



## بررسی منازعات بین ایران و کشورهای همسایه با استفاده از بازی‌های دیفرانسیلی

احسان لطفعلی قصاب\*، حجت‌الله عبادی زاده، جواد شرفی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران

دبیر مسئول: سهراب عفتی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۹/۱۴

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۶/۲۲

چکیده: در این مقاله قصد داریم تا با استفاده از بازی‌های دیفرانسیلی به مدل‌سازی روابط ایران با کشورهای همسایه بپردازیم. باتوجه به بحث پیوستگی زمان در دنیای واقعی، مدل بازی دیفرانسیلی، به‌کار گرفته شده است تا به‌وسیله آن بتوان مسائل در حال وقوع را به‌صورت پیوسته و در طول یک بازه زمانی مدل‌سازی کرده و نتایج واقعی‌تر را ارائه داد. در این مقاله ابتدا به معرفی مقدماتی از بازی دیفرانسیلی می‌پردازیم، سپس مدل بازی و معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن شرح داده شده است. از آن‌جا که مدل ساخته شده به‌صورت کلی است، در دو روش به بررسی مقادیر تعادلی پرداخته‌ایم. در روش اول به‌جای تابع مطلوبیت از تابع معروف کاب داگلاس استفاده شده و در روش دوم با ایجاد تغییراتی بر روی تابع برمن از این تابع استفاده کرده‌ایم. در روش اول، به‌صورت کلی میزان هزینه‌های نظامی و میزان تجهیزات نظامی تعادلی در وضعیت راهبرد مارکفی به‌دست می‌آید. اما در روش دوم با افزایش هزینه‌های نظامی و مجموعه تجهیزات نظامی به زیرمجموعه‌هایی که اجتماع آن‌ها مجموعه هزینه‌های نظامی و مجموعه تجهیزات نظامی را تشکیل می‌دهند به‌صورت جزئی‌تر مقادیر هزینه‌های نظامی و میزان تجهیزات تعادلی برای هر زیرمجموعه به‌دست آورده‌ایم. واژه‌های کلیدی: نظریه بازی، بازی دیفرانسیلی، راهبرد حلقه باز، راهبرد مارکفی.

رده‌بندی ریاضی: 91A80; 68T05; 68Q32

### ۱ مقدمه

مدل‌های نظریه بازی‌ها در دهه ۱۹۵۰ در تئوری اقتصادی و علوم سیاسی مورد استفاده قرار گرفت. در دهه ۷۰ نظریه بازی ابتدا به‌عنوان ابزاری در زیست‌شناسی تکاملی مورد استفاده قرار گرفت. در نتیجه چارچوب نظریه بازی در تئوری اقتصاد خرد نفوذ پیدا کرد و در بسیاری از شاخه‌های دیگر از اقتصاد و دامنه عظیمی از علوم رفتاری و اجتماعی مورد استفاده قرار گرفت. جایزه نوبل سال ۱۹۹۴ در اقتصاد به سه

\*نویسنده مسئول مقاله

تئورسین نظریه بازی یعنی جان هارسنی<sup>†</sup>، جان نش<sup>‡</sup> و ریهار سلتن<sup>§</sup> اهدا شد. جان نش از جمله نظریه‌پردازان در نظریه بازی‌ها بود که به استخدام پنتاگون درمی‌آید تا در اوایل دهه پنجاه و در اوج جنگ سرد به مبارزه با جاسوسان روس بپردازد. کاهن<sup>¶</sup> در مقاله‌ای که در ارتباط با دریافت جایزه نوبل اقتصاد در سال ۱۹۹۴ است، بیان می‌کند که این یک حقیقت تاریخی است که حمایت مالی اصلی برای تحقیق در نظریه بازی توسط آژانس نظامی آمریکا صورت گرفته است. او همچنین بیان می‌کند که «کاربرد اصلی نظریه بازی درباره مسائل تاکتیکی نظامی مانند دفاع موشکی و غیره بود». فن نیومن<sup>¶</sup> یکی از اعضای اصلی پروژه مانهاتن بود که این پروژه به تحقیق و توسعه در ارتباط با تولید اولین سلاح‌های اتمی بعد از جنگ جهانی دوم می‌پرداخت که با همکاری آمریکا، انگلستان و کانادا بین سال‌های ۱۹۴۲ تا ۱۹۴۶ در جریان بود [۵]. عملیات‌های نظامی در محیط عدم قطعیت انجام می‌شوند که این عدم قطعیت ناشی از اقدامات غیرقابل پیش‌بینی دشمن است. البته نوع دیگری از عدم قطعیت نیز وجود دارد؛ برای مثال در پرتاب یک موشک و برخورد آن به هدف، عدم قطعیت ناشی از طبیعت وجود دارد. بسیاری از موقعیت‌هایی که در زندگی روزمره با آن‌ها روبرو می‌شویم نیز می‌تواند شامل هر یک از این عدم قطعیت‌ها باشد. تحلیل‌گر ممکن است دو خط دید متفاوت را در برخورد با این موقعیت‌ها دنبال کند. یک خط دید، تجربی و آزمایشی است و منجر به بازی جنگ می‌شود. خط دید دیگر نظری است و منجر به نظریه بازی می‌شود. نظریه بازی از روش‌های ریاضی برای تحلیل تصمیم‌گیری‌ها در شرایط تضاد استفاده می‌کند. هدف نظریه بازی تعیین رفتار بازی‌کن (تصمیم‌گیرنده) است به طوری که منافع بازی‌کن در مقابل راهبرد حریف بهینه شود. هر دو خط دید معایب و مزایایی دارند. به نظر مولفان ترکیبی از دو روش می‌تواند بسیار مفید باشد. در حقیقت می‌توان از نظریه بازی به عنوان پشتیبان تصمیم فرماندهی در بازی جنگ استفاده کرد. در این صورت انتخاب راه‌کارها به ترکیبی از تجربه و قضاوت خبرگان و مدل‌های ریاضی منجر می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد نظریه بازی‌ها می‌توان به منابع [۱، ۶-۹] مراجعه کرد. در این مقاله قصد داریم با مدل‌سازی یک بازی دیفرانسیلی بین ایران و کشورهای همسایه که ایران با آن‌ها اشتراک مرزی آبی و خاکی دارد سطح هزینه‌های نظامی و تجهیزات نظامی تعادلی را در جهت کاهش احتمال رخداد جنگ و تنش و ایجاد شرایطی که به افزایش سطح صلح و آرامش در منطقه منجر می‌شود، تعیین کنیم.

## ۱.۱ وضعیت ایران و همسایگان

جمهوری اسلامی ایران با ۱۵ کشور دارای مرزهای خاکی و آبی است؛ کشورهایی که می‌توان همگی آن‌ها را در زمره همسایگان ایران به شمار آورد. هفت کشور پاکستان، افغانستان، ترکیه، عراق، ارمنستان، آذربایجان و ترکمنستان با جمهوری اسلامی ایران مرز خاکی دارند. همچنین کویت، قطر، امارات متحده عربی، بحرین، عمان، عربستان، روسیه و قزاقستان هشت کشوری هستند که از طریق خلیج فارس، دریای عمان و دریای خزر با کشورمان همسایه به شمار می‌روند. براساس آخرین آمارهای که از هر یک از کشورهای فوق ثبت شده، ایران در مجموع با جمعیتی نزدیک به ۴۰۰ میلیون نفر دارای مرز خاکی است. جمعیت کشورهای دارای مرز آبی با ایران نیز بیش‌تر از ۲۱۰ میلیون نفر برآورد می‌شود. البته با توجه به وجود برخی مسایل سیاسی و نوع دیدگاهی که برخی کشورهای عربی منطقه به ایران دارد، می‌توان ادعا کرد که کشورمان در کل با بیش از ۵۰۰ میلیون نفر همسایه است. در این میان نمی‌توان به مناسبات و مراودات ایران با کشورهای هم‌جوار اشاره کرد اما به کارزار فشار حداکثری آمریکا و شدت تحریم‌ها در سال اخیر بی‌اعتنا بود. ایران یکی از طولانی‌ترین مرزها را در آسیای غربی دارد و در نتیجه به این بهانه، در این مطلب به معرفی کشورهای همسایه ایران می‌پردازیم. خط مرزی ایران ۳ هزار و ۶۶۲ مایل است. از میان این کشورها ترکمنستان طولانی‌ترین مرز مشترک با ایران را دارد. طول خط مرزی میان ایران و ترکمنستان حدود ۷۱۳ مایل است. کوتاه‌ترین مرز مشترک با ایران هم به کشور ارمنستان تعلق دارد که حدود ۲۷ مایل است. کشورهایی که خط مرزی خاکی مشترک با ایران دارند از قبیل زیرند:

عراق، ترکیه، ارمنستان، آذربایجان، ترکمنستان، افغانستان، پاکستان.  
کشورهایی که خط مرزی آبی مشترک با ایران دارند از قبیل زیرند:  
کویت، عربستان، عمان، بحرین، قطر، امارات، روسیه، قزاقستان.

