



قیمت‌گذاری اختیاراتهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل پرش انتشار با رژیم سوئیچینگ

ساغر حیدری^۱، حسین آذری^{۲*}

(^۱) دانشکده علوم ریاضی، گروه بیم‌سنجی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
(^۲) دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

دبیر مسئول: محمد جلوداری ممقانی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۵/۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۵

چکیده:

در این مقاله مسئله قیمت‌گذاری اختیاراتهای آمریکایی بدون سررسید با ویژگی مرزهای آزاد را به کمک رویکرد معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای توصیف دینامیک دارایی پایه‌ی این اختیارات، از مدل‌های پرش انتشار تحت رژیم سوئیچینگ استفاده می‌کنیم. تحت این مدل‌ها به منظور یافتن قیمت اختیارات، به دلیل امکان انتقال میان حالت‌های مختلف سیستم از یک سو و امکان اعمال زودهنگام اختیار از سوی دیگر، نیازمند حل دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال معمولی با ویژگی مرزهای آزادیم. برای این منظور ابتدا دستگاه معادلات ایجادشده از این مدل‌ها را تشکیل داده و سپس به مسئله مکمل خطی تبدیل می‌کنیم. برای یافتن جواب‌های عددی مسئله مکمل خطی ایجادشده از روش تفاضلات متناهی برای تقریب مشتقات و از روش درون‌یابی خطی برای تقریب جمله انتگرال استفاده می‌کنیم. سپس با بهره‌گیری از اصل ماکزیمم گسسته، به تحلیل تقریب به‌دست‌آمده به کمک روش پیش‌نهادی می‌پردازیم. در نهایت با ارائه مثال‌های عددی همگرایی روش را بررسی کرده و صحت و دقت نتایج به‌دست‌آمده را به‌عنوان تقریب اختیاراتهای بلندمدت نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: اختیار آمریکایی بدون سررسید، مدل پرش انتشار با رژیم سوئیچینگ، روش تفاضلات متناهی، اصل ماکزیمم گسسته.

رده‌بندی ریاضی: 65M06; 65M32; 91G60

مقدمه ۱

از میان انواع مختلف اختیاریهای آمریکایی، اختیاریهای بدون سررسید، از ساختار ساده‌تری نسبت به اختیاریهای با سررسید متناهی برخوردارند. این اختیاریها دارای زمان سررسید بی‌نهایت‌اند و بدون هیچ محدودیتی برای زمان انقضاء، در هر لحظه قابل اعمال‌اند. به بیان دیگر این اختیاریها، اختیاریهایی با سررسید نامتناهی‌اند که در عمل می‌توانند به‌عنوان تقریبی برای اختیاریهای بلندمدت در نظر گرفته شوند.

برای این اختیاریها با $T = \infty$ ، جمله مشتق جزئی قیمت اختیار نسبت به زمان در معادله قیمت‌گذاری ظاهر نمی‌شود. بنابراین معادله قیمت‌گذاری این اختیاریها به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. همچنین در این نوع اختیاریها در نتیجه ویژگی همگن در زمان (عدم وابستگی مرزهای آزاد به زمان)، محاسبه مرزها ساده‌تر است. از این‌رو قیمت‌گذاری این اختیاریها نسبت به اختیاریهای با زمان سررسید متناهی از پیچیدگی کمتری برخوردار است.

بر اساس اطلاعات ما و مقالات ارجاع‌شده، جواب تحلیلی در حالت کلی برای مسئله قیمت‌گذاری اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل‌های پرش انتشار رژیم سوئیچینگ موجود نیست. لازم‌به‌ذکر است که روش‌های پیش‌نهادی در برخی از مقالات ارجاع‌شده برای یافتن جواب‌های تحلیلی، دارای محدودیت‌هایی است. به‌عنوان مثال برخی از آن‌ها نیازمند فرض‌های اولیه در مورد رابطه بین مرزهای آزاد در رژیم‌های مختلف است که در مدل‌های با بیش از دو رژیم بسیار پیچیده و یا قابل استفاده نیستند، یا برخی از این روش‌ها فقط برای توزیع خاصی از جهش‌ها به کار برده می‌شوند. از این‌رو استفاده از روش‌های عددی که قابلیت پیاده‌سازی برای هر تعداد متناهی رژیم و هر توزیع دلخواه از پرش‌ها را دارا باشند، ضروری است.

از میان مطالعات اخیر در مورد مسئله قیمت‌گذاری اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید می‌توان به مقالات زیر اشاره نمود: قیمت‌گذاری اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل بلک-شولز در سال ۱۹۶۵ توسط مک کین[†] مسئله در [۱۱] به‌طور صریح مطرح شد. سپس بویارچنکو[‡] و لواندورسکی[§] فرمول‌های صریحی را در [۲، ۳] برای قیمت‌گذاری اختیارات به‌دست آوردند. با حضور پرش در مدل قیمت‌گذاری، چان[¶] در [۴] به مطالعه اختیاریهای فروش بدون سررسید تحت مدل لوی و بدون در نظر گرفتن پرش‌های مثبت پرداخت و یک فرمول صریح برای زمان توقف بهینه به‌دست آورد. برای حالت‌های کلی‌تر پرش و به‌کمک تکنیک‌های احتمالاتی، یک فرمول صریح برای هر دو اختیار خرید و فروش در [۱۲] به‌دست آمد، که این فرمول توسیعی از فرمول مک کین در [۱۱] بود. آسموسن[¶] در [۱] توانست یک عبارت صریح تحت فرایندهای لوی برای هر دو پرش مثبت و منفی به‌دست بیاورد.

تحت مدل رژیم سوئیچینگ می‌توان به مقالات زیر اشاره نمود:

یک جواب صریح برای قیمت‌گذاری اختیاریهای فروش آمریکایی بدون سررسید توسط گو^{**} و ژانگ^{††} در [۱۵] بررسی شد، که در آن امکان سوئیچ پارامترهای بازده و نوسان‌پذیری دارایی پایه میان دو رژیم وجود دارد. مسئله قیمت‌گذاری اختیاریهای فروش بدون سررسید برای بیش از دو رژیم در [۸] به‌صورت عددی مطرح شد. پس از آن مسئله تحت مدل پرش انتشار نمائی با دینامیک‌های قابل مشاهده از پارامترهای رژیم سوئیچینگ در [۷] بررسی شد.

اخیرا نویسندگان در [۱۴] روش ارائه‌شده در [۱۵] را برای یافتن جواب دقیق مسئله قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید در شرایطی که دارایی پایه از مدل پرش انتشار رژیم سوئیچینگ پیروی می‌کند، گسترش دادند. اما استفاده از فرمول به‌دست‌آمده برای مدل‌های پرش مرتون و کو و در حالت بیش‌تر از دو رژیم دشوار است.

در این مقاله به حل عددی مسئله قیمت‌گذاری اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل‌های پرش انتشار رژیم سوئیچینگ می‌پردازیم. در این اختیار مسیره‌های نمونه‌ای دارایی پایه، دارای پرش‌اند و پارامترهای فرایند میان n رژیم متفاوت که با یک زنجیر مارکف پیوسته در زمان مدل شده‌اند، سوئیچ می‌کنند. برای این منظور دو مدل کلی پرش مرتون و کو به ترتیب با توزیع‌های احتمال نرمال و نمایی دو‌گانه تحت تعداد متناهی رژیم در نظر می‌گیریم. در ابتدا دستگاه معادلات ایجادشده از مدل‌های فوق را تشکیل داده و سپس آن‌ها را به‌صورت مسئله مکمل خطی (LCP) تبدیل می‌کنیم. برای یافتن جواب‌های عددی مسئله ایجادشده از روش تفاضلات متناهی (FDM) برای تقریب مشتقات و از درون‌یابی خطی برای تقریب جمله انتگرال استفاده کرده و (LCP) را گسسته می‌کنیم. اصل ماکزیمم گسسته را برای به‌دست آوردن تخمین خطای مسئله و تحلیل پایداری و آنالیز روش عددی به کار می‌بریم. در نهایت با استفاده از این مطلب که اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید را می‌توان به‌عنوان تقریبی از اختیاریهای بلندمدت در نظر گرفت، به مقایسه نتایج به‌دست‌آمده برای اختیاریهای آمریکایی بدون سررسید با اختیاریهای آمریکایی بلندمدت متناظر می‌پردازیم. بدین ترتیب دقت روش تفاضلات متناهی را برای مسئله قیمت‌گذاری بررسی می‌کنیم.

