



بررسی یک روش جدید برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد

الهام رضازاده *

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۳/۱

چکیده: دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد به‌طور کاملاً طبیعی در چندین شاخه از علوم مهندسی در طی فرمول‌بندی بسیاری از مسائل مقدار مرزی رخ می‌دهد. جواب تحلیلی برای سیستم معادلات غالب شناخته شده است. با این حال، بسیاری از مسائل دنیای واقعی مانند مسائل ترک در زمینه مکانیک شکست وجود دارد که ممکن است به‌صورت دستگاه معادلات غالب فرموله نشود. بنابراین، در این مقاله ما یک روش عددی را برای یافتن جواب تقریبی برای چنین شکل کلی پیش‌نهاد می‌کنیم. سپس هم‌گرایی روش پیش‌نهادی را نشان می‌دهیم. این هم‌گرایی به‌دست آوردن کران خطا برای خطای بین جواب دقیق و تقریبی کمک می‌کند. در پایان با ارائه مثال عددی، کارایی این روش نشان داده خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال فوق منفرد، چندجمله‌ای‌های لژاندر، روش گالرکین، انتگرال اجزای متناهی هادامارد.

رده‌بندی ریاضی: 45E05; 65L60

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل مقدار مرزی ریاضیات کاربردی، فیزیک ریاضی، مهندسی و غیره را می‌توان به‌صورت دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد مدل‌سازی کرد. به‌عنوان مثال، مسائل شکاف در زمینه مکانیک شکست [۱۳]، [۱۱]، مسائل استرسی گرمایی در اطراف تعداد دلخواه شکافهای مسطح [۱۴] به‌صورت دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد فرمول‌بندی می‌شود. هم‌چنین، معادلات انتگرال فوق منفرد دوبعدی طول یک منحنی در صفحه پیچیده مانند مسائل پراکندگی آب [۱]، مسائل ترک منحنی [۱۶]، [۱۷] را می‌توان به‌صورت معادلات انتگرال فوق منفرد نشان داد. معادلات انتگرال فوق منفرد در یک بعد اغلب در زمینه پراکندگی الکترومغناطیسی [۵]، آکوستیک [۶]، آیرودینامیک [۴]، خاصیت ارتجاعی [۸] و مکانیک شکست [۱۵] رخ می‌دهد. روش‌های عددی برای به‌دست آوردن جواب تقریبی این دسته از معادلات به‌صورت گسترده‌ای در روش تکثیر هسته [۱۸]، روش انتگرال‌گیری [۳]، روش عنصر مرزی و تقریب چندجمله‌ای موجود است. با این وجود، روش‌های عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات انتگرال فوق منفرد نوع اول هنوز کم‌یاب است. بنابراین، لازم است که روش‌های

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (E.Rezazadeh), erezazade99@gmail.com

عددی بیش‌تری توسعه یابد. در این مقاله، روش گالرکین مبتنی بر باقی‌مانده با چندجمله‌ای لژاندر به‌عنوان تابع پایه‌ای را برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد پیش‌نهاد می‌کنیم.

در بسیاری از مسائل فیزیکی شناخته‌شده [۱۳]، [۵] و [۹]، دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد نوع اول به صورت زیر است:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(t-s)^2} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix} dt - \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} k_{11}(s,t) & k_{12}(s,t) & \dots & k_{1N}(s,t) \\ k_{21}(s,t) & k_{22}(s,t) & \dots & k_{2N}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(s,t) & k_{N2}(s,t) & \dots & k_{NN}(s,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_N(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \vdots \\ g_N(s) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

که در آن $|s| < 1$ و شرط مرزی $\varphi_j(\pm 1) = 0$ ، $j = 1, \dots, N$ در حالتی که تمام $k_{ji}(s, t)$ ، $i, j = 1, \dots, N$ به صورت $k_{ji}(s, t) = 0$ باشند، معادله‌ی (۱.۱) دستگاه معادلات غالب نامیده می‌شود. در دستگاه (۱.۱) توابع k_{ij} و $g_j(s)$ توابع پیوسته هولدر با مقادیر مختلط معلوم‌اند که به ترتیب در بازه‌ی $[-1, 1] \times [-1, 1]$ و $[-1, 1]$ تعریف شده‌اند. همچنین، تابع $\varphi_j(s)$ یک تابع مختلط مجهول در بازه‌ی $[-1, 1]$ است. در دستگاه (۱.۱) هر معادله انتگرال فوق منفرد را به‌عنوان یک انتگرال اجزای متناهی هادامارد در نظر می‌گیریم. همچنین، برای اطمینان از وجود انتگرال اجزای متناهی هادامارد فرض می‌شود که هر تابع مجهول $\varphi_j(s)$ ، در شرط پیوسته هولدر صدق می‌کند. جواب تحلیلی دستگاه (۱.۱) در حالتی که توابع $k_{ij}(s, t) = 0$ است، می‌تواند با استفاده از تعمیم جواب تحلیلی معادله انتگرال فوق منفرد در یک بعد، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \\ \vdots \\ \varphi_N(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 g_1(t) \ln \left| \frac{t-s}{1-st + \sqrt{(1-t^2)(1-s^2)}} \right| dt \\ \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 g_2(t) \ln \left| \frac{t-s}{1-st + \sqrt{(1-t^2)(1-s^2)}} \right| dt \\ \vdots \\ \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 g_N(t) \ln \left| \frac{t-s}{1-st + \sqrt{(1-t^2)(1-s^2)}} \right| dt \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

جواب تحلیلی فوق یک حالت خاص از شکل کلی معادله (۱.۱) است. همچنین، به دلیل وجود تکینگی در جواب، حل معادله‌ی (۲.۱) برای هر $g_i(t)$ امکان‌پذیر نیست. به علاوه، جواب تحلیلی فرم کلی (۱.۱) که در آن $k_{ji}(s, t) \neq 0$ است، مشخص نیست. بنابراین، در این مقاله یک روش عددی برای یافتن جواب تقریبی معادله (۱.۱) مطرح می‌کنیم.

