



بررسی تاثیر کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره نفوذپذیر رگ بر جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون با استفاده از روش تجزیه آدومیان

اله‌بخش یزدانی چراتی^{*}، زهره عظیمی

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۲۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۲/۱۰

چکیده: در این مقاله، به بررسی تاثیر کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره‌های نفوذپذیر رگ در مدل دوبعدی جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون پرداخته شده است. برای این منظور خون را به‌عنوان سیال پایه در نظر می‌گیریم که در آن واحدهایی از نانوذرات طلا یا مس تزریق شده است. مدل ریاضی این پدیده به‌صورت معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی از مرتبه چهارم در خواهد آمد. در این مقاله، برای حل عددی این مدل غیرخطی با شرایط مرزی از روش تجزیه آدومیان استفاده شده است. مقایسه جواب‌های عددی به‌دست‌آمده از روش تجزیه آدومیان با جواب‌های تحلیلی به‌دست‌آمده از روش آنالیز هموتویی (HAM)، نشان می‌دهد که جواب‌های عددی و تحلیلی مطابقت خوبی با هم دارند. همچنین، با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، می‌توان دریافت که با افزایش تعداد واحدهای نانوذره طلا/مس در سیال پایه، خواص حرارتی چه تغییراتی خواهد داشت.

واژه‌های کلیدی: عدد رینولدز، جریان نانوسیال، نرخ اتساع دیواره، کسر حجمی، روش تجزیه آدومیان.

رده‌بندی ریاضی: 13D45; 39B42

۱ مقدمه

سیستم گردش خون در بدن انسان، انتقال خون را به تمام قسمت‌های بدن برعهده دارد. تحلیل سیستم گردش خون، اطلاعات ارزشمندی در تشخیص و پیش‌گیری فراهم می‌کند. در این مقاله، با در نظر گرفتن خون به‌عنوان یک سیال پایه و توزیع نانوذرات طلا یا مس در خون، به بررسی تاثیر کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره نفوذپذیر رگ بر جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون با استفاده از روش تجزیه آدومیان می‌پردازیم. نانوسیالات، نانوذرات جامدی‌اند که از ترکیب آن‌ها در سیالات پایه (در این‌جا خون) به‌دست می‌آیند. نانوسیالات، از سیالات معمولی و پایه، پایداری بیش‌تری دارند، در مقایسه با سیالات معمولی افزایش افت فشار در آن‌ها نیز کم‌تر است [۴]. البته موضوع انتقال حرارت به‌دلیل ایجاد ضریب انتقال حرارتی زیاد خود، در دستگاه‌های خنک‌کننده در صنعت هم، بسیار موثر است [۵]. از کاربردهای

^{*}نویسنده مسئول مقاله

صنعتی این روش، خنک‌کاری پره‌های توربین گاز، خشک کردن کاغذ، صنایع غذایی، شیمیایی و غیره می‌توان اشاره کرد. ظرفیت هدایت حرارتی و گرمای ویژه برای سیال پایه و نانوذرات با استفاده از مدل‌های بریکمن و ژوان و لی به‌دست می‌آید. معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی به‌دست‌آمده از جریان نانوسیال خون که از معادلات جریان حاکم گرفته شده است، معادله‌ای غیرخطی از مرتبه چهارم می‌شود که در این مقاله، آن‌را با کمک روش تجزیه آدومیان حل می‌کنیم. به‌طور کلی، به‌دست‌آوردن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل به ویژه از نوع غیرخطی آسان نیست، از این‌رو، روش تجزیه آدومیان مورد توجه بسیاری از محققین و پژوهشگران قرار گرفته است [۶]. البته در مورد روش تجزیه آدومیان می‌توان گفت که این روش جواب معادله را به‌صورت یک سری نامتناهی به‌دست می‌آورد که به جواب واقعی هم‌گرا است [۲]. روش تجزیه آدومیان در سال ۱۹۸۰ و توسط جورج آدومیان ارائه شد. این روش برای حل بسیاری از مسائل از قبیل مسائل مقدار مرزی، معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی به‌کار رفته است. از مهم‌ترین دلایل پرکاربرد بودن روش تجزیه آدومیان نسبت به سایر روش‌های عددی برای به‌دست‌آوردن جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل این است که در این روش، جواب به‌صورت یک چندجمله‌ای محاسبه می‌شود. در سال ۱۹۹۳، آدومیان و راج، جواب تحلیلی مسئله مقدار مرزی غیرخطی را با استفاده از تجزیه آدومیان به‌دست آوردند [۷]. در سال بعد، آدومیان و راج، یک روش تجزیه بهبودیافته برای مسئله مقدار مرزی خطی و غیرخطی را ارائه کردند [۸]. در سال ۲۰۰۶، تاتاری و دهقان، برای حل مسئله مقدار مرزی چندقطه‌ای، از روش تجزیه آدومیان استفاده کردند [۲۲]. در سال ۲۰۰۹، وزوا، تکنیک‌هایی مختلف، مبنی بر تجزیه آدومیان برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی را بررسی کرد [۲۴، ۲۵]. یک سال بعد نیز، دهقان و تاتاری، جواب‌های عددی برای یک کلاس از مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه سوم را یافتند [۱۱].

این‌ها، تنها بخشی از تحقیقات انجام‌شده در این زمینه است. روش تجزیه آدومیان، هم‌چنان مورد توجه محققان است.