تعداد زیادی از کشورهای همسایه ایران کشورهای توسعه‌نیافته و در حال توسعه‌اند که معمولاً در این کشورها تنش‌ها زیاد است بنابراین حضور ایران در چنین منطقه‌ای ایجاد می‌کند تا برنامه‌ای جامع جهت جلوگیری از ایجاد تنش بین همسایگان داشته باشیم [۳]. اکنون به معرفی مختصری از کشورهایی که دارای مرز خاکی با ایران‌اند، می‌پردازیم.

### افغانستان

افغانستان یکی از کشورهای همسایه ایران است که در شرق کشور قرار دارد. مرز مشترک بین ایران و افغانستان حدود ۵۷۲ مایل است. سه نقطه کشورهای همسایه ایران، افغانستان و پاکستان را به هم متصل می‌سازد. قدمت ایران و کشور همسایه‌ی آن به قرن‌ها قبل باز می‌گردد. روزگاری افغانستان بخشی از امپراطوری ایران زمین بود [۲].

### ترکیه

<sup>†</sup>John Harsney

<sup>‡</sup>John Nash

<sup>§</sup>Rihard Selton

<sup>¶</sup>Kohen

<sup>¶</sup>Fan Newman

ترکیه، محبوب‌ترین کشور از همسایه‌های ایران است. ترکیه از کشورهای همسایه ایران و کشور هم‌مرز با ایران است. ترکیه در شرق ایران قرار دارد و مرز زمینی ایران و ترکیه ۳۳۲ مایل امتداد یافته است. مرز بین المللی ایران و ترکیه یکی از قدیمی‌ترین خط‌های مرزی دنیا محسوب می‌گردد. در سال ۱۶۳۹ میلادی مرز میان ایران و ترکیه تعیین شد. در آن زمان پس از جنگ چالدران عهدنامه‌ی بین المللی ذهاب یا عهدنامه قصر شیرین توسط امپراطوری صفوی و عثمانی امضا گردید. می‌توان گفت که این عهدنامه تقریباً به جنگ‌های ۱۵۰ ساله ایران و ترکیه پایان بخشید؛ اگرچه پس از آن هم باز درگیری‌هایی برای مرزهای زمینی رخ داد.

#### آذربایجان

آذربایجان، پرترددترین کشور از همسایه‌های ایران است. کشور مرزی آذربایجان در شمال غرب ایران قرار دارد. خط مرزی آذربایجان و ایران حدود ۲۶۸ مایل امتداد دارد. رفت‌وآمد مرزی بین ایران و آذربایجان زیاد است چون تعداد افراد آذری زبان ایران بیشتر از آذربایجان‌اند. مرز همسایه آذربایجان به شدت تحت محافظت است. کشورهای ایران و آذربایجان دارای تاریخچه‌ی روابط سیاسی پر تنش‌اند. مرزهای مشترک پرتردد میان ایران و آذربایجان از قبیل جلفا-جلفا<sup>xx</sup>، بیله سوار و آستارايند.

#### پاکستان

پاکستان، همسایه شرقی ایران، یکی دیگر از کشورهای همسایه ایران که با ما مرز مشترک زمینی دارد. مرز زمینی ایران و پاکستان نسبتاً طولانی است و حدود ۵۹۶ مایل امتداد دارد. آغاز مرز سه نقطه پاکستان، ایران و افغانستان را به هم متصل می‌سازد. این خط مرزی تا جنوب ایران امتداد دارد و در نهایت به آب‌های دریای عمان می‌رسد. استان بلوچستان در پاکستان تنها استان هم‌مرز با ایران است. استان هم‌مرز ایران با پاکستان هم، سیستان و بلوچستان می‌باشد. ایران آغاز به ساخت دیواری برای جدا کردن مرزهای بین المللی ایران و پاکستان نموده است. انتظار می‌رود تا زمان اتمام ساخت این دیوار بتنی با ضخامت ۳ اینچ، ۴۳۴ مایل طول و ۱۰ فوت ارتفاع داشته باشد. ایران برای جلوگیری از قاچاق مواد مخدر و حملات تروریستی اقدام به ساخت این دیوار نموده است. انتظار می‌رود این دیوار مرزی از مند تا تفتان امتداد پیدا کند. با این وجود، ساخت مانع مرزی مورد انتقاد مردم بلوچ که سرزمین اجدادی آن‌ها در بین این مرز است، قرار گرفت. بلوچ‌ها بر این باورند که کشیدن دیوار موجب جدایی خانواده‌ها و جامعه‌ی اجتماعی آن‌ها از یکدیگر می‌شود. مرز اصلی ایران پاکستان که از مرز بین‌المللی عبور می‌کند، تفتان میرجاوه است [۴].

#### عراق

عراق کشور همسایه ایران، در غرب کشور قرار دارد و تمام مرزهای شرقی آن با ایران مشترک است. مرز عراق از کوه دالامپر و سه نقطه‌ی ترکیه، ایران و عراق آغاز می‌شود. این خط مرزی مشترک ۹۹۴ مایل امتداد پیدا می‌کند تا نهایتاً به خلیج فارس در شط‌العرب برسد. این خط مرزی بین المللی در اواسط قرن ۱۷ ایجاد شد و در میان اولین مرزهای جهان قرار می‌گیرد. بر اساس عهدنامه‌ی ذهاب، که میان امپراطوری عثمانی و ایران برای مشخص کردن خط مرزی بسته شد، سرحد مرزی میان رودخانه‌ی دجله و کوه‌های زاگرس است. با این وجود، دو امپراطوری پس از چند دهه اختلاف که منجر به جنگ می‌شد، ارزشم را به‌عنوان مرز تعیین کردند. پس از گذشت مدت‌ها در اوایل قرن بیستم در مورد مرز تجدید نظر شد و مرز جدیدی را با توافق دو کشور انتخاب کردند. ضرباتیه، مندلی سومار، الشعیب، چذابه، مهران، شلمچه، خسروی مرزهای میان ایران و عراق‌اند.

در این مقاله قصد داریم یک بازی دیفرانسیلی بین ایران و هر کدام از کشورهای همسایه طراحی کنیم. در این راه ابتدا به مدل‌سازی بازی می‌پردازیم، سپس با استفاده از معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن و با استفاده از تابع کاب داگلاس میزان هزینه‌های تعادلی و تجهیزات تعادلی را مشخص می‌کنیم. همچنین در روش دوم به‌جای استفاده از تابع کاب داگلاس با ایجاد تغییراتی بر روی تابع برمن میزان تجهیزات و هزینه‌های تعادلی را برای هر یک از زیرمجموعه‌های هزینه‌ها و تجهیزات تعادلی به‌دست می‌آوریم. در روش دوم ایران می‌تواند با تفکیک هزینه و تجهیزات تعادلی به اطلاعات دقیق‌تری دست یابد. به‌عنوان مثال در روش دوم ایران می‌تواند میزان هزینه تعادلی تولید و یا خرید جنگنده و تعداد تعادلی جنگنده‌های لازم با کشور همسایه را داشته باشد. در ادامه به معرفی بازی‌های دیفرانسیلی می‌پردازیم.

## ۲ مبانی نظری و پیشینه‌های پژوهش

### ۱.۲ ساختار نظریه بازی دیفرانسیلی در وضعیت قطعیت

در این قسمت، سعی می‌کنیم به طور جزئی‌تر با ویژگی عناصر سازنده هر بازی آشنا شده و سپس با ارائه تعریف تعادل نش، ساختار بازی دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار دهیم. به‌طور کلی هر بازی از سه بخش زیر تشکیل شده است:

$$1- \text{بازی‌کنان عقلایی: } N = \{1, 2, \dots, n\}$$

۲- مجموعه استراتژی‌های امکان‌پذیر بازی‌کن  $i \in N$  با  $U^i$  نمایش داده می‌شود به‌طوری که برای هر استراتژی بازی‌کن  $i$  داشته باشیم  $u_i \in U^i$

۳- به‌ازای هر بازی‌کن  $i \in N$  تابع با ارزش حقیقی  $J^i(u_1, u_2, \dots, u_N)$  وجود دارد به‌طوری که نمایان‌گر سود بازی‌کن  $i \in N$  است، هرگاه بازی‌کن استراتژی  $(U^1, U^2, \dots, U^N) \in (u_1, u_2, \dots, u_N)$  بازی کند.

