tau + b)$  در نقاط هم‌محلی (۲.۳) به صورت زیر است:

$$Z_{c,d}^{(1)} = M \hat{B}_1 \hat{N}_{c,d} \hat{Q} A, \quad (7.3)$$

$$Z_{a,b}^{(2)} = M \hat{B}_2 \hat{N}_{a,b} \hat{Q} A, \quad (8.3)$$

که در آن ماتریس‌های  $\hat{N}_{c,d}$ ,  $\hat{N}_{a,b}$  و  $\hat{B}_1$ ,  $\hat{B}_2$  در روابط (۹.۳)-(۱۰.۳) تعریف شده‌اند و داریم:

$$M = [\hat{M}(\tau_0) \quad \hat{M}(\tau_1) \quad \dots \quad \hat{M}(\tau_R)]^T.$$

اثبات. ابتدا توجه کنیم که با به کارگیری رابطه (۴.۳) و جانشینی  $(\alpha\tau + \beta)$  نتیجه می‌شود:

$$z_R(\alpha\tau + \beta) = \hat{M}(\alpha\tau + \beta) \hat{Q} A = \hat{M}(\tau) \hat{N}_{\alpha,\beta} \hat{Q} A, \quad \hat{N}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} N_{\alpha,\beta}^T & \circ \\ \circ & N_{\alpha,\beta}^T \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

به علاوه، مشتقات مرتبه اول و دوم آن نیز به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\frac{d^k}{d\tau^k} z_R(\alpha\tau + \beta) = \frac{d^k}{d\tau^k} \hat{M}(\alpha\tau + \beta) \hat{Q} A = \hat{M}(\tau) \hat{B}_k \hat{N}_{\alpha,\beta} \hat{Q} A, \quad \hat{B}_k = \begin{pmatrix} (B^T)^k & \circ \\ \circ & (B^T)^k \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

□ اکنون با جانشینی نقاط هم‌محلی (۲.۳) و قراردادن مقادیر  $a, b, c, d$  به جای  $\alpha, \beta$  اثبات کامل است.

در ادامه تنها کافی است جملات غیرخطی  $Z_{e,f}^{11}$  و  $Z_{e,f}^{21}$  در رابطه (۳.۳) مشخص شوند. در این زمینه لم زیر بیان می‌شود:

لم ۳.۳. نمایش ماتریسی توابع  $(z_R)_{21}(e\tau + f)$  و  $(z_R)_{12}(e\tau + f)$  در نقاط هم‌محلی (۲.۳) به صورت زیر است:

$$Z_{e,f}^{21} = \tilde{M} \tilde{Q} \tilde{A}_2 \tilde{M} \tilde{Q}_{e,f}^{21} A, \quad (11.3)$$

$$Z_{e,f}^{12} = \tilde{M} \tilde{Q} \tilde{A}_1 \tilde{M} \tilde{Q}_{e,f}^{12} A, \quad (12.3)$$

که در آن ماتریس‌های  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}_{e,f}^{ij}$  برای  $i, j = 1, 2$  در روابط (۱۴.۳)-(۱۶.۳) تعریف شده‌اند.

اثبات. نخست، با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی (۲.۳) در عبارت  $(z_R)_{21}(e\tau + f)$  داریم:

$$Z_{e,f}^{21} = \begin{pmatrix} (z_R)_{21}(\tau_0) \\ (z_R)_{21}(\tau_1) \\ \vdots \\ (z_R)_{21}(\tau_R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_R(\tau_0) \cdot X_R(e\tau_0 + f) \\ Y_R(\tau_1) \cdot X_R(e\tau_1 + f) \\ \vdots \\ Y_R(\tau_R) \cdot X_R(e\tau_R + f) \end{pmatrix},$$

که می توان آن را به شکل زیر بیان نمود:

$$Z_{e,f}^{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} Y_R(\tau_0) & \circ & \dots & \circ \\ \circ & Y_R(\tau_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & Y_R(\tau_R) \end{pmatrix}}_{\tilde{Y}} \underbrace{\begin{pmatrix} X_R(e\tau_0 + f) \\ X_R(e\tau_1 + f) \\ \vdots \\ X_R(e\tau_R + f) \end{pmatrix}}_{\tilde{X}}. \quad (13.3)$$

لذا طبق فرض اولیه ما، یعنی روابط (۴.۲) می توان ماتریس  $\tilde{Y}$  را به فرم زیر نمایش داد:

$$\tilde{Y} = \tilde{M} \tilde{Q} \tilde{A}_2, \quad (14.3)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_R(\tau_0) & \circ & \dots & \circ \\ \circ & M_R(\tau_1) & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & M_R(\tau_R) \end{pmatrix}, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_R^T & \circ & \dots & \circ \\ \circ & Q_R^T & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & Q_R^T \end{pmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & A_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & A_2 \end{pmatrix}$$

همچنین بنابر (۴.۲) و لم های قبل می توان نوشت  $X_R(e\tau + f) = M_R(\tau) N_{e,f}^T Q_R^T A_1$ . بنابراین، یک نمایش برای تقریب  $\tilde{X}$  در عبارت (۱۳.۳) می تواند به صورت زیر باشد:

$$\tilde{X} = \tilde{M} \tilde{Q}_{e,f}^{21} A, \quad (15.3)$$

که در آن

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_R(\tau_0) \\ M_R(\tau_1) \\ \vdots \\ M_R(\tau_R) \end{pmatrix}, \tilde{Q}_{e,f}^{21} = (N_{e,f}^T \quad Q_R^T \quad Z), \quad Z = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix}_{(R+1) \times (R+1)}$$