مطالعات مربوط به نانوسیالات به‌دلیل کاربردهای جذاب در پزشکی، گرمادرمانی، داروسازی، تصویر برداری پزشکی، سیستم‌های الکترومکانیکی، خنک‌کننده‌های صنعتی، ذخیره انرژی، جذب خورشیدی و غیره مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۹]. از کاربردهای تزریق نانوذرات در خون و افزایش سرعت انتقال حرارت در حوزه پزشکی، در گرمادرمانی است. گرمادرمانی یا هایپرترمیا، یکی از روش‌های درمانی سرطان است که در آن بافت بدن را به دماهای بالا و تا حدود ۴۵ درجه سانتی‌گراد می‌رسانند. تحقیقات نشان داده است که سلول‌های سرطانی در دماهای بالا از بین می‌روند. هایپرترمیا می‌تواند با کشتن سلول‌های سرطانی و آسیب رساندن به پروتئین‌ها و ساختارهای میان سلولی، تومور را از بین ببرد. ذرات نانو ساختار با خواص نوری قابل تغییر و اندازه‌های متفاوت، بیان‌کننده روش‌های جدیدی برای گرمادرمانی‌اند که از آن‌ها می‌توان به استفاده از نانو لوله‌های طلا اشاره کرد که می‌تواند تابش‌های مادون قرمز را به گرما تبدیل کند و سلول‌های سرطانی را از بین ببرد [۱۴]. در سال ۱۹۹۵، چوی [۱۰] اظهار داشت که افزودن مقدار کمی از نانوذرات به سیالات پایه، موجب افزایش هدایت حرارتی و سرعت انتقال حرارت سیالات پایه می‌شوند. در واقع، با توزیع ذرات نانو در سیال پایه گروهی جدید از سیالات به‌نام نانوسیال که قادر به انتقال حرارت سریع‌ترند، ساخته می‌شوند. در کنار آزمایش‌های تجربی در ارائه فرضیات پزشکی، مدل‌سازی ریاضی، ابزار قدرت‌مندی در بهبود طرح‌های آزمایشگاهی و موجب پیش‌رفت علم پزشکی و داروسازی بوده است.

در این مقاله، ابتدا مدل ریاضی حاصل از جریان نانوسیال طلا و مس خون را در اثر انبساط و انقباض دیواره‌های نفوذپذیر بیان می‌کنیم و سپس به بررسی انتقال حرارت توسط جریان نانوسیال می‌پردازیم. در ادامه بخش مقدمات به بیان مدل ریاضی جریان نانوسیال طلا و مس خون می‌پردازیم. در این مقاله، سیال پایه، خون و نانو ذرات توزیع‌شده در خون، طلا یا مس می‌تواند باشد. در بخش دوم، روش تجزیه آدومیان را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم، روش تجزیه آدومیان را برای حل مدل ریاضی به‌دست‌آمده از جریان نانوسیال طلا و مس خون به‌کار می‌گیریم و جواب‌های عددی به‌دست‌آمده را با جواب‌های تحلیلی به‌دست‌آمده از روش HAM روی نمودار مقایسه خواهیم نمود. برای جزئیات بیش‌تر در مورد روش HAM به منابع [۱۶، ۱۷، ۲۰] رجوع شود. هم‌چنین با نتیجه‌گیری در بخش آخر به‌کار خود پایان می‌دهیم.

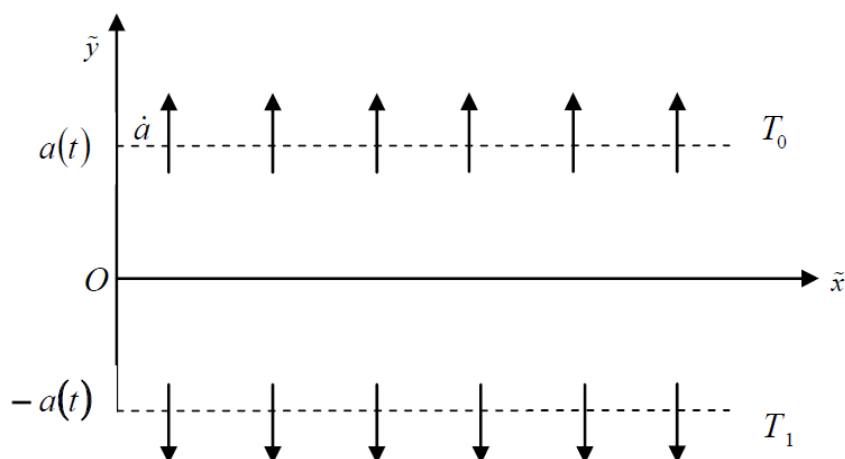
۱.۱ مدل‌بندی مسئله

در این بخش، قصد داریم مدل ریاضی مسئله را بیان کنیم. برای بیان مسئله، یک دستگاه مختصات با مبدأ $\tilde{x} = 0$ به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

که در آن پارامترها به‌صورت زیرند:

- $a(t)$: فاصله مبدأ فرضی تا دیواره نفوذپذیر در لحظه t ؛
- $\dot{a}(t)$: سرعت جریان سیال از دیواره نفوذپذیر در لحظه t ؛
- T_0 : دمای دیواره فوقانی؛
- T_1 : دمای دیواره تحتانی.