۲ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۲. تابع $\varphi(t)$ را یک تابع هولدر پیوسته گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند [۱۰]:

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq c|t-x|^\alpha, \quad t, x \in \Omega(\varphi), \quad (1.2)$$

که در آن c یک ثابت حقیقی غیرمنفی، α ضریب شرط هولدر است که در رابطه‌ی $0 < \alpha \leq 1$ صدق می‌کند و $\Omega(\varphi)$ نشان دهنده‌ی دامنه تابع φ است.

تعریف ۲.۲. فرم ساده انتگرال اجزای متناهی هادامارد[†]، توسط مونوگاتو^{*} به صورت زیر تعریف شده است. [۷] فرض کنیم $u(t) \in C^{1,\alpha}(-1, 1)$ ، در این صورت

$$HFP \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{(t-x)^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{u(t)}{(t-x)^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{u(t) - (t-x)u'(x) - u(x)}{(t-x)^2} dt \quad (2.2)$$

$$- u'(x) \log \left(\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \right) - u(x) \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right], \quad |x| < 1,$$

[†]Hadamard Finite-Part Integral(HFP)

^{*}Monogato

که در آن $C^{1,\alpha}(-1, 1)$ بیان گر فضای توابعی است که مشتق مرتبه اول آن ها در شرط پیوسته هولدر در بازه $[-1, 1]$ صدق می کند. تعریف ۳.۲. یک مسئله را خوش وضع گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد (شرایط خوش وضعی هادامارد) [۱۲]:

۱. جواب یکتا موجود باشد.

۲. جواب به طور پیوسته به داده های ورودی داده شده وابستگی داشته باشد (پایداری).

قضیه ۴.۲. فرض کنیم H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت بوده و $T: H_1 \rightarrow H_2$ یک نگاشت خطی کران دار باشد. در این صورت نگاشت خطی معکوس $T^{-1}: H_2 \rightarrow H_1$ نیز کران دار است.

برای اثبات قضیه به [۲] مراجعه کنید.

۳ ساختار روش

در این بخش یک روش عددی برای یافتن جواب تقریبی دستگاه (۱.۱) مطرح خواهد شد. به همین منظور برای پیدا کردن جواب تقریبی، هر تابع مجهول $\varphi_j(t), j = 1, 2, \dots, N$ ، در دستگاه (۱.۱) را به صورت زیر جایگزین می کنیم:

$$\varphi_j(t) = \sqrt{1-t^2} \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.3)$$

که در آن $\psi_j(t), j = 1, 2, \dots, N$ یک تابع مجهول خوش وضع در $t \in [-1, +1]$ است. به عبارت دیگر، مشتق اول توابع مجهول $\psi_j(t)$ پیوسته اند و هر نقاط انتهایی کران دار است. با استفاده از رابطه ی (۱.۳) دستگاه معادلات (۱.۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-s)^2} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} dt - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \begin{pmatrix} k_{11}(s,t) & k_{12}(s,t) & \dots & k_{1N}(s,t) \\ k_{21}(s,t) & k_{22}(s,t) & \dots & k_{2N}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}(s,t) & k_{N2}(s,t) & \dots & k_{NN}(s,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_N(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \vdots \\ g_N(s) \end{pmatrix},$$

بنابراین فرم عملگری دستگاه معادلات فوق، به صورت زیر است:

$$(D - K)\psi(s) = g(s). \quad (2.3)$$

که در آن $\psi(s)$ ، $g(s)$ ، D و K به صورت زیرند:

$$\psi(s) = \begin{pmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \\ \vdots \\ \psi_N(s) \end{pmatrix}, \quad g(s) = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \vdots \\ g_N(s) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$D = \begin{pmatrix} D & O & \dots & O \\ O & D & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & D \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

نماد O نشان دهنده ی عمل گر صفر و D ، K_{ji} عملگرهای انتگرالی خطی به صورت زیرند:

$$D\psi_j(s) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \psi_j(t)}{(t-s)^2} dt, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3)$$

$$K_{ji}\psi_j(s) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} K_{ji}(s,t) \psi_j(t) dt, \quad j, i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.3)$$

حال تابع مجهول $\psi(s)$ را به صورت زیر تخمین می‌زنیم:

$$\psi(s) \approx \psi_n^*(s) = (\psi_{1n}^*(s), \psi_{2n}^*(s), \dots, \psi_{Nn}^*(s))^T, \quad (۷.۳)$$

$$\psi_j(s) \approx \psi_{jn}^*(s) = \sum_{i=0}^n a_{ij} e_i(s), \quad \forall j = 1, 2, \dots, N. \quad (۸.۳)$$