با جانشینی روابط (۱۴.۳)-(۱۵.۳) در (۱۳.۳) اثبات قسمت اول کامل می شود. برای اثبات قسمت دوم، با تعویض نقش  $X_R$  و  $Y_R$  و به طریق مشابه اثبات می شود. در این جا، ماتریس های  $\tilde{A}_1$  و  $\tilde{Q}_{e,f}^{12}$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & A_1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & A_1 \end{pmatrix}, \tilde{Q}_{e,f}^{12} = (Z \quad N_{e,f}^T \quad Q_R^T). \quad (16.3)$$

□

در نهایت، با جانشینی بردارهای به دست آمده در (۷.۳)-(۱۲.۳) در رابطه (۳.۳) به معادله ماتریس اساسی زیر می رسیم:

$$\underbrace{\left\{ M \hat{B}_2 \hat{N}_{a,b} \hat{Q} + \hat{K} M \hat{B}_1 \hat{N}_{c,d} \hat{Q} + \hat{L}_1 \tilde{M} \tilde{Q} \tilde{A}_2 \tilde{M} \tilde{Q}_{e,f}^{21} + \hat{L}_2 \tilde{M} \tilde{Q} \tilde{A}_1 \tilde{M} \tilde{Q}_{e,f}^{12} \right\}}_W A = G. \quad (17.3)$$

یا به طور خلاصه، دستگاه معادلات ماتریسی فوق را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$[W; G].$$

توجه کنیم که با حل معادلات ماتریسی بالا،  $(R+1)$  ضرایب مجهول  $a_{r,j}$  برای  $r = 0, 1, \dots, R$  و  $j = 1, 2$  که به عنوان ضرایب چلیشکوف در نظر گرفته شدند، پیدا می‌شوند. همچنین توجه داشته باشید شرایط مرزی (۲.۱) تاکنون در معادله ماتریسی (۱۷.۳) وارد نشده‌اند. این شرایط در فرم ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{dz_R}{d\tau}(\circ) = \begin{pmatrix} X'_R(\circ) \\ Y'_R(\circ) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_\circ \\ y_\circ \end{pmatrix}}_{G_\circ}, \quad z_R(1) = \begin{pmatrix} X_R(1) \\ Y_R(1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{G_1}.$$

ابتدا به شرط دوم می‌پردازیم. در این راستا، کافی است در رابطه (۴.۳)،  $\tau$  را به سمت ۱ میل دهیم. بنابراین داریم:

$$\widetilde{W}_1 A = G_1, \quad \widetilde{W}_1 := \widehat{M}(1) \widehat{Q}.$$

برای شرط نویمن در نقطه صفر، ابتدا از رابطه (۴.۳) نسبت به  $\tau$  مشتق می‌گیریم. سپس با استفاده از (۱.۳) قسمت «الف» نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{dz_R(\tau)}{d\tau} = \widehat{M}(\tau) \widehat{B} \widehat{Q} A.$$

در نتیجه، کافی است که در رابطه قبل  $\tau$  را به سمت ۰ میل دهیم تا به دست آوریم:

$$\widetilde{W}_0 A = G_0, \quad \widetilde{W}_0 := \widehat{M}(0) \widehat{B} \widehat{Q}.$$

اکنون، کافی است دو سطر از ماتریس اساسی  $[W; G]$  با سطرهای ماتریسی  $[\widetilde{W}_0; G_0]$  و  $[\widetilde{W}_1; G_1]$  تعویض شوند. با این اعمال جانشینی‌ها، به دستگاه افزوده تغییر یافته زیر می‌رسیم:

$$\widetilde{W} A = \widetilde{G}, \quad \text{یا} \quad [\widetilde{W}; \widetilde{G}]. \quad (18.3)$$

بنابراین ضرایب نامعلوم چلیشکوف در (۱۷.۳) از طریق حل (۱۸.۳) مشخص می‌شوند. این کار را معمولاً می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های غیرخطی همانند روش نیوتن انجام داد. هنگامی که بردار مجهول  $A$  پیدا شد، مقادیر  $a_{r,j}$  (برای  $r = 0, 1, \dots, R$ ،  $j = 1, 2$ ) را در رابطه (۴.۲) قرار می‌دهیم تا جواب‌های تقریبی دستگاه (۱.۱) مشخص شوند. در مورد حل‌پذیری دستگاه ماتریسی (۱۸.۳) ذکر این نکته ضروری است که در صورتی که رتبه ماتریس افزوده  $[\widetilde{W}; \widetilde{G}]$  برابر با رتبه  $\widetilde{W}$  باشد، آن‌گاه جواب دستگاه یکتا است و این جواب مورد بحث از طریق ضرب معکوس آن در طرفین رابطه حاصل می‌شود. در غیر این صورت، جواب دستگاه ممکن است یا وجود نداشته باشد و یا یک جواب خاص داشته باشیم.

## ۴ شبیه‌سازی‌های عددی

در این بخش، با استفاده از مثال‌های عددی به بررسی کارایی و دقت روش هم‌محلی براساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف می‌پردازیم که در بخش قبل توصیف شد. کلیه محاسبات عددی توسط نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی و اجرا شده‌اند. همچنین برای ارزیابی خطاها، ما به محاسبه خطاهای مطلق برای  $\tau \in [0, 1]$  به صورت زیر می‌پردازیم:

$$\mathcal{E}_R^X(\tau) := |X(\tau) - X_R(\tau)|, \quad \mathcal{E}_R^Y(\tau) := |Y(\tau) - Y_R(\tau)|.$$

علاوه بر این، برای محاسبه نرم بی‌نهایت مقادیر خطاها قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{E}_R^{X,\infty} := \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{E}_R^X, \quad \mathcal{E}_R^{Y,\infty} := \max_{\tau \in [0,1]} \mathcal{E}_R^Y.$$