تعریف ۱.۲. [۵] نمایه استراتژی  $(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*)$  یک تعادل نش است اگر برای هر  $i \in N$  شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall u_i \in U^i \quad J^i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_N^*) \geq J^i(u_1^*, u_2^*, \dots, u_{(i-1)}^*, u_i, u_{(i+1)}^*, \dots, u_N^*)$$

این تعریف، به طور ساده تر بیان می‌دارد که تعادل نش، در جایی اتفاق می‌افتد، که هیچ کدام از بازی‌کنان انگیزه‌ای برای انحراف نداشته باشند. یعنی در زمان رخ دادن تعادل نش، سودی که هر کدام از بازی‌کنان می‌گیرند، از زمانی که استراتژی دیگری را انتخاب کنند، بیش تر است. با توجه به داشتن ساختار یک بازی استراتژیک و تعریف تعادل نش، ابتدا ساختار اصلی بازی دیفرانسیلی را نوشته و سپس توضیحاتی را در مورد متغیرهای استفاده شده می‌آوریم. برای هر بازی کن داریم:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } J^i(u_i) \\ & = \int_t^T e^{-r(s-t)} F(x(s), u_1(s), u_2(s), \dots, u_N(s), s) ds \\ & + e^{-r(T-t)} S(x(T)), \\ & s.t \quad x'(s) = f(x(s), u_1(s), u_2(s), \dots, u_N(s), s), \\ & \quad x(t) = x, \\ & \quad u(s) \in U(x(s), s). \end{aligned}$$

۱- بردار وضعیت  $x(s)$ : متغیر  $x(s)$  نشان‌دهنده میزان منبع، سرمایه، ثروت و یا هر متغیر ایستای دیگر است. اگر مسئله را ساده در نظر بگیریم، بردار وضعیت دارای یک یا دو بعد خواهد بود.  
۲-  $x'(s)$  نمایانگر میزان تغییرات متغیر وضعیت است. برای بردار وضعیت داریم:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \in X \subset R^n.$$

۳- بردار کنترلی  $u(s)$ : اگر مسئله را به صورت کلی در نظر بگیریم، عامل کنترلی هر بازی کن از  $m$  بعد تشکیل شده است، یعنی برداری می‌باشد. اما مانند متغیر وضعیت، مسئله را در حالت ساده در نظر گرفته و متغیر کنترلی می‌نامیم. متغیر کنترلی می‌تواند میزان استخراج از یک منبع، میزان سرمایه‌گذاری، میزان مصرف و یا هر متغیر در جریان دیگری باشد. بردار کنترلی شدنی، عضو مجموعه  $U(x(t), t)$  است؛ یعنی داریم:

$$u(t) \in U(x(t), t) \subset R^m.$$

۴- نشان دهنده نرخ تنزیل است.

۵- اگر مجموعه

$$\omega = \{(x, u, t) | x \in X, u \in U(x, t), t \in [0, T]\}$$

را در نظر بگیریم، در این صورت

$$f: \omega \rightarrow R^n,$$

$n$  بعدی به صورت

$$(f_1(x, u, t), f_2(x, u, t), \dots, f_N(x, u, t)).$$

۶-  $S(x(T))$  یک تابع است که در مسئله‌ها با زمان متناهی اتفاق می‌افتد و معمولاً تابع ته‌مانده نامیده می‌شود. این تابع نشان‌دهنده میزان ارزش باقی‌مانده از متغیر وضعیت در زمان انتهایی است. در مسائل نامتناهی، با توجه به نرخ تنزیل ضرب شده در تابع ته‌مانده، دارای ارزش صفر است و از مسئله حذف می‌شود.

مسئله بازی دیفرانسیلی مانند هر مسئله کنترل بهینه، از روش‌های حل اصل حداکثرسازی پونتریاگین و یا با استفاده از رابطه همیلتون-ژاکوبی-بلمن، حل می‌شود. اما برخلاف مسئله کنترل بهینه و به این دلیل که در حل مسئله حداکثرسازی، عمل بازی‌کنان دیگر روی هر بازی‌کن اهمیت دارد، دو جواب متفاوت به ما می‌دهد. بعد از حل به روش پونتریاگین، استراتژی تعادلی بازیکنان، استراتژی حلقه باز و بعد از حل معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن، استراتژی مارکف نتیجه می‌شود. در ادامه تفاوت‌های این دو استراتژی را توضیح می‌دهیم. اولین تفاوت به ساختار مطالعاتی هر یک از استراتژی‌ها برمی‌گردد. استراتژی حلقه باز هر بازی‌کن، یک مسیر زمانی برنامه‌ریزی شده از اقدامات او است و بازی‌کنان برای انتخاب استراتژی تنها نیاز به دانستن زمان در آن بازی دارند. در حالی که در یک استراتژی مارکفی، علاوه بر زمان، وضعیت سیستم در آن زمان نیز باید مشخص و معلوم باشد. پس استراتژی مارکفی از نظر مطالعات نیاز به معلومات بالاتری برای بازی‌کنان دارد و در موقعیت‌هایی که وضعیت بازی قابل مشاهده نیست، با مشکل مواجه می‌شود و قابل به کارگیری نیست. اما استراتژی حلقه باز که نیازی به

دانستن وضعیت بازی ندارد در این موقعیتها مفیدتر است. تفاوت دوم به مسئله تعهد در میان این دو استراتژی برمی گردد. استراتژی حلقه باز هیچ گونه انعطافی به بازی کنان جهت عکس العمل نشان دادن به وضعیت بازی در مراحل مختلف نمی دهد. در واقع در یک استراتژی حلقه باز بازی کنان باید در ابتدای بازی استراتژی خود را تا انتهای بازی ارائه دهند و در ادامه بازی توانایی تغییر آن را ندارند و باید به آن متعهد بمانند. اما در یک استراتژی مارکفی التزام و تعهد ضعیف تر است و بازی کنان می توانند در هر مرحله از بازی با توجه به وضعیت های مختلف، استراتژی های متفاوتی برای خود انتخاب کنند و از آن جایی که ممکن است مقدار واقعی متغیر وضعیت متفاوت از مقدار پیش بینی شده آن باشد، در استراتژی مارکفی بازی کنان این امکان را دارند که به این تفاوتها عکس العمل نشان دهند. در واقع در استراتژی مارکفی بازی کنان در هر مرحله پس از انتخاب استراتژی خود، می توانند وضعیت بازی را دیده و از آن بازخورد بگیرند و ادامه مسیر بازی را به نفع خود تغییر دهند.

$$V : X \times [0, T] \rightarrow R$$

تابع پیوسته مشتق پذیر در نظر بگیرید این تابع مقدار حداکثر شده تابع هدف را نمایش داده و تابع ارزش نام گذاری می شود. با استفاده از این تابع معادله همیلتون-ژاکوبی - بلمن، را نتیجه می گیریم:

$$rV(x, t) - V_t(x, t) = \max\{F(x, u, t) + V_x(x, t)f(x, u, t) | u \in U(x, t)\}.$$

$x, u$  در این معادله به ترتیب بیانگر متغیر وضعیت و متغیر کنترلی می باشد. بنابراین با حداکثر کردن سمت راست این معادله می توانیم استراتژی بهینه را به دست آوریم. به دلیل این که در بررسی مباحث دفاعی کشورها و دولت ها تنها یک کشور، دولت و یا گروه نظامی وجود ندارد، علم نظریه بازی ها با توجه به قابلیت هایی که دارد شرایط را برای بررسی دقیق تر رفتارها و تصمیم گیری های این کشورها مهیا می کند. اما با توجه به طبیعت پیوسته بودن زمان در طول رخداد وقایع، نیاز داریم تا مباحث دفاعی را نیز به صورت پیوسته مدل کنیم. به همین جهت، استفاده از نظریه بازی دیفرانسیلی ما را در جهت موفق شدن در این زمینه از مباحث کمک خواهد کرد. رقابت های تسلیحاتی، رقابت بر سر افزایش قدرت در سطح منطقه و جهان، رقابت در راستای هزینه های نظامی، تهدید و امنیت نمونه هایی از مباحثی هستند که می توانیم با استفاده از بازی دیفرانسیلی آن ها را مدل و مورد بررسی قرار دهیم. روش بازی دیفرانسیلی برای بررسی تنش ها میان کشورها در حوزه بازی جنگ در سطح کلان مبحث جدیدی نیست. محققان در اتحادیه جماهیر شوروی، به عنوان مثال پونتریاگین در سال ۱۹۶۲، و هم چنین ایالت متحده آمریکا، به عنوان مثال بلمن ۱۹۵۷، به طور مستقل بر روی محاسبات مسائل مختلف با استفاده از روش های برنامه ریزی پویا تحقیق های گسترده ای انجام دادند. در بخش اول این طرح قصد داریم تا با بومی سازی این روش ها رفتارهای کشورهای منطقه را زیر نظر بگیریم تا از بروز تنش جلوگیری کنیم.

