



تحلیل همگرایی حل عددی معادله واکنش-انتشار مرتبه دوم با شرایط مرزی

جواد شکری *

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی، ص. پستی ۱۶۵.

دبیر مسئول: مهدی نجفی‌خواه

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۴/۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳

چکیده: در این مقاله یک رویه خاص برای حل معادلات با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم واکنش-انتشار (RPDES)، با شرایط مرزی، با به‌کارگیری روش طیفی تاو ارائه می‌گردد. از آنجا که از نقطه نظر عددی اپراتور انتگرال نسبت به اپراتور مشتق از پایداری بالاتری برخوردار است بنابراین، ابتدا این مسئله را به یک معادله انتگرال ولترا-فردهلم تبدیل می‌کنیم و سپس روش طیفی تاو را برای حل آن به‌کار می‌گیریم. جواب تقریبی را به‌صورت یک سری برحسب توابع متعامد بر حسب متغیر مکان و ضرایب مجهول بر حسب متغیر زمان بیان کرده و با به‌کارگیری روش تاو به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب ضرایب مجهول می‌رسیم. تحلیل وجود و یکتایی جواب هم‌چنین تحلیل همگرایی روش تاو برای حل این معادله ارائه خواهد شد. روش عددی تاو در دو حالت برای حل این معادله به‌کار می‌گیریم؛ در حالت اول برای مسئله‌ی تبدیل یافته معادله به فرم معادله انتگرال ولترا-فردهلم (حالت انتگرال) و در حالت دوم به‌طور مستقیم (حالت مستقیم) برای خود معادله روش تاو مورد استفاده قرار می‌دهیم. در ادامه مثال‌های عددی فوق‌همگرایی حالت انتگرال نسبت به حالت مستقیم را نمایش خواهند داد.

واژه‌های کلیدی: معادله واکنش-انتشار مرتبه‌ی دوم، روش طیفی تاو، معادله انتگرال ولترا-فردهلم، تحلیل همگرایی.

رده‌بندی ریاضی: 35G05, 35R30, 45A05, 65N35, 46A19

مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر روش‌های طیفی برای حل تقریبی انواع معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مورد توجه بیشتر محققان قرار گرفته است. روش‌های طیفی به دلیل دارا بودن از خواص بهینه تقریب، برای حل معادلات با مشتقات جزئی و معادلات انتگرال با جواب هموار به‌کار گرفته می‌شوند [۲، ۶، ۹، ۲۳]. روش تاو یکی از روش‌های طیفی مشهور است، برای مثال مرجع [۱۹] مشاهده گردد، که در آن مؤلف روش تاو را به‌صورت چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب اختیاری به‌کار می‌گیرد. روش تاو در سال‌های اخیر برای حل معادلات دیفرانسیل کاربرد گسترده‌ای یافته است (برای نمونه [۸-۱۲، ۲۱]) و برای معادلات دیفرانسیل

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: j.shokri@urmia.ac.ir (J. Shokri)

با مشتقات جزئی ([۱۴، ۱۷، ۱۸] دیده شود). روش‌های عددی بر اساس چندجمله‌ای‌های چیبیشف و لژاندر در مقالات متعددی به کار گرفته شده‌اند (برای مثال [۸-۱۴، ۱۷، ۲۰، ۲۱]).

تعداد قابل توجهی معادلات مرتبه دوم خطی و غیرخطی در علوم فیزیک و مهندسی ظاهر می‌شوند که با وجود تلاش شده بسیار فقط برخی از آن‌ها از نظر تحلیلی قابل حل هستند، اما بیشتر آن‌ها از نظر عددی قابل حل خواهند بود. تعدادی از محققان تلاش کرده‌اند که مسئله مرتبه دوم با مقدار مرزی را با استفاده از روش‌های عددی با تقریب بالا مانند روش کمترین مربعات، تفاضل متناهی و روش سینک-گالرکین حل کنند ([۱، ۵، ۷، ۲۲، ۲۴] را ببینید).

بناباه اهمیت مسئله ما انگیزه یافته‌ایم که در این راستا روش تاو را برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با مقدار مرزی به فرم زیر به کار بگیریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t), \quad (1.1)$$

با شرایط مقدار اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.1)$$

با شرایط مرزی دیریکله

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(L, t) = g_2(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

معادله (۱.۱) یک معادله واکنش-انتشار است (RDEs). این معادله کاربرد به‌سزایی دارد، از جمله در پدیده‌های جنبش‌های شیمیایی و واکنش‌های شیمیایی.

در این مقاله ما معادله RDEs (۱.۱) را به معادله انتگرال ولترا-فردهللم (VFIEs) تبدیل می‌کنیم، سپس روش عددی تاو را برای حل معادله انتگرال به‌دست آمده را به کار می‌بریم.

روند اجمالی مقاله بدین صورت است که در بخش ۲ با تبدیل مسئله RDEs (۱.۱) به انتگرال ولترا-فردهللم، ساختار حل عددی این معادله تبدیل یافته را با به‌کارگیری روش طیفی تاو بر پایه چندجمله‌ای‌های متعامد بررسی می‌کنیم. در بخش ۳ همگرایی روش عددی را که از روش طیفی تاو نشأت می‌گیرد، برای معادله تبدیل یافته انتگرال ولترا-فردهللم (VFIEs) در فضاها‌ی هیلبرت مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. دقت روش پیش‌نهادی را با استفاده از چند مثال عددی، با توجه به داشتن جواب دقیق مسأله، در بخش ۴ ارائه می‌دهیم. در پایان، در بخش ۵ نتیجه‌گیری مقاله آورده شده است.