مثال ۱.۴. به عنوان مثال اول، به دستگاه معادلات نامنفرد زیر روی  $(0, 1)$  توجه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2}(\tau) + \frac{2}{\tau} \frac{dX}{d\tau}(\tau) + Y(\tau) X(\tau) = -\tau^6 - 3\tau^5 - 3\tau^4 - \tau^3 + 3\tau^2 + 96\tau - 4, \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2}(\tau) + \frac{2}{\tau} \frac{dY}{d\tau}(\tau) + X(\tau) Y(\tau) = -\tau^6 - 3\tau^5 - 3\tau^4 - \tau^3 - 3\tau^2 - 69\tau + 6. \end{cases}$$

شرایط اولیه به صورت  $X(1) = 2$ ،  $X'(0) = 0$ ،  $Y(1) = 0$ ،  $Y'(0) = 0$  داده شده‌اند. می‌توان نشان داد که جواب‌های دقیق دستگاه فوق به فرم زیرند:

$$X(\tau) = 1 + \tau^3, \quad Y(\tau) = 1 - \tau^3.$$



برای این مثال، کافی است قرار دهیم  $R = 3$ . در این حالت، نقاط هم‌محل به صورت  $\{1, \frac{67}{100}, \frac{17}{50}, \frac{1}{100}\}$  در نظر گرفته می‌شوند. با در نظر گرفتن جواب‌های مسئله به فرم (۴.۲) و حل معادلات ماتریسی متناظر (۱۸.۳) به بردارهای جواب  $A_1$  و  $A_2$  به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}^T, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^T.$$

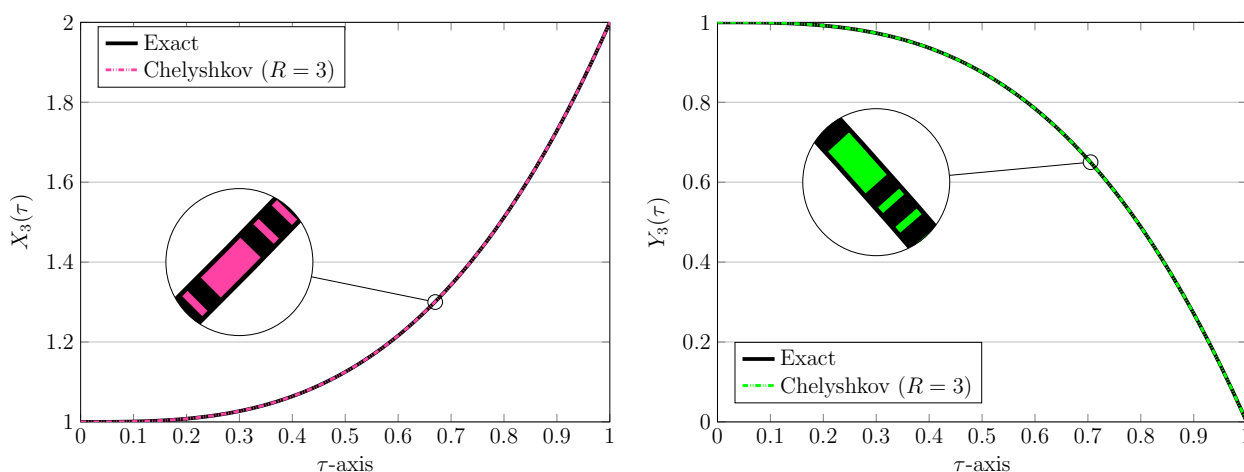
اکنون به محاسبه بردار توابع چلیشکوف می‌پردازیم که به صورت زیرند:

$$C_3(\tau) = [-35\tau^3 + 60\tau^2 - 30\tau + 4 \quad 21\tau^3 - 30\tau^2 + 10\tau \quad -7\tau^3 + 6\tau^2 \quad \tau^3].$$

لذا جواب‌های دستگاه معادلات منفرد فوق به فرم زیر درمی‌آیند:

$$X_3(\tau) = C_3(\tau) A_1 = 1 + \tau^3, \quad Y_3(\tau) = C_3(\tau) A_2 = 1 - \tau^3.$$

به‌اشکاری دیده می‌شود که هر دو با جواب‌های دقیق مثال (۱.۴) مطابقت دارند. نمودارهای جواب‌های تقریبی برای این مثال در شکل (۱) ترسیم شده‌اند. همچنین برای مقایسه، گراف‌های جواب‌های دقیق نیز با خط تیره به نمایش گذاشته شده‌اند.



شکل ۱: نمودارهای جواب تقریبی برای مثال (۱.۴) به‌ازای  $R = 3$ .

مثال ۲.۴. در ادامه به دستگاه معادلات غیرخطی و نامفرد زیر روی بازه  $(0, 1)$  می‌پردازیم:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2} (2\tau - 1) + \frac{2}{\tau} \frac{dX}{d\tau} (3\tau) + Y(\tau) X(\tau + 1) = g_1(\tau), \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} (2\tau - 1) + \frac{2}{\tau} \frac{dY}{d\tau} (3\tau) + X(\tau) Y(\tau + 1) = g_2(\tau). \end{cases}$$

شرایط اولیه به صورت  $X(1) = 1 + \cos(1)$ ,  $X'(0) = 0$ ,  $Y(1) = 1 - \cos(1)$ ,  $Y'(0) = 0$  داده شده‌اند. توابع  $g_1(\tau)$  و  $g_2(\tau)$  به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که جواب‌های دقیق دستگاه فوق به فرم زیر درآیند:

$$X(\tau) = 1 + \cos(\tau), \quad Y(\tau) = 1 - \cos(\tau).$$

نخست، قرار می‌دهیم  $R = 5$ . جواب‌های تقریبی به‌ازای این تعداد از توابع پایه‌ای چلیشکوف برای این مثال به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} X_5(\tau) &= -0.006498145 \tau^5 + 0.051463 \tau^4 - 0.000657438 \tau^3 - 0.50685 \tau^2 - 9.3164 \times 10^{-17} \tau \\ &\quad + 2.00284, \\ Y_5(\tau) &= 0.00613134 \tau^5 - 0.0490919 \tau^4 - 0.003676 \tau^3 + 0.508536 \tau^2 - 5.08355 \times 10^{-17} \tau \\ &\quad - 0.00220163. \end{aligned}$$