## ۲.۲ مدل حداکثر سازی ایران در مقابل همسایگان

تابع مطلوبیت دولت وابسته به میزان هزینه های در نظر گرفته شده برای بخش غیرنظامی شامل (سرمایه گذاری و مصرف) و همچنین امنیت و تهدید از منظر نظامی می باشد. در تحلیل رفتار دفاعی کشورها، تخصیص منابع میان بخش های نظامی و غیرنظامی از اهمیت زیادی برخوردار است. بنابراین، یک افزایش در میزان تخصیص منابع بیشتر به بخش های نظامی، تابع مطلوبیت را کاهش خواهد داد، در حالی که افزایش در بخش های غیرنظامی، این تابع را افزایش خواهد داد. در بحث امنیت و تهدید، از متغیرهای جایگزین برای تحلیل بهتری از نحوه اثرگذاری آنها روی تابع مطلوبیت کشورها استفاده می شود، زیرا این مفاهیم قابل مشاهده نیستند. به طور کلی، این موضوع مورد پذیرش برنامه ریزهای دفاعی کشورها قرار گرفته است که سهم های بیشتر تجهیزات نظامی، به امنیت بیشتر ختم می شود. امنیت وابسته به سطحی از میزان تجهیزات  $S_1$  به نسبت درآمد ملی کل کشور  $Y_1$  می باشد. برای بررسی این مدل فرض می کنیم که سطح تهدید را به صورت داده شده در نظر می گیریم و با  $\theta_1$  نمایش می دهیم. بنابراین تابع مطلوبیت برای دولت دارای دو ویژگی خاص می باشد.

(۱) همان طور که در بخش اول بحث شد، سطح های کامل سهام های نظامی یا هزینه های دفاعی با نسبت های مناسب در تابع مطلوبیت قرار داده شده اند.

(۲) هزینه ها و تجهیزات نظامی با توجه به درآمد در نظر گرفته شده برای یک کشور دارای اهمیت هستند. برای مثال، یک کشور ممکن است مقدار کمی بر روی بخش های دفاعی خود هزینه کند، اما با توجه به این که درآمد ملی آن کم می باشد؛ ممکن است که نسبت این هزینه به کل درآمد زیاد باشد. در نتیجه کشور همسایه و بزرگ تر، این میزان تخصیص از هزینه بر روی بخش نظامی را به عنوان یک تهدید در نظر خواهد گرفت. به طور واضح، هزینه ۱۰ تا ۱۵ درصدی از درآمد ملی بر روی بخش های نظامی یک علامت تهاجمی برای کشور دوم می باشد. تخصیص میان بخش های نظامی  $M_1$  و غیرنظامی  $C_1$  توسط رابطه زیر در نظر گرفته می شود:

$$Y_1 = M_1 + C_1 \quad (۱.۲)$$

با توجه به این که اشاره کردیم باید متغیرها را به عنوان نسبتی از درآمد ملی کل کشور در نظر بگیریم، متغیرهای نسبی به صورت  $c_1 = \frac{C_1}{Y_1}$ ,  $m_1 = \frac{M_1}{Y_1}$ ,  $s_1 = \frac{S_1}{Y_1}$  در نظر می گیریم. بنابراین تابع رفاه کشور در طول زمان به صورت زیر می باشد:

$$W_G = \int_0^{\infty} e^{-\rho_1 t} u(c_1, s_1, \theta_1) dt, \quad (۲.۲)$$

به طوری که  $u(\cdot)$  تابع مطلوبیت کشور بوده و  $\rho_1$  نرخ ترجیحات زمانی می باشد. فرض کنیم این نرخ ثابت باشد. با توجه به معادله ۱.۲ و جای گذاری رابطه  $m_1 = 1 - c_1$  در معادله ۲.۲ نتیجه زیر به دست خواهد آمد:

$$W_G = \int_0^{\infty} e^{-\rho_1 t} u(1 - m_1, s_1, \theta_1) dt. \quad (3.2)$$

تابع مطلوبیت تابعی مشتق پذیر بوده و مشتق های این تابع نسبت به متغیرهای  $c_1, s_1, \theta_1$  را با  $u_i$  نشان می دهیم. به طور مشابه،  $u_{ij}$  مشتق  $u_i$  نسبت به  $j$  می باشد. بنابراین داریم:

$$u_1 > 0, u_2 > 0, u_3 < 0, u_{11} < 0, u_{22} < 0, u_{21} = u_{12} > 0.$$

این ویژگی ها برای تابع مطلوبیت بیان می کند که با افزایش میزان هزینه های تخصیص یافته به بخش غیرنظامی مطلوبیت افزایش می یابد. همچنین به جهت اهمیت برقراری امنیت با وجود تجهیزات نظامی  $W_G$  بیشتر، افزایش در میزان تجهیزات نظامی نیز تابع مطلوبیت را افزایش می دهد. افزایش تهدید باعث کاهش میزان مطلوبیت رفاه می شود، همچنین رابطه بین تغییرات تجهیزات نظامی کل کشور و هزینه های نظامی برای کشور، به صورت زیر است:

$$\dot{S}_1 = M_1 - \delta_1 S_1,$$

به طوری که  $\delta_1$  نرخ استهلال تجهیزات می باشد. با در نظر گرفتن  $s_1 = \frac{S_1}{Y_1}$  معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{s}_1(t) = m_1(t) - (\delta_1 + \beta_1) s_1(t) = m_1(t) - \alpha_1 s_1(t). \quad (4.2)$$

در این معادله نرخ رشد کشور را با  $\beta_1$  نمایش داده و ثابت در نظر می گیریم. همچنین  $\delta_1$  نشان دهنده سطح استهلال می باشد. در نتیجه مقدار  $\alpha_1$  ثابت می باشد. ایران سطح رفاه خود را با توجه به معادله های ۳.۲ و ۴.۲ و در نظر داشتن متغیر هزینه های نظامی به عنوان متغیر کنترلی، حداکثر می کند.

## ۳.۲ مدل حداکثرسازی همسایگان ایران

برای همسایگان فرض می کنیم که این گروه تابع مطلوبیت خود را، که تابعی است از هزینه نظامی، تجیزات و تهدیداتی که از جانب ایران و بقیه همسایگان وارد می شود، حداکثر می کند. همسایگان باید با انتخاب میزان سطح هزینه های نظامی، مطلوبیت خود را افزایش دهند. در نتیجه، مدل حداکثرسازی تابع مطلوبیت برای همسایگان ایران به صورت زیر خواهد بود:

$$\max_{m_i} J_T = \int_0^{\infty} e^{-\rho_i t} v(m_i, s_i, \theta_i) dt \quad 1 \leq i \leq 15, \quad (5.2)$$

$$\dot{s}_i(t) = z(t) + m_i(t) - \alpha_i s_i(t).$$

در رابطه بالا،  $z(t)$  بیان کننده سطح حمایتی است که ممکن است دیگر همسایگان از کشور  $i$  انجام دهند. همچنین این رابطه بیان کننده نحوه تغییرات میزان تجهیزات نظامی همسایه در طول زمان را نشان می دهد. این تجهیزات براساس میزان هزینه های نظامی، حمایت هایی که به صورت مستقیم و غیرمستقیم انجام می گیرد و سطح تجهیزات نظامی در زمان  $t$  می باشد.  $\alpha_i$  بیان کننده نرخ استهلال است  $m_i$  متغیر کنترلی برای کشور همسایه است که با افزایش آن مطلوبیت همسایه افزایش پیدا می کند.  $\rho_i$  نرخ ترجیحات زمانی بوده و مانند بخش قبل ثابت می باشد.

$$v_1 > 0, v_2 > 0, v_3 < 0, v_{11} < 0, v_{22} < 0, v_{21} = v_{12} > 0,$$

این روابط ویژگی های تابع مطلوبیت را نشان می دهد که بیان کننده ترجیحات کشور همسایه در طول زمان در راستای اهداف آن ها می باشد. با افزایش هزینه نظامی و همچنین تجهیزات نظامی، میزان مطلوبیت کشور همسایه به صورت کاهشی، افزایش پیدا می کند. همچنین در طرف مقابل، با افزایش تهدید خارجی، مطلوبیت کشور همسایه به صورت افزایشی، کاهش پیدا می کند. با توجه به اثرگذاری اقدامات متقابل بازی کنان بر روی مطلوبیت یکدیگر، در ادامه به حل مدل بازی می پردازیم.

