



یک اسپلاین غیر چندجمله‌ای برای تقریب معادله بگلی-تورویک کسری

سارا ایوانی و رضا جلیلیان *

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

دبیر مسئول: فریبرز آذریناه

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۵/۶

چکیده: در این تحقیق به کمک یک تابع اسپلاین غیر چندجمله‌ای و عملگر گرانوالد-لتینکوف جواب معادله بگلی-تورویک کسری را تقریب خواهیم زد. روش ارائه شده، یک دستگاه از معادلات را نتیجه می‌دهد. سپس در ادامه تحلیل خطا بر پایه این اسپلاین غیر چندجمله‌ای و همچنین تحلیل همگرایی روش، مورد بحث قرار می‌گیرد و یک روش از مرتبه دوم به دست می‌آید. این روش پیش‌نهادی نه تنها برای حل معادلات بگلی-تورویک کسری بلکه برای انواع معادلات کسری می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به واسطه مثال‌هایی کارایی این روش عددی با سایر روش‌های موجود مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل بگلی-تورویک کسری، عملگر گرانوالد-لتینکوف، اسپلاین غیر چندجمله‌ای، آنالیز همگرایی.

رده‌بندی ریاضی: 65D07; 65L10; 34A08

۱ مقدمه

مطالعه در زمینه حسابان کسری یکی از موضوعات دارای قدمت در ریاضیات است، که در این زمینه می‌توان به کارهای لایبنیس (۱۹۶۵) و اوایلر (۱۷۳۰) اشاره کرد، [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] دیده شود. اخیراً یکی از موضوعات پرتعداد در پژوهش، روش‌های عددی برای حل مسائل حسابان کسری است. برای بیان نمونه‌ای از کاربردهای آن می‌توان به مسائل در زمینه کنترل و حوزه‌های مهندسی و علوم کاربردی اشاره کرد. معادله بگلی-تورویک هنگامی که معادله حرکت یک صفحه صلب غوطه‌ور در یک سیال نیوتونی مدل‌بندی می‌گردید، به وجود آمد، [۵]. یافتن جواب برای معادله بگلی-تورویک با شرایط مرزی در [۴] ارائه شده است. در این مقاله با هدف دستیابی به تقریبی از جواب معادله بگلی-تورویک به شکل

* نویسنده مسئول مقاله

معادله زیر:

$$u''(x) + \bar{\eta} D^\alpha u(x) + \mu u(x) = f(x), \quad m-1 < \alpha < m, x \in [a, b], \quad (1.1)$$

با شرایط مرزی

$$u(a) - \omega_1 = u(b) - \omega_2 = 0. \quad (2.1)$$

از یک اسپلاین غیرچندجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن D^α مشتق کسری از نوع کاپوتو و $f(x)$ تابعی پیوسته بوده، $\bar{\eta}, \mu, \omega_i$ ($i = 1, 2$) ثابت‌های حقیقی و 2 یا 1 $m =$ است. چون در حالت کلی حل یک معادله کسری به صورت تحلیلی و دقیق دشوار است، لذا برای شناخت رفتار یک معادله کسری ناگزیر به حل آن معادله به کمک روش‌های عددی می‌باشیم، که در واقع در این روش‌ها، تقریبی از جواب دقیق معادله کسری را می‌یابیم، [۳]، [۱۱]، [۱۴]، [۱۹]، [۲۵]، [۲۷]، [۲۸] و [۲۹] مشاهده شود. هم‌چنین از هسته باز تولید در [۲] و [۳] و برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده شده است. در مورد وجود جواب‌های مثبت و منفی مسائل مقدار مرزی و خواص مشتقات آن‌ها در [۲۴] بحث شده است. تلاش‌های متعددی توسط محققان برای حصول این هدف صورت پذیرفته است، که از جمله می‌توان به استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف در حل عددی معادله بگلی-تورویک اشاره نمود، [۲۲]. با استفاده از روش اختلال هموتوپی معادله بگلی-تورویک به عنوان یک معادله دیفرانسیل کسری مرزی مورد حل قرار گرفته است، [۲۳]. هم‌چنین تقریب جواب معادله بگلی-تورویک ناشی از مکانیک سیالات بر پایه روش‌های ماتریس تیلور نیز نمونه‌ای از کارهای انجام پذیرفته در [۱۱] است. در مرجع [۲۸] نیز در جهت پیدا نمودن جواب‌های عددی معادله کسری بگلی-تورویک با شرایط مرزی اقدام به توسعه چندجمله‌ای‌های اسپلاین مکعبی شده است. کاربرد انتگرال‌های نمایی برای حل این معادلات موضوع مورد بحث در [۹] است. هم‌چنین روش تجزیه آدومین برای حل مساله مقدار اولیه بگلی-تورویک نیز موضوع [۱۹] است. استفاده هم‌زمان از روش چندمرحله‌ای خطی کسری و یک روش پیش‌گو-تصحیح کننده از نوع آدامز بر پایه روش‌های تفاضلات متناهی برای مساله مقدار اولیه بگلی-تورویک نیز در [۷] بحث شده است. هم‌چنین از عملگر ماتریسی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل کسری در [۲۰] بهره گرفته شده است. در [۲۷] از یک روش هم‌محلی برپایه توابع بسل برای تقریب جواب معادله بگلی-تورویک استفاده شده است. در [۱] از تابع اسپلاین نمایی برای تقریب جواب مساله مقدار مرزی کسری استفاده شده و همگرایی روش نیز مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شده و در [۲۹] از تابع اسپلاین مکعبی برای تقریب جواب معادله بگلی-تورویک کسری استفاده شده است. در مرجع [۶] روش تفاضلات متناهی ضمنی برای به دست آوردن روش عددی برای جواب معادله واکنش پخش کسری-زمانی به کار رفته است. یک تابع اسپلاین مثلثاتی و روش خطی‌سازی برای تقریب جواب معادله انتگرال غیر خطی در [۱۳] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. هم‌چنین در [۸] نیز بر اساس عملگر مشتق کسری کاپوتو وزن دار به حل معادلات کسری با مقدار مرزی اقدام شده است. در [۱۰] نیز نویسندگان با تکیه بر قضایای موجود در نرم فضاها، به وجود و تقریب جواب‌های معادله بگلی-تورویک پرداخته‌اند. هدف اصلی در این تحقیق، دستیابی به یک اسپلاین غیرچندجمله‌ای برای درونیابی با پارامترهای چندگانه است. هدف دیگر احاطه کامل به این اسپلاین و دستیابی به خطای آن است. از اهم مزایای این الگوریتم آن است که می‌توان آن را به طور مستقیم و بدون استفاده از فرض و یا تبدیلات به کار بست. سازماندهی در این مقاله بر اساس ساختار زیر است. در بخش دوم تعاریف اساسی و روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای برای تقریب جواب‌های معادله دیفرانسیل کسری بگلی-تورویک مورد ارائه قرار می‌گیرد. تحلیل همگرایی موضوع بخش سوم است. هم‌چنین در چهارمین بخش از این مقاله به واسطه مثال‌های عددی الگوریتم موصوف با سایر روش‌های موجود که توسط سایر محققان در مراجع [۱]، [۹]، [۱۷]، [۲۱]، [۲۸] و [۲۹] ارائه گردیده است، مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

۲ تعاریف اساسی و روش اسپلاین غیرچندجمله‌ای

در این بخش به دنبال ارائه برخی از تعاریف در زمینه تئوری حسابان کسری که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد، هستیم. هم‌چنین چندین تعریف رایج از مشتقات کسری برای $\alpha > 0$ مانند ریمان-لیوویل، گرانوالد-لتینکوف و کاپوتو آورده شده است. یادآوری می‌گردد که مشتق کسری مورد استفاده در این تحقیق از نوع کاپوتو می‌باشد.

تعریف ۱.۰۲. با فرض بر این که $u(x)$ تابع تعریف شده بر بازه (a, b) باشد، آنگاه مشتق کسری ریمان-لیوویل به شکل زیر تعریف می‌شود، [۴] و [۱۶]:

$${}^R D^\alpha(u(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} u(t) dt, \alpha > 0, \quad m-1 < \alpha < m.$$

که در آن Γ معرف تابع گاما می‌باشد.