اکنون تعداد عناصر پایه را دو برابر می‌کنیم و تاثیر آن را در جواب‌های تقریبی بررسی می‌کنیم. در این حالت به جواب‌های تقریبی زیر دست می‌یابیم:

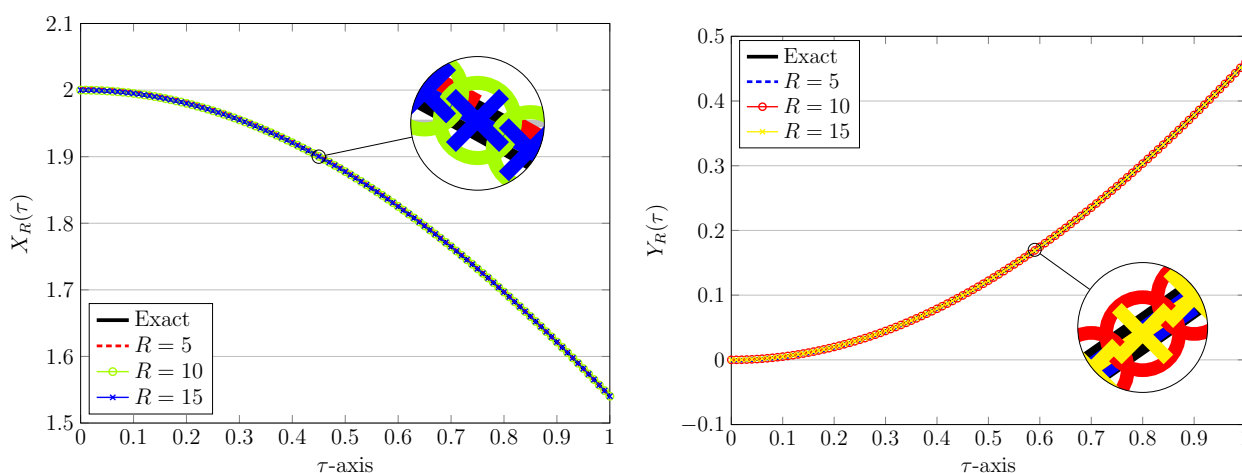
$$X_{10}(\tau) = -63009 \times 10^{-8} \tau^{10} - 164614 \times 10^{-6} \tau^9 + 3702497 \times 10^{-5} \tau^8 - 64017 \times 10^{-6} \tau^7 \\ - 0.00140091 \tau^6 + 478284 \times 10^{-5} \tau^5 + 0.041626 \tau^4 - 370979 \times 10^{-5} \tau^3 - 0.499953 \tau^2 \\ + 757442 \times 10^{-18} \tau + 199999,$$

$$Y_{10}(\tau) = 668376 \times 10^{-8} \tau^{10} + 155925 \times 10^{-6} \tau^9 - 29423 \times 10^{-5} \tau^8 + 238415 \times 10^{-6} \tau^7 \\ + 0.00140986 \tau^6 - 473746 \times 10^{-5} \tau^5 - 0.0416642 \tau^4 + 781923 \times 10^{-5} \tau^3 + 0.499953 \tau^2 \\ + 330697 \times 10^{-17} \tau - 653048 \times 10^{-6}.$$

به کمک بسط سری ماکلورن تابع کسینوس می‌توان به سادگی بسط سری جواب‌های دقیق این مثال را مشخص نمود:

$$X(\tau) \approx 2 - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^4}{4!} - \frac{\tau^6}{6!} + \frac{\tau^8}{8!} - \frac{\tau^{10}}{10!} + \dots, \quad Y(\tau) \approx \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^6}{6!} - \frac{\tau^8}{8!} + \frac{\tau^{10}}{10!} + \dots$$

بنابراین، با مقایسه جواب‌های تقریبی به دست آمده با سری‌های توانی فوق چنین استنباط می‌شود که با افزایش  $R$ ، جواب‌های تقریبی به جواب‌های دقیق هم‌گرايند. برای ارزیابی بهتر این مطلب، جواب‌های به دست آمده فوق به همراه خطاهای مطلق متناظر در شکل‌های (۲)-(۳) به نمایش گذاشته شده‌اند. توجه کنیم که غیر از  $10$ ،  $5$ ،  $R = 15$ ، نتایج عددی و خطاهای مطلق برای  $R = 15$  نیز در این شکل‌ها ترسیم شده‌اند. با مشاهده نمودارهای خطاها، می‌توان هم‌گرایی نمایی روش ارائه شده را نتیجه گرفت؛ همان‌طور که در قضیه ۱.۲ این مطلب اثبات شده است.



شکل ۲: نمودارهای جواب تقریبی برای مثال (۲.۴) به‌ازای  $R = 5, 10, 15$ .