[†]McKean

[‡]Boyarchenko

[§]Levendorski

[¶]Chan

[¶]Asmussen

^{**}Guo

^{††}Zhang

۲ مدل ریاضی

در این بخش به منظور توصیف دینامیک دارایی پایه ریسک دار، به معرفی مدل لوی نمایی تحت رژیم سوئیچینگ می‌پردازیم. برای فضای احتمال (Ω, F, P) ، فرایند $X = \{X(t), t \geq 0\}$ را یک زنجیر مارکوف پیوسته در زمان با تعداد متناهی حالت (رژیم) و ماتریس $Q = [q_{ij}]_{n \times n}$ برای انتقال میان n رژیم در نظر می‌گیریم. در این صورت وقتی اقتصاد در رژیم i قرار دارد $(X(t) = i)$ ، فرایند دارایی پایه ریسک دار $\{S(t), t \geq 0\}$ با نرخ بازده μ_i و نوسان‌پذیری σ_i در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق می‌کند:

$$dS(t)S(t-) = (\mu_i - \lambda_i \epsilon_i) dt + \sigma_i dW(t) + dY_i(t),$$

که در آن $S(t-)$ قیمت دارایی قبل از پرش و $Y_i(t)$ فرایند پواسون مرکب جبران‌شده و مستقل از فرایند وینر $W(t)$ است. بنابراین فرایند $Y_i(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$Y_i(t) = \sum_{n=1}^{N_i(t)} (V_{i,n} - 1),$$

که در آن $N_i(t)$ فرایند پواسون با پارامتر شدت λ_i و دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی، مستقل و هم‌توزیع با $\epsilon_i = E(Y_i)$ اند.

در این مقاله به بررسی دو مدل معروف پرش یعنی مدل مرتون و مدل کو می‌پردازیم. تحت این مدل‌ها توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی $\log(V_i)$ به ترتیب دارای توزیع نرمال و توزیع نمایی دوگانه به صورت زیرند:

$$g_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_i e^{-(y-m_i)^2 / 2\delta_i^2},$$

و

$$g_i(y) = p_i \eta_{i,1} e^{-\eta_{i,1} y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} + (1 - p_i) \eta_{i,2} e^{\eta_{i,2} y} \mathbb{1}_{\{y < 0\}},$$

که در آن $m_i \in \mathbb{R}$ ، $\delta_i > 0$ ، $\eta_{i,1} > 1$ ، $\eta_{i,2} > 0$ و $p_i \in [0, 1]$ است. تحت اندازه احتمال خنثی از ریسک \mathbb{Q} قیمت اختیار خرید آمریکایی در رژیم i روی دارایی پایه $S(t)$ و قیمت اعمال K دلار برابر مقدار مورد انتظار ارزش آتی تنزیل یافته به صورت زیر است:

$$C_i(S) = \sup_{0 \leq \tau \leq \infty} E^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^\tau r_X(s) ds} (S(\tau) - K)^+ | S(0) = S, X(0) = i],$$

که در آن $E^{\mathbb{Q}}$ مقدار مورد انتظار تحت اندازه \mathbb{Q} و r نرخ بهره بدون ریسک و τ یک زمان توقف است. در این حالت برای هر رژیم i یک قیمت اعمال زود هنگام موجود است به طوری که اختیار در دامنه $[S_i, \infty)$ می‌بایست اعمال و در دامنه $(0, S_i)$ نگه داشته شود.

۳ اختیاراتی آمریکایی بدون سررسید

همان‌طور که در قبل اشاره کردیم اختیاراتی آمریکایی بدون سررسید حالت خاصی از اختیاراتی آمریکایی با زمان انقضای نامتناهی‌اند. حال قیمت اختیار خرید آمریکایی بدون سررسید در رژیم i ام روی دارایی پایه S و قیمت اعمال K دلار را با $C_i(S)$ نمایش می‌دهیم. از آن‌جا که اختیاراتی بدون سررسید دارای ویژگی همگن در زمان‌اند، قیمت این اختیارات در معادله مستقل از زمان صدق می‌کنند. بنابراین برای $i = 1, \dots, n$ مسئله با مرز آزاد زیر را حل می‌کند:

$$\mathcal{A}_i C(S) = 0, \quad 0 < S < S_i, \quad (1.3)$$

$$C_i(S) > (S - K)^+, \quad 0 < S < S_i, \quad (2.3)$$

$$C_i(S) = S - K, \quad S \geq S_i, \quad (3.3)$$

$$C_i(S_i) = 1, \quad (4.3)$$

$$C_i(0) = 0, \quad (5.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i,1} + A_{i,2} + A_{i,3}, \\ A_{i,1}C(S) &= \frac{1}{\gamma} \sigma_i^2 S^\gamma C_i''(S) + \mu_i S C_i'(S) - r_i C_i(S), \\ A_{i,2}C(S) &= \sum_{j=1}^n q_{ij} C_j(S), \\ A_{i,3}C(S) &= \lambda_i \int (C_i(Se^y) - C_i(S) - S(e^y - 1)C_i'(S)) g_i(y) dy. \end{aligned}$$

حال به منظور دستیابی به معادله با ضرایب ثابت برای اختیارهای آمریکایی بدون سررسید از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = Ke^x, \quad C_i(S) = Ku_i(x), \quad S_i = Ke^{\phi_i}.$$

با انجام محاسبات ساده مسئله با مرز آزاد زیر را برای قیمت اختیار آمریکایی بدون سررسید $u_i(x)$ برای $i = 1, \dots, n$ به دست می‌آوریم:

$$\gamma_i u_i'' - \nu_i u_i' - \kappa_i u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} u_j + \mathcal{I}_i u_i(x) = 0, \quad -\infty < x < \phi_i, \quad (6.3)$$

$$u_i(x) > f_i(x), \quad -\infty < x < \phi_i, \quad (7.3)$$

$$u_i(x) = f_i(x), \quad x \geq \phi_i, \quad (8.3)$$

$$u_i'(\phi_i) = f_i'(\phi_i), \quad (9.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u_i(x) = 0, \quad (10.3)$$

که در آن

$$\mathcal{I}_i u_i(x) = \lambda_i \int u_i(z) g_i(z - x) dz,$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\gamma} \sigma_i^2, \quad \nu_i = \gamma_i - \mu_i + \lambda_{ii}, \quad \kappa_i = r_i - q_{ii} + \lambda_i,$$

$$i = \int (e^y - 1) g_i(y) dy, \quad f_i(x) = (e^x - 1)^+.$$

برای محاسبه i در مدل مرتون داریم:

$$i = \exp\left(m_i + \frac{\delta_i^2}{2}\right) - 1,$$

که در آن m_i و δ_i به ترتیب میانگین و واریانس پرش‌ها در مدل اند.

به طور مشابه تحت مدل کو [۹] داریم:

$$i = \frac{p_i \eta_{i,1}}{\eta_{i,1} - 1} + \frac{(1 - p_i) \eta_{i,2}}{\eta_{i,2} + 1} - 1,$$

که در آن $p_i \in [0, 1]$ و $\eta_{i,2} > 0, \eta_{i,1} > 1$

۴ روش تفاضلات متناهی

به منظور استفاده از روش تفاضلات متناهی برای یافتن جواب مسئله قیمت گذاری، می‌بایست مسئله (۶.۳)-(۱۰.۳) را در یک بازه کران‌دار محدود کنیم. می‌دانیم که با میل $x \rightarrow -\infty$ قیمت اختیار به صفر میل می‌کند، از طرفی از آنجا که مرز آزاد ϕ_i کران‌دار است، بنابراین بازه نامتناهی را به بازه به اندازه کافی بزرگ $\Omega = [X_{\min}, X_{\max}]$ محدود کرده و شرایط مرزی ساختگی را برای مرزهای جدید تعریف می‌کنیم.