تعریف ۲.۰۲. انتگرال کسری ریمان-لیوویل عبارت است، [۴] و [۱۶]:

$$D_{a+}^{-\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad \alpha > 0,$$

$$D_{b-}^{-\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} u(t) dt, \quad \alpha > 0.$$

تعریف ۳.۰۲. اگر $u(x)$ تابعی تعریف شده بر (a, b) باشد، مشتق کسری کاپوتو نیز به شکل زیر تعریف می‌شود، [۴] و [۱۶]:

$$D^\alpha(u(x)) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(t) dt, \alpha > 0, \quad m-1 < \alpha < m.$$

تعریف ۴.۰۲. گرانوالد تعریف مشتق کسری را به شکل زیر بیان نمود، [۴] و [۱۶]:

$$A_{h,p}^\alpha(u(x)) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} g_{\alpha,k} u(x - (k-p)h),$$

که در آن $g_{\alpha,k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$ و $A_{h,p}^\alpha(u(x)) = {}^R D^\alpha(u(x)) + O(h)$

تعریف ۵.۰۲. عملگر وزن دار و انتقال یافته گرانوالد به صورت زیر می‌باشد، که در آن $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ و ${}_\infty D_x^{\alpha+2}(u(x))$ و تبدیلات فوریه متعلق به $L^1(\mathbb{R})$ است، [۲۵]:

$$\begin{cases} aD_{h,p,q}^\alpha u(x) = \frac{\vartheta}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor + p} g_{\alpha,k} u(x - (k-p)h) \\ \quad + \frac{(1-\vartheta)}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{x-a}{h} \rfloor + q} g_{\alpha,k} u(x - (k-q)h) + O(h^2), \\ bD_{h,p,q}^\alpha u(x) = \frac{\vartheta}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-x}{h} \rfloor + p} g_{\alpha,k} u(x + (k-p)h) \\ \quad + \frac{(1-\vartheta)}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-x}{h} \rfloor + q} g_{\alpha,k} u(x + (k-q)h) + O(h^2), \end{cases} \quad (1.02)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}$ و $\vartheta \in [0, 1]$. هم‌چنین p و q اعداد صحیح و متقارن‌اند.

هم‌چنین در این بخش تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای را که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر تعریف می‌کنیم. نقاط x_i را روی بازه بسته $[a, b]$ که به صورت زیر افراز می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

که $h = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a + ih$ برای $i = 0, 1, 2, \dots, n$. با فرض اینکه $u(x)$ جواب دقیق معادله (۱.۰۱) بوده و S_i تقریبی از آن باشد که $u_i = u(x_i)$. اگر تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای $Q_i \in C^\infty[a, b]$ گذرنده از نقاط (x_i, S_i) و (x_{i+1}, S_{i+1}) باشد، آنگاه در هر زیر بازه این اسپلاین غیرچندجمله‌ای $Q_i(x)$ به صورت زیر است، [۹]، [۱۲]، [۱۸] و

[۲۶].

$$Q_i(x) = a_{i1} \sin(\beta(x-x_i)) + a_{i2} \cos(\beta(x-x_i)) + a_{i3} \sin(2\beta(x-x_i)) + a_{i4} \cos(2\beta(x-x_i)), \quad (۲.۲)$$

که در آن β متغیر آزاد بوده و می‌تواند حقیقی یا موهومی باشد که به جهت افزایش دقت روش به کار می‌رود، [۲۶]. برای پیدا کردن $a_{ik}, k = 1, 2, 3, 4$ ، در معادله (۲.۲) از روابط درونیابی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} Q_i(x_i) = u_i, & Q_i''(x_i) = M_i, \\ Q_i(x_{i+1}) = u_{i+1}, & Q_i''(x_{i+1}) = M_{i+1}. \end{cases} \quad (۳.۲)$$

با استفاده از رابطه (۳.۲) ضرایب رابطه (۲.۲) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} a_{i1} &= -\frac{\csc(\theta)(\cos(\theta)M_i - M_{i+1} + 4\beta^2(\cos(\theta)u_i - u_{i+1}))}{3\beta^2}, \\ a_{i2} &= \frac{1}{3}\left(\frac{M_i}{\beta^2} + 4u_i\right), \\ a_{i3} &= \frac{\csc(2\theta)(\cos(2\theta)M_i - M_{i+1} + \beta^2(\cos(2\theta)u_i - u_{i+1}))}{3\beta^2}, \\ a_{i4} &= -\frac{M_i + \beta^2 u_i}{3\beta^2}, \end{aligned}$$

که در آن $\theta = h\beta$ می‌باشد. همچنین با استفاده از شرط پیوستگی مشتق مرتبه اول $Q_i'(x) = Q_{i-1}'(x)$ در $x = x_i$ ، رابطه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} &h^2 \left(\frac{(\sec(\theta) - 1)M_{i-1}}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} + \frac{2 \sin(\theta)M_i \tan(\theta)}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} + \frac{(\sec(\theta) - 1)M_{i+1}}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} \right) \\ &= -u_{i-1} + \frac{2(2 + \cos(2\theta))u_i}{4 \cos \theta - 1} - u_{i-1}. \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

به طور مشابه

$$(\beta_1 m_{i-1} + \beta_2 m_i + \beta_3 m_{i+1}) = (\beta_4 u_{i-1} + \beta_5 u_i + \beta_6 u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (۵.۲)$$

و مقادیر ضرایب این رابطه نیز عبارتند از:

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_3 &= \frac{3\theta \csc(\frac{\theta}{2})^2 \sin \theta}{2(2 + \cos(\theta))}, \\ \beta_2 &= \frac{3\theta \csc(\frac{\theta}{2})^2 (2 \sin \theta + \sin(2\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \quad \beta_4 = -\frac{3\theta^2 \csc(\frac{\theta}{2})^2 (1 + 2 \cos(\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \\ \beta_6 &= \frac{3\theta^2 \csc(\frac{\theta}{2})^2 (1 + 2 \cos(\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \quad \beta_5 = 0, \end{aligned}$$

که با جای‌گذاری این ضرایب در (۵.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &h^2 \left(\frac{\sec(\theta)M_{i-1} - 1}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} + \frac{2 \sin(\theta)M_i \tan(\theta)}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} + \frac{\sec(\theta)M_{i+1} - 1}{\theta^2(\sec(\theta) - 4)} \right) \\ &= -u_{i-1} + \frac{2(2 + \cos(2\theta))u_i}{4 \cos \theta - 1} - u_{i-1}. \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

رابطه سازگار بین مشتق اول تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای و جواب معادله به‌واسطه شرایط زیر به‌دست آمده است.

$$\begin{cases} Q_i(x_i) = u_i, & Q'_i(x_i) = m_i, \\ Q_i(x_{i+1}) = u_{i+1}, & Q'_i(x_{i+1}) = m_{i+1}. \end{cases} \quad (۷.۲)$$

از شرط پیوستگی مشتق مرتبه دوم $Q''_i(x) = Q''_{i-1}(x)$ در $x = x_i$ ، نیز به‌دست می‌آید:

$$(\beta_1 m_{i-1} + \beta_2 m_i + \beta_3 m_{i+1}) = (\beta_4 u_{i-1} + \beta_5 u_i + \beta_6 u_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (۸.۲)$$

و مقادیر ضرایب رابطه (۸.۲) نیز عبارتند از:

$$\begin{aligned} \beta_1 = \beta_3 &= \frac{3\theta \csc(\frac{\theta}{2})^2 \sin \theta}{2(2 + \cos(\theta))}, \\ \beta_2 &= \frac{3\theta \csc(\frac{\theta}{2})^2 (2 \sin \theta + \sin(2\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \quad \beta_4 = -\frac{3\theta^2 \csc(\frac{\theta}{2})^2 (1 + 2 \cos(\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \\ \beta_6 &= \frac{3\theta^2 \csc(\frac{\theta}{2})^2 (1 + 2 \cos(\theta))}{2(2 + \cos(\theta))}, \quad \beta_5 = 0. \end{aligned}$$

که در حالت حدی زمانی که $\theta \rightarrow 0$ ، روابط (۶.۲) و (۸.۲) به روابط اسپلاین مکعبی به‌شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{h^2}{6} [M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}] = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, & i = 1, \dots, n-1, \quad (۱) \\ -2h(m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1}) = (6u_{i-1} - 6u_{i+1}), & i = 1, \dots, n-1. \quad (۲) \end{cases} \quad (۹.۲)$$

معادله دیفرانسیل (۱.۱) به‌صورت زیر در x_i قابل گسسته‌سازی است.

$$M_i = f_i - \bar{\eta} D^\alpha u_i - \mu u_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

لم ۶.۲. خطای برشی محلی x_i ، برای معادلات (۹.۲) برای $i = 1, \dots, n$ ، در حالت حدی زمانی که $\theta \rightarrow 0$ ، به‌صورت روابط زیر است:

$$|u''_i - Q''_i| = \frac{h^2}{12} Q_i^{(4)} + O(h^4), \quad (۱۰.۲)$$

$$|Q''_i - u''_i| = \frac{h^2}{12} u_i^{(4)} + O(h^4), \quad (۱۱.۲)$$

$$|u'_i - Q'_i| = \frac{h^4}{180} Q_i^{(5)} + O(h^5), \quad (۱۲.۲)$$

$$|Q'_i - u'_i| = \frac{h^4}{180} u_i^{(5)} + O(h^5). \quad (۱۳.۲)$$

□

اثبات. مرجع [۸].