رگ یک شیء سه‌بعدی و یک دیواره نفوذپذیر است. اما یک شبیه‌سازی دوبعدی از آن را در شکل ۱ در نظر می‌گیریم تا معادلات دیفرانسیل به‌دست‌آمده از مدل دوبعدی باشد. در واقع شکل ۱، شبیه‌سازی رگ در بدن انسان است. همان‌طور که می‌دانیم خون، یک سیال در رگ انسان است و با توجه به خواص گرمایی‌کی خون به‌عنوان سیال پایه، جریان انتقال حرارت در بدن انسان دارای سرعتی مفروض است. در این‌جا،



شکل ۱: دیواره‌های نفوذپذیر

با اضافه کردن ذرات طلا یا مس در اندازه نانو به سیال پایه، به ترتیب نانوسیال طلا-خون یا نانوسیال مس-خون را خواهیم داشت که سرعت انتقال حرارت در این نانوسیالات نسبت به سرعت انتقال حرارت در سیال پایه بیشتر است. در این بین، پارامترهایی مانند کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره‌های نفوذپذیر در مسئله و مدل وجود دارند که مقدار آن‌ها بر سرعت تاثیرگذار است. در این پژوهش، قصد داریم مدل ریاضی این جریان انتقال حرارت را حل کنیم و در نتیجه تاثیر پارامترهای متفاوت را بررسی کنیم. می‌دانیم در مطالعه رفتار پدیده‌های مختلف در سیالات، باید مدل فیزیکی و مدل ریاضی آن‌ها از قوانین حاکم بر جریان سیال پیروی کنند. معادله پیوستگی یا قانون بقای جرم در یک سیال به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (1.1)$$

معادلات گشتاور برای جریان سیال پس از ساده‌سازی‌های لازم به صورت زیر در می‌آید [۲۱]:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{-1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{-1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right), \quad (3.1)$$

هم‌چنین معادله انرژی به شکل زیر است:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \frac{1}{(\rho C_p)_{nf}} \frac{\partial q_r}{\partial \tilde{y}}, \quad (4.1)$$

اندیس f ، n و s به ترتیب مربوط به سیال پایه، نانوسیال و نانوذره است. پارامترهای معادلات حاکم بر جریان به صورت زیرند:

• \tilde{u} : مولفه سرعت در جهت \tilde{x} ؛

• \tilde{v} : مولفه سرعت در جهت \tilde{y} ؛

• t : زمان؛

• ρ_{nf} : چگالی نانوسیال؛

• μ_{nf} : ویسکوزیته نانوسیال؛

• k_{nf} : ظرفیت هدایت حرارتی نانوسیال؛

• $(\rho C_p)_{nf}$: گرمای ویژه موثر نانوسیال؛

• \tilde{T} : درجه حرارت سیال؛

• \tilde{p} : فشار؛

• q_r : شار حرارتی.

همچنین $\phi = \frac{\mu_f \rho_{nf}}{\mu_{nf} \rho_f}$ تراکم حجمی نانوسیال است که برای بیان غلظت یک ذره در یک سیال استفاده می‌شود و روابط مورد استفاده برای محاسبه خواص نانوسیال به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mu_{nf} &= \frac{\mu_f}{(1-\phi)^{2.5}}, \quad \text{مدل بریکمن} \\ \rho_{nf} &= (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_s, \\ (\rho C_p)_{nf} &= (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s, \\ \frac{k_{nf}}{k_f} &= \frac{k_s + 2k_f - 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \phi(k_f - k_s)}, \quad \text{مدل ژوان و لی} \end{aligned}$$

که در آن پارامترها به صورت زیرند:

• ϕ : تراکم حجمی؛

• μ_f : ویسکوزیته سیال پایه؛

• ρ_f : چگالی سیال پایه؛

• ρ_s : چگالی نانو ذره؛

• $(\rho C_p)_f$: گرمای ویژه سیال پایه؛

• $(\rho C_p)_s$: گرمای ویژه موثر نانو ذره؛

• k_f : ظرفیت هدایت حرارتی سیال پایه؛

• k_s : ظرفیت حرارتی نانو ذره.

با توجه به مفروضات فوق و با استفاده از تبدیلات مطرح شده در [۱۲، ۱۸] و همچنین تبدیلات توصیف شده در [۲۳] و [۱۹]، مدل ریاضی حاصل از مسئله بیان شده در بخش ۱.۱، به صورت معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه‌ی چهارم زیر است [۲۱]:

$$f^4(\zeta) + \alpha\phi(\zeta f'''(\zeta) + 3f''(\zeta)) + \phi R f(\zeta) f'''(\zeta) - \phi R f'(\zeta) f''(\zeta) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (5.1)$$

که در آن تابع $f(\zeta)$ ، سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون در مکان ζ است. به دلیل این که محاسبات در مقیاس کوچکتر، بسیار ساده‌تر از محاسبات در مقیاس‌های بزرگ بوده، لذا $0 \leq \zeta \leq 1$ در نظر گرفته شده است.