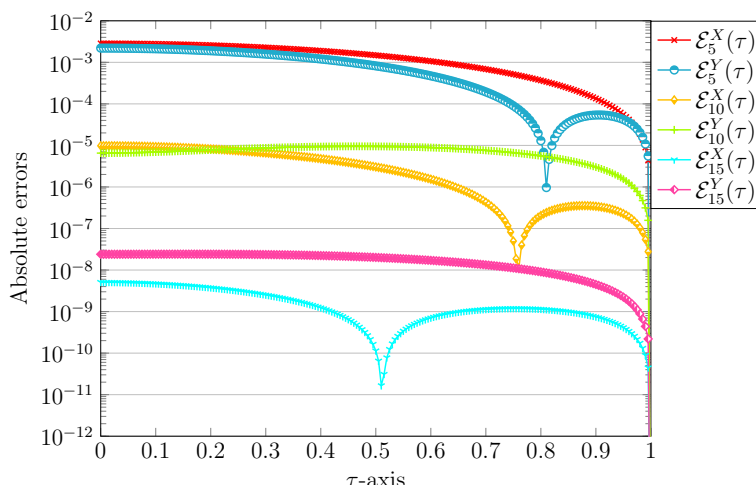
در نهایت برای مثال دوم، ما برای تایید روش مان به مقایسه نتایج روش ارائه شده ماتریسی بر اساس توابع چلیشکوف و یک روش موجود در منابع می‌پردازیم. تنها روش موجود برای مقایسه، روش هم‌محلی بر پایه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته است که در مقاله [۱] نتایج آن گزارش شده است. مقایسه نتایج دو روش بر اساس ماکزیمم مقادیر خطاهای مطلق  $\mathcal{E}_R^{X,\infty}$  و  $\mathcal{E}_R^{Y,\infty}$  و به‌ازای مقادیر مختلف  $R = 2, 6, 10, 14, 18$  در جدول ۱ قابل مشاهده‌اند. توجه کنیم که در روش هم‌محلی ژاکوبی از پارامترهای  $\rho, \sigma = 0$  استفاده شده است.

مثال ۳.۴. به‌عنوان مثال آخر، به دستگاه معادلات نامنفرد زیر روی  $(0, 1)$  توجه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau^2} (2\tau - 1) + \frac{2}{\tau} \frac{dX}{d\tau} (3\tau) + Y(\tau) X(\tau + 1) = g_1(\tau), \\ \frac{d^2 Y}{d\tau^2} (2\tau - 1) + \frac{2}{\tau} \frac{dY}{d\tau} (3\tau) + X(\tau) Y(\tau + 1) = g_2(\tau). \end{cases}$$

شرایط اولیه به صورت  $Y(1) = 1 - 1/e$ ,  $Y'(0) = 2$ ,  $X(1) = 1 + 1/e$ ,  $X'(0) = 0$  داده شده‌اند. توابع  $g_1(\tau)$  و  $g_2(\tau)$  به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که جواب‌های دقیق دستگاه فوق به فرم زیر درآیند:

$$X(\tau) = \tau + e^{-\tau}, \quad Y(\tau) = \tau - e^{-\tau}.$$



شکل ۳: نمودارهای خطاهای مطلق برای مثال (۲.۴) به ازای  $R = 5, 10, 15$ .

جدول ۱: مقایسه ماکزیمم خطاهای مطلق روش ماتریسی با روش هم محلی ژاکوبی برای مثال (۲.۴)

$R$	ژاکوبی [۱]		چلیشکوف	
	$\mathcal{E}_R^{X,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{Y,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{X,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{Y,\infty}$
۲	$1,04 \times 10^{-1}$	$9,47 \times 10^{-2}$	$1,0932 \times 10^{-1}$	$9,8613 \times 10^{-1}$
۶	$4,61 \times 10^{-4}$	$1,14 \times 10^{-3}$	$8,1874 \times 10^{-4}$	$2,6778 \times 10^{-4}$
۱۰	$7,88 \times 10^{-6}$	$2,97 \times 10^{-5}$	$9,7943 \times 10^{-6}$	$9,5057 \times 10^{-6}$
۱۴	$4,72 \times 10^{-8}$	$2,86 \times 10^{-7}$	$1,2567 \times 10^{-7}$	$4,1984 \times 10^{-8}$
۱۸	$1,16 \times 10^{-8}$	$1,22 \times 10^{-9}$	$3,9342 \times 10^{-10}$	$1,0250 \times 10^{-9}$

برای این مثال، ابتدا مقدار  $R$  را برابر با ۶ در نظر می گیریم. با به کارگیری روش ارائه شده ماتریسی، جواب های تقریبی زیر محاسبه می شوند:

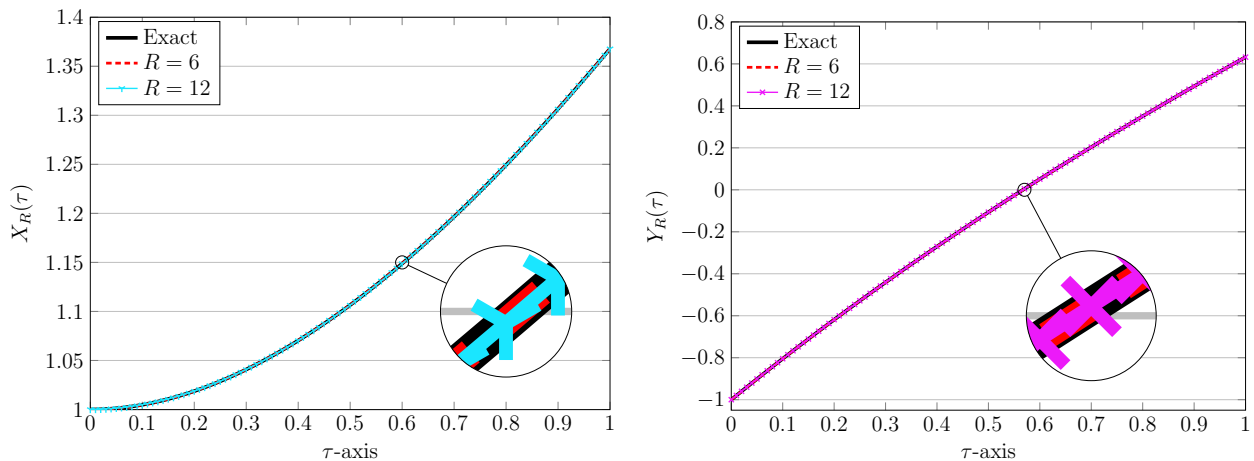
$$\begin{aligned}
 X_6(\tau) &= 0,000511748 \tau^6 - 0,00663126 \tau^5 + 0,0411691 \tau^4 - 0,169007 \tau^3 + 0,501962 \tau^2 \\
 &\quad + 3,25392 \times 10^{-17} \tau + 0,999875, \\
 Y_6(\tau) &= -0,000553584 \tau^6 + 0,00699013 \tau^5 - 0,0421548 \tau^4 + 0,169691 \tau^3 - 0,501451 \tau^2 \\
 &\quad + 2 \tau - 1,00004.
 \end{aligned}$$