۳ روش اسپلاین مکعبی و غیرچندجمله‌ای برای تقریب معادله دیفرانسیل بگلی-تورویک کسری

در این بخش روش‌هایی برای تقریب مشتق کسری $D^\alpha(u(x))|_{x=x_i}$ ، با استفاده از تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای و مکعبی ارائه می‌دهیم.

روش اول

معادله بگلی-تورویک به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شود، [۱۲] و [۱۳]:

$$M_i + \bar{\eta} D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} + \mu u_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (۱.۳)$$

با استفاده از تعریف مشتق کاپوتو برای $1 < \alpha < 2$ داریم:

$$D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{x_i} (x_i - \eta)^{1-\alpha} u''(\eta) d\eta. \quad (۲.۳)$$

با افراز $[0, x_i]$ ، رابطه (۲.۳) به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i \int_{(j-1)h}^{jh} (Q''(\bar{\eta}) + O(h^2))(x_i - \eta)^{1-\alpha} d\eta. \quad (۳.۳)$$

و چون $(x_i - \eta)^{1-\alpha}$ در بازه $[(j-1)h, jh]$ تغییر علامت نمی‌دهد، بنابه قضیه مقدار میانگین وزنی برای انتگرال‌ها برای سمت راست رابطه (۳.۳) خواهیم داشت:

$$\int_{(j-1)h}^{jh} (Q''(\bar{\eta}) + O(h^2))(x_i - \eta)^{1-\alpha} d\eta = (Q''(\bar{\eta}) + O(h^2)) \int_{(j-1)h}^{jh} (x_i - \eta)^{1-\alpha} d\eta.$$

که $\bar{\eta} \in [(j-1)h, jh]$ از معادلات (۴.۲) و (۷.۲) و رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} &= \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \left(-\frac{6(\eta_j - x_i)(-hm_j - hm_{j+1} - 2u_j + 2u_{j+1})}{h^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(2hm_j + hm_{j+1} + 3u_j - 3u_{j+1})}{h^2} + O(h^2) \right) ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{6(x_i - jh)}{h^2} - \frac{4}{h} \right) m_j \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{6(x_i - jh)}{h^2} - \frac{2}{h} \right) m_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{12(x_i - jh)}{h^3} - \frac{6}{h} \right) u_j \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{-12(x_i - jh)}{h^3} - \frac{6}{h^2} \right) u_{j+1} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) (O(h^2)). \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

که x جواب به اندازه کافی هموار است، برای هر $J = [c, d] \subset [a, b]$ ، لذا $\|Q'' - u''\|_\infty = O(h^2)$ از روابط (۱.۳) و (۴.۳) برای هر $i = 1, 2, \dots, n-1$ داریم:

$$\begin{aligned} M_i &+ \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \bar{a}_{ij} m_j + \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \bar{b}_{ij} m_{j+1} \\ &+ \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \bar{c}_{ij} u_j + \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \bar{d}_{ij} u_{j+1} + \mu u_i \\ &= f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{6(x_i - jh)}{h^2} - \frac{4}{h} \right), \\ \bar{b}_{ij+1} &= ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{6(x_i - jh)}{h^2} - \frac{2}{h} \right), \\ \bar{c}_{ij} &= ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{12(x_i - jh)}{h^3} - \frac{6}{h} \right), \\ \bar{d}_{ij+1} &= ((x_i - jh + h)^{2-\alpha} - (x_i - jh)^{2-\alpha}) \left(\frac{-12(x_i - jh)}{h^3} - \frac{6}{h^2} \right). \end{aligned}$$

که $\bar{a}_{in} = \bar{c}_{in} = \bar{b}_{i1} = \bar{d}_{i1} = 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$. هم‌چنین u_i به‌وسیله \hat{u}_i و m_i به‌وسیله \hat{m}_i تقریب زده می‌شوند، به‌طوری‌که \hat{u}_i و \hat{m}_i برای $i = 1, 2, \dots, n$ در رابطه (۸.۲) صدق می‌کنند. آنگاه برای هر $i = 1, 2, 3, \dots, n$ داریم:

$$\hat{M}_i + \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(m-\alpha+1)} \left(\sum_{j=1}^i \bar{a}_{ij} \hat{m}_j + \sum_{j=1}^i \bar{b}_{ij} \hat{m}_{j+1} + \sum_{j=1}^i \bar{c}_{ij} \hat{u}_j + \sum_{j=1}^i \bar{d}_{ij} \hat{u}_{j+1} \right) + \mu \hat{u}_i = f_i.$$

در نهایت تقریبی از جواب دقیق u_i به‌واسطه اسپلین مکعبی $\widehat{Q}_i(x)$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ در حالت ماتریسی به‌شکل زیر است. (در حالت حدی وقتی که $\theta \rightarrow 0$ اسپلین غیرچندجمله‌ای به اسپلین معمولی درجه سوم تبدیل می‌شود).

$$\hat{M} + \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(m-\alpha+1)} (\bar{A}\hat{m} + \bar{B}\hat{m} + \bar{C}\hat{U} + \bar{D}\hat{U}) + \mu\hat{U} = F. \quad (5.3)$$

که، $\bar{A} = (\bar{a}_{ij}), \bar{B} = (\bar{b}_{ij}), \bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ ، $\bar{D} = (\bar{d}_{ij})$. حال مقادیر \hat{M}_i و \hat{m}_i از (۹.۲) مشخص می‌گردند. و $\hat{m}_0 = \frac{-3\hat{u}_0 + 4\hat{u}_1 - \hat{u}_2}{2h}, \hat{m}_n = \frac{3\hat{u}_{n-2} - 4\hat{u}_{n-1} + \hat{u}_n}{2h}$ هم‌چنین برای استفاده از شرایط مرزی در تقریب \hat{M}_i برای، $i = 0, n$ به‌لم زیر نیازمندیم.

لم ۱.۳. ماتریس Z و W که به‌کمک سیستم (۶.۲) و (۸.۲) به‌دست می‌آید، معکوس‌پذیرند.

□

اثبات. مرجع [۸].

هم‌چنین برای تعیین مقادیر \hat{M}_i و \hat{m}_i (در حالت حدی هنگامی که $\theta \rightarrow 0$) با استفاده از رابطه (۹.۲) اثبات می‌شود که Z و W ماتریس‌هایی اکیداً قطر غالب‌اند و لذا معکوس‌پذیرند، داریم:

$$\begin{cases} (1) : h^2 W M = R U, M = \frac{1}{h^2} W^{-1} R U + O(h^2), \\ (2) : h Z m = S U, m = \frac{1}{h} Z^{-1} S U + O(h^3). \end{cases} \quad (6.3)$$

بنابراین از (۵.۳) و (۶.۳) رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$(h^2 W^{-1} R + \frac{\bar{\eta}}{h} (\bar{A} Z^{-1} S + \bar{B} Z^{-1} S + \bar{C} + \bar{D}) + \mu I) \hat{U} = F.$$

روش دوم

با این فرض که $M_j = Q''(x_j)$ تقریبی از $u''(x_j)$ در هر زیر بازه، $[(j-1)h, jh]$ برای $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ و $j = 1, 2, \dots, i$ است. با استفاده هم‌زمان از رابطه (۴.۳) به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} = \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i \hat{M}_j ((i-j+1)^{2-\alpha} - (i-j)^{2-\alpha}) + O(h^2).$$

و لذا با توجه به رابطه فوق، گسسته‌سازی معادله بگلی-تورویک (۱.۱) با شرایط مرزی (۲.۱) برای $1 < \alpha < 2$ به شکل زیر صورت می‌پذیرد:

$$\hat{M}_i + \frac{\bar{\eta} h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((i-j+1)^{2-\alpha} - (i-j)^{2-\alpha}) \hat{M}_j + \mu \hat{u}_i = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (۷.۳)$$

و در نهایت تقریب جواب دقیق، u_i به وسیله یک اسپالین مکعبی نظیر، $\widehat{Q}_i(x)$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ به شکل ماتریسی زیر است:

$$\hat{M} + \bar{\eta} h^{2-\alpha} (\rho \hat{M}) + \mu \hat{U} = F. \quad (۸.۳)$$