## ۴.۲ مدل بازی ایران-همسایگان

همان طور که توضیح دادیم، تصمیمات همسایگان بر روی اقداماتی که ایران می‌خواهد انجام دهد و همچنین تصمیمات ایران در قبال اقدامات همسایگان بر روی منافع آنها تاثیر متقابل خواهد داشت. هر کدام از بازی‌کنان، با تهدیدی از جانب گروه دیگر مواجه هستند. این تهدید را می‌توان به طرق مختلف در نظر گرفت. به عنوان مثال، خرید و فروش سلاح و تجهیزات نظامی از کشورهای دیگر، کمک‌های نظامی، میزان هزینه انجام شده بر روی انرژی هسته‌ای، ارتباط‌های نزدیک با ابرقدرت‌ها، افزایش درآمدهای نفتی که منجر به افزایش خرید در زمینه سلاح‌های نظامی می‌شود. عواملی هستند که از آنها می‌توان به عنوان تهدید نام برد. در این مدل فرض می‌کنیم که میزان تهدید برای ایران و همسایگان به ترتیب برابر با میزان هزینه‌های نظامی در نظر گرفته شده توسط آنها باشد،  $m_i$  که سطح هزینه‌های نظامی کشور همسایه  $i$  است بیان‌کننده سطح تهدیدات وارد شده به ایران در راستای حداکثرسازی رفاه خود می‌باشد. به همین ترتیب  $m_1$ ، سطح تهدید وارد شده به همسایگان را نشان می‌دهد.

## ۵.۲ روش حل

همان طور که قبلاً مورد بحث قرار دادیم، در ادبیات دفاعی راهبرد مارکفی را در نظر می‌گیریم. بنابراین برای به دست آوردن راهبرد در وضعیت تعادلی، ابتدا باید اقدام یک بازی‌کن را ثابت در نظر گرفته و سپس مسأله را حل کرد. بنابراین، فرض می‌کنیم  $m_i^*$  یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده از همسایگان در تابع مطلوبیت ایران باشد، یعنی  $u(c_1, s_1, m_i^*)$ . به همین ترتیب، با جای‌گذاری  $m_1^*$  در تابع مطلوبیت همسایگان، مقدار تعادلی  $m_i$  را به دست می‌آوریم. روابط همیلتون-ژاکوبی-بلمن برای دو گروه را در زیر بیان کرده و سپس در بخش بعدی با توجه به این که فرم توابع مطلوبیت به صورت کلی در نظر گرفته شده است، یک راه حل خاص را ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن می‌توانیم مقادیر تعادلی را برای هر دو گروه نتیجه بگیریم.

معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن برای ایران به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_1 V(s_1, t) = \max_{m_1} \{u(\lambda - m_1, s_1, m_i^*) + V_{s_1}(s_1, t)(m_1(t) - \alpha_1 s_1(t)) | u \in U(s_1, t)\}, \quad (6.2)$$

با مشتق‌گیری از سمت راست رابطه ۶.۲ نسبت به  $m_1$  خواهیم داشت:

$$-u_{m_1}(\lambda - m_1, s_1, m_i^*) + V_{s_1}(s_1, t) = 0,$$

و به همین ترتیب، رابطه حداکثرسازی همیلتون-ژاکوبی-بلمن برای همسایگان به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_i W(s_i, t) = \max_{m_i} \{v(m_i, s_i, m_1^*) + W_{s_i}(s_i, t)(z(t) + m_i(t) - \alpha_i s_i(t)) | v \in V(s_i, t)\}, \quad (7.2)$$

مانند حالتی که برای ایران در نظر گرفتیم، با مشتق‌گیری معادله ۷.۲ نسبت به  $m_i$  داریم:

$$v_{m_i}(m_i, s_i, m_1^*) + W_{s_i}(s_i, t) = 0,$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این معادلات به صورت کلی بوده و برای حل آنها باید تابعی با شرایط خاص در نظر بگیریم. در ادامه با معرفی تابع کاب داگلاس [۱۰]، سعی در حل این مدل خواهیم داشت.

## ۶.۲ روش حل اول

با توجه به این که تابع مطلوبیت را برای ایران و همسایگان به صورت کلی در نظر گرفتیم، برای حل این مدل، حالت خاصی از این توابع را در نظر می‌گیریم. تابع کاب داگلاس، یکی از مهم‌ترین توابعی است که در علم اقتصاد کلان دارای کاربردهای فراوانی است. بنابراین ما یکی از حالت‌های خاص این تابع را که در ویژگی‌های ذکر شده برای توابع مطلوبیت ایران و همسایگان صدق می‌کند در نظر می‌گیریم. این تابع را برای ایران به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(\lambda - m_1, s_1, m_i^*) = (\lambda - m_1)^\alpha s_1^\beta m_i^{*(1-\alpha-\beta)} \quad (8.2)$$

تابع همسایگان نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$v(m_i, s_i, m_1^*) = (m_i)^\gamma s_i^\phi m_1^{*(1-\gamma-\phi)} \quad (9.2)$$

به طوری که در این روابط، مقادیر و روابط به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha, \beta, \gamma, \phi > 0,$$

$$\alpha, \beta < 1,$$

$$\gamma, \phi < 1.$$

همان طور که می‌دانیم در تابع کاب داگلاس، توان‌های ارائه شده برای هر متغیر نشان‌دهنده میزان اثرگذاری هر کدام از متغیرها بر روی سطح مطلوبیت می‌باشد. در ادامه با جای گذاری روابط ۱۱.۲ و ۱۲.۲ در معادله‌های حداکثرسازی ایران و همسایگان به روابط زیر می‌رسیم:

$$-u_{m_1}(1 - m_1, s_1, m_i^*) + V_{s_1}^1(s_1, t) = 0,$$

$$-\alpha(1 - m_1)^{\alpha-1} s_1^\beta m_i^{*(1-\alpha-\beta)} + V_{s_1}^1(s_1, t) = 0.$$

همان طور که از این معادله مشاهده می‌شود، تابع  $V^1$  به صورت کلی بیان شده است. بنابراین، تابع زیر را به صورت حدسی برای آن تعریف می‌کنیم:

$$V^1(s_1, t) = X^1(s_1, t) = s_1^\beta m_i^{*(1-\alpha-\beta)}, \quad (10.2)$$

مشتق این تابع نسبت به  $s_1$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$X_{s_1}^1(s_1, t) = \beta s_1^{\beta-1} m_i^{*(1-\alpha-\beta)}.$$

با جای گذاری در مشتق رابطه ۶.۲ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$-\alpha(1 - m_1)^{\alpha-1} s_1^\beta m_i^{*(1-\alpha-\beta)} + \beta s_1^{\beta-1} m_i^{*(1-\alpha-\beta)} = 0.$$

باتوجه به این که  $m_i^{*(1-\alpha-\beta)}$  مقداری ثابت در نظر گرفته شده است، می‌توانیم از دوطرف رابطه آن را حذف کنیم. همچنین با توجه به مثبت بودن  $s_1$  این مقدار نیز از دوطرف رابطه حذف می‌شود و در نهایت:

$$-\alpha(1 - m_1)^{\alpha-1} + \beta s_1^{-1} = 0$$

همچنین، همان طور که می‌دانیم در حالت تعادل تغییرات صفرند بنابراین رابطه زیر را از محدودیت ایران نتیجه می‌گیریم که  $\dot{s}_1 = 0$ :

$$\dot{m}_1 = \alpha_1 s_1,$$

و در نتیجه

$$s_1^* = \frac{m_1^*}{\alpha_1}.$$

با جای گذاری در رابطه بالا و ساده‌سازی، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$-\alpha(1 - m_1)^{\alpha-1} + \beta \frac{\alpha_1}{m_1} = 0.$$