۲ تبدیل مسئله RDE به مسئله VFIE و روش طیفی تاو

در این بخش، ابتدا مسأله RDEs (۱.۱) را به معادله انتگرال ولترا-فردهللم (VFIEs) تبدیل می‌کنیم. این عمل به‌دلیل خاصیت پایداری عددی معادلات انتگرال نسبت به عملگرهای مشتق انجام می‌گیرد و نتیجه این ادعا در بخش نتایج عددی آورده خواهد شد. معادله (۱.۱) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{b}{a^2} u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

هدف ما تبدیل مسئله با مقدار مرزی (۱.۲) به معادله انتگرال ولترا-فردهللم است. بنابراین، فرض می‌کنیم که $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \phi(x, t)$. انتگرال‌گیری از طرفین این معادله در بازه $[0, x]$ ، داریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \int_0^x \phi(t_1, t) dt_1, \quad (2.2)$$

از طرفین معادله‌ی فوق در بازه $[0, x]$ انتگرال می‌گیریم به‌طوری که،

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(\circ, t) + x \frac{\partial u(\circ, t)}{\partial x} + \int_{\circ}^x \int_{\circ}^{t_1} \phi(t_2, t) dt_2 dt_1 \\ &= u(\circ, t) + x \frac{\partial u(\circ, t)}{\partial x} + \int_{\circ}^x (x - t_1) \phi(t_1, t) dt_1, \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

حال با استفاده از شرایط مرزی (۳.۱)، $u(\circ, t) = g_1(t)$ و با در نظر داشتن $x = L$ در (۳.۲) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial u(\circ, t)}{\partial x} = \frac{1}{L}(g_2(t) - g_1(t)) - \frac{1}{L} \int_{\circ}^L (L - t_1) \phi(t_1, t) dt_1. \quad (۴.۲)$$

حال با جای‌گزین کردن $\frac{\partial u(t, \circ)}{\partial x}$ از (۴.۲) در (۳.۲)، خواهیم داشت:

$$u(x, t) = g_1(t) + \frac{x}{L}(g_2(t) - g_1(t)) - \frac{x}{L} \int_{\circ}^L (L - t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^x (x - t_1) \phi(t_1, t) dt_1. \quad (۵.۲)$$

سپس با مشتق‌گیری جزئی از طرفین (۵.۲) نسبت به متغیر t ، نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = g_1'(t) + \frac{x}{L}(g_2'(t) - g_1'(t)) - \frac{x}{L} \int_{\circ}^L (L - t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1 + \int_{\circ}^x (x - t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1. \quad (۶.۲)$$

سرانجام با جای‌گذاری حاصل روابط (۵.۲) و (۶.۲) در معادله (۱.۲)، معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \hat{f}(x, t) + \int_{\circ}^L K_1(x, t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^L K_2(x, t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1 \\ &\quad + \int_{\circ}^x K_3(x, t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^x K_4(x, t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1, \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, t) &= -\frac{b}{a^2} \left(g_1(t) + \frac{x}{L}(g_2(t) - g_1(t)) \right) + \frac{1}{a^2} \left(g_1'(t) + \frac{x}{L}(g_2'(t) - g_1'(t)) \right), \\ K_1(x, t) &= \frac{b}{a^2 L} (L - t)x, \quad K_2(x, t) = \frac{-1}{a^2} (L - t)x, \\ K_3(x, t) &= \frac{-b}{a^2} (x - t), \quad K_4(x, t) = \frac{1}{a^2} (x - t), \end{aligned}$$

و a, b ضرایب ثابت در (۱.۲) هستند.

قضیه‌ی وجودی و یکتایی جواب مسئله‌ی RDE (۱.۱) می‌تواند با استفاده از وجود و یکتایی ساختار جواب معادله انتگرال ولترا-فردهلم (۷.۲) در [۲] بررسی شود.

در روش طیفی تاو، جواب تقریبی معادله‌ی (۷.۲) به صورت زیر جستجو می‌گردد:

$$\phi_N(x, t) = \sum_{k=\circ}^N a_k(t) \psi_k(x), \quad (۸.۲)$$

که در آن $x \in [\circ, L]$ ، $\psi_k(x)$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به ضرب داخلی در فضاهای هیلبرت است،

$$\langle \psi_k(x), \psi_j(x) \rangle_w = \int_a^b \psi_k(x) \psi_j(x) w(x) dx.$$

با جایگزین کردن (۸.۲) در (۷.۲) به دست می آوریم:

$$\sum_{k=0}^N a_k(t) \psi_k(x) = \hat{f}(x, t) + \sum_{k=0}^N a_k(t) (\alpha_{\psi_k}(x) + \alpha_{\varphi_k}(x)) + a'_k(t) (\alpha_{\psi_k}(x) + \alpha_{\varphi_k}(x)), \quad (9.2)$$

که در آن،

$$\alpha_{\psi_k}(x) = \int_a^b K_{\psi}(x, t) \psi_k(t) dt, \quad \alpha_{\varphi_k}(x) = \int_a^b K_{\varphi}(x, t) \psi_k(t) dt,$$

$$\alpha_{\varphi_k}(x) = \int_a^x K_{\varphi}(x, t) \psi_k(t) dt, \quad \alpha_{\psi_k}(x) = \int_a^x K_{\psi}(x, t) \psi_k(t) dt, \quad k = 0, \dots, N.$$

با ضرب داخلی طرفین (۹.۲) در $\{\psi_l(x)\}_{l=0}^N$ خواهیم داشت:

$$a_l(t) \langle \psi_l(x), \psi_l(x) \rangle_w = \langle \hat{f}(x, t), \psi_l(x) \rangle_w + \sum_{k=0}^N a_k(t) \lambda_{kl} + a'_k(t) \eta_{kl}, \quad l = 0, \dots, N, \quad (10.2)$$

که در آن،

$$\lambda_{kl} = \langle \alpha_{\psi_k}(x) + \alpha_{\varphi_k}(x), \psi_l(x) \rangle_w, \quad \eta_{kl} = \langle \alpha_{\psi_k}(x) + \alpha_{\varphi_k}(x), \psi_l(x) \rangle_w.$$

حال با فرض،

$$\mathbf{\Upsilon} = \{\lambda_{kl}\}_{k,l=0}^N, \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\langle \psi_0(x), \psi_0(x) \rangle_w, \dots, \langle \psi_N(x), \psi_N(x) \rangle_w), \quad \mathbf{\Lambda} = \{\eta_{kl}\}_{k,l=0}^N.$$

و

$$\mathbf{F}(t) = (\langle \hat{f}(x, t), \psi_0(x) \rangle_w, \dots, \langle \hat{f}(x, t), \psi_N(x) \rangle_w)^T$$

این روند به مسئله مقدار اولیه‌ی با $(N + 1)$ معادله و $N + 1$ مجهول، $\bar{\mathbf{a}} = (a_0, \dots, a_N)^T$ به فرم زیر ختم می شود.

$$\mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{a}}'(t) = (\mathbf{D} - \mathbf{\Upsilon}) \bar{\mathbf{a}}(t) - \mathbf{F}(t), \quad (11.2)$$

با شرایط اولیه‌ی

$$a_l(0) = \frac{\langle \frac{d^{\nu} f(x)}{dx^{\nu}}, \psi_l(x) \rangle_w}{\langle \psi_l(x), \psi_l(x) \rangle_w}, \quad l = 0, \dots, N.$$

ملاحظه ۱۱.۲. با در نظر گرفتن ماتریس $\mathbf{\Lambda}$ در مسئله‌ی با مقدار اولیه (۱۱.۲)، دو رده‌ی زیر را خواهیم داشت:

(۱) اگر $\det(\mathbf{\Lambda}) \neq 0$ آن گاه با معادلات دیفرانسیل معمولی برخورد خواهیم داشت.