در رابطه‌ی فوق، $\{e_i(s)\}_{i=0}^n$ مجموعه چندجمله‌ای‌های لزاندار متعامده شده از درجه $(n+1)$ در بازه‌ی $[-1, +1]$ اند. برای حل دستگاه (۱.۱) یا دستگاه معادل آن (۲.۳)، از روش گالرکین مبتنی بر باقی‌مانده استفاده می‌کنیم. خطای باقی‌مانده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}) \\ \mathcal{R}_2(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}) \\ \vdots \\ \mathcal{R}_N(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} & R_j(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}) \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \psi_{jn}^*(t)}{(t-s)^2} dt - \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t) \psi_{in}^*(t) dt - g_j(s), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

فرض بر این است که $R_j(s)$ در فضای برداری $Y = \text{span}\{e_k(s)\}_{k=0}^n$ که یک فضای متناهی است، متعامد است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\langle \mathcal{R}_j(s, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{N0}, a_{N1}, \dots, a_{Nn}), e_k(s) \rangle_{L^2} = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, 2, \dots, N, \quad (۱۱.۳)$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ نشان دهنده‌ی ضرب داخلی در فضای $L^2[-1, +1]$ است. برای حل انتگرال‌های منفرد که در طرف راست معادله‌ی قرار دارند از فرمول انتگرال اجزای محدود هادامارد استفاده می‌کنیم. در نهایت، دستگاه معادلات انتگرال به یک دستگاه معادلات جبری خطی $N \times (n+1)$ در $N \times (n+1)$ مجهول تبدیل می‌شود. عبارت صریح برای دستگاه معادلات جبری خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^n a_{jq} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} e_q(t) e_r(s)}{(t-s)^2} dt ds - \sum_{q=0}^n \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t) a_{iq} e_q(t) e_r(s) dt ds \\ &= \int_{-1}^1 g_j(s) e_r(s) ds, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (۱۲.۳)$$

به‌منظور نوشتن دستگاه (۱۲.۳) به‌شکل ماتریسی، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{qr} &= e_q(t) e_r(s), \quad q = 0, 1, 2, \dots, n, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \hat{g}_{jr} &= (g_j, e_r)_{L^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \hat{k}_{ji} \hat{e}_{qr} &= \begin{cases} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-\sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t) \hat{e}_{qr}) dt ds, & i \neq j, \\ \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-s)^2} - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t) \right) \hat{e}_{qr} dt ds, & i = j, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین، شکل ماتریسی دستگاه (۱۲.۳) به صورت زیر است:

$$\hat{K} \otimes \hat{E}^T \text{vec } A = \text{vec } \hat{G}, \quad (13.3)$$

که در آن

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & \cdots & \hat{K}_{1N} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \cdots & \hat{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{K}_{N1} & \hat{K}_{N2} & \cdots & \hat{K}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} & \cdots & \hat{g}_{1N} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} & \cdots & \hat{g}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{N1} & \hat{g}_{N2} & \cdots & \hat{g}_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \hat{e}_{o0} & \hat{e}_{o1} & \cdots & \hat{g}_{on} \\ \hat{e}_{10} & \hat{e}_{11} & \cdots & \hat{g}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_{n0} & \hat{e}_{n1} & \cdots & \hat{g}_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N0} & a_{N1} & \cdots & a_{Nn} \end{pmatrix}.$$

در معادله (۱۳.۳)، $\text{vec } A$ و بردارهای ستونی از درجهی $N \times (n+1)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{vec } A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}, \quad \text{vec } \hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{G}_1 \\ \hat{G}_2 \\ \vdots \\ \hat{G}_N \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

که در آن \hat{G}_j و A_j به ترتیب بیان گر ستون j ام ماتریس‌های \hat{G} و A است. معادله‌ی (۱۳.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{B}\hat{C} = \hat{F}, \quad (15.3)$$

که در رابطه فوق $\hat{B} = \hat{K} \otimes \hat{E}^T$ ، $\hat{C} = \text{vec } A$ ، $\hat{F} = \text{vec } \hat{G}$ و نماد \otimes نشان دهنده‌ی حاصل ضرب کرونگر ماتریس‌های \hat{K} و \hat{E}^T می‌باشد. دستگاه خطی (۱۵.۳) به آسانی قابل حل است.

در این‌جا، از روش حذفی گاوس با محوربایی جزئی استفاده شده است که یک روش مستقیم برای حل دستگاه خطی (۱۵.۳) است. با این وجود، اگر دستگاه خطی (۱۵.۳) بزرگ باشد، در این صورت می‌توان از روش‌های تکراری مانند روش ژاکوبی، گاوس سایدن و یا روش‌های دیگر استفاده کرد. هزینه محاسباتی روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی، $O(m^3)$ است که $m = N \times (n+1)$ است.

۴ تحلیل خطا

در این بخش، ما تجزیه و تحلیل خطا را با تعریف فضاهای تابعی مناسب که برای به دست آوردن کران خطا و نشان دادن هم‌گرایی دنباله جواب‌های تقریبی $\{\varphi_n^*(s)\}_{n=0}^{\infty}$ دستگاه (۱.۱) ضروری است، شروع می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که دنباله جواب‌های تقریبی $\{\varphi_n^*(s)\}_{n=0}^{\infty}$ دستگاه (۱.۱) به جواب دقیق در فضای L_N^2 میل می‌کند.