در این صورت مسئله مکمل خطی (LCP) برش داده‌شده برای مسئله (۶.۳)–(۱۰.۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$-\gamma_i u_i'' + \nu_i u_i' + \kappa_i u_i - \mathcal{R}_i u(x) - \mathcal{J}_i u_i(x) - F_i(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$u_i(x) \geq f_i(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$(-\gamma_i u_i'' + \nu_i u_i' + \kappa_i u_i - \mathcal{R}_i u(x) - \mathcal{J}_i u_i(x) - F_i(x))(u_i(x) - f_i(x)) = 0, \quad (3.4)$$

$$u_i(X_{\min}) = f_i(X_{\min}), \quad (4.4)$$

$$u_i(X_{\max}) = f_i(X_{\max}), \quad (5.4)$$

که در آن عملگرهای \mathcal{J} و \mathcal{R} را به ترتیب برای جملات پرش و رژیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{R}_i u(x) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} u_j(x),$$

$$\mathcal{J}_i u_i(x) = \lambda_i \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} u_i(z) g_i(z-x) dz$$

9

$$F_i(x) = \lambda_i \int_{X_{\max}}^{+\infty} f_i(z) g_i(z-x) dz.$$

در ادامه این مقاله تلاش خواهیم کرد تا جواب‌های مسئله مکمل خطی فوق را بیابیم. برای راحتی قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{L}_i u_i(x) = -\gamma_i u_i'' + \nu_i u_i' + \kappa_i u_i - \mathcal{R}_i u(x) - \mathcal{J}_i u_i(x) - F_i(x), \quad x \in \Omega.$$

حال به گسسته‌سازی مسئله می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $X_{\min} = x_1 < \dots < x_N = X_{\max}$ یک افراز Ω^N بکنواخت برای دامنه Ω با طول گام h باشد، که در آن N عدد صحیح مثبت است. از نماد $u_i(x_j) \equiv u_{i,j}$ برای $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, N$ استفاده می‌کنیم.

حال با به‌کارگیری تفاضلات متناهی مرکزی با دقت مرتبه دوم برای تقریب مشتقات داریم:

$$u_i'(x_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} - \frac{1}{6} u_{i,j}^{(3)} h^2 + O(h^4),$$

$$u_i''(x_j) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} - \frac{1}{12} u_{i,j}^{(4)} h^2 + O(h^4), \quad j = 2, \dots, N-1.$$

از معادلات (۴.۴) و (۵.۴) شرایط مرزی را به دست می‌آوریم:

$$u_{i,1} = f_i(x_1),$$

$$u_{i,N} = f_i(x_N).$$

جهت تقریب جمله انتگرال از روش نوزنقه‌ای استفاده می‌کنیم. بنابراین جمله انتگرال در $x = x_j$ برابر است با

$$\mathcal{J}_i u_i(x_j) = \lambda_i \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} u_i(z) g_i(z-x_j) dz$$

$$= \lambda_i \frac{h}{\sqrt{\pi}} [u_i(x_1) g_i(x_1-x_j) + 2 \sum_{m=2}^{N-1} u_i(x_m) g_i(x_m-x_j) + u_i(x_N) g_i(x_N-x_j)] + O(h^2).$$

توجه کنیم که برای جمله سمت راست $F_i(x)$ تحت مدل پرش انتشار مرتون داریم:

$$F_i(x_j) = \lambda_i [\mathcal{N}(\eta_{ij}) - e^{\frac{\delta_i^2}{\gamma} + x_j + m_i} \mathcal{N}(\eta_{ij} - \delta_i)],$$

که در آن \mathcal{N} تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال به صورت زیر است:

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\eta_{ij} = \eta_i(x_j) = \frac{X_{min} - x_j - m_i}{\delta_i}.$$

حال نمایش می دهیم:

$$\bar{\Omega}_h = \{j, 1 \leq j \leq N\},$$

$$\Omega_h = \{j, 2 \leq j \leq N-1\},$$

$$\partial\Omega_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h.$$

بنابراین تقریب گسسته مسئله مکمل خطی بریده شده (۱.۴)-(۵.۴) برای $i = 1, \dots, n$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{L}_i^h u_{i,j} \geq 0, \quad j \in \Omega_h, \quad (۶.۴)$$

$$u_{i,j} \geq f_i(x_j), \quad j \in \Omega_h, \quad (۷.۴)$$

$$\mathcal{L}_i^h u_{i,j}(u_{i,j} - f_i(x_j)) = 0, \quad j \in \Omega_h, \quad (۸.۴)$$

$$u_{i,1} = f_i(X_{min}), \quad u_{i,N} = f_i(X_{max}). \quad (۹.۴)$$

که در آن عملگر گسسته \mathcal{L}_i^h نسبت به طول گام h را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{L}_i^h u_{i,j} = \mathcal{L}_{BS}^h u_{i,j} - \mathcal{R}_i^h u_{i,j} - \mathcal{J}_i^h u_{i,j} - F_{ij},$$

$$\mathcal{L}_{BS}^h u_{i,j} = a_i u_{i,j-1} + b_i u_{i,j} + c_i u_{i,j+1},$$

$$\mathcal{R}_i^h u_{i,j} = \sum_{l \neq i}^n q_{il} u_{l,j}, \quad F_{ij} = F_i(x_j),$$

$$\mathcal{J}_i^h u_{i,j} = \lambda_i \frac{h}{\gamma} \left[u_i(x_1) g_i(x_1 - x_j) + 2 \sum_{m=2}^{N-1} u_i(x_m) g_i(x_m - x_j) + u_i(x_N) g_i(x_N - x_j) \right],$$

$$a_i = -\frac{\gamma_i}{h^2} - \frac{\nu_i}{2h}, \quad b_i = \frac{2\gamma_i}{h^2} + \kappa_i, \quad c_i = -\frac{\gamma_i}{h^2} + \frac{\nu_i}{2h}.$$

به وضوح می توان مشاهده نمود که $b_i = \kappa_i - a_i - c_i$. حال به منظور یافتن نمایش ماتریسی مسئله فوق برای $i = 1, \dots, n$

تعریف می کنیم:

$$U_i = (u_{i,2}, \dots, u_{i,N-1})^T.$$

سپس با انجام محاسبات ساده نامساوی (۶.۴) را به صورت ماتریسی زیر نمایش می دهیم:

$$(A_i + C_i)U_i + \sum_{j \neq i} B_{ij}U_j \geq D_i,$$

که در آن $[A_i]_{(N-2) \times (N-2)}$ ماتریس سه قطری

$$A_i = \begin{bmatrix} b_i & c_i & & & \\ a_i & b_i & c_i & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & & & a_i & b_i \end{bmatrix},$$

$$B_{ij} = -q_{ij} \mathbb{I}_{(N-2) \times (N-2)},$$

$$[C_i]_{kl} = -\lambda_i h \alpha_{il}^{k+1},$$

9

$$\alpha_{ij}^m = g_i(x_j - x_m).$$

برای سمت راست تعریف می‌کنیم:

$$D_i = E_{i1} + E_{i2},$$

که در آن

$$E_{i1} = \lambda_i \frac{h}{\gamma} \begin{bmatrix} \alpha_{i1}^1 u_{i,1} + \alpha_{iN}^1 u_{i,N} \\ \vdots \\ \alpha_{i1}^{N-1} u_{i,1} + \alpha_{iN}^{N-1} u_{i,N} \end{bmatrix}_{(N-2) \times 1},$$

$$E_{i2} = \begin{bmatrix} F_i^1 - a_i u_{i,1} \\ F_i^2 \\ \vdots \\ F_i^{N-2} \\ F_i^{N-1} - c_i u_{i,N} \end{bmatrix}_{(N-2) \times 1}.$$

بنابراین LCP های (۱۰.۴)–(۵.۴) را برای $n, \dots, 1, i$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} (A_i + C_i)U_i + \sum_{j \neq i} B_{ij}U_j \geq D_i, U_i \geq 0, \\ \left((A_i + C_i)U_i + \sum_{j \neq i} B_{ij}U_j - D_i \right)^T U_i = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که برای $i = 1, \dots, n$ ماتریس‌های A_i ماتریس‌های سه قطری و معین مثبت، B_i ماتریس‌های قطری و C_i ماتریس‌های کامل‌اند.