با مقایسه جواب های حاصل شده فوق با بسط سری های جواب که به صورت زیر

$$\begin{cases}
 X(\tau) \approx 1 + \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!} + \frac{\tau^4}{4!} - \frac{\tau^5}{5!} + \frac{\tau^6}{6!} + \dots, \\
 Y(\tau) \approx -1 + 2\tau - \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^4}{4!} + \frac{\tau^5}{5!} - \frac{\tau^6}{6!} + \dots,
 \end{cases} \quad (1.4)$$

داده می شوند، به روشنی مشاهده می شود که ارتباط نزدیکی بین ضرایب جواب ها برقرار است. حتی با افزایش تعداد عناصر پایه ای، این هم آهنگی بین جواب ها بیش تر مشهود می شود. برای دیدن این مطلب، نمودارهای جواب های تقریبی بالا به همراه جواب های دقیق متناظر در شکل (۴) رسم شده اند. همچنین نمودارهای جواب های متناظر با  $R = 12$  نیز به نمایش گذاشته شده اند. نمودارهای خطاهای مطلق متناظر به دست آمده توسط روش ماتریسی ارائه شده برای مقادیر  $R = 6, 12$  در شکل بعدی (۵) نشان داده شده اند. در این شکل، علاوه بر این دو مقدار  $R$ ، خطاهای مطلق متناظر با  $R = 18$  نیز دیده می شوند. در حقیقت، جواب های تقریبی به ازای  $R = 18$  به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned}
 X_{18}(\tau) &= 5,624 \times 10^{-17} \tau^{18} - 2,1450 \times 10^{-15} \tau^{17} + 4,58853 \times 10^{-14} \tau^{16} - 7,6965 \times 10^{-13} \tau^{15} \\
 &\quad + 1,154774 \times 10^{-11} \tau^{14} - 1,60971 \times 10^{-10} \tau^{13} + 2,088872 \times 10^{-9} \tau^{12} - 2,50531 \times 10^{-8} \tau^{11}
 \end{aligned}$$



شکل ۴: نمودارهای جواب تقریبی برای مثال (۳.۴) به‌ازای  $R = 6, 12$ .

$$\begin{aligned}
 &+ 2,75568 \times 10^{-7} \tau^{10} - 2,7557 \times 10^{-6} \tau^9 + 2,48015 \times 10^{-5} \tau^8 - 1,98413 \times 10^{-4} \tau^7 \\
 &+ 0,00138889 \tau^6 - 0,00833333 \tau^5 + 0,0416667 \tau^4 - 0,166667 \tau^3 + 0,5 \tau^2 - 3,95 \times 10^{-17} \tau + 1,0,
 \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
 Y_{18}(\tau) = &-5,7176 \times 10^{-17} \tau^{18} + 2,1721 \times 10^{-15} \tau^{17} - 4,6215 \times 10^{-14} \tau^{16} + 7,7253 \times 10^{-13} \tau^{15} \\
 &- 1,15619 \times 10^{-11} \tau^{14} + 1,61009 \times 10^{-10} \tau^{13} - 2,08867 \times 10^{-9} \tau^{12} + 2,5052 \times 10^{-8} \tau^{11} \\
 &- 2,75563 \times 10^{-7} \tau^{10} + 2,7557 \times 10^{-6} \tau^9 - 2,48015 \times 10^{-5} \tau^8 + 0,0000198413 \tau^7 \\
 &- 0,00138889 \tau^6 + 0,00833333 \tau^5 - 0,0416667 \tau^4 + 0,166667 \tau^3 - 0,5 \tau^2 + 2,0 \tau - 1,0.
 \end{aligned}$$

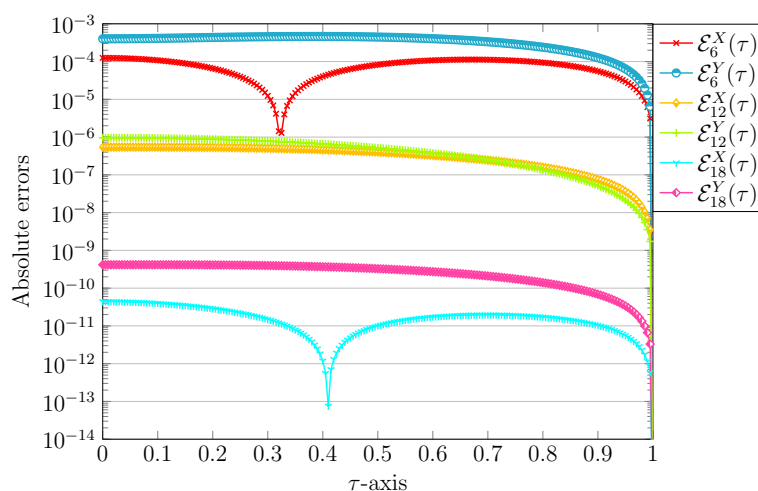
در مقایسه با جواب‌های فوق، جواب‌های حاصل از روش ژاکوبی [۱] (شامل فقط هفت جمله اول) به فرم زیر گزارش شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 X_{18}^J(t) = &\dots + 0,00238683 t^6 - 0,00433457 t^5 + 0,0523669 t^4 - 0,16765 t^3 + 0,5 t^2 \\
 &+ 2,74967 \times 10^{-17} t + 1, \\
 Y_{18}^J(t) = &\dots - 0,00267886 t^6 - 0,00833331 t^5 - 0,0415439 t^4 - 0,168767 t^3 - 0,5 t^2 \\
 &- 1,58323 \times 10^{-17} t - 1.
 \end{aligned}$$