۱.۴ فضاهای تابعی

فضای تابعی L_N^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_N^2 = (\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_N(s))^T : \psi_j(s) \in L^2[-1, 1], j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

که یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|_{L_N^2}$ به صورت زیر است

$$\|\psi\|_{L_N^2}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_{L^2}^2, \quad \psi(s) \in L_N^2, \quad (2.4)$$

که توسط ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_N^2}$ تولید شده است:

$$(\psi, \varphi)_{L_N^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\psi_j, \varphi_j)_{L^2}, \quad \psi(s) \varphi(s) \in L_N^2, \quad (3.4)$$

و $L^2[-1, +1] = \{\psi_j : [-1, 1] \rightarrow C : \int_{-1}^1 \psi_j(s) \overline{\psi_j(s)} ds < \infty, j = 1, 2, \dots, N\}$ یک فضای هیلبرت شامل تمامی توابع مختلط است که در آن انتگرال مربعی لبگ در بازه $[-1, 1]$ و با نرم $\|\cdot\|_{L^2}$ است.

$$\|\psi_j\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^1 |\psi_j(s)|^2 ds \right)^{1/2}, \quad \psi_j(s) \in L^2, j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

ناشی از ضرب داخلی زیر است:

$$(\psi, \varphi)_{L^2} = \int_{-1}^1 (\psi_j(s) \overline{\varphi_j(s)}) ds, \quad \psi_j(s), \varphi_j(s) \in L^2, j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.4)$$

حال مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$B_N = \{\psi(s) \in L_N^2 : \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 |\langle \psi_j, e_k \rangle_{L^2}|^2 < \infty\}, \quad (6.4)$$

که در آن

$$\psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_N(s))^T \in L_N^2, \quad \text{for } \psi_j(s) \in L^2, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (7.4)$$

$$l_k^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle De_k, e_i \rangle_{L^2}|^2. \quad (8.4)$$

مجموعه B_N یک زیرفضای L_N^2 است که یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|_{B_N}$ به صورت زیر است:

$$\|\psi\|_{B_N}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_{B^2}^2, \quad \psi(s) \in B_N, \quad (9.4)$$

و این نرم ناشی از ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_N}$ زیر است:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{B_N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle \psi_j, \varphi_j \rangle_s, \quad \psi(s), \varphi(s) \in B_N, \quad (10.4)$$

B یک زیرفضای $L^2[-1, 1]$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \{\psi_j(s) \in L^2 : \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 |\langle \psi_j, e_k \rangle_{L^2}|^2 < \infty\}. \quad (11.4)$$

در معادله‌ی بالا، هر $e_k(t)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی k و l_k مانند تعریف معادله‌ی (۸.۴) تعریف می‌شود. زیرفضای B یک فضای هیلبرت با نرم $\|\cdot\|_B$ به صورت زیر است:

$$\|\psi_j\|_B^2 = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 |\langle \psi_j, e_k \rangle_{L^2}|^2, \quad \psi_j(s) \in B, \quad (12.4)$$

و این نرم توسط ضرب داخلی زیر تولید می‌شود:

$$\langle \psi_j, \varphi_j \rangle_s = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 \langle \psi_j, e_k \rangle_{L^2} \overline{\langle \varphi_j, e_k \rangle_{L^2}}, \quad \psi_j(s), \varphi_j(s) \in B. \quad (13.4)$$

۲.۴ تجزیه و تحلیل همگرایی

در این بخش، نشان می‌دهیم که دنباله جواب‌های تقریبی $\{\varphi_n^*(s)\}_{n=0}^{\infty}$ دستگاه (۱.۱) به جواب دقیق در فضای L_N^Y میل می‌کند. با استفاده از فرمول انتگرال اجزای محدود هادامارد، چند جمله‌ای زیر به دست می‌آید:

$$De_k(s) = \sum_{i=0}^k b_i e_i(s), \quad (14.4)$$

که ضرایب b_i به صورت $b_i = \langle De_k, e_i \rangle_{L^Y}$, $i = 0, \dots, k$, $k = 0, \dots, n$ اند. اگر $V_k(x)$ را به صورت $V_k(x) = \frac{e_k(x)}{L_k}$ تعریف کنیم، در این صورت $\|V_k\|_B = 1$ اند و $\{V_k\}_{k=0}^{\infty}$ پایه کامل متعامد برای فضای B در نظر گرفته خواهد شد، یعنی اگر $\psi_j \in B$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\psi_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi_j, v_k \rangle_B v_k(s). \quad (15.4)$$

با استفاده از معادله (۱۴.۴) عملگر $D : B_N \rightarrow L_N^Y$ را به صورت یک عملگر خطی کران دار گسترش می‌دهیم:

$$D\psi(s) = (D\psi_1(s), D\psi_2(s), \dots, D\psi_N(s))^T \in L_N^Y, \quad (16.4)$$

که در آن $D\psi_j(s)$ به صورت زیر است:

$$D\psi_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \psi_j, e_k \rangle_{L^Y} \sum_{i=0}^k \langle De_k, e_i \rangle_{L^Y} e_i(s) \in L^Y[-1, 1], j = 0, 1, \dots, N. \quad (17.4)$$

از آن جایی که داریم:

$$\|D\psi_j\|_{L^Y}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^2 |\langle \psi_j, e_k \rangle_{L^Y}|^2 = \|\psi_j\|_B^2, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (18.4)$$

بنابراین نرم عملگر خطی کران دار D به صورت زیر است:

$$\|D\| = 1. \quad (19.4)$$

همچنین، نگاشت $D : B_N \rightarrow L_N^Y$ یک نگاشت دو سوپی است. با استفاده از قضیه ۴.۲، عملگر معکوس $D^{-1} : L_N^Y \rightarrow B_N$ به صورت یک عملگر خطی کران دار وجود دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^{-1}\psi(s) = (D^{-1}\psi_1(s), D^{-1}\psi_2(s), \dots, D^{-1}\psi_N(s))^T \quad (20.4)$$