جهت یافتن جواب LCP های فوق از الگوریتم گاوس-سایدل استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال تحت مدل دو رژیمه دستگاه (۱۰.۴) برای $i = 1, 2$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} (A_i + C_i)U_i + B_{i3-i}U_{3-i} \geq D_i, U_i \geq 0, \\ \left((A_i + C_i)U_i + B_{i3-i}U_{3-i} - D_i \right)^T U_i = 0. \end{cases} \quad (11.4)$$

در این حالت برای ϵ داده شده و حدس اولیه U_1^{old} و U_2^{old} الگوریتم گاوس-سایدل برای (۱۱.۴) به صورت زیر خواهد بود:

گام ۱. حل LCP برای یافتن U_1^{new} به کمک الگوریتم توماس:

$$\begin{cases} A_1 U_1^{new} + B_{1,2} U_2^{old} + C_1 U_1^{old} \geq D_1, U_1^{new} \geq 0, \\ \left(A_1 U_1^{new} + B_{1,2} U_2^{old} + C_1 U_1^{old} - D_1 \right)^T U_1^{new} = 0. \end{cases}$$

گام ۲. حل LCP برای یافتن U_2^{new} به کمک الگوریتم توماس:

$$\begin{cases} A_2 U_2^{new} + B_{2,1} U_1^{new} + C_2 U_2^{old} \geq D_2, U_2^{new} \geq 0, \\ \left(A_2 U_2^{new} + B_{2,1} U_1^{new} + C_2 U_2^{old} - D_2 \right)^T U_2^{new} = 0. \end{cases}$$

گام ۳. اگر

$$|U_1^{new} - U_1^{old}|^2 + |U_2^{new} - U_2^{old}|^2 \leq \epsilon,$$

متوقف می‌شویم. در غیر این صورت برای $i = 1, 2$ قرار می‌دهیم: $U_i^{old} = U_i^{new}$ و به گام اول می‌رویم.

همگرایی الگوریتم فوق را می‌توانیم در [۱۳] ببینیم. پس از یافتن قیمت اختیاری‌های معامله، مرزهای آزاد (قیمت‌های اعمال زود هنگام) S_i در هر رژیم $n, \dots, 1, i$ به دست را می‌توان از تابع بازده به صورت زیر به دست آورد:

$$S_i = \min_S \{C_i(S) = (S - K)^+\}.$$

۵ آنالیز خطا

در این بخش به کمک اصل ماکزیمم گسسته تقریبی از خطای روش ارائه شده را به دست می آوریم. برای این منظور از روش ارائه شده در [۵، ۱۰] برای مسئله مرز آزاد بخش قبل استفاده می کنیم.

لم ۱.۵. تابع هموار $u_i(x)$ تعریف شده روی Ω^N را در نظر می گیریم. خطای برشی روش تفاضلات متناهی ارائه شده برای $j \in \Omega_h$ و $i = 1, \dots, n$ در رابطه زیر صدق می کند:

$$|\mathcal{L}_i^h u_{i,j} - \mathcal{L}_i u_{i,j}| = O(h^2),$$

اثبات. اثبات به کمک بسط تیلور واضح است. \square

لم ۲.۵. با فرض این که طول گام های زمانی h در شرط زیر صدق کند:

$$h \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{2\gamma_i}{|\gamma_i - \mu_i + \lambda_i \epsilon_i|}, \quad (1.5)$$

برای $r_i > 0$ ماتریس $A_i - (\lambda_i - q_{ii})I$ یک M ماتریس است.

اثبات. از آن جا که $\lambda_i \geq 0$ و $-q_{ii} \geq 0$ ، بنابراین در هر رژیم عناصر قطری ماتریس $A_i - (\lambda_i - q_{ii})I$ نامنفی بوده و با فرض (۲.۵) تمام عناصر غیر قطر یعنی a_i و c_i نامثبت اند. از طرفی برای $r_i > 0$ ماتریس $A_i - (\lambda_i - q_{ii})I$ اکیدا غالب قطری است، بنابراین یک M ماتریس است. \square

لم ۳.۵. با فرض این که طول گام های زمانی h در شرط $h \leq 1$ صدق کند، ماتریس $C_i + (\lambda_i - q_{ii})I$ یک Z ماتریس غالب قطری با عناصر قطری نامنفی است.

اثبات. از آن جا که $\alpha_{i,j}^m \geq 0$ و $\lambda_i \geq 0$ ، عناصر غیر قطر ماتریس $C_i + (\lambda_i - q_{ii})I$ نامثبت اند. بنابراین برای $k, l = 1, \dots, N - 2$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_l [C_i + (\lambda_i - q_{ii})I]_{kl} &= \lambda_i - q_{ii} - \lambda_i h \sum_l g_i(x_{l+1} - x_{k+1}) \\ &= \lambda_i - q_{ii} - \frac{\lambda_i h}{\sqrt{2\pi}\delta_i} \sum_l \exp\left(\frac{-(x_{l+1} - x_{k+1} - m_i)^2}{2\delta_i^2}\right) \\ &\geq \lambda_i - q_{ii} - \frac{\lambda_i h}{\sqrt{2\pi}\delta_i} \int_{X_{min}}^{X_{max}} \exp\left(\frac{-(x - x_{k+1} - m_i)^2}{2\delta_i^2}\right) dx \\ &\geq \lambda_i - q_{ii} - \frac{\lambda_i h}{\sqrt{2\pi}\delta_i} \sqrt{2\pi}\delta_i \\ &\geq \lambda_i - \lambda_i h \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

که در آن $h \leq 1$ و $-q_{ii} \geq 0$. \square

حال به عنوان نتیجه ای از لم ۲.۵ و لم ۳.۵، برای مقادیر به اندازه کافی کوچک h ، ماتریس $A_i + C_i$ در هر رژیم یک M ماتریس بوده و بنابراین قادر خواهیم بود تا از اصل ماکزیمم گسسته به صورت زیر استفاده نماییم.

لم ۴.۵ (اصل ماکزیمم گسسته). با فرض این که طول گام $h \leq 1$ در شرط زیر صدق کند:

$$h \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{2\gamma_i}{|\gamma_i - \mu_i + \lambda_i \epsilon_i|}, \quad (2.5)$$

عملگرهای گسسته \mathcal{L}_i^h برای $i = 1, \dots, n$ در اصل ماکزیمم گسسته صدق می کنند، یعنی اگر $u_{i,j} \geq 0$ برای $j \in \partial\Omega_h$ و $u_{i,j} \geq 0$ برای $j \in \Omega_h$ ، آنگاه

$$u_{i,j} \geq 0, \quad j \in \bar{\Omega}_h.$$

اثبات. در هر رژیم $A_i + C_i$ یک $-M$ ماتریس اکیدا غالب قطری است. بنابراین نتیجه به دست می‌آید. □
 قضیه ۵.۵. فرض کنیم $u_i(x)$ جواب مسئله (۱.۴)–(۵.۴) و $u_{i,j}$ برای $j \in \bar{\Omega}_h$ جواب دستگاه (۱.۴)–(۱.۵) است. در این صورت روش تفاضلات متناهی ارائه شده در تقریب خطای زیر صدق می‌کند:

$$\max_{j \in \bar{\Omega}_h} |u_i(x_j) - u_{i,j}| \leq Ch^\gamma,$$

که در آن C ثابت مستقل از طول گام h است.