(۲) اگر $\det(\mathbf{\Lambda}) = 0$ آن گاه با معادلات دیفرانسیل-جبری برخورد خواهیم داشت.

حال، روش پهلوگذاری چندجمله‌ای تکه‌ای [۴] برای تقریب جواب مسئله‌ی با مقدار اولیه (۱۱.۲) به شرح زیر به کار می بریم: فرض کنیم $I_h = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز یکنواخت بر روی بازه‌ی $[0, T]$ با نقاط شبکه‌ای $t_n = nh$ ($n = 0, \dots, N_1$) باشد. همچنین h را طول گام در نظر گرفته شده است و Θ به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\Theta = \{t_{nj} = t_n + c_j h : 0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq 1, \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1\},$$

که در آن c_j و t_{nj} به ترتیب پارامتر و نقاط پهلوگذاری هستند. با تعریف زیر بازه‌های $\sigma_n = (t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, \dots, N_1 - 1$ و فضای چندجمله‌ای‌های تکه‌ای درجه‌ی $m \geq 0$ به صورت زیر:

$$S_m^{\circ}(I_h) = \{v \in C(I) : v|_{\sigma_n} \in \Pi_m, \quad (0 \leq n \leq N_1 - 1)\},$$

که در آن Π_m نمایانگر فضای چندجمله‌ایهای حقیقی با درجه‌ی نایبتر از m است. جواب پهلوگذاری $\bar{\mathbf{a}}_h \in S_m^\circ(I_h)$ برای (۱۱.۲) از طریق معادله‌ی پهلوگذاری زیر تعریف می‌شود،

$$\Lambda \bar{\mathbf{a}}'_h(t) = (\mathbf{D} - \Upsilon) \bar{\mathbf{a}}_h(t) - \mathbf{F}(t), \quad t \in \Theta, \quad \bar{\mathbf{a}}_h(\circ) = \bar{\mathbf{a}}(\circ) = \bar{\mathbf{a}}. \quad (12.2)$$

چون $\bar{\mathbf{a}}'_h|_{\sigma_n} \in \Pi_{m-1}$ برای $\rho \in [0, 1]$ معادله‌های زیر برقرار خواهند شد:

$$\bar{\mathbf{a}}'_h(t_n + \rho h) = \sum_{j=1}^m L_j(\rho) \bar{\mathbf{A}}_{nj}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{nj} = \bar{\mathbf{a}}'_h(t_n + c_j h), \quad (13.2)$$

که در آن $L_j(\rho)$ چند جمله‌ایهای متعارف لاگرانژ متناظر پارامترهای $\{c_j\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_j(\rho) = \prod_{k \neq j} \frac{(\rho - c_k)}{(c_j - c_k)}, \quad j = 1, \dots, m.$$

با قرار دادن $\bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{a}}_h(t_n)$ و $\beta_j(\rho) = \int_0^\rho L_j(s) ds$ ، $j = 1, \dots, m$ برای $\bar{\mathbf{a}}_h \in S_m^\circ(I_h)$ خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{a}}_h(t_n + \rho h) = \bar{\mathbf{a}}_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(\rho) \bar{\mathbf{A}}_{nj}, \quad \rho \in [0, 1]. \quad (14.2)$$

با جای‌گزین نمودن (۱۳.۲) و (۱۴.۲) در معادله‌ی پهلوگذاری (۱۲.۲)، به دست می‌آوریم:

$$\Lambda \bar{\mathbf{A}}_{ni} = (\mathbf{D} - \Upsilon) (\bar{\mathbf{a}}_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(c_i) \bar{\mathbf{A}}_{nj}) - \mathbf{F}(t_{ni}) \quad i = 1, \dots, m. \quad (15.2)$$

حال با جای‌گذاری $\bar{\mathbf{A}}_{nj}$ به عنوان جواب سیستم معادلات جبری خطی (۱۵.۲) در (۱۴.۲)، می‌توان جواب تقریبی مسئله‌ی با مقدار اولیه (۱۱.۲) را به‌ازای مقدار اختیاری $\rho \in [0, 1]$ به دست آورد.

ملاحظه ۲.۲. توجه داشته باشیم که معادلات (۱۴.۲) و (۱۵.۲) روش رانگ-کوتا ضمنی پیوسته‌ای [۴] دیده شود) را برای مسئله‌ی با مقدار اولیه (۱۱.۲) تعریف می‌کند. همچنین با فرض $\rho = 1$ در (۱۴.۲)، روش رانگ-کوتا m -مرحله‌ای ضمنی برای (۱۱.۲) به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{a}}_{n+1} = \bar{\mathbf{a}}_h(t_n + h) = \bar{\mathbf{a}}_n + h \sum_{j=1}^m \beta_j(1) \bar{\mathbf{A}}_{nj}$$

بعلاوه معادلات مرحله‌ی (۱۵.۲).