با یک مقایسه ساده با بسط تیلور سری‌های جواب (۱.۴) به‌سادگی نتیجه می‌شود نتایج ما از دقت بیش‌تری برخوردارند. در نهایت، ماکزیمم مقادیر خطاهای مطلق  $\mathcal{E}_R^{X,\infty}, \mathcal{E}_R^{Y,\infty}$  به‌دست‌آمده توسط روش ماتریسی ارائه‌شده و روش هم‌محلی ژاکوبی به‌ازای مقادیر مختلف  $R = 2, 6, 10, 14, 18$  در جدول ۲ نشان داده شده‌اند. برای این مثال، در روش هم‌محلی ژاکوبی از پارامترهای  $\rho = 0, \sigma = 1/2$  استفاده شده است. با مشاهده نتایج جدول ۲ به‌وضوح می‌توان دید که روش ما نتایج بهتری دارد.

جدول ۲: مقایسه ماکزیمم خطاهای مطلق روش ماتریسی با روش هم‌محلی ژاکوبی برای مثال (۳.۴)

R	ژاکوبی [۱]		چلیشکوف	
	$\mathcal{E}_R^{X,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{Y,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{X,\infty}$	$\mathcal{E}_R^{Y,\infty}$
2	$1,06 \times 10^{-1}$	$4,28 \times 10^{-1}$	$8,3186 \times 10^{-2}$	$7,3248 \times 10^{-2}$
6	$5,44 \times 10^{-4}$	$3,78 \times 10^{-3}$	$1,2521 \times 10^{-4}$	$4,6275 \times 10^{-4}$
10	$8,74 \times 10^{-6}$	$1,15 \times 10^{-4}$	$1,8464 \times 10^{-6}$	$7,5741 \times 10^{-6}$
14	$3,83 \times 10^{-8}$	$1,10 \times 10^{-6}$	$4,1125 \times 10^{-8}$	$3,2615 \times 10^{-8}$
18	$6,10 \times 10^{-9}$	$8,50 \times 10^{-9}$	$4,4439 \times 10^{-11}$	$4,1686 \times 10^{-10}$



شکل ۵: نمودارهای خطاهای مطلق برای مثال (۳.۴) به ازای  $R = 6, 12, 18$ .

## ۵ نتیجه گیری

در این کار پژوهشی، یک رهیافت ماتریسی بر پایه چندجمله‌ای‌های چلیشکوف برای یافتن جواب‌های یک مدل جدید از دستگاه معادلات دیفرانسیل لین-امدن نامنفرد و غیرخطی بیان شده است. با نمایش تمامی مجهولات دستگاه بر حسب ماتریس چلیشکوف و بهره‌گیری از نقاط هم‌محلی، روش ارائه شده دستگاه معادلات غیرخطی را به یک دستگاه جبری از معادلات ماتریسی تبدیل می‌کند. قضیه هم‌گرایی (نمایی) روش ماتریسی چلیشکوف بیان و اثبات شد و با استفاده از چندین مثال عددی این هم‌گرایی در قالب شکل‌ها و جداول به تأیید رسید. هم‌چنین مقایسه‌هایی با نتایج یک روش موجود انجام شد تا نتایج حاصل از روش ماتریسی را تأیید کند. این تکنیک ماتریسی را می‌توان به سهولت برای حل مسائل خطی و غیرخطی دیگر در علوم و مهندسی به کار گرفت.

## فهرست منابع

- [1] Abdelkawy M.A., Sabir Z., Guirao J.L.G. and Saeed T., *Numerical investigations of a new singular second-order nonlinear coupled functional Lane-Emden model*, Open Phys., **18** (2020), 770–778.
- [2] Bratsun D., Volfson D., Tsimring L.S. and Hasty J., *Delay-induced stochastic oscillations in gene regulation*, Proc. Natl. Acad. Sci., **102**(41) (2005), 14593–8.
- [3] Chelyshkov V.S., *Alternative orthogonal polynomials and quadratures*, ETNA (Electron. Trans. Numer. Anal.), **25** (2006), 17–26.
- [4] Chelyshkov V.S., *A variant of spectral method in the theory of hydrodynamic stability*, Hydromech., **68** (1994), 105–109.
- [5] Dehghan M. and Shakeri F., *The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics*, Phys. Scr., **78**(6) (2008), Article ID 065004.
- [6] Duan J.S., Rach R. and Wazwaz A.M., *Oxygen and carbon substrate concentrations in microbial floc particles by the Adomian decomposition method*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **73** (2015), 785–796.
- [7] Flockerzi D. and Sundmacher K., *On coupled Lane-Emden equations arising in dusty fluid models*, In: J. Phys. Conf. Ser., **268** (2011), Article ID 012006.