تاکنون انتقال حرارت در مقیاس‌های بزرگ بررسی شده است، اما انتقال حرارت در مقیاس نانو می‌تواند تفاوت‌های چشم‌گیری با انتقال حرارت در مقیاس بزرگ و حتی میکروسکوپییک داشته باشد. هنگامی که ابعاد و اندازه‌ها به سطح نانو می‌رسند، نیاز به روش‌های جدیدی برای محاسبه‌ی انتقال حرارت خواهیم داشت. زیرا قوانین کلاسیک انتقال حرارت دیگر پاسخ‌گوی نیاز ما نخواهند بود. از طرف دیگر انتقال حرارت در بسیاری از کاربردهای مقیاس نانو از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از مهم‌ترین آن‌ها، نیاز به مدیریت گرمای تولیدشده در دستگاه‌های نانومقیاس برای حفظ عمل‌کرد و قابلیت اطمینان به آن‌ها است و دیگری استفاده از نانوساختارها برای بهبود کنترل روی شارهای گرمایی و تبدیل انرژی است [۱].

در این پژوهش قصد داریم مدل (۵.۱) را با استفاده از روش عددی تجزیه آدومیان حل کنیم. $R = \frac{a\tilde{v}}{v_f}$ ، عدد رینولدز است که برای پیش‌بینی الگوی جریان از آن استفاده می‌شود. همچنین $\alpha = \frac{a\tilde{a}}{v}$ ، نرخ اتساع دیواره نفوذپذیر با سرعت v است.

شرایط مرزی مربوطه در مدل اولیه مسئله به صورت زیر است:

$$\tilde{u} = -\frac{\sqrt{K}}{\sigma} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{v} = v_w = -A\dot{a}, \quad \tilde{T} = T_0, \quad \tilde{y} = a(t) \text{ در} \quad (۶.۱)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{T} = T_1, \quad \tilde{y} = -a(t) \text{ در} \quad (۷.۱)$$

که در آن پارامترها به صورت زیرند:

• K : نفوذپذیری ویژه محیط متخلخل؛

• σ : ثابت بدون بعد؛

• T_0 : درجه حرارت دیواره بالایی؛

• T_1 : درجه حرارت دیواره پایینی؛

• $A = \frac{v_w}{\dot{a}}$: مقداری ثابت برای دیواره نفوذپذیر.

با توجه به تعریف تبدیل تشابه [۱۳، ۱۸، ۱۹]، و با در نظر گرفتن $\eta = \frac{\tilde{y}}{a}$ و بدون بعد کردن شرایط اولیه داریم:

$$f'(1) = -\lambda f''(1), \quad f(1) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad (۸.۱)$$

که در آن $\lambda = \frac{\sqrt{K}}{\sigma a}$ پارامتر لغزش است.

خواص گرمافیزیکی خون، طلا و مس را در جدول زیر آورده ایم:

جدول ۱: مشخصات گرمافیزیکی سیال پایه و نانوذرات طلا و مس

نام	خون	طلا	مس
چگالی	۱۰۵۰	۱۹۳۰۰	۸۹۳۳
گرمای ویژه	۳۶۱۷	۱۲۹	۳۸۵
هدایت حرارتی	۰.۵۲	۳۱۰	۴۰۰

۲ روش تجزیه آدومیان و تحلیل هم‌گرایی آن

برای یافتن جواب عددی مدل غیرخطی مرتبه چهارم (۵.۱) با شرایط مرزی (۸.۱)، روش آدومیان را به کار می‌گیریم. برای نشان دادن ایده اصلی روش تجزیه آدومیان (ADM)، معادله دیفرانسیل را به صورت عملگری زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(\zeta) - N(f) = g(\zeta), \quad (۱.۲)$$

که در آن $g(\zeta)$ عبارت ناهمگن و معلوم (۵.۱) و $N(f)$ عبارت غیرخطی (۵.۱) اند. در روش تجزیه آدومیان، جواب عددی به صورت سری نامتناهی زیر تعریف می‌شود:

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta),$$

هم‌چنین عملگر غیرخطی N به صورت یک سری نامتناهی از چندجمله‌ای‌های A_n و به صورت $N = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ است. A_n ها چندجمله‌ای‌های تعریف شده آدومیان و وابسته به f_n, f_1, \dots, f_0 اند، به علاوه، داریم:

$$N\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n, \quad (۲.۲)$$

که در آن λ ، یک پارامتر برای ساده‌سازی است. چندجمله‌ای‌های آدومیان به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۳]:

$$A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} N \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n \right) \Big|_{\lambda=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

با جای‌گزینی سری‌های تعریف‌شده در رابطه (۱.۲) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n = g(\zeta), \quad (4.2)$$

اگر سری‌های تعریف‌شده هم‌گرا باشند، آن‌گاه با توجه به رابطه (۳.۲) داریم:

$$f_0 = g(\zeta), \quad f_1 = A_0, \dots, f_n = A_{n-1}, \dots$$

به این ترتیب می‌توان هر جمله سری را محاسبه کرد و در نتیجه $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)$ ، جواب معادله (۱.۲) توسط روش آدومیان است.

برای تحلیل هم‌گرایی روش آدومیان، معادله (۱.۲) را در نظر بگیرید. اگر $f(\zeta)$ بتواند به عنوان یک سری نامتناهی بسط یابد، داریم: $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)$. با معرفی پارامتر λ ، سری نامتناهی $f(\zeta)$ را می‌توان به صورت بسط زیر نوشت:

$$f_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n, \quad (5.2)$$

توجه کنیم که سری فوق برای $|\lambda| \leq 1$ به طور مطلق هم‌گراست. در قضیه زیر شرایط کافی برای هم‌گرایی سری (۵.۲) بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲. اگر $N(f)$ ، یک تابع تحلیلی از f در بازه $(-S, +S)$ باشد و سری $f(\zeta)$ به شکل زیر باشد:

$$\frac{b'}{(1+\varepsilon)} \left(1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right) + \dots + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \left(\frac{\lambda}{\rho} \right)^n + \dots \right) \quad (6.2)$$

که در آن $b' > b$ است، $\rho \leq 1$ و $\varepsilon > \frac{b}{S}$ ، آن‌گاه سری (۵.۲) هم‌گراست.