۳ تحلیل همگرایی

به دلیل استفاده از چند جمله‌ایهای جابه‌جاشده لژاندر در بازه $[0, 1]$ به عنوان معادلات پایه‌ای متعامد، بدون خلل به کلیت مسئله فرض می‌کنیم $I = [0, 1]$. بنابراین معادله‌ی (۱.۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\nu u(x,t)}{\partial x^\nu} = \frac{1}{a^\nu} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{b}{a^\nu} u(x,t), & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = g_1(t), \quad u(1, t) = g_2(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

با اعمال روند مشابه در بخش ۲، داریم:

$$u(x, t) = g_1(t) + x(g_2(t) - g_1(t)) - x \int_0^1 (1 - t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_0^x (x - t_1) \phi(t_1, t) dt_1, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = \hat{f}(x, t) + \int_0^1 K_1(x, t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_0^1 K_2(x, t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1 \\ + \int_0^x K_3(x, t_1) \phi(t_1, t) dt_1 + \int_0^x K_4(x, t_1) \frac{\partial \phi(t_1, t)}{\partial t} dt_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

برای اثبات تخمین خطا، به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۱.۳. [۶] با فرض این که $H_w^m(\Lambda)$ فضای سوبولوف تمام توابع $\phi(x)$ که $x = (x_1, \dots, x_p)$ روی $\Lambda = (0, 1)^p$ $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ باشد، به طوری که $\phi(x)$ و تمامی مشتق‌های ضعیف آن تا مرتبه m بر $L_w^1(\Lambda)$ قرار داشته باشد. فرض کنید که $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ فضای تمامی چندجمله‌ای‌های با درجه نایبتر از N بر Λ باشد. P_N نماد عمل‌گرهای تصویر متعامد از $L_w^1(\Lambda)$ بر $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ باشد. به‌ازای تمامی $m \geq 1, \phi \in H_w^m(\Lambda)$ تقریب زیر برای سری لژاندر انتقال یافته برقرار است

$$\|\phi - P_N \phi\|_{L_w^1(\Lambda)} \leq CN^{-m} |\phi|_{H_w^m(\Lambda)}, \quad (4.3)$$

که در آن $|\cdot|$ نیم‌نرم تعریف شده به صورت زیر است

$$|\phi|_{H_w^m(\Lambda)} = \left(\sum_{j=\min(m, N+1)}^m \sum_{i=1}^p \|D_i^j \phi\|_{L_w^1(\Lambda)} \right)^{1/2},$$

که در آن $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ یک اندیس-چندتایی نامنفی در $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_p} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}$ است.

لم ۲.۳. [۱۵] برای هر تابع اندازه‌پذیر $f, f \geq 0$ ، نامساوی هاردی تعمیم یافته

$$\left(\int_a^b |(Tf)(x)|^q w_1(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |f(x)|^p w_2(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

برقرار است اگر و فقط اگر رابطه‌ی زیر

$$\sup_{a < x < b} \left(\int_x^b w_1(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x w_2^{-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

به‌ازای $1 < p \leq q < \infty$ برقرار باشد. T یک عملگر به صورت زیر است:

$$(Tf)(x) = \int_a^x k(x, t) f(t) dt,$$

که در آن $k(x, t)$ یک هسته، w_1 و w_2 توابع وزن و $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

قضیه ۳.۳. [۱۶] فرض کنیم تابع نامنفی $u(t)$ تعریف شده بر بازه $[t_0, \infty)$ در نامساوی زیر صدق کند

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t k(t, s) u(s) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s G(t, s, \sigma) u(\sigma) d\sigma ds,$$

که در آن $k(t, s)$ و $G(t, s, \sigma)$ به‌ازای $t \geq s \geq \sigma \geq t_0$ و $c > 0$ توابع نامنفی مشتق‌پذیر پیوسته هست‌اند. بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$u(t) \leq c \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left[k(s, s) + \int_{t_0}^s \left(\frac{\partial k(s, \sigma)}{\partial s} + G(s, s, \sigma) \right) d\sigma + \int_{t_0}^s \int_{t_0}^{\sigma} \frac{\partial G(s, \sigma, r)}{\partial s} dr d\sigma \right] ds \right\}$$

حال در قضیه زیر تخمین خطا را در نرم L_w^2 وزن دار برای روش عددی تاو پیش نهاد شده در بخش قبل استنتاج می‌کنیم. قضیه ۴.۳. فرض کنیم $u(t, x)$ جواب دقیق مسئله واکنش-انتشار با مقدار مرزی (۱.۱) باشد، که به اندازه کافی هموار در نظر گرفته شده است. فرض کنیم $u_N(t, x)$ تقریب لزاندر طیفی برای $u(t, x)$ باشد که با استفاده از رابطه‌ی (۲.۳) تعریف می‌شود. اگر $u(x, t) \in H_w^m(\circ, 1) \times \mathbb{R}^+$ آن‌گاه به ازای $m \geq 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{L_w^2(\circ, 1)} &\leq CN^{-m} |\hat{f}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} \\ &\leq CN^{-m} K_1 |_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|_{L_w^2(\circ, 1)} + CN^{-m} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)}) \\ &+ CN^{-m} |K_2|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}\|_{L_w^2(\circ, 1)} + CN^{-m} |\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)}) \quad (5.3) \\ &+ CN^{-m} |K_3|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\|_{L_w^2(\circ, 1)} + CN^{-m} |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)}) \\ &+ CN^{-m} |K_4|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}\|_{L_w^2(\circ, 1)} + CN^{-m} |\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)}) \end{aligned}$$

که در آن N به اندازه کافی بزرگ و C یک ثابت مستقل از N است.

اثبات. معادله‌ی (۱.۱) را به فرم زیر در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{b}{a^2} u(x, t), \quad \circ \leq x \leq 1, \quad t \geq \circ \quad (6.3)$$

فرض کنید که $\frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} = \phi_N(x, t)$. با به کارگیری شرایط دیریکه و با استفاده از معادلات (۲.۳) و (۳.۳)، خواهیم داشت:

$$u_N(x, t) = g_1(t) + x(g_2(t) - g_1(t)) - x \int_{\circ}^1 (1 - t_1) \phi_N(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^x (x - t_1) \phi_N(t_1, t) dt_1, \quad (7.3)$$

9

$$\begin{aligned} \phi_N(x, t) &= \hat{f}(x, t) + \int_{\circ}^1 K_1(x, t_1) \phi_N(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^1 K_2(x, t_1) \frac{\partial \phi_N(t_1, t)}{\partial t} dt_1 \\ &+ \int_{\circ}^x K_3(x, t_1) \phi_N(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^x K_4(x, t_1) \frac{\partial \phi_N(t_1, t)}{\partial t} dt_1, \quad hh \quad (8.3) \end{aligned}$$

با تفریق (۳.۳) از (۸.۳) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} e(x, t) &= \int_{\circ}^1 K_1(x, t_1) e(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^1 K_2(x, t_1) \frac{\partial e(t_1, t)}{\partial t} dt_1 \\ &+ \int_{\circ}^x K_3(x, t_1) e(t_1, t) dt_1 + \int_{\circ}^x K_4(x, t_1) \frac{\partial e(t_1, t)}{\partial t} dt_1 \quad (9.3) \\ &+ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \end{aligned}$$

