



بررسی نسبت رشد جوامع ژنتیکی با استفاده از یک روش جدید بدون شبکه‌بندی

عرفان بهمنی^{*}، علی شکری

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱

چکیده: در چند دهه‌ی اخیر، روش‌های عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی ابداع و معرفی شده‌اند. بسیاری از این روش‌ها بر پایه شبکه‌بندی دامنه مسئله بوده و از این‌رو دارای محدودیت‌هایی برای حل مسائل با دامنه پیچیده‌اند. بنابراین، در سال‌های اخیر، دسته جدیدی از روش‌های عددی با عنوان روش‌های بدون شبکه‌بندی توسعه یافته است به‌طوری‌که برای حل مسئله با استفاده از این روش‌ها نیازی به شبکه‌بندی دامنه نیست. در این مقاله، از روش بدون شبکه‌بندی پترو-گالرکین موضعی مستقیم برای حل عددی معادله‌ی غیرخطی فیشر دوبعدی استفاده می‌کنیم. این روش بر پایه فرم ضعیف معادله بوده و برای تقریب تابع مجهول از تقریب کم‌ترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته بهره می‌گیرد. برای نشان دادن قابلیت روش اشاره‌شده، نتایج عددی را در نواحی منظم و نامنظم و با توزیع نقاط به‌صورت یکنواخت و پراکنده گزارش می‌دهیم. مقایسه نتایج به‌دست آمده با سایر روش‌ها حاکی از دقت و کارایی روش مورد استفاده در این مقاله است.

واژه‌های کلیدی: روش بدون شبکه‌بندی موضعی پترو-گالرکین مستقیم، تقریب کم‌ترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته، فرم ضعیف موضعی، معادله‌ی غیرخطی فیشر دوبعدی.

رده‌بندی ریاضی: 65M99-35K57

۱ مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی همواره یک مسئله چالش برانگیز بین پژوهش‌گران و محققان در علوم مختلف بوده است. زیرا، بسیاری از مسائلی که در علوم مختلف مانند زیست‌شناسی، مهندسی، شیمی، فیزیک و غیره رخ می‌دهند، توسط معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی به یک مدل و مسئله ریاضی تبدیل می‌شوند. به‌عنوان مثال، می‌توان به معادله‌ی کاهن-هیلارد در علم مواد، معادلات غیرخطی شرودینگر و معادله‌ی غیرخطی کلاین-گوردون از مکانیک کوانتومی، معادلات واکنش-همرفت غیرخطی در علوم زیستی [۲۲]، جفت معادله‌ی غیرخطی مگنتو-هیدرواینامیک دوبعدی در علم فیزیک [۴] و جفت معادله‌ی ساین-گوردون دوبعدی غیرخطی در مباحث مرتبط با کریستال‌های مایع

^{*}نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: erfana.bahmani@znu.ac.ir (E. Bahmani) a.shokri@znu.ac.ir (A. Shokri)

[۱۹] اشاره کرد. از این رو، پژوهشگران و محققان همواره سعی در یافتن روش های کارآمدی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی کرده اند. تاکنون روش های بسیاری مانند روش تفاضلات متناهی، روش المان محدود و روش های طیفی و شبه طیفی معرفی شده اند. این دسته از روش ها، بر پایه شبکه بندی دامنه ی مسئله بوده و دارای محدودیت هایی برای حل مسائل با دامنه پیچیده اند. بنابراین، در سال های اخیر پژوهشگران دسته ی جدیدی از روش های عددی به نام روش های بدون شبکه بندی ارائه کرده اند که در این روش ها نیازی به شبکه بندی دامنه مسئله نیست. به عنوان مثال می توان از روش هایی مانند روش المان آزاد گالرکین، روش هایی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی، روش بدون شبکه بندی پترو-گالرکین موضعی (MLPG) و روش بدون شبکه بندی پترو-گالرکین موضعی مستقیم (DMLPG) نام برد. در این مقاله، در صدد حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی فیشر دوبعدی با استفاده از روش بدون شبکه بندی پترو-گالرکین موضعی مستقیم هستیم. این معادله به صورت زیر تعریف می شود:

$$u_t = \lambda \nabla^2 u + \mu u(1 - u), \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T] \quad (۱.۱)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{aligned}$$