همان طور که قبلاً تعریف شد، این متغیر نشان‌دهنده نرخ استهلال میزان تجهیزات نظامی و نرخ رشد کشور می‌باشد. اما برای همسایگان نیز این روابط را می‌توانیم به دست آوریم:

$$v_{m_i}(m_i, s_i, m_1^*) + V_{s_i}^i(s_i, t) = 0.$$

با در نظر داشتن تابع کاب داگلاس معرفی شده برای همسایگان داریم:

$$\gamma(m_i)^{\gamma-1} s_i^\phi m_1^{*1-\gamma-\phi} + V_{s_i}^i(s_i, t) = 0.$$



مانند بالا برای حل این معادله از روش حدسی استفاده می کنیم:

$$V^i(s_i, t) = X^i(s_i, t) = s_i^\phi m_1^{*1-\gamma-\phi},$$

$$X_{s_i}^i = \phi s_i^{\phi-1} m_1^{*1-\gamma-\phi}.$$

با جای گذاری در مشتق رابطه ۷.۲ خواهیم داشت:

$$\gamma(m_i)^{\gamma-1} s_i^\phi m_1^{*1-\gamma-\phi} + \phi s_i^{\phi-1} m_1^{*1-\gamma-\phi} = 0.$$

با حذف

$$s_i^\phi m_1^{*1-\gamma-\phi}$$

از دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\gamma(m_i)^{\gamma-1} + \phi s_i^{-1} = 0.$$

باتوجه به این که تغییرات در حالت تعادل برابر صفر است، رابطه زیر را داریم:

$$\dot{s}_i = z + m_i - \alpha_i s_i = 0,$$

که نتیجه می شود:

$$s_i^* = \frac{z + m_i^*}{\alpha_i}.$$

با جای گذاری این مقدار در تابع ۷.۲ همسایگان به رابطه زیر می رسیم:

$$\gamma(m_i^*)^{\gamma-1} + \phi \frac{\alpha_i}{z + m_i^*} = 0.$$

رابطه فوق نشان می دهد که هزینه نظامی همسایگان در تعادل، تابعی از  $\gamma, \phi, z, \alpha_i$  می باشد.

## ۷.۲ روش حل دوم

در زمینه مدل سازی با نظریه بازی ها تا کنون کارهای مختلفی انجام شده و توابع مطلوبیت مختلفی در مقالات مختلف استفاده شده است. مانند تابع کاب داگلاس که در بخش قبل مورد استفاده قرار گرفت. در این بخش با توسیع تابع مطلوبیت هایی که قبلا در زمینه های مختلف به دست آمده اند تابع مطلوبیت مورد نظر خود را می سازیم. برای مطالعه بیشتر جهت آشنایی با روش بدست آوردن تابع مطلوبیت به این منابع می توان رجوع کرد [۱، ۶-۹]. با ایجاد تغییراتی در تابع مطلوبیتی که برمن و همکارانش [۶] به دست آوردند می توانیم تابع مطلوبیتی را که در ویژگی های ذکر شده برای توابع مطلوبیت ایران و همسایگان صدق کند به صورت زیر بدست آوریم. این تابع را برای ایران به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u(1 - m_1, s_1, m_i^*) = (1 - m_1)^\alpha + s_1^\beta + m_i^{*(1-\alpha-\beta)}. \quad (11.2)$$

تابع همسایگان نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$v(m_i, s_i, m_1^*) = (m_i)^\gamma + s_i^\phi + m_1^{*(1-\gamma-\phi)}. \quad (12.2)$$

به طوری که در این روابط، مقادیر و روابط به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\alpha, \beta, \gamma, \phi > 0,$$

$$\alpha, \beta < 1,$$

$$\gamma, \phi < 1.$$

ضرایب ارائه شده برای هر متغیر نشان دهنده میزان اثرگذاری هر کدام از متغیرها بر روی سطح مطلوبیت می باشد.

نکته‌ای که در فرمول‌های فوق باید به آن توجه کرد این است که هر کدام از پارامترها می‌تواند  $M$  زیر مجموعه داشته باشد؛ در نتیجه روابط را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u(1 - m_{\lambda}, s_{\lambda}, m_i^*) = \sum_{k=1}^M ((1 - m_{\lambda,k})^{\alpha_k} + s_{\lambda,k}^{\beta_k} + m_{i,k}^{*(1-\alpha_k-\beta_k)}). \quad (13.2)$$

همچنین تابع مطلوبیت را برای همسایگان به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$v(m_i, s_i, m_{\lambda}^*) = \sum_{k=1}^M (m_{i,k}^{\gamma_k} + s_{i,k}^{\phi_k} + m_{\lambda,k}^{*(1-\gamma_k-\phi_k)}). \quad (14.2)$$

به طوری که در این روابط، مقادیر و روابط به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k, \sum_{k=1}^M \beta_k, \sum_{k=1}^M \gamma_k, \sum_{k=1}^M \phi_k > 0,$$

$$\sum_{k=1}^M \alpha_k, \sum_{k=1}^M \beta_k < 1,$$

$$\sum_{k=1}^M \gamma_k, \sum_{k=1}^M \phi_k < 1,$$

$$\sum_{k=1}^M ((1 - m_{\lambda,k})^{\alpha_k}) = 1 - m_{\lambda}, \sum_{k=1}^M s_{\lambda,k}^{\beta_k} = s_{\lambda}, \sum_{k=1}^M m_{i,k}^* = m_i^*,$$

$$\sum_{k=1}^M (m_{i,k}^{\gamma_k}) = m_i, \sum_{k=1}^M s_{i,k}^{\phi_k} = s_i, \sum_{k=1}^M m_{\lambda,k}^* = m_{\lambda}^*.$$

در ادامه با جای گذاری روابط ۱۳.۲ و ۱۴.۲ در معادله‌های حداکثرسازی ایران و همسایگان برای هر  $k$  دلخواه به روابط زیر می‌رسیم:

$$-u_{m_{\lambda,k}}(1 - m_{\lambda}, s_{\lambda}, m_i^*) + V_{s_{\lambda,k}}^1(s_{\lambda}, t) = 0,$$

$$-\alpha_k(1 - m_{\lambda,k})^{\alpha_k-1} + V_{s_{\lambda,k}}^1(s_{\lambda}, t) = 0. \quad (15.2)$$

همان طور که از این معادله مشاهده می‌شود، تابع  $V^1$  به صورت کلی بیان شده است. بنابراین، تابع زیر را به صورت حدسی برای آن تعریف می‌کنیم:

$$V^1(s_{\lambda}, t) = X^1(s_{\lambda}, t) = s_{\lambda,k}^{\beta_k} + m_i^{*(1-\alpha-\beta)}. \quad (16.2)$$

مشتق این تابع نسبت به  $s_{\lambda,k}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$X_{s_{\lambda}}^1(s_{\lambda}, t) = \beta_k s_{\lambda,k}^{\beta_k-1}.$$

با جای گذاری در مشتق رابطه ۱۵.۲ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$-\alpha_k(1 - m_{\lambda,k})^{\alpha_k-1} + \beta_k s_{\lambda,k}^{\beta_k-1} = 0.$$

همان طور که می‌دانیم در حالت تعادل تغییرات صفر می‌باشند. بنابراین رابطه زیر را از محدودیت ایران نتیجه می‌گیریم که  $s_{\lambda,k}^* = 0$ :

$$m_{\lambda,k}^* = \alpha_{\lambda,k} s_{\lambda,k},$$

و در نتیجه

$$s_{1,k}^* = \frac{m_{1,k}^*}{\alpha_{1,k}}.$$

با جای گذاری در رابطه بالا و ساده سازی، به رابطه زیر می رسیم:

$$-\alpha_k(1 - m_{1,k})^{\alpha_k - 1} + \beta_k \left( \frac{\alpha_{1,k}}{m_{1,k}} \right)^{1 - \beta_k} = 0.$$