که در آن $e(x, t) = \phi(x, t) - \phi_N(x, t)$ تابع خطا است و

$$\begin{aligned} e_1 &= \hat{f}(x, t) - \hat{f}_N(x, t), \\ e_2 &= \int_{\circ}^1 (K_1(x, t_1) - K_{1, N}(x, t_1)) \phi_N(t_1, t) dt_1, \\ e_3 &= \int_{\circ}^x (K_2(x, t_1) - K_{2, N}(x, t_1)) \frac{\partial \phi_N(t_1, t)}{\partial t} dt_1, \\ e_4 &= \int_{\circ}^1 (K_3(x, t_1) - K_{3, N}(x, t_1)) \phi_N(t_1, t) dt_1, \\ e_5 &= \int_{\circ}^x (K_4(x, t_1) - \hat{K}_{4, N}(x, t_1)) \frac{\partial \phi_N(t_1, t)}{\partial t} dt_1. \end{aligned}$$

بنابراین می توان معادله ی (۹.۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} e(x, t) = & \int_0^1 K_1(x, t_1) e(t_1, t) dt_1 + \int_0^1 \int_0^t K_2(x, t_1) e(t_1, t_2) dt_2 dt_1 \\ & + \int_0^x K_3(x, t_1) e(t_1, t) dt_1 + \int_0^x \int_0^t K_4(x, t_1) e(t_1, t_2) dt_2 dt_1 \\ & + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \end{aligned} \quad (10.3)$$

با به کارگیری نامساوی گرونوال از قضیه ی ۳.۳ و لم ۲.۳ به ازای $p = q = 2$ و همچنین $w_1(x) = w_2(x) = 1$ در (۱۰.۳) نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$\|e\|_{L_w^1(\circ, 1)} \leq C \|e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5\|_{L_w^1(\circ, 1)}. \quad (11.3)$$

نامساوی (۴.۳) در لم ۱.۳ ایجاب می کند که،

$$\|e_1\|_{L_w^1(\circ, 1)} \leq CN^{-m} |\hat{f}|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)}$$

و از نامساوی هاردی در لم ۲.۳ و نامساوی (۴.۳) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \|e_2\|_{L_w^1(\circ, 1)} & \leq \|K_1 - K_{1, N}\|_{L_w^1(\circ, 1)} \|\phi_N\|_{L_w^1(\circ, 1)} \\ & \leq CN^{-m} |K_1|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\phi\|_{L_w^1(\circ, 1)} + \|e\|_{L_w^1(\circ, 1)}), \\ \|e_3\|_{L_w^1(\circ, 1)} & \leq \|K_2 - K_{2, N}\|_{L_w^1(\circ, 1)} \left\| \frac{\partial \phi_N}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} \\ & \leq CN^{-m} |K_2|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} \left(\left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} + \left\| \frac{\partial e}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} \right), \end{aligned} \quad (12.3)$$

و به طور مشابه،

$$\begin{aligned} \|e_4\|_{L_w^1(\circ, 1)} & \leq \|K_3 - K_{3, N}\|_{L_w^1(\circ, 1)} \|\phi_N\|_{L_w^1(\circ, 1)} \\ & \leq CN^{-m} |\hat{K}_3|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} (\|\phi\|_{L_w^1(\circ, 1)} + \|e\|_{L_w^1(\circ, 1)}), \\ \|e_5\|_{L_w^1(\circ, 1)} & \leq \|K_4 - K_{4, N}\|_{L_w^1(\circ, 1)} \left\| \frac{\partial \phi_N}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} \\ & \leq CN^{-m} |\hat{K}_4|_{H_w^{m, N}(\circ, 1)} \left(\left\| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} + \left\| \frac{\partial e}{\partial t} \right\|_{L_w^1(\circ, 1)} \right), \end{aligned} \quad (13.3)$$

سرانجام با یادآوری $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \phi(x, t)$ ، از تقریب های به دست آمده در (۱۳.۳)، (۱۲.۳) و لم ۱.۳، همگرایی روش عددی ارائه شده حاصل می شود. □

ملاحظه ۵.۳. با در نظر داشتن قضیه ۴.۳، سرعت همگرایی N^{-m} به دست می آید. توجه شود که عواملی مانند هموار بودن جواب و بزرگی مقدار m تقریب بهتر را نتیجه می دهد.

۴ نتایج عددی

در این بخش رویه ی به دست آمده از بخش ۲ را برای حل سه مسئله خاص که جواب های دقیق آن ها مشخص است، به کار می گیریم. این مسائل را در دو حالت، با استفاده از روش عددی تاو حل می کنیم. در حالت مستقیم، حل معادله واکنش-انتشار با مقدار مرزی (۱.۱) به طور مستقیم با استفاده از روش تاو حل می کنیم و در حالت انتگرال، مسئله تبدیل یافته به فرم انتگرال ولترا-فرد هلم (۹.۲) را از طریق روش عددی تاو حل خواهیم کرد. از چند جمله ای های انتقال داده شده لژاندر در بازه ی $[0, 1]$ استفاده می کنیم. تمام محاسبات از طریق نرم افزار ممتیکا انجام شده است.

مثال ۱.۴. معادله‌ی (۱.۱) را به ازای

$$a = \sqrt{2}/2, \quad b = -1,$$

$$u(x, 0) = e^{-x} \cos x, \quad u(0, t) = e^{-t} \cos t, \quad u(1, t) = e^{-1-t} \cos(1-t),$$

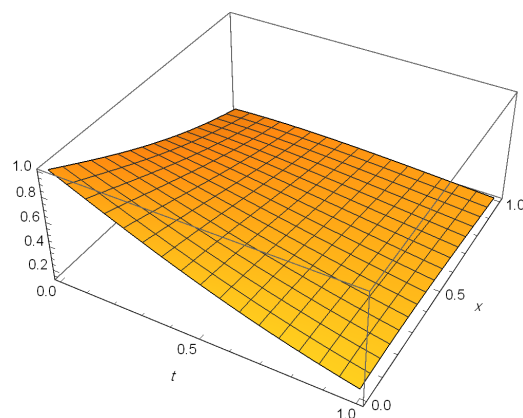
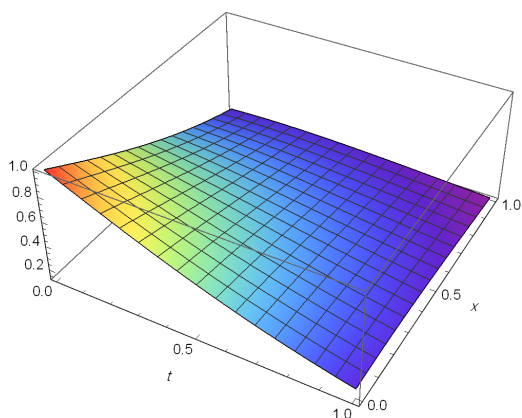
در نظر می‌گیریم که در آن جواب دقیق $u(x, t) = e^{-x-t} \cos(x-t)$ است.