- [8] Gourley S.A., Kuang Y. and Nagy J.D., *Dynamics of a delay differential equation model of hepatitis B virus infection*, J. Biol. Dyn., **2**(2) (2008), 140–53.
- [9] Hao T. and Song S., *Solving coupled Lane-Emden equations arising in catalytic diffusion reactions by reproducing kernel Hilbert space method*, In: 2015 International conference on Applied Science and Engineering Innovation, Atlantis Press (2015).
- [10] Izadi M., *An accurate approximation method for solving fractional order boundary value problems*, Acta Univ. M. Belii, ser. Math., **28** (2020), 23–38.
- [11] Izadi M., *Approximate solutions for solving fractional-order Painlevé equations*, Contemp. Math., **1**(1) (2019), 12–24.
- [12] Izadi M., *Comparison of various fractional basis functions for solving fractional-order logistic population model*, Facta Univ. Ser. Math. Inform., **35**(4) (2020), 1181–1198.
- [13] Izadi M. and Cattani C., *Solution of nonlocal fractional-order boundary value problems by an effective accurate approximation method*, Appl. Ana. Optim., **5**(1) (2021), 29–44.
- [14] Izadi M., Seifaddini M. and Afshar M., *Approximate solutions of a SIR epidemiological model of computer viruses*, Adv. Stud. Euro-Tbilisi Math. J., **14**(4) (2021), 203–219.
- [15] M. Izadi, H.M. Srivastava, *An efficient approximation technique applied to a non-linear Lane-Emden pantograph delay differential model*, Appl. Math. Comput. **401** (2021) Article ID 126123, 1-10.
- [16] Izadi M., Srivastava H.M., Adel W., *An effective approximation algorithm for second-order singular functional differential equations*, Axioms, **11**(3) (2022), Article ID 133.
- [17] Izadi M., Yüzbaşı Ş. and Adel W., *A new Chelyshkov matrix method to solve linear and nonlinear fractional delay differential equations with error analysis*, Math. Sci., (2022), doi:10.1007/s40096-022-00468-y.
- [18] Izadi M., Yüzbaşı Ş. and Adel W., *Accurate and efficient matrix techniques for solving the fractional Lotka-Volterra population model*, Physica A, **600** (2022), Article ID 127558, 1–18.
- [19] Liu X. and Ballinger G., *Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models*, Nonlinear Anal. Theor. Methods Appl., **53**(7-8) (2003), 1041–62.
- [20] Meng Z., Yi M., Huang J. and Song L., *Numerical solutions of nonlinear fractional differential equations by alternative Legendre polynomials*, Appl. Math. Comput., **336** (2018), 454–464.
- [21] Nelson P.W. and Perelson A.S., *Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection*, Math. Biosci., **179**(1) (2002), 73–94.
- [22] Parand K. and Delkhosh M., *Systems of nonlinear Volterra integro-differential equations of arbitrary order*, Bol. Soc. Paran. Mat., **36**(4) (2018), 33–54.
- [23] Rach R., Duan J.S. and Wazwaz A.M., *Solving coupled Lane-Emden boundary value problems in catalytic diffusion reactions by the Adomian decomposition method*, J. Math. Chem., **52**(1) (2014), 255–267.
- [24] Roussel M.R., *The use of delay differential equations in chemical kinetics*, J. Phys. Chem., **100**(20) (1996), 8323–8330.

- [25] Saadatmandi A. and Fayyaz S., *Numerical study of oxygen and carbon substrate concentrations in excess sludge production using sinc-collocation method*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **80** (2018), 355–368.
- [26] Singh R., *Solving coupled Lane-Emden equations by Green's function and decomposition technique*, Int. J. Appl. Comput. Math., **6** (2020), Article ID 80.
- [27] Srivastava H.M. and Izadi M., *The Rothe-Newton approach to simulate the variable coefficient convection-diffusion equations*, J. Mahani Math. Res., **11**(2) (2022), 141–157.
- [28] Villasana M. and Radunskaya A., *A delay differential equation model for tumor growth*, J. Math. Biol., **47**(3) (2003), 270–94.
- [29] Wazwaz A.M., Rach R. and Duan J.S., *Variational iteration method for solving oxygen and carbon substrate concentrations in microbial floc particles*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **76** (2016), 511–523.
- [30] Yüzbaşı Ş., *A numerical approach for solving a class of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics*, Math. Method Appl. Sci., **34**(18) (2011), 2218–2230.
- [31] Yüzbaşı Ş. and Izadi M., *Bessel-quasilinearization technique to solve the fractional-order HIV-1 infection of CD4+ T-cells considering the impact of antiviral drug treatment*, Appl. Math. Comput. **431** (2022), Article ID 127319, 1–14.
- [32] Zou H., *A priori estimates for a semilinear elliptic system without variational structure and their applications*, Math. Ann. **323** (2002), 713–735.



## A novel matrix technique to solve a new singular nonlinear functional Lane-Emden model

Mohammad Izadi <sup>†</sup>

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer,  
Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

Communicated by: Mahmoud Mohseni Moghadam

Received: 2021/6/11

Accepted: 2022/7/9

**Abstract:** The present study is devoted to finding the approximate solutions of a new design of a second-order nonlinear functional system of Lane-Emden differential equation with boundary conditions. Our proposed matrix technique is based on the Chelyshkov functions together with collocation points to transform the nonlinear system into an algebraic fundamental matrix equation. The convergence of the spectral Chelyshkov approach is also proved. To show the efficiency and the accuracy of the presented technique, three test examples are solved numerically. Also, comparisons with the exact solutions and with an available method in the literature are performed.

**Keywords:** Chelyshkov functions, Collocation points, Functional differential equation, Singular Lane-Emden system.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>†</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: [izadi@uk.ac.ir](mailto:izadi@uk.ac.ir) (M. Izadi)