□

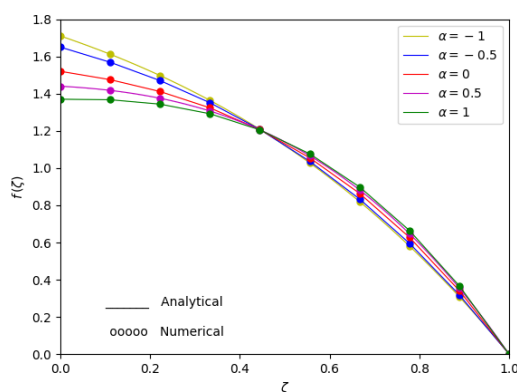
اثبات. مرجع [۳] دیده شود.

۳ حل مدل با روش تجزیه آدومیان

در این بخش، با استفاده از جدول ۱، برای محاسبه پارامترهای موجود در مدل (۵.۱)، جواب عددی را با استفاده از روش تجزیه آدومیان به صورت زیر تقریب زده‌ایم:

$$\begin{aligned} f(\zeta) = & 5.84159405677968e^{-14}\zeta^{21} + 1.22673475192373e^{-12}\zeta^{20} + 1.46256724024541e^{-11}\zeta^{19} \\ & - 2.62677543048668e^{-10}\zeta^{18} + 1.30535699424889e^{-9}\zeta^{17} + 7.94030485816931e^{-9}\zeta^{16} \\ & + 4.28159589192449e^{-10}\zeta^{15} - 3.37287083144368e^{-9}\zeta^{14} + 4.80875232580447e^{-8}\zeta^{13} \\ & + 7.19461538927491e^{-7}\zeta^{12} - 3.85126637711296e^{-6}\zeta^{11} + 3.72085264050446e^{-7}\zeta^{10} \\ & - 1.11625579215134e^{-10}\zeta^9 - 0.0002679013901163e^{-5}\zeta^7 + 0.0018753097308114e^{-7}\zeta^6 \\ & + 0.0337555751546564e^{-6}\zeta^5 + 0.16666666667e^{-5}\zeta^3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

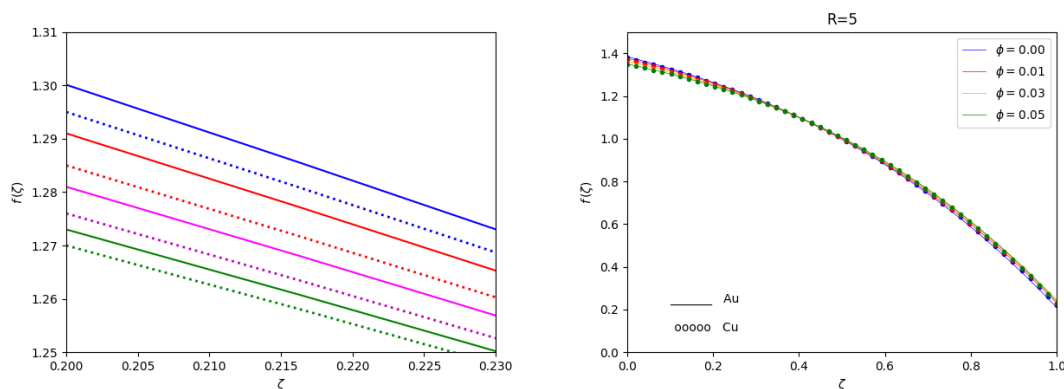
شکل ۲، جواب‌های عددی و جواب‌های تحلیلی مسئله (۵.۱) را که به ترتیب از روش تجزیه آدومیان و روش HAM به دست می‌آیند، به‌ازای $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ ، نمایش می‌دهد. نمودار خط‌ممتد (پر) نمایش جواب تحلیلی و نمودار خط چین، نمایش جواب عددی است.



شکل ۲: مقایسه جواب تحلیلی و جواب عددی مسئله (۵.۱).

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، جواب‌های تحلیلی به‌دست‌آمده با جواب‌های عددی یافت‌شده مطابقت خوبی دارد. مثال ارائه‌شده نشان می‌دهد که روش تجزیه آدومیان برای حل این معادله دیفرانسیل مناسب است. هم‌چنین، جواب‌های تحلیلی به‌دست‌آمده از HAM را با جواب‌های عددی به‌دست‌آمده از روش ADM در جدول ۲، مقایسه کرده‌ایم.