که، $\rho = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((i-j+1)^{2-\alpha} - (i-j)^{2-\alpha})$ از این رو از روابط (۶.۳) و (۸.۳) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{h^2} W^{-1} R \hat{U} + \bar{\eta} h^{2-\alpha} (\rho \frac{1}{h^2} W^{-1} R \hat{U}) + \mu \hat{U} = F.$$

روش سوم

در این بخش نیز به واسطه تعریف مشتق کسری برای $0 < \alpha < 1$ خواهیم داشت:

$$D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_i} (x_i - \eta)^{-\alpha} u'(\eta) d\eta. \quad (۹.۳)$$

که با گسسته‌سازی رابطه (۹.۳)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^i \int_{(j-1)h}^{jh} (Q'(\eta) + O(h^3))(x_i - \eta)^{-\alpha} d\eta. \quad (۱۰.۳)$$

چون $(x_i - \eta)^{-\alpha}$ در بازه $[(j-1)h, jh]$ تغییر علامت نمی‌دهد. بنابه قضیه مقدار میانگین وزنی برای انتگرال‌ها در مورد سمت راست رابطه (۱۰.۳) داریم:

$$\int_{(j-1)h}^{jh} (Q'(\eta) + O(h^3))(x_i - \eta)^{-\alpha} d\eta = (Q'(\bar{\eta}) + O(h^3)) \int_{(j-1)h}^{jh} (x_i - \eta)^{-\alpha} d\eta. \quad (۱۱.۳)$$

با محاسبات ساده از روابط (۹.۳) و (۱۱.۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha(u(x))|_{x=x_i} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i (Q'(jh) + O(h^3))((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \left(-\frac{\cot(\theta) - 2\cot(2\theta)}{3\theta}\right) \hat{M}_j \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \left(\frac{\csc(\theta) - 2\csc(2\theta)}{3\theta}\right) \hat{M}_{j+1} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \left(-\frac{2}{3h}\theta(2\cot(\theta) - \cot(2\theta))\right) \hat{U}_j \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \left(\frac{2}{3h}\theta(2\csc(\theta) - \csc(2\theta))\right) \hat{U}_{j+1} \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) (O(h^3)).
 \end{aligned}$$

مقادیر، M_i برای هر، $i = 1, 2, \dots, n$ با استفاده از رابطه (۶.۲) با شرایط مرزی، $M_0 = Q''(a) = M_n = Q''(b) = 0$ ، و با این فرض که، u_i به وسیله \hat{u}_i و M_i به وسیله \hat{M}_i تقریب زده می‌شوند. به طوری که، \hat{M}_i و \hat{u}_i برای، $i = 1, 2, \dots, n-1$ در رابطه (۶.۲) صدق می‌کنند. a_{i_k} ها برای، $i = 1, 2, 3, 4$ به واسطه مقادیر محاسبه شده به دست می‌آیند. لذا برای هر، $i = 1, 2, \dots, n-1$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_i &+ \frac{\bar{\eta}h}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{\cot(\theta) - 2\cot(2\theta)}{3\theta}\right) \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \hat{M}_j \\
 &+ \frac{\bar{\eta}h}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{\csc(\theta) - 2\csc(2\theta)}{3\theta}\right) \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \hat{M}_{j+1} \\
 &+ \frac{\bar{\eta}}{h\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2}{3h}\theta(2\cot(\theta) - \cot(2\theta))\right) \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \hat{u}_j \\
 &+ \frac{\bar{\eta}}{h\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{2}{3h}\theta(2\csc(\theta) - \csc(2\theta))\right) \sum_{j=1}^i ((x_i - jh + h)^{1-\alpha} - (x_i - jh)^{1-\alpha}) \hat{U}_{j+1} \\
 &+ \mu \hat{u}_i = f_i + O(h^2).
 \end{aligned}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_i &+ \frac{\bar{\eta}h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{\cot(\theta) - 2\cot(2\theta)}{3\theta}\right) \sum_{j=1}^i (\lambda_{ij}) \hat{M}_j \\
 &+ \frac{\bar{\eta}h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{\csc(\theta) - 2\csc(2\theta)}{3\theta}\right) \sum_{j=1}^i (\lambda_{ij+1}) \hat{M}_{j+1} \\
 &+ \frac{\bar{\eta}h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2}{3h}\theta(2\cot(\theta) - \cot(2\theta))\right) \sum_{j=1}^i (\tilde{\lambda}_{ij}) \hat{u}_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\bar{\eta}h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{2}{3h} \theta (2 \csc(\theta) - \csc(2\theta)) \right) \sum_{j=1}^i (\bar{\lambda}_{ij+1}) \hat{u}_{j+1} \\
 & + \mu \hat{u}_i = f_i + O(h^2). \tag{۱۲.۳}
 \end{aligned}$$

که، $\lambda = (\lambda_{ij}) = \ddot{\lambda} = (\ddot{\lambda}_{ij}) = \tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_{ij}) = \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_{ij}) = ((i-j+1)^{1-\alpha} - (i-j)^{1-\alpha})$ ،
 $i = 1, 2, \dots, n-1$
 به طوری که، $(\dot{\lambda}_{i0}) = (\dot{\lambda}_{in}) = (\ddot{\lambda}_{i0}) = (\ddot{\lambda}_{i1}) = (\tilde{\lambda}_{i0}) = (\tilde{\lambda}_{in}) = (\bar{\lambda}_{i0}) = (\bar{\lambda}_{i1}) = 0$ لذا در شکل ماتریسی
 به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 \hat{M} & + \frac{\bar{\eta}h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{(\cot(\theta) - 2 \cot(2\theta))}{3\theta} \right) (\dot{\lambda}) \hat{M} \\
 & + \frac{\bar{\eta}h^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{(\csc(\theta) - 2 \csc(2\theta))}{3\theta} \right) (\ddot{\lambda}) \hat{M} \\
 & + \frac{\bar{\eta}h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2}{3h} \theta (2 \cot(\theta) - \cot(2\theta)) \right) (\tilde{\lambda}) \hat{U} \\
 & + \frac{\bar{\eta}h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{2}{3h} \theta (2 \csc(\theta) - \csc(2\theta)) \right) (\bar{\lambda}) \hat{U} \\
 & + \mu \hat{U} = F + O(h^2). \tag{۱۳.۳}
 \end{aligned}$$

$$(I + h^{2-\alpha} \Pi_1 + h^{2-\alpha} \Pi_2) \hat{M} + (h^{-\alpha} \Pi_3 + h^{-\alpha} \Pi_4 + \mu I) \hat{U} = F. \tag{۱۴.۳}$$

که، $\hat{M} = (\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_n)^t$ ، $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n)^t$ و $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$ که با استفاده از روابط (۶.۳) و (۱۴.۳) داریم:

$$(I + h^{2-\alpha} \Pi_1 + h^{2-\alpha} \Pi_2) \frac{1}{h^2} W^{-1} R \hat{U} + (h^{-\alpha} \Pi_3 + h^{-\alpha} \Pi_4 + \mu I) \hat{U} = F.$$

به طوری که:

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 & = \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{(\cot(\theta) - 2 \cot(2\theta))}{3\theta} \right) (\dot{\lambda}), \\
 \Pi_2 & = \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{(\csc(\theta) - 2 \csc(2\theta))}{3\theta} \right) (\ddot{\lambda}), \\
 \Pi_3 & = \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2}{3h} \theta (2 \cot(\theta) - \cot(2\theta)) \right) (\tilde{\lambda}), \\
 \Pi_4 & = \frac{\bar{\eta}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{2}{3h} \theta (2 \csc(\theta) - \csc(2\theta)) \right) (\bar{\lambda}).
 \end{aligned}$$

روش چهارم

هدف از تدوین این بخش رسیدن به این مطلب می باشد که روش های عددی بر پایه روش های ارائه گردیده در [۱]، [۲۵]، [۲۸] و [۲۹] را توسعه دهیم. هم چنین در ادامه این بخش، بررسی و تحلیل همگرایی این توسعه از روش های موجود از اهم اهداف پیش رو می باشد. در این بخش نیز فرضیات زیر استوار است که بردارهای ستونی معرفی گشته، $n-1$ بعدی اند. با استفاده هم زمان از تابع اسپلین غیرچند جمله ای و قسمت (۱) رابطه (۹.۲) و شرایط مرزی به یک دستگاه جبری از معادلات به شکل زیر خواهیم رسید. لازم به ذکر است که همواره فرضیات زیر برقرار است:

با جای‌گذاری (۱۶.۳) در (۳) خواهیم داشت:

$$NS + h^{2-\alpha}BG_1S + h^{2-\alpha}BG_2S + \mu h^2BS = h^2BF - h^{2-\alpha}BG_3 - h^{2-\alpha}BG_4 + C,$$

و

$$NU + h^{2-\alpha}BG_1U + h^{2-\alpha}BG_2U + \mu h^2BU = h^2BF - h^{2-\alpha}BG_3 - h^{2-\alpha}BG_4 + C + T. \quad (17.3)$$

لذا معادله خطا به شکل زیر می‌باشد:

$$NE + h^{2-\alpha}BG_1E + h^{2-\alpha}BG_2E + \mu h^2BE = T. \quad (18.3)$$

حال برای اینکه قادر باشیم به کرانی برای نرم بی نهایت خطا دست یابیم به لم زیر نیازمندیم.