همان طور که قبلا تعریف شد، این متغیر نشان دهنده نرخ استهلال میزان تجهیزات نظامی و نرخ رشد کشور می باشد. اما برای همسایگان نیز این روابط را می توانیم به دست آوریم:

$$v_{m_i}(m_i, s_i, m_1^*) + V_{s_{i,k}}^i(s_i, t) = 0,$$

در این صورت برای همسایگان داریم:

$$\gamma_k m_{i,k}^{\gamma_k - 1} + V_{s_{i,k}}^i(s_i, t) = 0. \quad (17.2)$$

مانند بالا برای حل این معادله از روش حدسی استفاده می کنیم:

$$V^i(s_i, t) = X^i(s_i, t) = s_{i,k}^{\phi_k} + m_{1,k}^{*1 - \gamma_k - \phi_k},$$

$$X_{s_{i,k}}^i = \phi_k s_{i,k}^{\phi_k - 1}.$$

با جای گذاری در رابطه ۱۷.۲ خواهیم داشت:

$$\gamma_k m_{i,k}^{\gamma_k - 1} + \phi_k s_{i,k}^{\phi_k - 1} = 0. \quad (18.2)$$

باتوجه به این که تغییرات در حالت تعادل برابر صفر است، رابطه زیر را داریم:

$$s_{i,k}^* = z + m_{i,k} - \alpha_{i,k} s_{i,k} = 0.$$

از رابطه فوق نتیجه می شود:

$$s_{i,k}^* = \frac{z + m_{i,k}^*}{\alpha_{i,k}}.$$

با جای گذاری این مقدار در ۱۸.۲ همسایگان به رابطه زیر می رسیم:

$$\gamma_k m_{i,k}^{\gamma_k - 1} + \phi_k \left( \frac{\alpha_{i,k}}{z + m_{i,k}^*} \right)^{1 - \phi_k} = 0.$$

رابطه فوق نشان می دهد هزینه نظامی همسایگان در حالت تعادل، تابعی از  $\gamma_k, \phi_k, z, \alpha_{i,k}$  می باشد.

### ۳ تحلیل عددی

در این بخش با استفاده از روشی که در بخش ۷.۲ توضیح داده شد به تحلیل عددی مدل می پردازیم. در نظر گرفتن زیرمجموعه برای هر کدام از مجموعه ها در روش حل در بخش ۷.۲ ما را در تصمیم گیری بهتر کمک خواهد کرد. برای مثال می توان در نظر گرفت که زیرمجموعه  $k$ ام، هزینه های مربوط به تسلیحات موشکی یک کشور و یا هزینه های مربوط به ادوات نیروهای دریایی، زمینی، هوایی و یا هر مجموعه نظامی دیگر باشد که ایران یا یکی از کشورهای همسایه ایران برای آن مجموعه در حال هزینه کردن می باشد. بنابراین در این روش ما به طور اختصاصی به پیدا کردن هزینه های تعادلی برای هر بخش نظامی ایران و کشور همسایه ایران می پردازیم. در این بخش با توجه به متغیرهای موجود در مقادیر تعادلی نش، در جهت ارائه تحلیل دقیق تر با استفاده از مقادیری که در مقاله های دیگر به صورت حقایق اثبات شده در نظر گرفته شده است، به تحلیل مدل می پردازیم.

ایران

ابتدا به تحلیل مقدار تعادلی ایران می‌پردازیم. فرض کنیم که نرخ استهسال برابر  $\frac{1}{10}$  و نرخ رشد کشور برابر با  $\frac{2}{10}$  در نظر می‌گیریم. در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای نرخ رشد کشور، شرایط را برای ارائه تحلیل‌های مختلف ارائه می‌کند. به طور مثال، هرچقدر که این نرخ بیش‌تر باشد، فرض می‌کنیم که کشور در دوران رشد خود قرار داشته و هرچقدر این مقدار کم‌تر باشد، کشور در دوران اقتصادی ضعیف‌تری قرار دارد. با در نظر گرفتن این مقادیر، متغیر  $\alpha_{1,k}$  برابر با  $\frac{3}{10}$  خواهد شد. بحث بعدی مربوط به اثرگذاری مقادیر بر روی تابع مطلوبیت ایران است. با توجه به این‌که این مقادیر نشان‌دهنده میزان اثرگذاری هر متغیر بر روی تابع مطلوبیت می‌باشد، می‌توانیم با در نظر گرفتن مقادیر مناسب، تحلیلی دقیق ارائه کنیم. در صورتی که مجموع  $\alpha_k, \beta_k$  برابر یک باشد، بدین معنی است که میزان اثرگذاری هزینه‌های نظامی کشور همسایه نام اثری بر تابع مطلوبیت ایران نخواهد داشت. بنابراین، این مقادیر را باید به صورتی در نظر بگیریم که هم‌زمان اثرگذاری این هزینه‌ها بر روی تابع مطلوبیت ایران را مشاهده کنیم. با توجه به اهمیت هر دو مورد هزینه نظامی و تجهیزات نظامی برای ایران، مقدار  $\alpha_k, \beta_k$  را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم و آن را برابر  $\frac{3}{10}$  تعریف می‌کنیم. در این حالت، اثر هزینه‌های نظامی کشور همسایه نیز اثر مثبت را بر تصمیم‌گیری‌های حاصل می‌گذارد. بنابراین

$$\alpha_{1,k} = \alpha_k = \beta_k = \frac{3}{10}.$$

اما برای بررسی اثرگذاری هر کدام از این متغیرها، با ثابت در نظر گرفتن آن‌ها، می‌توانیم اثر آن‌ها را بر روی هزینه نظامی مورد بررسی قرار دهیم.

### ۱.۳ نحوه اثرگذاری $\alpha_k, \beta_k$ بر هزینه نظامی ایران

در این بخش  $\alpha_k$  را متغیر در نظر گرفته و اثرگذاری آن را بر روی متغیر نظامی نشان می‌دهیم. با جای‌گذاری موارد بالا در مقدار تعادلی هزینه نظامی ایران در زیرمجموعه  $k$ ام، به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$-\alpha_k(1 - m_{1,k})^{\alpha_k-1} + \frac{3}{10} \left(\frac{3}{m_{1,k}^*}\right)^{1-\frac{3}{10}} = -\alpha_k(1 - m_{1,k})^{\alpha_k-1} + \frac{3}{10} \left(\frac{3}{m_{1,k}^*}\right)^{\frac{7}{10}} = 0.$$

با استفاده از قاعده مشتق‌گیری ضمنی، نشان داده می‌شود که،

$$\frac{\partial m_{1,k}^*}{\partial \alpha_k} < 0,$$

یعنی با افزایش  $\alpha_k$ ، میزان هزینه نظامی کاهش پیدا می‌کند. این بدان معنا است که در صورت افزایش میزان اثرگذاری هزینه نظامی در مطلوبیت ایران، میزان هزینه نظامی کاهش پیدا کرده و به تبع آن مقدار مطلوبیت افزایش پیدا می‌کند. حال با متغیر در نظر گرفتن  $\beta_k$ ، سعی می‌کنیم نحوه اثرگذاری این متغیر بر میزان تجهیزات نظامی را بر روی هزینه‌های نظامی و در نتیجه تابع مطلوبیت بررسی کنیم:

$$-\frac{3}{10}(1 - m_{1,k})^{\frac{3}{10}-1} + \beta_k \left(\frac{3}{m_{1,k}^*}\right)^{1-\beta_k} = 0,$$

از رابطه فوق ثابت می‌شود که:

$$\frac{\partial m_{1,k}^*}{\partial \beta_k} > 0,$$

برقرار است؛ یعنی، با افزایش اثرگذاری میزان تجهیزات نظامی بر روی مطلوبیت کشور، سطح هزینه‌های نظامی افزایش پیدا کرده که به تبع آن دو نتیجه را می‌توان گرفت. اول اینکه، با توجه به رابطه  $s_{1,k}^* = \frac{m_{1,k}^*}{\alpha_{1,k}}$ ، میزان تجهیزات نظامی افزایش پیدا می‌کند. دوم در مورد اثرگذاری این نتیجه بر روی مطلوبیت ایران، دو وضعیت مختلف به صورت هم‌زمان رخ می‌دهد. از یک طرف به دلیل افزایش تجهیزات نظامی و اثر مستقیم آن بر روی مطلوبیت ایران، این میزان افزایش پیدا می‌کند و از طرف دیگر با توجه به اثر منفی افزایش هزینه‌های نظامی بر روی مطلوبیت ایران، نحوه تغییر مطلوبیت کشور به طور کل نامشخص می‌ماند؛ زیرا وابسته به چند متغیر است و نیاز به در نظر گرفتن شرایط خاص دارد.