دو ساختار را برای حل تقریبی مسئله‌ی (۱.۱) در نظر می‌گیریم:

حالت انتگرال: در این حالت مطابق روش پیش‌نهاد شده در بخش ۲، ابتدا این مسئله را به فرم انتگرال ولترا-فرد هلم (۹.۲) تبدیل نموده سپس جواب تقریبی را با استفاده از روش طیفی تاو لژاندر مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین برای حل مسئله با مقدار اولیه‌ی به‌دست آمده، نقاط گاوس $(c_1 = \frac{1}{5}(\sqrt{15} - 5), c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{5}(\sqrt{15} + 5))$ به عنوان پارامترهای پهلوگذاری با طول گام $h = 0.1$ در بازه‌ی $[0, 1]$ انتخاب می‌کنیم.

خطا در $L^2(0, 1)$ -نرم برای مقادیر مختلف N در بعضی نقاط t_n در جدول ۱ آورده شده است.

حالت مستقیم: در این حالت، روش طیفی لژاندر تاو را برای حل معادله واکنش-ارتعاش (۱.۱) (بدون تبدیل به معادله انتگرال) به کار می‌گیریم. خطا در $L^2(0, 1)$ -نرم برای مقادیر مختلف N در بعضی نقاط t_n در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۱: نمودار جواب دقیق u (راست) و جواب تقریبی u (چپ) با $N = 6$ در مثال ۱.۴ (حالت انتگرال).

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰/۱	1.32×10^{-7}	1.30×10^{-8}	4.87×10^{-10}
۰/۲	1.47×10^{-7}	1.22×10^{-8}	4.20×10^{-10}
۰/۳	1.57×10^{-7}	1.13×10^{-8}	3.57×10^{-10}
۰/۴	1.62×10^{-7}	1.04×10^{-8}	3.00×10^{-10}
۰/۵	1.63×10^{-7}	9.45×10^{-9}	2.47×10^{-10}
۰/۶	1.61×10^{-7}	8.50×10^{-9}	2.00×10^{-10}
۰/۷	1.57×10^{-7}	7.57×10^{-9}	1.57×10^{-10}
۰/۸	1.50×10^{-7}	6.67×10^{-9}	1.19×10^{-10}
۰/۹	1.42×10^{-7}	5.81×10^{-9}	8.69×10^{-11}

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰/۱	$۱,۳۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲,۷۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۱,۳۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۲	$۱,۲۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱,۹۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۱,۹۰ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۳	$۱,۰۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۱,۱۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۱,۵۶ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۴	$۸,۹۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۵,۶۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۱,۶۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۵	$۷,۳۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲,۳۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۱,۶۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۶	$۵,۹۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۵,۲۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۱,۶۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۷	$۴,۷۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۸,۵۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۱,۵۹ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۸	$۳,۵۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۱,۱۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱,۵۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹	$۲,۶۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۱,۳۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱,۴۳ \times ۱۰^{-۷}$

حالت مستقیم- مثال ۱.۴.

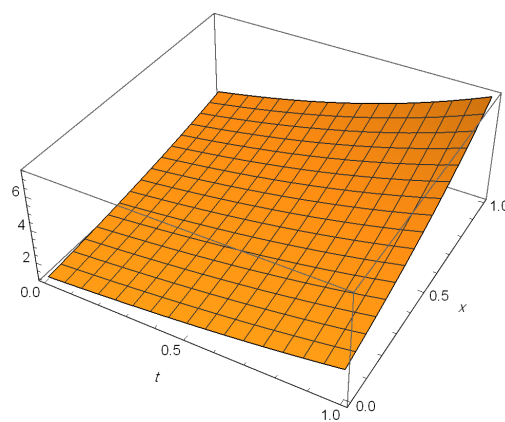
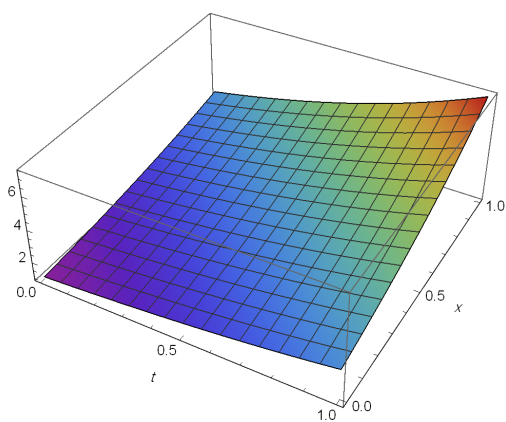
مثال ۲.۴. مسئله (۱.۱) را به ازای

$$a = 2, \quad b = -3,$$

$$u(x, 0) = e^x, \quad u(0, t) = e^t, \quad u(1, t) = e^{1+t}$$

در نظر می گیریم که در آن جواب دقیق $u(x, t) = e^{x+t}$ است.

مشابه مثال ۱.۴، مسئله در دو حالت حل می شود و خطای $L^2(0, 1)$ -نرم برای مقادیر مختلف N در بعضی نقاط t_n در جدول های ۳ و ۴ آورده شده است.



شکل ۲: نمودار جواب دقیق u (راست) و جواب تقریبی u (چپ) با $N = 6$ در مثال ۲.۴ (حالت انتگرال).