اثبات. نمایش می‌دهیم:

$$\Omega^{(1)} = \{j \in \Omega_h | u_i(x_j) = f_i(x_j)\},$$

$$\Omega^{(2)} = \Omega_h \setminus \Omega^{(1)}.$$

داریم:

$$\mathcal{L}_i u_i(x_j) \geq 0, \quad j \in \Omega^{(1)}.$$

از طرفی برای $j \in \Omega^{(2)}$ داریم:

$$\mathcal{L}_i u_i(x_j) = 0, \quad u_i(x_j) \geq f_i(x_j). \quad (۳.۵)$$

قرار می‌دهیم:

$$\Omega_h^{(1)} = \{j \in \Omega_h | u_{i,j} = f_i(x_j)\},$$

$$\Omega_h^{(2)} = \Omega_h \setminus \Omega_h^{(1)}.$$

به‌وضوح

$$\mathcal{L}_i^h u_{i,j} \geq 0, \quad j \in \Omega_h^{(1)},$$

و برای $j \in \Omega_h^{(2)}$

$$\mathcal{L}_i^h u_{i,j} = 0, \quad u_{i,j} \geq f_i(x_j).$$

تابع $W_{i,j}$ روی Ω_h را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_{i,j} = Qh^\gamma > 0,$$

که در آن برای ثابت مثبت به اندازه کافی بزرگ k داریم:

$$Q = k \max_x (|u_i^{(2)}(x)| + |u_i^{(3)}(x)| + |u_i^{(4)}(x)|).$$

حال اصل ماکزیمم را برای $\Omega_h^{(2)}$ به کار می‌بریم. روی مرز $\Omega_h^{(2)}$ داریم:

$$u_i(x_j) - u_{i,j} + W_{i,j} = \begin{cases} u_i(x_j) - f_i(x_j) + W_{i,j} \geq 0, & j \in \Omega_h^{(1)}, \\ W_{i,j} \geq 0, & j \in \partial\Omega_h. \end{cases}$$

همچنین با استفاده از (۳.۵) برای $j \in \Omega_h^{(2)}$ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{L}_i^h (u_i(x_j) - u_{i,j} + W_{i,j}) = (\mathcal{L}_i^h u_i(x_j) - \mathcal{L}_i u_i(x_j) + \mathcal{L}_i^h W_{i,j}) + \mathcal{L}_i u_i(x_j) \geq 0.$$

بنابراین با استفاده از اصل ماکزیمم خواهیم داشت:

$$u_i(x_j) - u_{i,j} + W_{i,j} \geq 0, \quad j \in \bar{\Omega}_h. \quad (۴.۵)$$

حال با به کار بردن اصل ماکزیمم برای $j \in \Omega^{(2)}$ داریم:

$$\mathcal{L}_i^h(u_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j}) = \mathcal{L}_i^h u_i(x_j) - \mathcal{L}_i u_i(x_j) - \mathcal{L}_i^h u_{i,j} - \mathcal{L}_i^h W_{i,j} \leq 0.$$

روی مرز $\Omega^{(2)}$ داریم:

$$u_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j} = \begin{cases} f_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j} \leq 0, & j \in \Omega^{(1)}, \\ u_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j} = -W_{i,j} \leq 0, & j \in \partial\Omega_h. \end{cases}$$

در این صورت برای $j \in \Omega^{(2)}$ داریم:

$$u_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j} \leq 0$$

و به دنبال آن

$$u_i(x_j) - u_{i,j} - W_{i,j} \leq 0, \quad j \in \bar{\Omega}_h. \quad (5.5)$$

بنابراین از معادلات (۴.۵) و (۵.۵) برای $n, \dots, 1, i$ نتیجه می گیریم:

$$\max_{j \in \Omega_h} |u_i(x_j) - u_{i,j}| \leq \max_{j \in \Omega_h} W_{i,j} \leq Ch^2,$$

□

که در آن C ثابت مثبت به اندازه کافی بزرگ است.

۶ نتایج عددی

در این بخش به ارائه نتایج عددی حاصل از پیاده سازی روش تفاضلات متناهی بخش قبل برای قیمت گذاری هر دو نوع اختیار خرید و فروش آمریکایی بدون سررسید می پردازیم. برای این منظور محاسبات را در یک کلاس ++C در کامپیوتری با حافظه ۸ گیگ و پردازشگر ۵.۲ پیاده سازی می کنیم. با ارائه انواع مثال ها صحت نتایج و دقت روش پیش نهادی را برای مقادیر مختلف پارامترها امتحان می کنیم. برای تمام انتخاب های ممکن از پارامترها نتایج عددی به دست آمده، دقت روش را نشان می دهند. در تمامی مثال ها افزایش های یکنواخت برای بازه x در نظر گرفته و از آن جا که جواب مسئله ممکن است در $x = 0$ ($S = K$) منفرد باشد، نقطه $x = 0$ را یک نقطه افراز در نظر می گیریم.

مثال ۱.۶. در این مثال نرخ همگرایی روش پیش نهادی را بررسی می کنیم. به دلیل عدم وجود جواب دقیق برای مسئله قیمت گذاری اختیارهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل پرش انتشار با رژیم سوئیچینگ دو رژیمه، به کمک اصل دو برابر کردن نقاط شبکه [۱۰] خطای بین دو جواب در دو افراز با طول گام های N و $2N$ را محاسبه می کنیم.

برای بازه Ω مقادیر $X_1 = -3$ و $X_2 = 3$ را چنان اختیار می کنیم که قیمت دارایی های متناظر برای یک اختیار آمریکایی با قیمت اعمال $K = \$100$ به ترتیب $S_1 = Ke^{-3} \approx 498$ و $S_2 = Ke^3 \approx 200855$ باشند. برای یافتن نرخ همگرایی ترکیب مختلف از پارامترهای مسئله را بررسی می کنیم. سپس از تفاضلات متناهی مرکزی مرتبه دوم برای تقریب مشتقات و از درون یابی خطی برای تقریب انتگرال استفاده می کنیم. برای حل دستگاه مکمل خطی (۱۱.۴) به کمک الگوریتم گاوس-سایدل بلوکی پارامتر $\omega = 1/5$ و خطا را $\epsilon = 10^{-10}$ در نظر می گیریم. شکل های ۱-۲ خطای $u_N - u_{2N}$ را برای اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید تحت نرم L^2 به ترتیب برای مدل رژیم سوئیچینگ نوسان ها و مدل رژیم سوئیچینگ نرخ های بهره نشان می دهند. نتایج عددی، نرخ همگرایی $O(h^2)$ را برای همه حالت های ممکن انتخاب پارامترها تایید می کنند.

برای این منظور یک اختیار معامله فروش آمریکایی بدون انقضا با قیمت اعمال $K = \$100$ را تحت مدل رژیم سوئیچینگ دو رژیمه با