برای بررسی تاثیر کسر حجمی، نرخ اتساع در دیواره‌های نفوذپذیر بدن، عدد رینولدز در مدل جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون، با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون، حالت‌های مختلف این عوامل تاثیرگذار را بررسی کرده‌ایم. ابتدا با در نظر گرفتن $\alpha = 2$ ، برای مقادیر مختلف کسر حجمی ϕ ، نتیجه اعمال روش تجزیه آدومیان را روی مدل (۵.۱) در شکل ۳ نشان داده‌ایم. خط ممتد در شکل ۳، نشان‌دهنده جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا-خون برای عدد رینولدز ۵، نرخ اتساع دیواره $\alpha = 2$ و کسرهای حجمی متفاوت است و خطوط نقطه‌چین برای وقتی است که از نانوذره مس استفاده کرده‌ایم. بررسی خطوط جریان نشان می‌دهد که با افزایش کسر حجمی، سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون کم می‌شود.



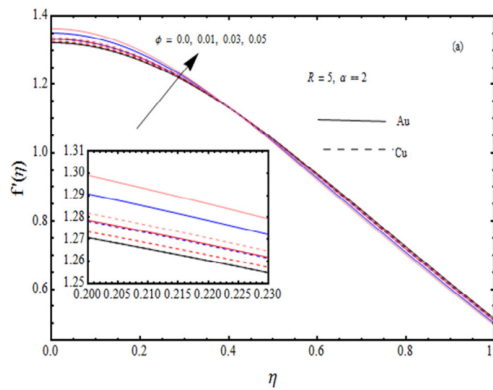
شکل ۳: تاثیر کسر حجمی بر سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون برای مسئله (۵.۱)

شکل ۴: تاثیر کسر حجمی بر سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون مدل (۵.۱) را از مرجع [۲۱] نشان می‌دهد. با مقایسه شکل ۳ و ۴، مشاهده می‌گردد که جواب‌های عددی این دو روش بسیار به هم نزدیک‌اند. توجه کنیم که $f(\zeta)$ در این مقاله، همان $f'(\eta)$ در مرجع [۲۱] است. در مثال عددی، $R = 5$ انتخاب شده است، یعنی؛ ۵ واحد نانوذره طلا و یا مس در سیال پایه (خون) تزریق شده است. علت انتخاب چنین اعدادی برای کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره نفوذپذیر، مقایسه نتایج با مقاله [۲۱] بوده است. لذا در شکل ۶، نتیجه قرار دادن همین مقادیر در مسئله را از مقاله [۲۱] آورده‌ایم.

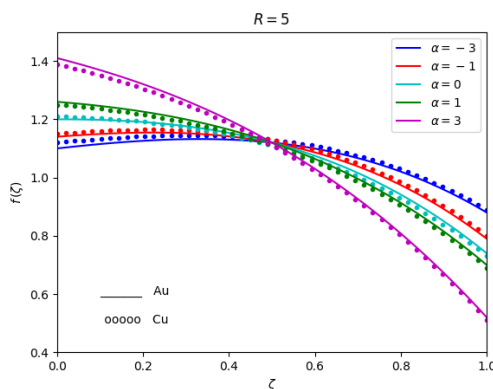
شکل ۵: نشان می‌دهد که سرعت انتقال با افزایش پارامتر لغزش به سمت سطوح افزایش و در نزدیکی مرکز کاهش می‌یابد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که سرعت برای نانوسیال خون مس در مقایسه با نانوسیال خون طلا بیشتر است. واضح است که با کاهش نرخ اتساع دیواره، سرعت انتقال حرارت نیز کم‌تر می‌شود. در همه شکل‌ها، خط‌های ساده، مربوط به نانوذره طلا و نقطه‌چین‌ها مربوط به نانوذره مس‌اند.

جدول ۲: نتایج عددی روش‌های تجزیه آدومیان و HAM برای محاسبه $f(\zeta)$

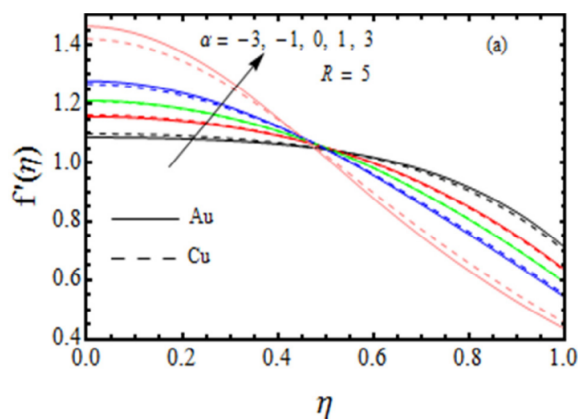
روش ADM	روش HAM	ζ	α
۱,۷۰۷۵۴۷	۱,۷۰۷۸۰۸	۰,۰	$\alpha = -۱$
۱,۵۲۱۲۷۸	۱,۵۲۱۴۷۱	۰,۲	
۱,۲۷۳۰۲۳	۱,۲۷۳۲۲۲	۰,۴	
۰,۹۴۸۱۲۹	۰,۹۴۸۳۳۳	۰,۶	
۰,۵۲۹۳۸۵	۰,۵۲۹۶۴۶	۰,۸	
۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰	
۱,۶۴۹۵۹۲	۱,۶۴۹۹۹۵	۰,۰	$\alpha = -۰,۵$
۱,۴۶۰۰۲۳	۱,۴۶۰۳۹۷	۰,۲	
۱,۲۶۸۲۹۸	۱,۲۶۸۳۴۲	۰,۴	
۰,۹۵۹۸۳۲	۰,۹۶۰۱۸۱	۰,۶	
۰,۵۴۳۵۶۳	۰,۵۴۳۹۱۲	۰,۸	
۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰	
۱,۵۱۹۹۴۵	۱,۵۱۹۹۹۶	۰,۰	$\alpha = ۰$
۱,۴۲۵۲۷۵	۱,۴۲۵۵۲۹	۰,۲	
۱,۲۵۷۱۶۵	۱,۲۵۷۳۰۱	۰,۴	
۰,۹۸۴۰۵۶	۰,۹۸۴۲۱۶	۰,۶	
۰,۵۷۴۰۸۳	۰,۵۷۴۲۸۳	۰,۸	
۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰	
۱,۴۳۹۵۴۸	۱,۴۳۹۸۹۹	۰,۰	$\alpha = ۰,۵$
۱,۳۸۵۳۲۹	۱,۳۸۵۶۱۶	۰,۲	
۱,۲۵۰۱۷۵	۱,۲۵۰۳۶۹	۰,۴	
۰,۹۹۸۴۹۳	۰,۹۹۸۵۴۱	۰,۶	
۰,۵۹۳۱۹۳	۰,۵۹۳۶۸۲	۰,۸	
۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰	
۱,۳۷۰۸۳۴	۱,۳۷۰۰۲۴	۰,۰	$\alpha = ۱$
۱,۳۵۰۴۵۹	۱,۳۵۰۱۸۵۳	۰,۲	
۱,۲۴۴۱۶۰	۱,۲۴۴۴۸۸	۰,۴	
۰,۰۱۱۲۷۳	۰,۰۱۱۶۶۹	۰,۶	
۰,۶۱۰۳۴۶	۰,۶۱۰۷۷۸	۰,۸	
۰,۰۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰	۱,۰	