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰٫۱	$۱٫۰۰ \times ۱۰^{-۷}$	$۲٫۹۴ \times ۱۰^{-۹}$	$۷٫۷۹ \times ۱۰^{-۱۱}$
۰٫۲	$۱٫۱۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۳٫۲۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۸٫۶۱ \times ۱۰^{-۱۱}$
۰٫۳	$۱٫۲۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۳٫۵۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۹٫۵۱ \times ۱۰^{-۱۱}$
۰٫۴	$۱٫۲۶ \times ۱۰^{-۷}$	$۳٫۹۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۰۵ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۵	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۷}$	$۴٫۳۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۱۶ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۶	$۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۷}$	$۴٫۸۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۲۸ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۷	$۱٫۸۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۵٫۳۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۸	$۲٫۰۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۵٫۹۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۵۶ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۹	$۲٫۲۴ \times ۱۰^{-۷}$	$۶٫۵۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱٫۷۳ \times ۱۰^{-۱۰}$

حالت انتگرال - مثال ۲.۴.

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰٫۱	$۹٫۱۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۳٫۱۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۰۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۲	$۱٫۰۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۴۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۱۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۳	$۱٫۱۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۸۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۲۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۴	$۱٫۲۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۲۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۵	$۱٫۳۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۵۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۶	$۱٫۵۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵٫۱۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۷	$۱٫۶۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۵٫۷۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۸۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۸	$۱٫۸۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۳۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۰۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۹	$۲٫۰۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۶۹۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۲۷ \times ۱۰^{-۷}$

حالت مستقیم - مثال ۲.۴.

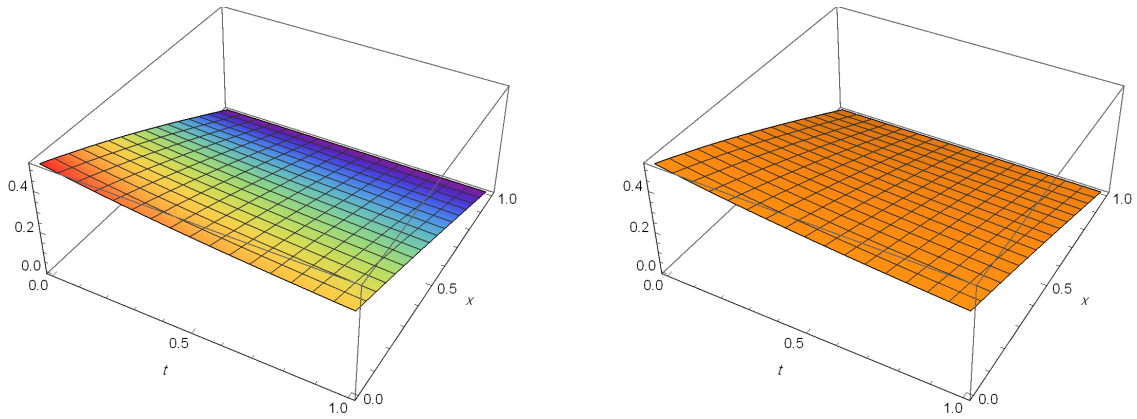
مثال ۳.۴. مسئله (۱.۱) را به ازای

$$a = 1, \quad b = 0,$$

$$u(x, 0) = \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2}\right), \quad u(0, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2(\sqrt{1+t})}\right), \quad u(1, t) = 0$$

در نظر می‌گیریم که در آن جواب دقیق $u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{1-x}{2(\sqrt{1+t})}\right)$ است.

مشابه مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴، مسئله در دو حالت حل می‌شود و خطای $L^2(0, 1)$ -نرم برای مقادیر مختلف N در بعضی نقاط t_n در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. از طریق جداول ۱، ۳، ۵ و ۴، ۶ نشان داده شد که نتایج به دست آمده از روش تاو در حالت انتگرال خیلی دقیق‌تر از حالت مستقیم است.



شکل ۳: نمودار جواب دقیق u (راست) و جواب تقریبی u (چپ) با $N = 6$ در مثال ۳.۴ (حالت انتگرال).

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰/۱	$۲/۶۲ \times 10^{-8}$	$۱/۵۹ \times 10^{-9}$	$۵/۴۴ \times 10^{-11}$
۰/۲	$۲/۰۲ \times 10^{-8}$	$۱/۰۹ \times 10^{-9}$	$۳/۹۲ \times 10^{-11}$
۰/۳	$۱/۵۸ \times 10^{-8}$	$۷/۲۵ \times 10^{-10}$	$۲/۸۸ \times 10^{-11}$
۰/۴	$۱/۲۶ \times 10^{-8}$	$۵/۶۲ \times 10^{-10}$	$۲/۱۵ \times 10^{-11}$
۰/۵	$۱/۰۱ \times 10^{-8}$	$۴/۱۶ \times 10^{-10}$	$۱/۶۳ \times 10^{-11}$
۰/۶	$۸/۲۹ \times 10^{-9}$	$۳/۱۴ \times 10^{-10}$	$۱/۲۶ \times 10^{-11}$
۰/۷	$۶/۸۳ \times 10^{-9}$	$۲/۴۱ \times 10^{-10}$	$۹/۸۷ \times 10^{-12}$
۰/۸	$۵/۶۹ \times 10^{-9}$	$۱/۸۷ \times 10^{-10}$	$۷/۸۱ \times 10^{-12}$
۰/۹	$۲/۲۷ \times 10^{-7}$	$۱/۴۸ \times 10^{-10}$	$۶/۲۵ \times 10^{-12}$

حالت انتگرال - مثال ۳.۴

t_n	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
۰/۱	$۱/۲۲ \times 10^{-5}$	$۵/۴۵ \times 10^{-7}$	$۲/۶۳ \times 10^{-8}$
۰/۲	$۱/۰۱ \times 10^{-5}$	$۴/۱۷ \times 10^{-7}$	$۲/۰۵ \times 10^{-8}$
۰/۳	$۸/۵۰ \times 10^{-6}$	$۳/۲۶ \times 10^{-7}$	$۱/۶۰ \times 10^{-8}$
۰/۴	$۷/۲۰ \times 10^{-6}$	$۲/۵۴ \times 10^{-7}$	$۱/۲۸ \times 10^{-8}$
۰/۵	$۶/۱۶ \times 10^{-6}$	$۲/۰۰ \times 10^{-7}$	$۱/۲۲ \times 10^{-8}$
۰/۶	$۵/۳۲ \times 10^{-6}$	$۱/۶۱ \times 10^{-7}$	$۲/۰۳ \times 10^{-8}$
۰/۷	$۴/۶۳ \times 10^{-6}$	$۱/۳۰ \times 10^{-7}$	$۹/۸۵ \times 10^{-9}$
۰/۸	$۴/۰۶ \times 10^{-6}$	$۱/۰۷ \times 10^{-7}$	$۶/۰۲ \times 10^{-9}$
۰/۹	$۳/۵۸ \times 10^{-6}$	$۹/۰۱ \times 10^{-8}$	$۴/۹۹ \times 10^{-9}$