که در آن $D^{-1}\psi_j(s)$ به صورت زیر است:

$$D^{-1}\psi_j(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \psi_j(s), e_k(s) \rangle_{L^Y}}{l_k} e_k(s).$$

بنابراین، نرم عملگر خطی کران دار D^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|D^{-1}\| = 1. \quad (21.4)$$

حال فرض کنیم که $\sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t)$, $j, i = 0, \dots, N$ توابع انتگرال پذیر لبگ از s و t باشند، یعنی:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left| \sqrt{1-t^2} k_{ji}(s, t) \right|^2 dt ds < \infty, \quad (22.4)$$

بنابراین عملگر $L_N^Y : B_N \rightarrow L_N^Y$ یک عملگر فشرده است. علاوه بر این، با استفاده از فضاهای مناسب تعریف شده در بخش قبل، عملگر معادله (۲.۳) را از B_N به L_N^Y تبدیل می‌کنیم:

$$(\mathcal{D} - \mathcal{K})\psi(s) = g(s), \quad g(s) \in L_N^Y, \psi(s) \in B_N. \quad (23.4)$$

همچنین فرض کنیم که عملگر $(\mathcal{D} - \mathcal{K})$ یک عملگر معکوس کران‌دار بوده و در نتیجه دستگاه (۱.۱) دارای جواب یکتا باشد. حال نشان می‌دهیم که همگرایی دنباله جواب‌های تقریبی $\{\psi_n^*(s)\}_{n=0}^\infty$ به جواب دقیق $\psi(s)$ نسبت به نرم L_N^Y برقرار است. از معادله (۱.۳)، داریم:

$$Q_N^n((\mathcal{D} - \mathcal{K})\psi_n^*(s) - g(s)) = 0, \quad (24.4)$$

که Q_N^n یک تصویر متعامد از L_N^Y به L_N^Y است:

$$Q_N^n \psi(s) = (Q_n \psi_1(s), Q_n \psi_2(s), \dots, Q_n \psi_N(s))^T, \quad (25.4)$$

به طوری که Q_n تصویر متعامد بر روی فضای برداری متناهی بعد $Y = \text{span}\{e_i(s)\}_{i=0}^n$ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_n \psi_j(s) = \sum_{k=0}^n (\psi_j, e_k)_{L^2} e_k(s). \quad (26.4)$$

از آن‌جا که تابع $\psi_n^*(s)$ تعریف شده در معادله (۷.۳) یک چندجمله‌ای است، بنابراین با استفاده از معادله (۱۴.۴)، تابع $D\psi_n^*(s)$ نیز یک چندجمله‌ای است. بنابراین، با استفاده از تعریف Q_N^n ، داریم:

$$Q_N^n D\psi_n^*(s) = D\psi_n^*(s). \quad (27.4)$$

حال با استفاده از معادله (۲۷.۴)، خواهیم داشت:

$$D\psi_n^*(s) - Q_N^n \mathcal{K}\psi_n^*(s) = Q_N^n g(s). \quad (28.4)$$

چون عملگر D یک عملگر معکوس کران‌دار است و عملگر \mathcal{K} فشرده است، بدیهی است که برای تمامی $n \geq n_0$ ، $(D - Q_N^n \mathcal{K})^{-1}$ یک عملگر خطی کران‌دار وجود دارد. بنابراین، معادله (۲۸.۴) دارای جواب یکتاست که به صورت زیر است:

$$\psi_n^*(s) = (D - Q_N^n \mathcal{K})^{-1} Q_N^n g(s). \quad (29.4)$$

حال با استفاده از معادلات (۲۸.۴) و (۲۳.۴)، برای تمامی $n \geq n_0$ داریم:

$$\psi(s) - \psi_n^*(s) = (D - Q_N^n \mathcal{K})^{-1} (g(s) - Q_N^n g(s) + \mathcal{K}\psi(s) - Q_N^n \mathcal{K}\psi(s)). \quad (30.4)$$

با اعمال نرم به طرفین معادله (۳۰.۴) نسبت به فضای B_N ، خواهیم داشت:

$$\|\psi - \psi_n^*\|_{B_N} \leq \|(D - Q_N^n \mathcal{K})^{-1}\| \left(\|g - Q_N^n g\|_{L_N^Y} + \|\mathcal{K}\psi(s) - Q_N^n \mathcal{K}\psi(s)\|_{L_N^Y} \right). \quad (31.4)$$

همچنین، توجه کنیم که اگر $\psi(s) \in B_N$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$\|\psi - \psi_n^*\|_{L_N^Y} \leq \|\psi - \psi_n^*\|_{B_N}. \quad (32.4)$$

با استفاده از رابطه‌ی تعریف شده در (۳۲.۴)، معادله (۳۱.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\|\psi - \psi_n^*\|_{L_N^Y} \leq \|(D - Q_N^n \mathcal{K})^{-1}\| \left(\|g - Q_N^n g\|_{L_N^Y} + \|\mathcal{K}\psi(s) - Q_N^n \mathcal{K}\psi(s)\|_{L_N^Y} \right) \quad (33.4)$$