شکل ۴: تاثیر کسر حجمی بر سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون در مقاله [۲۱] روی مدل (۵.۱)

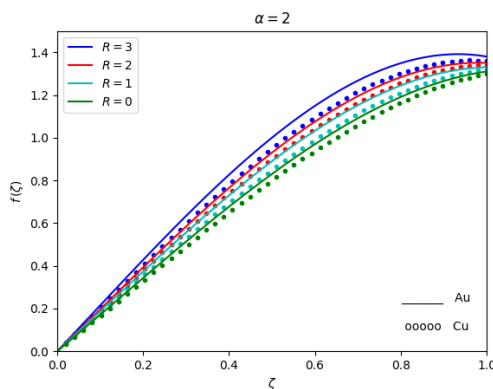


شکل ۵: تاثیر نرخ اتساع دیواره بر سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون در مدل (۵.۱)



شکل ۶: تاثیر نرخ اتساع دیواره در مقاله [۲۱] روی مدل (۵.۱)

یکی دیگر از پارامترهای بسیار مهم در بررسی انتقال حرارت نانوسیالات، عدد رینولدز است. در شکل ۷، برای اعداد رینولدز متفاوت و $\alpha = 2$ جوابهای عددی مدل (۵.۱) نشان داده شده است. بررسی خطوط جریان نشان می دهد که با افزایش عدد رینولدز، سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون نیز افزایش می یابد. در رینولدزهای پایین، جریان به لایه های بالاتر سیال نفوذ می کند و در نتیجه آن بیش تر میدان جریان تحت تاثیر قطعه های داغ قرار می گیرد.



شکل ۷: تاثیر عدد رینولدز بر سرعت انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون در مدل (۵.۱)

۴ نتیجه گیری

در شرایط متفاوت و با تغییر خواص گرمافیزیکی سیالات، بررسی جریان انتقال حرارت در نانوسیالات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله به تاثیر کسرحجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع دیواره‌های نفوذپذیر در جریان انتقال حرارت پرداخته شد. سیالات معمولی مانند آب، روغن یا خون قابلیت انتقال حرارت پایینی دارند. اما با اضافه کردن چند واحد نانوذره در آن‌ها می‌توان این قابلیت مهم را افزایش داد [۱۵]. در مقاله حاضر، مدل جریان انتقال حرارت نانوسیال طلا/مس خون را در نظر گرفتیم و جواب‌های عددی را با روش تجزیه آدومیان به دست آوردیم و با جواب به دست آمده از روش آنالیز هموتویی مقایسه نمودیم. این موضوع که هر عامل و پارامتر حاضر در معادله، به چه میزان بر پایداری نانوسیال اثرگذار است، بسیار با اهمیت است. برای بررسی اثرات کسر حجمی، عدد رینولدز و نرخ اتساع در دیواره‌های نفوذپذیر بدن، مدل را با روش عددی تجزیه آدومیان حل نمودیم و نمودار نتایج به دست آمده را تفسیر کردیم و دریافتیم که در این مدل با افزایش عدد رینولدز، سرعت انتقال حرارت نانوسیال افزایش می‌یابد و کاهش نرخ اتساع دیواره‌های نفوذپذیر در بدن و افزایش کسر حجمی، باعث کاهش سرعت انتقال حرارت نانوسیال می‌شود.