حالت مستقیم - مثال ۳.۴

۵ نتیجه گیری

این مقاله یک روش طیفی عددی برای حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی واکنش-انتشار با شرایط مرزی پیش نهاد می کند. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به معادله انتگرال ولترا-فرد هلم تبدیل می کنیم؛ پس روش تاو را برای حل این معادله انتگرال به کار می بریم. با استفاده از مثال های عددی نشان داده ایم که مرتبه همگرایی جواب عددی در حالت به کار گیری روش تاو برای معادله انتگرال به طور چشم گیری بالاتر از حالتی است که روش عددی تاو را به طور مستقیم برای حل مسئله به کار بگیریم. همچنین تحلیل همگرایی روش عددی پیش نهاد شده مورد بررسی قرار گرفته است.

فهرست منابع

- [1] Alonso N., Bowers K., *An alternating-direction sinc-Galerkin method for elliptic problems*, J. Complex., 25 (2009), 237–252.
- [2] Andras Sz., *Fredholm-Volterra equations*, Fredholm-Volterra equations, Pure Math. Appl. (P.U.M.A.), 13 (2002), 21–30.
- [3] Boyd J. P., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, second edition, Dover, Mineola, NY, (2001).
- [4] Brunner H., *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] Cannon R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Q. Appl. Math., 21 (1963).
- [6] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*, Springer-Verlag, 2006.
- [7] El-Gamel M., *Error analysis of sinc-Galerkin method for time-dependent partial differential equations*, Numer. Algor., DOI 10.1007/s11075-017-0326-9.
- [8] Ghoreishi F., Hadizadeh M., *Numerical computation of the Tau approximation for the Volterra-Hammerstein integral equations*, Numer. Algorithms, 52 (2009), 541–559.
- [9] Gottlieb D., Orszag S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods*, SIAM, Philadelphia, 1986, 4th print.
- [10] Hosseini Aliabadi M., *The Buchstab's function and the operational Tau method*, Korean J. Comput. Appl. Math., 7 (3) (2000), 673-683.
- [11] Hosseini Aliabadi M., *The application of the operational Tau method on some stiff system of ODEs*, Int. J. Appl. Math., 2 (9) (2000), 1027-1036.
- [12] Hosseini Aliabadi M., *Solving ODE BVPs using the perturbation term of the Tau method over semi-infinite intervals*, Far East J. Appl. Math., 4 (3) (2000), 295-303.
- [13] Hosseini Aliabadi M., Ortiz E. L., *Numerical treatment of moving and free boundary value problems with the Tau method*, Comput. Math. Appl., 35 (8) (1998), 53-61.
- [14] Hosseini Aliabadi M., Ortiz E. L., *A Tau method based on non-uniform space time elements for the numerical simulation of solitons*, Comput. Math. Appl., 22 (9) (1991), 7-19.

- [15] Li X., Tang T., *Convergence analysis of Jacobi spectral collocation methods for Abel-Volterra integral equations of second kind*, Front. Math. China, 7 (2012), 69-84.
- [16] Mitrinović D. S., Pečarić J. E. and Fink A. M., *inequalities Involving Functions and Their Integrals and Drivatives*, Springer-Science+Business Media Dordrecht, 1991.
- [17] Mokhtary P. and Ghoreishi F. , *The L^2 -convergence of the Legendre spectral Tau matrix formulation for nonlinear fractional integro-differential equations*, Numer. Algorithms, 58 (2011), 475-496.
- [18] Namasivayam S. and Ortiz E. L., *Dependence of the local truncation error on the choice of perturbation term in the step by step Tau method for systems of differential equations*, Imperial College, Res. Rep. NAS 06-09-81, 1982.
- [19] Ortiz E. L., *The Tau method*, SIAM J. Numer. Anal., 6 (1969), 480-492.
- [20] Ortiz E. L., Samara L., *An operational approach to the Tau method for the numerical solution of nonlinear differential equations*, Computing, 27 (1981) 15-25.
- [21] Ortiz E. L., Samara H., *Numerical solution of partial differential equations with variable coefficients with an operational approach to the Tau method*, Comput. Math. Appl., 10 (1) (1984), 5-13.
- [22] Saadatmandi A. and Razzaghi M., *A Tau method approach for the diffusion equation with nonlocal boundary conditions*, , International Journal of Computer Mathematics, 81(11)b(2004), 1427-1432.
- [23] Shen J., Tang T., Wang L. L., *Spectral Methods, Algorithms, Analysis and Applications*, firsted, Springer, New York, (2011).
- [24] Wang S. and Lin Y., *A numerical method for the diffusion equation with nonlocal boundary specifications*, International Journal of Engineering Science, 28 (1990), 543-546.



Convergence Analysis of Numerical solution of Second-order reaction-diffusion equation with boundary conditions

Javad Shokri[†]

Department of Mathematics, Faculty of Science, Urmia University, P.O.Box 165, Urmia, Iran.

Communicated by: Mehdi Najafikhah

Received: 2022/2/2

Accepted: 2022/6/28

Abstract: The aim of this work is to provide a specific process for solving a reaction-diffusion partial differential equation with boundary conditions (RPDEs). We first convert this RPDE problem to Volterra-Fredholm integral equation (VFIE), because of the good numerical stability properties of integral operators in compare to differential operator, then apply the numerical Tau method to solve the obtained integral equation. We present the convergence analysis and error estimation of the Tau method based on the proposed process. Applying the Tau method yields a system of the ordinary differential equation such that this system is solved by piecewise polynomial collocation methods. Intended to show advantages of converting RPDE to an integral equation, we consider two cases to solve the proposed examples. In the first case, we apply the Tau method to solve the converted RPDE problem (*integral form*) and in the second case, we solve the RPDE problem directly (*direct form*) by Tau method. Comparing the numerical results, we observe that the results obtained from the integral form are higher than which obtained from the direct form.

Keywords: Second-order reaction-diffusion equations, spectral Tau method, Volterra-Fredholm integral equations, Convergence analysis.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: j.shokri@urmia.ac.ir (J. Shokri)