با توجه به شرط داده شده در (۲۲.۴)، عملگر \mathcal{K} یک عملگر هیلبرت اشمیت است. بنابراین، در صورتی که $n \rightarrow \infty$ ، آن گاه $\|\mathcal{K} - Q_N^n\|_{L_N^Y} \rightarrow 0$. همچنین، اگر $n \rightarrow \infty$ ، آن گاه $\|g - Q_N^n g\|_{L_N^Y} \rightarrow 0$. بنابراین، از معادله (۳۳.۴)، برای $n \rightarrow \infty$ ، $\|\varphi - \varphi_n^*\|_{L_N^Y} \rightarrow 0$ حاصل می شود. حال با استفاده از معادله (۱.۳) تعریف می کنیم:

$$\varphi(s) = \sqrt{1 - s^2} \psi(s), \quad (۳۴.۴)$$

که در آن $\psi(s)$ همان معادله تعریف شده در (۳.۳) است و $\varphi(s)$ به صورت زیر است:

$$\varphi(s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_N(s))^T. \quad (۳۵.۴)$$

به طور مشابه، تعریف می کنیم:

$$\varphi_n^*(s) = \sqrt{1 - s^2} \psi_n^*(s), \quad (۳۶.۴)$$

که در آن تابع ψ_n^* در معادله (۷.۳) تعریف شده است و $\varphi(s)$ به صورت زیر است:

$$\varphi(s) \approx \varphi_n^*(s) = (\varphi_{1n}^*(s), \varphi_{2n}^*(s), \dots, \varphi_{Nn}^*(s))^T. \quad (۳۷.۴)$$

حال با استفاده از معادلات (۳۶.۴) و (۳۴.۴) خواهیم داشت:

$$\|\varphi - \varphi_n^*\|_{L_N^Y} \leq \|\sqrt{1 - s^2}\|_{L_N^Y} \|\psi - \psi_n^*\|_{L_N^Y}. \quad (۳۸.۴)$$

همچنین، معادله (۳۸.۴) و این واقعیت که $n \rightarrow \infty$ ، $\|\psi - \psi_n^*\|_{L_N^Y} \rightarrow 0$ ثابت می کند که اگر $n \rightarrow \infty$ ، در این صورت $\|\varphi - \varphi_n^*\|_{L_N^Y} \rightarrow 0$. بنابراین، همگرایی دنباله جواب های تقریبی $\{\varphi_n^*(s)\}_{n=0}^{\infty}$ دستگاه (۱.۱) نشان داده شده است. علاوه بر این، با استفاده از معادلات (۳۸.۴) و (۳۶.۴)، نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$\|\varphi - \varphi_n^*\|_{L_N^Y} \leq \|\sqrt{1 - s^2}\|_{L_N^Y} \|(\mathcal{D} - Q_N^n \mathcal{K})^{-1}\| \left(\|g - Q_N^n g\|_{L_N^Y} + \|\mathcal{K} \psi(s) - Q_N^n \mathcal{K} \psi(s)\|_{L_N^Y} \right). \quad (۳۹.۴)$$

۵ کاربرد

در این بخش کاربرد روش ارائه شده را برای حل معادلات انتگرال فوق منفرد در منحنی های دوبعدی در صفحه مختلط را، نشان خواهیم داد. این دسته از معادلات انتگرال فوق منفرد در مسائل شکاف در زمینه مکانیک شکست رخ می دهد. حال معادله انتگرال فوق منفرد زیر را در نظر می گیریم:

$$\oint_{\Gamma} \frac{v(y)}{(y-x)^2} dy = h(x), \quad x \in \Gamma, \quad (۱.۵)$$

که انتگرال همان مفهوم انتگرال اجزای متناهی هادامارد روی منحنی $\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$ در نظر گرفته می شود. هر Γ_j نشان دهنده ی قوس ساده ی هموار در یک صفحه ی مختلط بدون هیچ نقطه ی مشترک و هر کدام دارای اندازه ی متناهی است. در معادله (۱.۵) توابع $h(x)$ و $v(y)$ به ترتیب دارای مقادیر مختلط معلوم و توابع مجهول روی منحنی Γ تعریف شده اند. علاوه بر این، اگر $x \in \Gamma_j$ ، $j = 1, \dots, N$ ، آن گاه از علائم $v_j(x)$ و $h(x)$ استفاده می کنیم.

حال معادله (۱.۵) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma_i} \frac{v_i(y)}{(y-x)^2} dy = h_j(x), \quad x \in \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (۲.۵)$$

برای هر قوس Γ_j ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_j : y = \Delta_j(t), |t| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5)$$

در این صورت معادله‌ی (۲.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 \frac{\Delta'_i(t) v_i(\Delta_i(t))}{(\Delta_i(t) - \Delta_i(s))^2} dt = h_j(\Delta_j(s)), \quad |s| < 1. \quad (4.5)$$

با بازنویسی معادله‌ی اخیر به صورت ساده‌تر خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(t)}{(t-s)^2} dt + \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 k_{ji}(s, t) \varphi_i(t) dt = g_i(s), \quad |s| < 1, \quad (5.5)$$