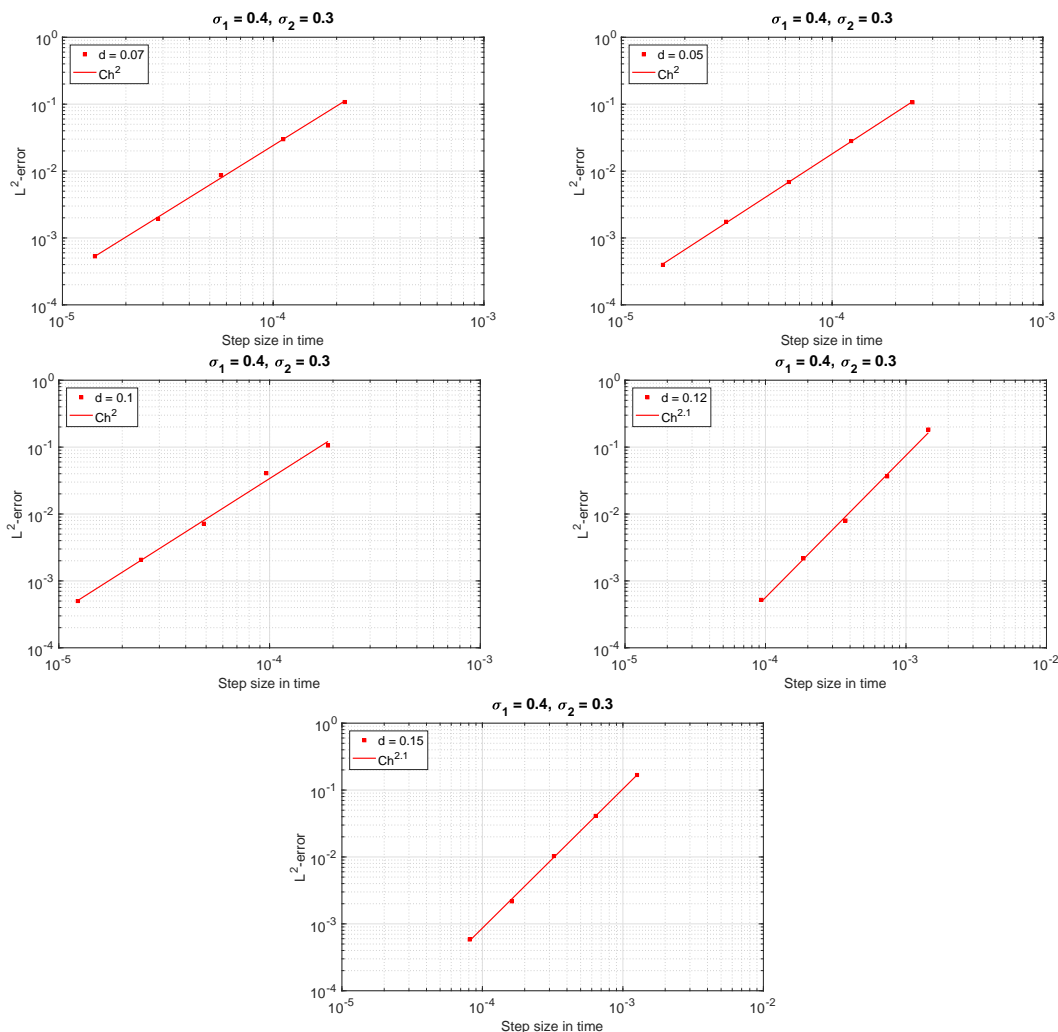
$$q_{12} = 2, q_{21} = 4,$$

در نظر می گیریم. با فرض توزیع نرمال برای پرش ها در مدل مرتون پارامترهای پرش را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \delta_1 = 0.25, \delta_2 = 0.45, \epsilon_1 = 1\%, \epsilon_2 = -5\%.$$

شکل ۱ نتایج را در مدل رژیم سوئیچینگ نوسان ها با $\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = 0.3$ و با فرض ثابت بودن نرخ بهره در هر دو رژیم $r_1 = r_2 = 0.1$ برای مقادیر مختلف سود تقسیمی

$$d_1 = d_2 = 0.05, 0.07, 0.12, 0.15$$



شکل ۱: خطای L^2 برای مدل رژیم سوئیچینگ نوسان‌ها با $\sigma_1 = 0.4$, $\sigma_2 = 0.3$ و سودهای تقسیمی $d = 0.05, 0.07, 0.1, 0.12, 0.15$

نشان می‌دهد.

شکل ۲ نتایج در مدل رژیم سوئیچینگ نرخ‌های بهره با $r_1 = 0.07$, $r_2 = 0.1$ و با فرض ثابت بودن نوسان‌ها در هر دو رژیم $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3$ برای مقادیر مختلف سود تقسیمی

$$d_1 = d_2 = 0.05, 0.07, 0.1, 0.12$$

نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار داشتیم نتایج، نرخ همگرایی تقریباً برابر دو را تایید می‌کند.

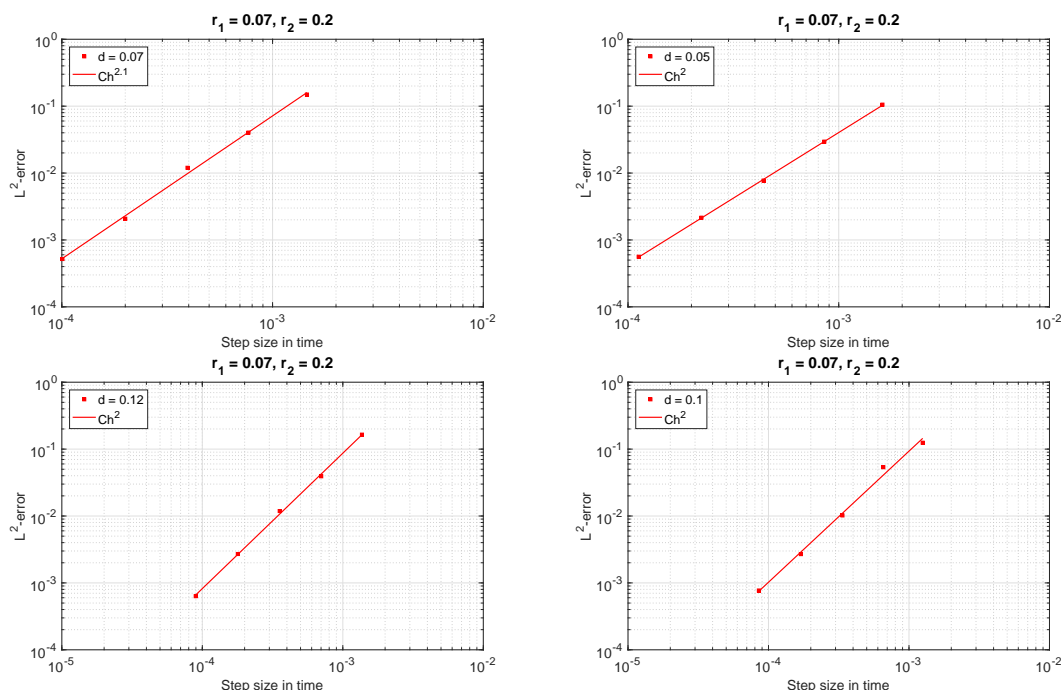
مثال ۲.۶. می‌دانیم که قیمت اختیار آمریکایی با سررسید با میل تاریخ انقضا به بی‌نهایت به قیمت اختیار آمریکایی بدون سررسید میل می‌کند. بنابراین نتایج عددی را برای اختیار خرید آمریکایی بدون سررسید متناظر با اختیار خرید آمریکایی با زمان انقضای بلندمدت تحت مدل پرش انتشار رژیم سوئیچینگ ارائه می‌دهیم. برای این منظور یک اختیار خرید آمریکایی بدون سررسید با قیمت اعمال $K = \$100$ و یک اختیار خرید بلندمدت آمریکایی متناظر با سررسید $T = 1200$ ماه را، تحت مدل پرش انتشار رژیم سوئیچینگ با پارامترهای زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.3, r_1 = 0.2, r_2 = 0.07$$

9

$$q_{12} = 4, q_{21} = 2.$$

پارامترهای پرش را مطابق مثال ۱.۶ انتخاب می‌کنیم. نتایج را در جدول‌های ۱ تا ۳ برای قیمت اختیار در رژیم‌های اول و دوم و برای مقادیر مختلف پارامتر d بیان می‌کنیم. همان‌طور که انتظار داشتیم نتایج به‌دست آمده بسیار نزدیک به هم‌اند. بنابراین برای تقریب قیمت اختیار



شکل ۲: خطای L^2 برای مدل رژیم سوئیچینگ نرخ‌های بهره با $r_1 = 0.07$, $r_2 = 0.2$ و سودهای تقسیمی $d = 0.05, 0.07, 0.1, 0.12$

معاملات بدون سررسید به جای حل مسئله قیمت گذاری اختیار معامله بلندمدت در بازه زمانی بزرگ می توان از روش پیش نهاد شده استفاده نمود. مرزهای آزاد برای اختیار معامله بدون سررسید در نتیجه ویژگی عدم وابستگی این اختیارها به زمان ثابت اند. از این رو به راحتی از تابع بازده در رابطه (۲.۴) قابل محاسبه اند. نتایج عددی به دست آمده، نرخ همگرایی مرتبه یک برای مرزهای آزاد را تایید می کنند.