لم ۲.۳. با فرض بر اینکه، \mathbb{A} ماتریسی مربعی باشد و $\|\mathbb{A}\| < 1$ ، آنگاه ماتریس، $(I - \mathbb{A})$ معکوس پذیر بوده و نیز، $\|(I - \mathbb{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{A}\|}$.

حال با استفاده از رابطه (۱۸.۳) می‌توان نوشت:

$$E = (I + h^{2-\alpha}N^{-1}BG_1 + h^{2-\alpha}N^{-1}BG_2 + \mu h^2N^{-1}B)^{-1}N^{-1}T. \quad (19.3)$$

و با استفاده از لم فوق و رابطه (۱۹.۳) می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\|E\| \leq \frac{\|N^{-1}\| \|T\|}{1 - \|N^{-1}\| (h^{2-\alpha}\|B\| \|G_1\| + h^{2-\alpha}\|B\| \|G_2\| + |\mu| h^2 \|B\|)}. \quad (20.3)$$

به شرط آنکه:

$$\|N^{-1}\| (h^{2-\alpha}\|B\| \|G_1\| + h^{2-\alpha}\|B\| \|G_2\| + |\mu| h^2 \|B\|) < 1.$$

هم چنین با استفاده از مراجع [۸]، [۱۳]، [۱۸]، [۲۸] و [۲۹] داریم:

$\|N^{-1}\| \leq \frac{(b-a)^2}{8h^2}$ ، $\|B\| = 1$ ، $(\text{Max}|u^{(4)}(\eta_i)| = P_4)$ ، برای هر $(x_i < \eta_i < x_{i+1})$ ، $\|T\| = \frac{1}{12}h^4P_4$ هم چنین، $0 < \alpha < 1$ ، برای $\|G_1\| \leq 2|\bar{\eta}|\vartheta$ ، $\|G_2\| \leq 2|\bar{\eta}|(1 - \vartheta)$ و $1 < \alpha < 2$ ، برای $4|\bar{\eta}|(1 - \vartheta)$ ، در رابطه (۲۰.۳) داریم:

$$\|E\| \leq \frac{(b-a)^2 h^2 P_4}{12[8 - (b-a)^2(2|\bar{\eta}|h^{-\alpha}\vartheta + 2|\bar{\eta}|h^{-\alpha}(1 - \vartheta) + |\mu|)]} \leq \kappa_1 h^{2+\alpha} \equiv O(h^{2+\alpha}). \quad (21.3)$$

قضیه ۳.۳. فرض کنید $Q_\Delta(x, \beta) = Q(x) \in C^\infty[a, b]$ یک اسپلاین غیرچندجمله‌ای باشد که $u(x)$ را با روابط (۶.۲) و (۸.۲) درونیابی می‌کند. آنگاه کران خطای در حالت حدی برای زمانی که، $\theta \rightarrow 0$ برای این اسپلاین مکعبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|e(x_i + \tau h)| \leq \frac{h^4}{384} \phi_4, \quad \text{Max}|u^{(4)}(\eta_i)| = \phi_4, \quad x_i < \eta_i < x_{i+1}. \quad (22.3)$$

اثبات. با استفاده از مراجع [۱۳] و [۱۸] اگر u_i را با اسپلاین مکعبی \widehat{Q}_i تقریب بزنیم آنگاه داریم:

$$\begin{cases} |Q_i(x) - \widehat{Q}_i(x)| \equiv O(h^4), \\ |Q'_i(x) - \widehat{Q}'_i(x)| \equiv O(h^3), \\ |Q''_i(x) - \widehat{Q}''_i(x)| \equiv O(h^2). \end{cases} \quad (۲۳.۳)$$

و

$$\widehat{Q}_i(x) = \widehat{a}_{i1} \sin(\beta(x - x_i)) + \widehat{a}_{i2} \cos(\beta(x - x_i)) + \widehat{a}_{i3} \sin(2\beta(x - x_i)) + \widehat{a}_{i4} \cos(2\beta(x - x_i)).$$

که، $\widehat{M} = (\widehat{M}_0, \widehat{M}_1, \widehat{M}_2, \dots, \widehat{M}_{n-1}, \widehat{M}_n)^T$ از شرایط مرزی به دست می‌آیند. $\widehat{u}_0, \widehat{u}_n, \widehat{M}_0$ و $\widehat{U} = (\widehat{u}_0, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots, \widehat{u}_{n-1}, \widehat{u}_n)^T$ با استفاده از قسمت (۲) رابطه (۹.۲) خواهیم داشت: $\widehat{m} = (\widehat{m}_0, \widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \dots, \widehat{m}_{n-1}, \widehat{m}_n)^T$ هم‌چنین، $D^\alpha(u(x))|_{x=x_i}, i = 0, 1, 2, \dots, n$ نیز از رابطه (۳.۲) به دست خواهد آمد. بنابراین با استفاده از (۲۱.۳) و (۲۳.۳) داریم:

$$\|U - \widehat{S}\|_\infty \leq \|U - S\|_\infty + \|S - \widehat{S}\|_\infty \leq \kappa_1 h^{2+\alpha} + \kappa_2 h^4 \equiv O(h^{2+\alpha}).$$

و لذا، $\|E\| \rightarrow 0$ هنگامی که $h \rightarrow 0$ ، بنابراین این پایانی بر اثبات همگرایی روش می‌باشد. \square

۴ تحلیل همگرایی

در این بخش اهتمام بر تحلیل همگرایی اسپلاین غیرچندجمله‌ای روش سوم است. همگرایی روش اول و دوم نیز به طریق مشابه قابل اثبات است. از معادله (۱۴.۳) در نقاط، $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F(x_i, u(x_i), u''(x_i)) = 0, & i = 0, 1, 2, \dots, n. \\ u(x_0) = \omega_1, & u(x_n) = \omega_2. \end{cases} \quad (۱.۴)$$

حال اگر از نتایج به دست آمده در (۷.۳) نیز استفاده کنیم، داریم:

$$\begin{cases} F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) = 0, & i = 0, 1, 2, \dots, n. \\ Q(x_0) = \omega_1, & Q(x_n) = \omega_2. \end{cases} \quad (۲.۴)$$

رابطه (۷.۳) یک دستگاه غیرخطی می‌باشد و با استفاده از روش تکراری نیوتن می‌توان آن را حل کرد. تحت این فرض که، $u(x)$ جواب دقیق مساله بوده و $Q(x) \in C^\infty[0, T]$ تقریب آن و صادق در رابطه $Q(x_i) = u(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ باشد، و اگر $\widehat{Q}(x)$ تقریب اسپلاین محاسباتی باشد، آنگاه روابط، $\|u(x) - \widehat{Q}(x)\|$ و $\|\widehat{Q}(x) - Q(x)\|$ به شکل جداگانه قابل برآورداند.

لم ۱.۴. فرض کنید، $\widehat{Q}(x)$ یک درونیاب اسپلاین باشد و هم‌چنین فرض کنید مشتقات جزئی F به گونه‌ای موجودند که در آن، $0 \leq i \leq n$ برای هر، $k_1, |\frac{\partial F}{\partial u}| \leq k_1, k_2, |\frac{\partial F}{\partial u''}| \leq k_2$ ثابت هستند. لذا برای هر، $0 \leq i \leq n$ داریم:

$$|F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) - F(x_i, \widehat{Q}(x_i), \widehat{Q}''(x_i))| \leq O(h^2). \quad (۳.۴)$$

اثبات. برای هر، $1 \leq i \leq n-1$ داریم:

$$\begin{aligned} F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) - F(x_i, \widehat{Q}(x_i), \widehat{Q}''(x_i)) &= F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) \\ &- F(x_i, \widehat{Q}(x_i), Q''(x_i)) \\ &+ F(x_i, \widehat{Q}(x_i), Q''(x_i)) \\ &- F(x_i, \widehat{Q}(x_i), \widehat{Q}''(x_i)). \end{aligned} \quad (۴.۴)$$

حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای هر دو قسمت رابطه فوق یک، ξ_i و ν_i بین نقاط موجود است به قسمی که:

$$F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) - F(x_i, \hat{Q}(x_i), Q''(x_i)) = \frac{\partial F}{\partial u}(\xi_i)(Q(x_i) - \hat{Q}(x_i)),$$

$$F(x_i, \hat{Q}(x_i), Q''(x_i)) - F(x_i, \hat{Q}(x_i), \hat{Q}''(x_i)) = \frac{\partial F}{\partial u''}(\nu_i)(Q''(x_i) - \hat{Q}''(x_i)).$$

و با بهره‌گیری از رابطه (۲۳.۳) خواهیم داشت :

$$|Q(x_i) - \hat{Q}(x_i)| \equiv O(h^4),$$

$$|Q''(x_i) - \hat{Q}''(x_i)| \equiv O(h^2).$$

و با گرفتن قدر مطلق از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} |F(x_i, Q(x_i), Q''(x_i)) - F(x_i, \hat{Q}(x_i), \hat{Q}''(x_i))| &\leq k_1|Q(x_i) - \hat{Q}(x_i)| \\ &+ k_2|Q''(x_i) - \hat{Q}''(x_i)| \\ &\leq k_1O(h^4) + k_2O(h^2) \equiv O(h^2). \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

□

قضیه ۲.۴. با این فرض که، $u(x) \in C^2[0, T]$ جواب دقیق رابطه (۱.۱) با شرایط مرزی (۲.۱) بوده و، $Q(x)$ تقریب اسپیلین غیرچندجمله‌ای، $u(x)$ باشد خواهیم داشت:

$$\|u(x) - Q(x)\| \leq O(h^2).$$

اثبات. چون، $\hat{Q}(x)$ درونیاب، $u(x)$ بوده، لذا در رابطه (۱.۱) صادق می‌باشد، بنابراین ثابت متناهی مانند، ϱ_1 مستقل از، h موجود است به طوری که :

$$\|u(x) - \hat{Q}(x)\| \leq \varrho_1 h^2 \equiv O(h^2).$$

حال با استفاده از نامساوی مثلثی و لم فوق نتیجه زیر قابل حصول است

$$\|u(x) - Q(x)\| \leq \|u(x) - \hat{Q}(x)\| + \|\hat{Q}(x) - Q(x)\| \equiv O(h^2).$$

□

۵ نتایج عددی

در این قسمت برای نشان دادن کارایی روش‌های ارائه شده مثال‌هایی برای روش‌های مختلف و با مقادیر، $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ و $\alpha = 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.9$ حل شده‌اند. ماکزیمم خطای مطلق در جداول نمایش داده شده است. ماکزیمم خطای مطلق هر مثال با خطای سایر روش‌های معرفی شده در مراجع [۱]، [۹]، [۱۷]، [۲۱]، [۲۸] و [۲۹] مقایسه شده است. هم‌چنین زمان اجرای برنامه برای مثال‌های ۱.۵ و ۴.۵ محاسبه شده‌اند. به‌علاوه یادآور می‌شویم که مرتبه همگرایی از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$C.O. = \log_2 \frac{E(h)}{E(\frac{h}{2})}.$$

که، $E(h)$ ماکزیمم خطای مطلق بوده و لازم به‌ذکر است که در محاسبه نتایج از سیستمی با مشخصات، Intel(R) Core(TM) 2 Duo CPU T7250 2.00 GHz RAM 2.00GB استفاده شده است.

جدول ۱: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده حاصل از روش سوم برای مثال ۱.۵، با $\bar{\eta} = 0.5$ و $\mu = 1$.

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$C.O.$	$\alpha = 0.5$	$C.O.$	$\alpha = 0.9$	$C.O.$
8	$1.19e-3$	$1.46e-3$.	$6.62e-3$.	$8.86e-3$.
16	$2.74e-4$	$2.57e-4$	2.51	$1.05e-3$	2.65	$2.01e-3$	2.14
32	$4.38e-5$	$5.89e-5$	2.12	$2.40e-4$	2.13	$4.47e-4$	2.16

جدول ۲: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده حاصل از روش چهارم برای مثال ۱.۵، با $\bar{\eta} = 0.5$ و $\mu = 1$.

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$C.O.$	$\alpha = 0.5$	$C.O.$
8	$2.77e-17$	$5.70e-5$.	$1.72e-4$.
16	$4.16e-17$	$1.02e-5$	2.48	$3.10e-5$	2.47
32	$1.11e-16$	$2.12e-6$	2.27	$6.22e-6$	2.32
64	$8.32e-17$	$4.32e-7$	2.29	$1.32e-6$	2.24

مثال ۱.۵. مساله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم، [۲۸].

$$u''(x) + \bar{\eta}D^\alpha u(x) + \mu u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$f(x) = 4x^2(5x - 3) + \bar{\eta}x^4 - \alpha\left(\frac{120}{\Gamma(6 - \alpha)}x - \frac{24}{\Gamma(5 - \alpha)}\right) + \mu x^4(x - 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

و جواب دقیق مساله برابرست با:

$$u(x) = x^4(x - 1).$$

در جدول‌های ۱ و ۲، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی به دست آمده، به ترتیب حاصل از روش‌های سوم و چهارم برای $\bar{\eta} = 0.5$ و $\mu = 1$ و $\alpha = 0, 0.3, 0.5, 0.9$ نشان داده شده‌اند. جدول ۳، به زمان اجرای محاسبات مربوط به جدول ۱، برحسب واحد زمانی ثانیه پرداخته است. در جدول ۴، ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده با استفاده از روش ارائه شده در [۲۸] نشان داده شده است. در نهایت در تصویر سمت چپ شکل ۱، جواب‌های تقریبی حاصل از روش چهارم برای $\alpha = 0, 0.3, 0.5$ و جواب دقیق مساله را با طول گام $h = 0.1$ به طور هم‌زمان ترسیم کردیم و در تصویر سمت راست، نمای نزدیک شده آن را نشان داده‌ایم.

مثال ۲.۵. مساله مقدار مرزی را که به شکل زیر است، در نظر می‌گیریم:

$$D^{-\alpha}u''(x) + u(x) = x^6(1 - x^2) + \left(\frac{720}{\Gamma(5 + \alpha)}x^{4+\alpha} - \frac{40320}{\Gamma(7 + \alpha)}\right)x^{6+\alpha}, \quad x \in [0, 1],$$

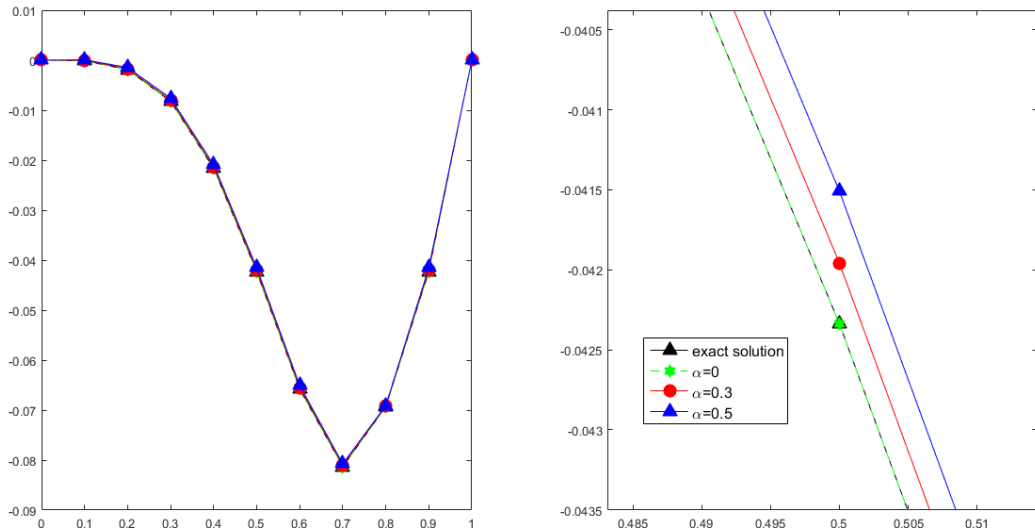
$$u(0) = u(1) = 0.$$

جدول ۳: زمان اجرای محاسبات جدول ۱، برحسب واحد زمانی ثانیه.

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$
8	3.52	3.61	3.65
16	3.56	3.69	3.61
32	3.64	3.86	3.73
64	4.02	4.70	4.50

جدول ۴: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۱.۵، حل شده با روش ارائه شده در مرجع [۲۸].

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$
8	$7.33e - 3$	$6.85e - 3$	$6.39e - 3$
16	$2.09e - 3$	$1.93e - 3$	$1.73e - 3$
32	$5.34e - 4$	$5.38e - 4$	$4.95e - 4$
64	$1.44e - 4$	$1.52e - 4$	$1.37e - 4$
128	$4.02e - 5$	$4.23e - 5$	$3.69e - 5$



شکل ۱: ترسیم هم‌زمان جواب‌های عددی حاصل از روش چهارم و جواب دقیق برای مثال ۱.۵، با $\mu = 1$ و $\bar{\eta} = 0.5$.