که برای $i, j = 1, \dots, N$ داریم:

$$k_{ji}(s, t) = \begin{cases} \frac{(\hat{A}_j(s, t) - \hat{A}_j(s, s))}{\hat{A}_j(s, s)(t-s)^2}, & j = i, \\ \frac{\Delta'_i(t)}{\hat{A}_j(s, s)(\Delta_i(t) - \Delta_j(s))^2}, & j \neq i, \end{cases}$$

$$\hat{A}_j(s, t) = \frac{(t-s)^2 \Delta'_j(t)}{(\Delta_j(t) - \Delta_j(s))^2}, \quad \Delta_j(t) \neq \Delta_j(s),$$

$$\hat{A}_j(s, s) \neq 0,$$

$$\varphi_j(t) = v_j(\Delta_j(t)),$$

$$g_i(s) = \frac{h_j(\Delta_j(s))}{\hat{A}_j(s, s)}.$$

۶ نتایج عددی

در این بخش، با ارائه مثالی اعتبار نتایج نظری به دست آمده را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱.۶. دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{(\frac{1}{4} + t)\varphi_1(t)}{16} dt + \int_{-1}^1 \frac{(\frac{1}{4} + x)\varphi_2(t)}{9} dt = g_1(x), \quad |x| < 1, \quad (1.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{(\frac{1}{4} - t^2)\varphi_2(t)}{9} dt + \int_{-1}^1 \frac{(\frac{1}{4} + xt)\varphi_1(t)}{16} dt = g_2(x), \quad |x| < 1,$$

که در آن $g_1(x)$ و $g_2(x)$ به صورت زیراند

$$g_1(x) = \pi \left(-2x^8 - 4x^7 + \frac{7x^6}{9} - \frac{9x^5}{2} - \frac{175x^4}{36} + \frac{9x^3}{4} + \frac{19x^2}{24} - \frac{6049x}{9216} - \frac{52169}{73728} \right. \\ \left. + i \left(-2x^8 - 8x^7 - \frac{49x^6}{18} + 3x^5 - \frac{5x^4}{6} - \frac{x^3}{2} - \frac{101x^2}{48} - \frac{2387x}{1536} + \frac{18749}{73728} \right) \right),$$

$$g_2(x) = \pi \left(\frac{-27x^8}{4} - 6x^5 + \frac{7x^6}{8} - \frac{125x^4}{32} + 2x^3 + \frac{79x^2}{64} - \frac{6085x}{8192} - \frac{4003}{55296} \right. \\ \left. + i \left(-2x^7 - \frac{9x^8}{2} + \frac{7x^6}{4} - \frac{69x^5}{4} + \frac{5x^4}{16} + \frac{213x^3}{40} - \frac{93x^2}{32} + \frac{10071x}{20480} - \frac{13677}{28672} \right) \right),$$

جواب دقیق مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^3 + x^5 + \frac{x^6}{2} + \frac{2x^8}{9} + i \left(\frac{8}{21} + x + x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{4x^4}{9} + \frac{x^6}{2} + x^7 + \frac{2x^8}{9} \right) \right), \quad (2.6)$$

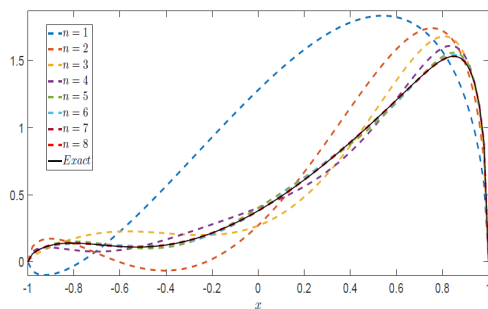
$$\varphi_2(x) = \sqrt{1-x^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^3 + x^5 + \frac{x^6}{4} + \frac{2x^8}{4} + i \left(1 + \frac{x}{4} + x^2 + \frac{x^3}{5} + 3x^5 + \frac{x^6}{4} + \frac{x^8}{2} \right) \right), \quad (3.6)$$

با استفاده از روش مطرح شده و با مقایسه مختلف n خطاهای زیر به دست آمده است:

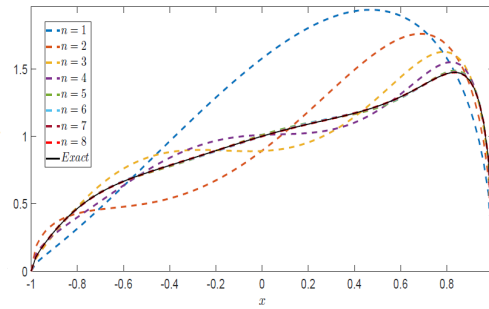
جدول ۱: نتایج عددی مثال ۱.۴

درجه چند جمله ای لژاندر	خطا
$n = 0$	۱,۵۰۳۷۲
$n = 1$	۱,۲۱۵۹۰
$n = 2$	$۶,۷۹ \times 10^{-1}$
$n = 3$	$۲,۶۷ \times 10^{-1}$
$n = 4$	$۱,۴۹ \times 10^{-1}$
$n = 5$	$۳,۶۸ \times 10^{-2}$
$n = 6$	$۱,۰۲ \times 10^{-2}$
$n = 7$	$۳,۹۳ \times 10^{-3}$

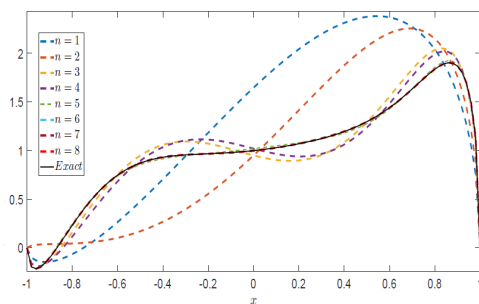
در نمودارهای زیر جواب های تقریبی و دقیق را مقایسه کرده ایم و به علاوه، برای هر $\varphi_j(s)$ مقادیر n که از ۱ تا ۷ افزایش می یابد، قسمت حقیقی و موهومی جواب های تقریبی به قسمت حقیقی و موهومی جواب های دقیق، نزدیک تر می شوند.