جدول ۱: قیمت اختیار معامله بدون سررسید (PO) و اختیار معامله بلندمدت (LTO) برای $d = 0.08$

S	Regime I		Regime II	
	PO	LTO	PO	LTO
۷۰	۲۸,۷۲۱۵	۲۸,۷۲۵۳	۲۸,۷۵۶۱	۲۸,۷۸۷۱
۹۰	۴۰,۴۲۱۲	۴۰,۴۲۶۳	۴۰,۵۲۵۲	۴۰,۵۳۵۰
۱۰۰	۴۶,۶۹۸۹	۴۶,۷۴۳۱	۴۶,۷۲۷۳	۴۶,۷۴۳۱
۱۲۰	۵۹,۶۲۵۴	۵۹,۶۳۶۹	۵۹,۷۷۱۹	۵۹,۷۷۲۶
۱۴۰	۷۲,۹۸۹۷	۷۳,۳۳۷۳	۷۳,۴۹۹۱	۷۳,۵۰۳۹

مثال ۳.۶. به منظور بررسی دقت روش ارائه شده برای اختیارهای آمریکایی بدون سررسید، نتایج به دست آمده را با نتایج حاصل از جواب به صورت بسته به دست آمده در [۱۴] مقایسه می کنیم. برای این منظور یک اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید با قیمت اعمال $K = 5$ را در نظر می گیریم. سایر پارامترها را مطابق [۱۴] برای مدل دو رژیمه انتخاب می کنیم:

$$r = 0.05, \mu_1 = 0.03, \mu_2 = 0.05, \sigma_1 = 0.15, \sigma_2 = 0.16, q_{12} = 0.5, q_{21} = 0.15.$$

برای قسمت پرش نویسندگان از توزیع پرتو $\#$ با تابع چگالی احتمال

$$g(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$\#$ Pareto

جدول ۲: قیمت اختیار معامله بدون سررسید (PO) و اختیار معامله بلندمدت (LTO) برای $d = 0.1$

	Regime I		Regime II	
	PO	LTO	PO	LTO
S				
۷۰	۲۸,۶۸۳۹	۲۸,۶۸۸۳	۲۸,۶۰۵۳	۲۸,۶۱۴۰
۹۰	۴۰,۳۷۶۶	۴۰,۳۸۲۵	۴۰,۵۰۵۲	۴۰,۲۹۳۹
۱۰۰	۴۶,۵۹۸۹	۴۶,۵۹۰۹	۴۶,۴۲۷۳	۴۶,۴۸۲۲
۱۲۰	۵۹,۵۸۱۴	۵۹,۵۷۹۵	۵۹,۴۱۵۲	۵۹,۴۵۶۴
۱۴۰	۷۳,۲۸۹۹	۷۳,۲۹۲۶	۷۲,۹۸۹۹	۷۳,۱۴۶۳

جدول ۳: قیمت اختیار معامله بدون سررسید (PO) و اختیار معامله بلندمدت (LTO) برای $d = 0.12$

	Regime I		Regime II	
	PO	LTO	PO	LTO
S				
۷۰	۲۵,۴۴۶۵	۲۵,۴۵۷۵	۲۵,۴۰۵۶	۲۵,۳۹۳۱
۹۰	۳۶,۴۵۹۸	۳۶,۴۶۱۵	۳۶,۴۰۱۱	۳۶,۳۹۲۱
۱۰۰	۴۲,۳۷۷۱	۴۲,۳۷۹۳	۴۱,۹۷۴۳	۴۲,۲۷۸۹
۱۲۰	۵۴,۸۳۱۶	۵۴,۸۸۶۲	۵۴,۷۷۱۲	۵۴,۷۷۰۲
۱۴۰	۶۸,۲۳۷۱	۶۸,۲۵۱۶	۶۸,۱۰۸۱	۶۸,۱۰۷۹

و پارامترهای شدت $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، استفاده نمودند.

جدول ۴ نتایج عددی را با طول گام $h = 0.1$ نشان می‌دهد. داده‌های به‌دست‌آمده دقت روش ارائه شده را در مقایسه با فرم بسته در [۱۴] تایید می‌کنند.

همان‌طور که نویسندگان در [۱۴] اشاره کردند، استفاده از جواب به‌صورت بسته برای حالت‌های کلی مدل پرش انتشار دشوار بوده و برای همین منظور آن‌ها توزیع پرتو را در نظر گرفتند. در غیر این‌صورت تحت سایر مدل‌های پرش مانند مدل‌های پرشی مرتون و کو، برای محاسبه انتگرال حاصل از پرش‌ها جواب به‌صورت فرمول بسته نیازمند به‌کارگیری روش‌های عددی می‌باشیم. اما به کمک روش ارائه‌شده به‌راحتی می‌توان جواب‌ها را با دقت قابل قبول برای هر توزیع دلخواه از پرش‌ها و بدون نیاز به فرض اولیه برای جایگاه مرزهای آزاد به‌دست آورد. نتایج عددی در جدول ۴ نشان می‌دهند که روش عددی به‌کاررفته یک جایگزین مناسب برای فرمول دقیق جهت محاسبه قیمت اختیاری آمریکایی بدون سررسید تحت مدل پرش انتشار با رژیم سوئیچینگ است. در ستون آخر جدول، تقریبی از قیمت‌های اعمال زود هنگام (مرزهای آزاد) نشان داده شده است.

جدول ۴: مقایسه قیمت اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید و مرز آزاد (FB) به‌روش تفاضلات متناهی (FDM) و جواب دقیق (Exact) برای مقادیر مختلف از قیمت دارایی.

روش	S=۱	S=۳	S=۵	S=۷	S=۹	S=۱۰	FB
FDM	۴,۷۳۹۰۳	۴,۶۶۰۰۵	۴,۶۲۳۴۰	۴,۵۹۹۲۳	۴,۵۸۱۱۳	۴,۵۷۳۵۳	۰,۰۶۹۸
Exact	۴,۷۳۵۱۰	۴,۶۶۰۹۳	۴,۶۲۶۰۲	۴,۶۰۳۰۳	۴,۵۸۵۸۷	۴,۵۷۸۶۹	۰,۰۶۷۲

مثال ۴.۶. همان‌طور که در قبل اشاره نمودیم، یکی از مزایای روش ارائه‌شده، قابلیت اعمال روش برای مدل‌های رژیم سوئیچینگ با هر تعداد متناهی رژیم است. برای این‌منظور به‌عنوان آخرین مثال اختیاری‌های معامله فروش آمریکایی با قیمت اعمال $K = 100$ دلار را تحت

مدل پرش مرتون با سه رژیم و ماتریس انتقال

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & -1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & -0.4 \end{bmatrix},$$

در نظر می‌گیریم. برای $i = 1, 2, 3$ قرار می‌دهیم: نرخ‌های بهره $r_i = 0.05$ ، سود تقسیمی $d_i = 0$ و نوسانات $\sigma_i = 0.15$. پارامترهای پرش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta_i = 0.45, m_i = -0.5, \\ \lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.7.$$

در جدول ۵ و شکل ۳ قیمت اختیار در هر رژیم برای مقادیر مختلف از قیمت دارایی نشان داده شده است.