فهرست منابع

- [۱] ا. افشار، ر. پوررجب، بررسی ویژگی‌های انتقال حرارت در مقیاس نانو چهارمین کنفرانس ملی سیستم‌های مکانیکی و نوآوری های صنعتی، اهواز، ۱۳۹۵.
- [۲] ر. اسماعیلی، م. قوتمند، ج. وحیدی، حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته، پایان نامه، مقطع کارشناسی ارشد، دانشگاه شاهرود، ۱۳۹۴.
- [۳] پ. سرگلزایی، م. شمسی گوشکی، بررسی هم‌گرایی سری آدومیان برای معادلات انتگرال غیرخطی، چهل و چهارمین کنفرانس سالانه ریاضی ایران، ۱۳۹۲.
- [۴] م. کمال غریبی، ا. زمزمیان، هرمزی فرامرزی، بررسی تجربی پایداری نانوسیالات اکسید مس بر پایه یون زدایی شده و دستیابی به شرایط بهینه پایداری، دوره ۴۸، شماره ۱، صفحه ۱۷ تا ۳۰، نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر-مهندسی مکانیک، ۱۳۹۳.
- [5] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [6] G. Adomian, *Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics*, Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [7] G. Adomian and R. Rach, Analytic solution of nonlinear boundary-value problems in several dimensions by decomposition, *J. Math. Anal. Appl.*, **174** (1993) 118–137.
- [8] G. Adomian and R. Rach, Modified decomposition solution of linear and nonlinear boundary-value problems, *Nonlinear Anal.* **23** (1994) 615–619.
- [9] O. Aliu, O. Sakidin, H. Foroozesh and N. Yahya, *Lattice Boltzmann application to nanofluids dynamics-A review*, *Journal of Molecular Liquids*, 112284, 2019.
- [10] S. U. Choi and J. A. Eastman, *Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles* (No. ANL/MSD/CP-84938; CONF-951135-29), Argonne National Lab., IL (United States), 1995.
- [11] M. Dehghan and M. Tatari, Finding approximate solutions for a class of third-order non-linear boundary value problems via the decomposition method of Adomian, *Int. J. Comput. Math.*, **87** (2010) 1256–1263.
- [12] T. Hayat, S. Qayyum, M. Imtiaz and A. Alsaedi, *Heat Mass Transfer*, **102** (2016) 723–732.

- [13] T. Hayat, S. Qayyum, M. Imtiaz and A. Alsaedi, Comparative study of silver and copper water nanofluids with mixed convection and nonlinear thermal radiation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **102** (2016) 723-732.
- [14] H. H. Kampinga, and E. Dikomey, Hyperthermic radiosensitization: mode of action and clinical relevance, *International journal of radiation biology*, **77** (2001) 399-408.
- [15] S. Lee, S. S. Choi, S. A. Li J. A. Eastman, *Measuring thermal conductivity of fluids containing oxide nanoparticles*, 1999.
- [16] Y. M. Chen and J. K. Liu, A study of homotopy analysis method for limit cycle of van der Pol equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14** (2009), 1816-1821.
- [17] S. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*. Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [18] J. Majdalani, C. Zhou and C. A. Dawson, Two-dimensional viscous flow between slowly expanding or contracting walls with weak permeability, *Journal of Biomechanics*, **35** (2002), 1399-1403.
- [19] J. Majdalani and C. Zhou, Moderate-to-large injection and suction driven channel flows with expanding or contracting walls, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Applied Mathematics and Mechanics*, **83** (2003), 181-196.
- [20] P. A. Naik, J. Zu and M. Ghoreishi, *Estimating the approximate analytical solution of HIV viral dynamic model by using homotopy analysis method*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 131, 109500, 2020.
- [21] R. Subramanyam, S. Srinivas and K. Jagadeshkumar, *Blood-gold/coppernanofluid flow between expanding or contracting permeable walls with slip effects*, *Materials Today: Proceedings*, 9, 351-360, 2019.
- [22] M. Tatari and M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving multipoint boundary value problems, *Phys. Scripta*, **73** (2006) 672-676.
- [23] S. Uchida, S and H. Aoki, H, Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe, *Journal of Fluid Mechanics*, **82** (1977), 371-387.
- [24] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Higher Education, Beijing, Springer, Berlin, 2009.
- [25] A. M. Wazwaz, Approximate solutions to boundary value problems of higher order by the modified decomposition method, *Comput. Math. Appl.*, **40** (2000) 679-691.



Investigating the effect of volume fraction, Reynolds number and dilation rate of permeable wall of vessel on the heat transfer flow of gold/copper nanofluid of blood using the Adomian decomposition method

AllahBakhsh Yazdani Cherati [†], Zohre Azimi

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2022/4/30

Accepted: 2022/9/17

Abstract: In this paper, the effects of volume fraction, Reynolds number and dilation rate on the permeable walls of the vessel in the gold-copper-nanofluid heat transfer model in two-dimensional of blood are investigated. For this purpose, we consider blood as the base fluid in which units of gold or copper nanoparticles are injected. The mathematical model of this phenomenon is in the form of nonlinear ordinary differential equation of the fourth order. In this paper, the Adomian decomposition method is used to numerically solve this nonlinear model with boundary conditions. Comparing the numerical solutions obtained from the Adomian decomposition method with the analytical solutions obtained from the homotopy analysis method (HAM), shows that the numerical and analytical solutions are in good agreement. Also, according to the obtained results, it can be understood that with increasing the number of gold-copper nanoparticles in the base fluid, what will be the thermal properties.

Keywords: Reynolds number, nanofluid flow, Dilation rate of permeable wall, Volume fraction, Adomian decomposition method.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: yazdani@umz.ac.ir (A. Yazdani Cherati), zazimi@umz.ac.ir (Z. Azimi).