که جواب دقیق مساله برابرست با:

$$u(x) = x^6(1 - x^2).$$

در جدول ۵، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی حاصل از روش چهارم برای $\alpha = 0, 0.2, 0.4$ به دست آمده است. جدول‌های ۶ و ۷، ماکزیمم خطای مطلق در همین حالت‌ها را با استفاده از روش‌های ارائه شده در [۲۹] و [۱] را نشان می‌دهند. در نهایت در جدول ۸، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی حاصل از روش سوم برای $\alpha = 0, 0.4, 0.9$ محاسبه شده است.

جدول ۵: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده حاصل از روش چهارم برای مثال ۲.۵.

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$C.O.$	$\alpha = 0.4$	$C.O.$
8	$4.92e - 4$	$4.71e - 4$.	$3.68e - 4$.
16	$3.89e - 5$	$9.69e - 5$	2.28	$6.29e - 5$	2.55
32	$2.75e - 6$	$2.22e - 5$	2.17	$1.23e - 5$	2.35

جدول ۶: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده برای مثال ۲.۵، در مرجع [۲۹].

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$
8	$9.29e - 2$	$1.06e - 1$	$1.43e - 1$
16	$2.57e - 2$	$2.91e - 2$	$4.11e - 2$
32	$7.15e - 3$	$8.05e - 3$	$1.10e - 2$
64	$1.85e - 3$	$2.01e - 3$	$3.06e - 3$

جدول ۷: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده برای مثال ۲.۵، در مرجع [۱].

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$
8	$1.5e - 2$	$1.7e - 2$	$2.05e - 2$
16	$5.6e - 3$	$7.9e - 3$	$1.14e - 2$
32	$4.5e - 3$	$6.6e - 3$	$4.5e - 3$

مثال ۳.۵. معادله بگلی-تورویک کسری با شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + D^{\frac{3}{2}}u(x) + u(x) = x^3 + 5x + \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

جواب دقیق این معادله برابرست با:

$$u(x) = x^3 - x.$$

ابتدا در جدول ۹، جواب‌های عددی حاصل از روش اول با گام $h = 0.1$ را به دست آورده‌ایم. در جدول ۱۰، جواب‌های عددی ارائه شده در [۲۱] را با جواب دقیق مقایسه کرده‌ایم. ماکزیمم خطای مطلق برای روش اول و روش دوم در جدول ۱۱، مقایسه شده‌اند. در نهایت در تصویر سمت چپ شکل ۲، نتایج تقریبی جدول ۹ حاصل از روش اول برای $n = 10, 20, 40$ و جواب دقیق را همزمان ترسیم کرده‌ایم و در تصویر سمت راست، نمای نزدیک شده آن را نشان داده‌ایم.

مثال ۴.۵. مساله بگلی-تورویک کسری زیر را برای بررسی روش‌های پیش‌نهادی در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + D^{\frac{3}{2}}u(x) + u(x) = \gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} + \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \frac{1}{2})}x^{\gamma-\frac{3}{2}} + x^\gamma, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

که جواب دقیق برای این معادله برابرست با:

$$u(x) = x^\gamma.$$

جدول ۸: ماکزیمم خطای مطلق به دست آمده حاصل از روش سوم برای مثال ۲.۵.

n	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.9$
8	$3.86e - 3$	$6.48e - 3$	$8.58e - 3$
16	$9.88e - 4$	$1.16e - 3$	$1.89e - 3$
32	$1.95e - 5$	$2.60e - 4$	$8.65e - 4$

جدول ۹: جواب‌های عددی به دست آمده حاصل از روش اول برای مثال ۳.۵.

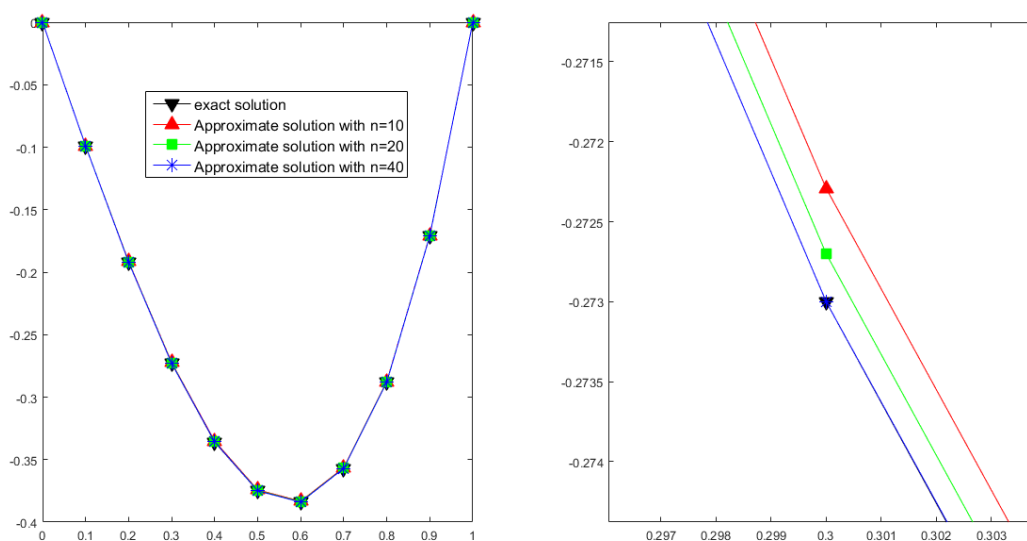
x	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0.1	-0.0999839029648408	-0.0991780129777646	-0.09902563129364461
0.2	-0.1929496573590681	-0.1921404327629765	-0.19201920290616248
0.3	-0.2737783729484617	-0.2731115210232273	-0.27301499021665854
0.4	-0.3366319163396341	-0.3360891417690852	-0.33601185443796866
0.5	-0.3755082480342222	-0.3750708830494593	-0.37500935812857605
0.6	-0.3844011689404432	-0.3840554682536743	-0.38400728559367271
0.7	-0.3573069005124369	-0.3570421354342761	-0.35700551447130562
0.8	-0.2882213997500855	-0.2880303912577806	-0.28800396865039084
0.9	-0.17111547289079775	-0.1710197837825782	-0.17100259741188184

جدول ۱۰: مقایسه جواب دقیق مثال ۳.۵، با جواب‌های عددی ارائه شده در [۲۱].

x	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	جواب دقیق
0.1	-0.0989868450	-0.0989087970	-0.0989662744	-0.099000000000
0.2	-0.1915262280	-0.1918109570	-0.1919429930	-0.192000000000
0.3	-0.2722913010	-0.2727620400	-0.2729317000	-0.273000000000
0.4	-0.3351934350	-0.3357462050	-0.3359286851	-0.336000000000
0.5	-0.3741958950	-0.3747551070	-0.3749319383	-0.375000000000
0.6	-0.3832752590	-0.3837831780	-0.3839400733	-0.384000000000
0.7	-0.3564138890	-0.3568261360	-0.3569520382	-0.357000000000
0.8	-0.2875962800	-0.2878801690	-0.2879668795	-0.288000000000
0.9	-0.1708055150	-0.1709411180	-0.1709835662	-0.171000000000

جدول ۱۱: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۳.۵.

n	روش اول	روش دوم
4	$5.09e - 3$	$8.71e - 2$
8	$1.27e - 3$	$4.54e - 2$
16	$2.67e - 4$	$2.25e - 2$
32	$4.93e - 5$	$1.11e - 2$
64	$8.09e - 6$	$5.45e - 3$
128	$1.24e - 6$	$2.68e - 3$
256	$1.84e - 7$	$1.32e - 3$
512	$2.84e - 8$	$6.56e - 5$



شکل ۲: ترسیم هم‌زمان جواب‌های عددی حاصل از روش اول و جواب دقیق برای مثال ۳.۵.

جدول ۱۲: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۴.۵، برای مقدار $\gamma = 3$.

n	روش اول	روش دوم	[۹]	[۱۷]
8	$8.91e-2$	$4.83e-2$	$1.76e-1$	$2.77e-1$
16	$2.14e-2$	$2.32e-2$	$9.09e-2$	$1.50e-1$
32	$5.26e-3$	$1.13e-2$	$4.62e-2$	$7.76e-2$
64	$1.62e-3$	$5.48e-3$	$2.33e-2$	$3.94e-2$
128	$4.73e-4$	$2.69e-3$	$1.17e-2$	$1.98e-2$
256	$1.46e-4$	$1.32e-3$	$5.85e-3$	$9.96e-2$
512	$4.46e-5$	$6.55e-4$	$2.93e-3$	$4.49e-3$
1024	$1.38e-5$	$3.26e-5$.	.