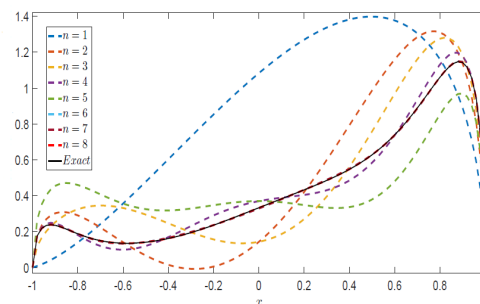
(ا)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱: (ب) مقایسه $Re[\varphi_1(x)]$ با $Re[\varphi_{1n}^*(x)]$ ، (ج) مقایسه $Im[\varphi_1(x)]$ با $Im[\varphi_{1n}^*(x)]$ ، (د) مقایسه $Re[\varphi_2(x)]$ با $Re[\varphi_{2n}^*(x)]$ ، (ه) مقایسه $Im[\varphi_2(x)]$ با $Im[\varphi_{2n}^*(x)]$

نتیجه گیری ۷

در این مقاله یک روش عددی مبتنی بر چندجمله‌ای لژاندر برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد نوع اول معرفی شده است. روش پیشنهادی دستگاه معادلات انتگرال فوق منفرد را به یک دستگاه معادلات جبری خطی کاهش می‌دهد که در شرایط خوش وضعی هادامارد صدق می‌کند. کران خطا را به دست آوردیم و همگرایی دنباله جواب های تقریبی $\{\varphi_n^*(s)\}_{n=0}^{\infty}$ ثابت شد. در پایان، کاربرد روش پیشنهادی با یافتن جواب تقریبی معادله انتگرال فوق منفرد بر روی یک منحنی دوبعدی در صفحه مختلط نشان داده شده است.

فهرست منابع

- [1] C.M. Linton., N.G. Kuznetsov., *Non-uniqueness in two-dimensional water wave problems: numerical evidence and geometrical restrictions*, Proc. R. Soc.Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 453 , 2437–2460, (1997).
- [2] C.S. Kubrusly., *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*, Birkhuser/Springer, New York, (2012).
- [3] D.F. Paget., *The numerical evaluation of Hadamard finite-part integrals*, Numer. Math. 36 , 447–453, (1981).
- [4] E.G. Ladopoulos., *Singular Integral Equations*, Linear and Non-Linear Theory and Its Applications in Science and Engineering, Springer-Verlag, Berlin, New York, (2000).
- [5] G. Monegato., R. Orta., R. Tascone., *A fast method for the solution of a hypersingular integral equation arising in a waveguide scattering problem*, Internat.J. Numer. Methods Engrg. 67 , 272–297, (2006).
- [6] G. Iovane., I.K. Lifanov., M.A. Sumbatyan., *On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics*, Acta Mech. 162 , 99–110, (2003).
- [7] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy'S Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, (1923).
- [8] L.A. Lacerda., L.C. Wrobel., *Hypersingular boundary integral equation for axisymmetric elasticity*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 52 , 1337– 1354, (2001).
- [9] L. Farina., P.A. Martin., V. Peron., *Hypersingular integral equations over a disc: convergence of a spectral method and connection with Tranter's method*, Journal of Computational and Applied Mathematics., 269 , 118–131, (2014).
- [10] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, (1953).
- [11] N.M.A. Nik Long., Z.K. Eshkuvatov., *Hypersingular integral equation for multiple curved cracks problem in plane elasticity*, Int. J. Solids Struct. 46 , 2611–2617, (2009).
- [12] P. Solín, *Differential Equations and the Finite Element Method*, John Wiley and Sons Inc. Hoboken, New Jersey, (2006).
- [13] W.T. Ang., *Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis*, Woodhead Publishing, Cambridge, (2013).
- [14] W.T. Ang., *Hypersingular integral equations for a thermoelastic problem of multiple planar cracks in an anisotropic medium*, Eng. Anal. Bound. Elem.23 , 713–720, (1999).

- [15] Y.S. Chan., A.C. Fannjiang., G.H. Paulino., *Integral equations with hypersingular kernels theory and applications to fracture mechanics*, Internat. J. Engrg. Sci. 41 , 683–720, (2003).
- [16] Y.Z. Chen., *A numerical solution technique of hypersingular integral equation for curved cracks*, Commun. Numer. Methods. Eng. 19 , 645–655, (2003).
- [17] Y.Z. Chen., *Numerical solution of a curved crack problem by using hypersingular integral equation approach*, Eng. Fract. Mech. 46 , 275–283, (1993).
- [18] Z. Chen., Y. Zhou., *A new method for solving hypersingular integral equations of the first kind*, Appl. Math. Lett. 24 , 636–641, (2011).



Investigation of a new method for the numerical solution of a system of hypersingular integral equations

Elham Rezazadeh [§]

Department of Mathematics, Faculty of Applied Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 2022/5/22

Accepted: 2022/11/8

Abstract: The system of hypersingular integral equations occurs naturally in several branches of science and engineering during the formulation of many boundary value problems. The analytical solution for the system of dominant equations is known. However, many real-world problems, such as cracking problems in fracture mechanics, may not be formulated as a set of dominant equations. Therefore, we propose a numerical method to find an approximate solution for such a generalized form. The convergence of the proposed method is proved. This convergence helps to derive the error bound for the error between the exact and the approximate solution. Finally, by providing a numerical example, the efficiency of this method will be presented.

Keywords: Hypersingular integral equations, Legendre polynomials, Galerkin method, Hadamard finite-part integral.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[§]Corresponding author.

E-mail addresses: erezazade99@gmail.com (E. Rezazadeh).