### ۲.۳ نحوه اثرگذاری $\phi_k, \gamma_k, z$ بر هزینه نظامی همسایگان

تفاوتی که در این‌جا وجود دارد، مربوط به وجود متغیر حمایت مالی از جانب کشورهای دیگر می‌باشد. مقادیری که برای همسایگان در نظر می‌گیریم به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi_k = \gamma_k = \alpha_{i,k} = \frac{3}{10}, z = 100.$$

باتوجه به معادله‌های زیر که مقادیر تعادلی هزینه‌های نظامی و تجهیزات نظامی را نشان می‌دهد، به تحلیل عددی این مقادیر می‌پردازیم:

$$\gamma_k m_{i,k}^{*\gamma_k-1} + \phi_k \left( \frac{\alpha_{i,k}}{z + m_{i,k}^*} \right)^{1-\phi_k} = 0,$$

$$s_{i,k}^* = \frac{z + m_{i,k}^*}{\alpha_{i,k}}.$$

ابتدا فرض می‌کنیم که  $\gamma_k$  متغیر بوده و مقادیر عددی دیگر متغیرها را وارد معادلات فوق می‌کنیم.

$$\gamma_k m_{i,k}^{*\gamma_k-1} + \lambda^3 \left( \frac{\lambda^3}{100 + m_{i,k}^*} \right)^{1-\phi_k} = 0.$$

نتیجه گرفته می‌شود که  $\frac{\partial m_{i,k}^*}{\partial \gamma_k} > 0$ . این رابطه بیان می‌کند که با افزایش اثرگذاری هزینه‌های نظامی بر روی کشور همسایه، میزان هزینه نظامی تعادلی افزایش پیدا می‌کند. در نتیجه، میزان تابع مطلوبیت نیز به تبع آن افزایش پیدا خواهد کرد. حال اثرگذاری تجهیزات نظامی را بر روی مقادیر تعادلی بررسی می‌کنیم.  $\phi_k$  نقش متغیر را ایفا کرده و دیگر مقادیر را ثابت در نظر می‌گیریم:

$$\lambda^3 m_{i,k}^{*\lambda^3-1} + \phi_k \left( \frac{\lambda^3}{100 + m_{i,k}^*} \right)^{1-\phi_k} = 0.$$

نتیجه‌ای که از این معادله گرفته می‌شود، به صورت  $\frac{\partial m_{i,k}^*}{\partial \phi_k} > 0$  است؛ یعنی، با افزایش اثرگذاری تجهیزات نظامی بر روی مطلوبیت همسایگان، میزان هزینه‌های نظامی و به تبع آن تجهیزات نظامی و تابع مطلوبیت افزایش پیدا خواهند کرد. در ادامه به بررسی اثر  $z$  روی هزینه‌های نظامی می‌پردازیم:

$$\lambda^3 m_{i,k}^{*\lambda^3-1} + \lambda^3 \left( \frac{\lambda^3}{z + m_{i,k}^*} \right)^{1-\lambda^3} = 0.$$

ثابت می‌شود که  $\frac{\partial m_{i,k}^*}{\partial z} < 0$ . این رابطه بیان می‌کند که با افزایش حمایت مالی از جانب کشورهای دیگر میزان هزینه‌های نظامی کاهش پیدا می‌کند؛ به تبع آن باعث کاهش مطلوبیت کشورهای همسایه نیز می‌شود. لازم به ذکر است که نتایج گرفته شده با استفاده از نرم افزار متلب می‌باشد.

## ۴ نتیجه گیری

هدف از این پژوهش بررسی نحوه تصمیم‌گیری ایران و همسایگان در زمان پیوسته می‌باشد. با توجه به این موضوع که هر دو گروه در زمان پیوسته برنامه‌های خود را طرح‌ریزی می‌کنند، در نظر گرفتن قالب پیوسته اهمیت پیدا می‌کند. در این پژوهش، ابتدا تعادل نش را به دست آوردیم، برای این کار با استفاده از دو تابع کاب داگلاس و برمن از دو روش به بررسی تعادل پرداختیم. سپس با انجام تحلیل عددی به بررسی اثرگذاری متغیرهای مختلف در مدل پرداختیم. رفتار ایران در انتخاب سطح هزینه‌های نظامی و به تبع آن میزان تجهیزات نظامی، وابسته به متغیرهایی نظیر میزان اثرگذاری تجهیزات نظامی، سطح استهلال تجهیزات، و نرخ رشد ایران می‌باشد. نشان دادیم با افزایش سطح اثرگذاری هزینه‌های نظامی، این هزینه‌ها کاهش یافته و در نتیجه مطلوبیت ایران افزایش خواهد یافت. با افزایش سطح اثرگذاری تجهیزات نظامی، میزان هزینه‌های نظامی افزایش می‌یابد. اما در خصوص رفتار همسایگان، نتیجه را به صورت خلاصه بیان می‌کنیم. با افزایش میزان اثرگذاری هزینه‌های نظامی بر مطلوبیتش، این هزینه‌ها را کم خواهد کرد. از طرف دیگر، این گروه با افزایش اثرگذاری تجهیزات نظامی نیز میزان هزینه‌های تخصیص یافته به بخش نظامی را افزایش خواهد داد. همچنین، با افزایش حمایت مالی از جانب کشورهای دیگر میزان هزینه‌های نظامی کاهش پیدا می‌کند.

## فهرست منابع

[۱] م. اسحاقی، ارشمه، مدل سازی رفتار تروریست و تحلیل رفتار تروریسم، سیستم‌های مختلط و غیرخطی، دوره (۱) ۱۳۹۶.

[۲] ح. اسلامی، بحران در افغانستان و پیامدهای آن برای ایران، سایت بازتاب، ۱۳۷۸.

- [۳] م. حافظ نیا، کشمیر، تهران، سازمان جغرافیایی ایران، ۱۳۸۸.
- [۴] ر. سراجی، تحولات پاکستان و چالش های آمریکا، فصلنامه سیاسی اقتصادی، تهران، ۱۳۷۸.
- [۵] م. مسی بیگدلی، س. کتابچی، ح. نویدی، مدخلی بر نظریه بازی ها، انتشارات دانشگاه شاهد، ۱۳۹۰.
- [6] E. Berman, J. N. Shapiro and J. H. Felter, Can Hearts and Minds be Bought The economics of counterinsurgency in Iraq, *Journal of Political Economy*, **119** (2011) 766–819 .
- [7] A. Duursma, A current literature review of international mediation, *International Journal of Conflict Management*, **25** (2014) 81–98 .
- [8] J. R. S. Cristobal , The use of Game Theory to solve conflicts in the project management and construction industry, *International Journal of Information System and Project Management*, **3** (2015) 43–58 .
- [9] J. C. Sharman, War, selection, and micro-states: Economic and sociological perspectives on the international system, *European Journal of International Relations*, **21** (2015) 194–214 .
- [10] S. J. Turnovsky, Macroeconomic policies, growth, and welfare in a stochastic economy, *International Economic Review*, (1993) 953–981 .



## Examining the conflicts between Iran and neighboring countries using differential games

Ehsan Lotfali Ghasab<sup>††</sup>, Hajjat Allah Ebadi Zadeh, Javad Sharafi

Mathematics Department, Faculty of Basic Sciences, Imam Ali Afsari University, Tehran, Iran

Communicated by: Sohrab Effati

Received: 2022/9/13

Accepted: 2022/12/5

**Abstract:** In this article, we intend to use differential games to model Iran's relations with neighboring countries. According to the discussion of time continuity in the real world, the differential game model has been used to model the ongoing issues continuously over a period of time and provide more realistic results. In this article, we first introduce the differential game, then the game model and the Hamilton-Jacobi-Bellman equation are described. In the first method, the famous Cobb-Douglas function was used instead of the utility function, and in the second method, we used this function by making changes to the Berman function. In the first method, in general, the amount of military expenditure and the amount of military equipment are balanced in the situation of the Markovian strategy. But in the second method, by considering the sub-sets of each of the military cost and military equipment sets, we have obtained the values of military costs and the amount of balance equipment for each sub-set in more detail

**Keywords:** Game theory, differential game, open loop strategy, Markov strategy.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

<sup>††</sup>Corresponding author.

E-mail addresses: [e.l.ghasab@gmail.com](mailto:e.l.ghasab@gmail.com) (E. L. ghsab), [ebadizadeh.h@gmail.com](mailto:ebadizadeh.h@gmail.com) (H. Ebadizadeh), [Javad\\_sharafi\\_6@yahoo.com](mailto:Javad_sharafi_6@yahoo.com) (J. sharafi).