ابتدا ماکزیمم خطای مطلق برای این مثال را با استفاده از روش اول و روش دوم به دست آوردیم. در جدول ۱۲، پیاده‌سازی‌ها برای حالت $\gamma = 3$ و در جدول ۱۳، برای حالت $\gamma = 4$ انجام شده‌اند. سپس این نتایج با نتایج عددی در [۹] و [۱۷] مقایسه شده است. در جدول ۱۴، مدت زمان اجرای محاسبات برحسب واحد زمانی ثانیه درج شده است.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله چهار روش عددی برای حل معادله بگلی-تورویک کسری مورد معرفی قرار گرفته، که براساس آن‌ها معادله بگلی-تورویک کسری معرفی شده در رابطه (۱.۱) با شرایط مرزی (۲.۱) بر پایه یک تابع اسپلاین غیرچندجمله‌ای و عملگر دیفرانسیلی گرانوالد انتقال یافته، گسسته‌سازی گردید. لازم به ذکر است که در این مقاله برای اولین بار از یک اسپلاین پارامتری جدیدی استفاده شده، که می‌توان جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی و کسری و همچنین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی معمولی و کسری را نیز به واسطه استفاده از آن تقریب زد. همچنین به جهت بررسی همگرایی و ارزیابی

جدول ۱۳: ماکزیمم خطای مطلق مثال ۴.۵، برای مقدار $\gamma = 4$.

n	روش اول	روش دوم	[۹]	[۱۷]
8	$1.77e-2$	$7.02e-2$	$1.57e-2$	$4.76e-1$
16	$4.31e-3$	$3.49e-2$	$3.91e-3$	$2.31e-1$
32	$1.06e-3$	$1.72e-2$	$9.77e-4$	$1.13e-1$
64	$3.20e-4$	$8.40e-3$	$2.44e-4$	$5.58e-2$
128	$9.57e-5$	$4.11e-3$	$6.10e-5$	$2.77e-2$
256	$2.94e-5$	$2.02e-3$	$1.53e-5$	$1.38e-2$
512	$8.98e-6$	$9.99e-4$	$3.81e-6$	$6.90e-3$
1024	$2.77e-6$	$4.94e-4$.	.

جدول ۱۴: زمان اجرای محاسبات جدول ۱۳، برحسب واحد زمانی ثانیه.

n	روش اول	روش دوم
8	2.66	2.84
16	2.74	2.92
32	2.74	3.25
64	2.93	4.55
128	3.33	9.61
256	4.83	30.88
512	10.94	121.91
1024	32.61	481.48

کارایی روش‌های تشریح شده در این مقاله، نتایج با نتایج سایر محققان [۱]، [۹]، [۱۷]، [۲۱]، [۲۸] و [۲۹] مقایسه شده و زمان اجرای برنامه نیز محاسبه گردیده است.

فهرست منابع

- [1] Akram G. and Tariq H., *An exponential spline technique for solving fractional boundary value problem*, *Calcolo.*, **53** (2016), 545-558.
- [2] Akgül A., *A new method for approximate solutions of fractional order boundary value problems*, *Neural Parallel Sci. Comput.*, **22(1-2)** (2017), 223-237.
- [3] Akgül A., Mustafa I. and Baleanu D., *On solutions of variable-order fractional differential equations*, *Int. J. Optim. Control.*, **7** (2017), 112-116.
- [4] Al-Mdallal Q. M., Syam M. I. and Anwar M. N., *A collocation shooting method for solving fractional boundary value problems*, *Commun. Nonlinear Sci Numer. Simul.*, **15(12)** (2010), 3814-3822.
- [5] Bagley R. L. and Torvic P. J., *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, *J. Appl Mech.*, **51(2)** (1984), 294-298.
- [6] Diego Murio A., *Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations*, *J. Comput. Appl. Math.*, **56** (2008), 1138-1145.

- [7] Diethelm K. and Ford J., *Numerical solution of the Bagley-Torvik equation*, BIT Numer. Math., **42** (2002), 490-507.
- [8] Emadifar H. and Jalilian R., *An exponential spline approximation for fractional Bagley-Torvik equation*, Boundary value Problems, **20** (2020), <https://doi.org/10.1186/s13661-020-01327-2>.
- [9] Esmaeili S., *The numerical solution to the Bagley-Torvik equation by exponential integrators*, Scientia Iranica, **24(6)** (2017), 2941-2951.
- [10] Fazli H. and Juan J., *An investigation of fractional Bagley-Torvik equation*, Open Mathematics, (2019), 499-512.
- [11] Gülsu M., Öztürk Y. and Anapali A., *Numerical solution of the fractional Bagley-Torvik equation arising in fluid mechanics*, Int. J. Comput. Math., **94(1)** (2017), 173-184.
- [12] Jalilian R. and Tahernezhad T., *Exponential spline method for approximation solution of Fredholm integro-differential equation*, Int. J. Comput. Math., **97(3)** (2019), 1-17.
- [13] Maleknejad Kh., Rashidinia J. and Jalilian H., *Nonpolynomial spline functions and Quasi-linearization*, FILOMAT, **32(11)** (2018).
- [14] Maleknejada K. and Torkzadeh L., *Hybrid functions approach for the fractional riccati differential equation*, Filomat., **30(9)** (2016), 2453-2463.
- [15] Oldham K. B. and Spanier J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [16] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1990.
- [17] Podlubny I., *Matrix approach to discrete fractional calculus*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3(4)** (2000), 359-386.
- [18] Rashidinia J. and Jalilian R., *Non-polynomial spline for solution of boundary-value problems in plate deflection theory*, I. J. Comput Math., **84** (2007), 1483-1494.
- [19] Ray S. S. and Bera R. K., *Analytical solution of the Bagley-Torvik equation by Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput., **168** (2005), 398-410.
- [20] Saadatmand A. and Dehghan M., *A new operational matrix for solving fractional-order differential equations*, Comput. Math. Appl., **59** (2010), 1326-1336.
- [21] Sakar M. G., Sald O. and Akgül A., *A novel technique for fractional Bagley-Torvik equation*, Proc. Natl. Acad.Sci.India, Sect. A Phys. Sci., <https://doi.org/10.1007/s40010-018-0488-4>.
- [22] Saw V. and Kumar S., *Numerical scheme for solving two point fractional Bagley-Torvik equation using Chebyshev collocation method*, WSEAS Transactions on Systems, **17** (2018), 166-177.
- [23] Sayevand Kh. and Mirzaee F., *A unique continuous solution for the Bagley-Torvik equation*, CJMS., **1(1)** (2012), 47-51.
- [24] Staněk S., *Two-point boundary value problems for the generalized Bagley-Torvik fractional differential equation*, Cent. Eur. J. Math., **11(3)** (2013), 574-593.

- [25] Tian W., Zhou H. and Deng W., *A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations*, Math Computat., **84** (2015), 1703-1727.
- [26] Van Daele M., Vanden Berghe G. and De Meyer H., *A smooth approximation for the solution of a fourth-order boundary value problem based on nonpolynomial splines*, J. Comput. Appl. Math., **51** (1994), 383-394.
- [27] Yüzbaş Ş., *Numerical solution of the Bagley-Torvik equation by the Bessel collocation method*, Math. Methods Appl. Sci., **36** (2013), 300-312.
- [28] Zahra W. K. and Elkholy S. M., *Quadratic spline solution for boundary value problem of fractional order*, Numer. Algorithms, **59** (2012), 373-391.
- [29] Zahra W. K. and Elkholy S. M., *Cubic spline solution of fractional Bagley-Torvik equation*, Electron J. Math. Anal. Appl., **1(2)** (2013), 230-241.



An non-polynomial spline approximation for fractional Bagley-Torvik equation

Sara Ivani and Reza Jalilian[†],

Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, Iran

Communicated by: F. Azarpanah

Received: 2019/7/28

Accepted: 2022/6/13

Abstract: In this paper, we approximate the solution of fractional Bagley–Torvik equation using the Non-polynomial spline function and the shifted Grünwald difference operator. The proposed methods reduce to the system of algebraic equations. The convergence analysis of the methods has been discussed. The numerical examples are presented to illustrate the applications of the methods and to compare the computed results with the other methods.

Keywords: Fractional Bagley–Torvik equation, Non-polynomial spline, Grünwald difference operator, Convergence analysis.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: s.eivany@yahoo.com (S. Ivani), rezajalilian72@gmail.com (R. Jalilian).