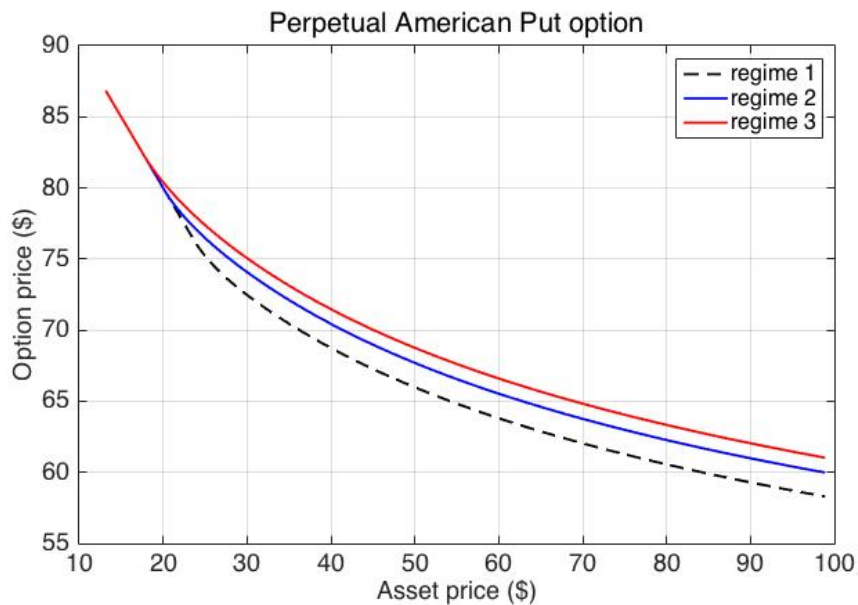
جدول ۵: قیمت‌های اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید تحت مدل سه رژیمه برای مقادیر مختلف از قیمت دارایی.

S	Regime I	Regime II	Regime III
۵۰	۶۵۹۷۹۹۳۸	۶۷۶۹۷۲۳۷	۶۸۷۵۵۹۱۶
۶۰	۶۳۸۰۶۶۲۱	۶۵۵۳۲۷۵۲	۶۶۶۰۰۹۸۸
۷۰	۶۲۰۳۹۸۴۷	۶۳۷۶۲۶۱۰	۶۴۸۳۰۸۵۷
۸۰	۶۰۵۶۰۳۸۹	۶۲۲۷۲۳۶۸	۶۳۳۳۵۳۳۱
۹۰	۵۹۲۹۱۹۷۶	۶۰۹۸۹۲۱۴	۶۲۰۴۴۲۰۲
۱۰۰	۵۸۱۸۴۱۵۱	۵۹۸۶۴۸۶۴	۶۰۹۱۰۶۵۳
۱۱۰	۵۷۲۰۲۲۴۴	۵۸۸۶۵۹۰۷	۵۹۹۰۲۰۷۵
۱۲۰	۵۶۳۲۱۵۴۰	۵۷۹۶۸۳۲۳	۵۸۹۹۴۸۷۸
۱۳۰	۵۵۵۲۳۸۳۰	۵۷۱۵۴۲۷۲	۵۸۱۷۱۴۴۵
۱۴۰	۵۴۷۹۵۳۱۴	۵۶۴۱۰۱۳۴	۵۷۴۱۸۲۷۱
۱۵۰	۵۴۱۲۵۲۷۶	۵۵۷۲۵۲۷۱	۵۶۷۲۴۷۷۱

۷ نتیجه گیری

در این مقاله به حل عددی مسئله قیمت‌گذاری اختیارهای آمریکایی بدون سررسید تحت مدل‌های پرش انتشار رژیم سوئیچینگ پرداختیم. برای این منظور دو مدل کلی پرش مرتون و کو به ترتیب با توزیع‌های احتمال نرمال و نمایی دوگانه تحت تعداد متناهی رژیم در نظر گرفته و دستگاه معادلات ایجاد شده از مدل‌های فوق را به مسئله مکمل خطی تبدیل کردیم. برای یافتن جواب‌های عددی مسئله ایجاد شده از روش تفاضلات متناهی برای تقریب مشتقات و از درون‌یابی خطی برای تقریب جمله انتگرال استفاده نمودیم. از آنجا که روش پیش‌نهاد شده را برای مدل پرش کلی و تحت n رژیم در نظر گرفتیم، بنابراین یکی از مزایای روش، قابلیت استفاده آن برای هر مدل پرش و هر تعداد متناهی رژیم بدون نیاز به فرض اولیه در مورد رابطه مرزهای آزاد است.

آنالیز خطا به کمک اصل ماکزیمم گسسته دقت مرتبه دوم برای جواب‌های تقریبی را نشان دادند. همچنین نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهند که برای قیمت‌گذاری اختیارهای بدون سررسید به جای حل پرهزینه مسئله قیمت‌گذاری اختیارهای بلندمدت متناظر، به کمک روش ارائه شده می‌توان به نتایج سریع و قابل قبول برای قیمت این اختیارها دست یافت.



شکل ۳: قیمت اختیار فروش آمریکایی بدون سررسید تحت مدل سه رژیمه.

فهرست منابع

- [1] S. Asmussen, F. Avram, and M. R Pistorius. *Russian and american put options under exponential phase-type lévy models*. Stochastic Processes and their Applications, 109(1):79–111, 2004.
- [2] S. I. Boyarchenko and S. Z Levendorskii. *Option pricing for truncated lévy processes*. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 3(03):549–552, 2000.
- [3] S. I. Boyarchenko and S. Z Levendorskii. *Perpetual american options under lévy processes*. SIAM Journal on Control and Optimization, 40(6):1663–1696, 2002.
- [4] T. Chan. *Pricing perpetual american options driven by spectrally one-sided lévy processes*. preprint, 2000.
- [5] X. liang Cheng and L. Xue. *On the error estimate of finite difference method for the obstacle problem*. Applied mathematics and computation, 183(1):416–422, 2006.
- [6] A. Holmes, H. Yang, and S. Zhang. *A front-fixing finite element method for the valuation of American options with regime-switching*. International Journal of Computer Mathematics, 89(9):1094–1111, 2012.
- [7] Z. Jiang and M. R. Pistorius. *On perpetual American put valuation and first-passage in a regime-switching model with jumps*. Finance and Stochastics, 12(3):331–355, 2008.
- [8] A. Jobert and L. CG Rogers. *Option pricing with markov-modulated dynamics*. SIAM Journal on Control and Optimization, 44(6):2063–2078, 2006.
- [9] S. G. Kou and H. Wang. *Option pricing under a double exponential jump diffusion model*. Management science, 50(9):1178–1192, 2004.

- [10] A. Le, Z. Cen, and A. Xu. *A robust upwind difference scheme for pricing perpetual American put options under stochastic volatility*. International Journal of Computer Mathematics, 89(9):1135–1144, 2012.
- [11] H. P. McKean. *Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics*. Sloan Management Review, 6(2):32, 1965.
- [12] E. Mordecki. *Optimal stopping and perpetual options for lévy processes*. Finance and Stochastics, 6(4):473–493, 2002.
- [13] S. Salmi and J. Toivanen. *An iterative method for pricing American options under jump–diffusion models*. Applied Numerical Mathematics, 61:821–831, 2011.
- [14] T. Jinying and Z. Zhenzhong. *An explicit solution for perpetual American put options in a Markov–modulated jump–diffusion model*. Progress in Applied Mathematics, 4(2):65–77, 2012.
- [15] Q. Zhang and X. Guo. *Closed–form solutions for perpetual American put options with regime–switching*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 64(6):2034–2049, 2004.



Pricing Perpetual American Options Under Regime Switching Jump Diffusion Models

Saghar Heidari¹, Hossein Azari² §§ ,

(¹) Faculty of Mathematical Sciences, Department of Actuarial Science, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

(²) Faculty of Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

Communicated by: Mohammad Jolodari Mamaghani

Received: 2022/2/24

Accepted: 2022/8/21

Abstract: In this article, we examine the issue of pricing the perpetual American option with a differential equation approach with free boundary properties. To describe the underlying asset dynamics in these options, we use the feature of jump-diffusion models under regime-switching. In pricing these perpetual options, due to the possibility of early application, we need to solve the ordinary integro-differential equation with a free boundary. For this purpose, we write the equation created from this model first as a linear complementarity problem and then discretize it by using the finite difference method. We use linear interpolation to approximate the integral term. The discrete maximum principle is applied to the linear complementarity problems to obtain the error estimates. We also illustrate some numerical results to demonstrate and compare the accuracy of the method for our problem.

Keywords: Perpetual American option, Jump-Diffusion model, Regime-Switching model, Finite Difference method, Discrete maximum principle.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

§§ Corresponding author.

E-mail addresses: h_azari@sbu.ac.ir (H. Azari), S_heidari, namdari@ipm.ir (S. Heidari).