شرایط مرزی و اولیه معادله اند. همچنین $u(x, t)$ تراکم جمعیت، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ دامنه مسئله، $\partial\Omega$ مرز دامنه، λ و μ ضرایب ثابت و مثبت و f و u_0 توابعی معلوم اند. معادله ی فوق برای اولین بار در سال ۱۹۳۷ توسط فیشر [۶]، کلموگوروف و همکاران [۸] معرفی شد. این معادله، به طور مستقل انتشار ژن جهش یافته را از طریق یک جمعیت تشریح می کند. از این رو، این معادله در بسیاری از شاخه های علوم و به ویژه در زیست شناسی و علم جدید ریاضیات زیستی کاربرد فراوانی دارد. به عنوان مثال، رشد منطقی صخره های مرجانی [۱۷] و دینامیک نوترون ها در یک راکتور هسته ای [۷] را می توان با معادله فیشر نشان داد. خوانندگان علاقه مند می توانند برای کاربردهای بیش تر این معادله به مقاله [۲۳] و منابع موجود در آن مراجعه کنند. تاکنون از روش های عددی بسیاری برای حل معادله فیشر استفاده شده است. به عنوان مثال می توان به روش تفاضلات متناهی صریح [۲۱]، روش تفاضلات متناهی ضمنی [۹] و روش عددی مبتنی بر توابع بسل [۱۵] اشاره کرد. همان طور که پیش تر اشاره شد، در این مقاله در صدد حل معادله ی فیشر بوده و بدین منظور از روش بدون شبکه بندی جدیدی به نام روش پترو-گالرکین موضعی مستقیم (DMLPG) استفاده می کنیم. این روش، در سال ۲۰۱۴ توسط میرزایی و شابک [۱۰] ابداع و معرفی شد. این روش بر پایه فرم ضعیف موضعی معادله دیفرانسیل بوده و برای تقریب توابع مجهول از تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته استفاده می کند. این روش یک روش بدون شبکه بندی واقعی بوده است؛ زیرا در هیچ کدام از مراحل پیاده سازی و حل معادله نیازی به شبکه بندی دامنه مسئله وجود ندارد در حالی که در بعضی از روش های بدون شبکه بندی مانند روش المان آزاد گالرکین برای انتگرال گیری های عددی موجود در فرم ضعیف معادله دیفرانسیل بایستی دامنه مسئله شبکه بندی شود. از روش DMLPG تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل مختلفی استفاده شده است. به عنوان مثال می توان به حل عددی معادله تلگراف دوبعدی [۱]، معادله غیر خطی گینزبرگ-لاندو دوبعدی [۲۰]، جفت معادله ی غیرخطی مگنتو-هیدرودینامیک دوبعدی [۴]، جفت معادله ی ساین-گوردون غیرخطی دوبعدی [۱۹] و معادله کلاین-گوردون دوبعدی [۵] اشاره کرد.

این مقاله شامل هفت بخش اساسی است. پس از بیان مقدمه در بخش اول، در بخش دوم مقاله به بیان تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته (GMLS) می پردازیم. نحوه ی به دست آوردن فرم ضعیف معادله غیرخطی فیشر دوبعدی و پیاده سازی روش های DMLPG بر روی این معادله در بخش سوم مقاله و انواع روش های DMLPG در بخش چهارم بیان شده اند. در بخش پنجم مقاله به بررسی آنالیز پایداری طرح زمانی می پردازیم. نتایج عددی به دست آمده در بخش ششم و نتیجه گیری کلی در بخش هفتم مقاله آورده شده است.

۲ تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته

در ابتدا و قبل از پرداختن به مفاهیم مربوط به کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته بایستی تعاریف و مفاهیم جدیدی را معرفی کنیم. یک روش بدون شبکه بندی روشی است که جواب تقریبی مسئله را برحسب مقادیر یک تابع مجهول در نقاط پراکنده فراهم آورد. فرض کنیم $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعه ای از نقاط دل خواه و پراکنده در دامنه مسئله یعنی Ω باشد. تقریب بر پایه یک روش بدون شبکه بندی به طور مستقیم به نحوه توزیع این نقاط بستگی دارد. بدین منظور دو مفهوم فاصله ی تراکم و فاصله جدایی برای مجموعه نقاط پراکنده و متمایز X به صورت زیر قابل تعریف اند.

تعریف ۱.۲. برای مجموعه نقاط متمایز و پراکنده $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ در یک ناحیه کران دار $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ، فاصله تراکم به شکل

$$h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2, \quad (۱.۲)$$

و فاصله‌ی جدایی به صورت

$$q_x = \frac{1}{\gamma} \min_{j \neq i} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|_2, \quad (2.2)$$

تعریف می‌شوند. همچنین اگر برای مجموعه X از نقاط پراکنده در دامنه نسبت به پارامتر ثابت C_{qu} رابطه

$$q_x \leq h_{X,\Omega} \leq C_{qu} q_x \quad (3.2)$$

صادق باشد، آن‌گاه این مجموعه در شرط شبه-یکنواخت صدق می‌کند [۸۲].

تقریب کم‌ترین مربعات متحرک تعمیم‌یافته که از این پس آن را به اختصار با GMLS نشان می‌دهیم، تعمیمی از تقریب کم‌ترین مربعات متحرک (MLS) است. برای درک بهتر از نحوه کار روش GMLS ابتدا به طور خلاصه به بیان مفاهیم تقریب MLS می‌پردازیم. روش MLS مبتنی بر نقاط دلخواه و پراکنده شده در دامنه‌ی مسئله پیاده‌سازی می‌شود و از این رو یک روش مناسب برای تقریب توابع مجهول یک معادله در روش‌های بدون شبکه‌بندی است. فرض کنیم مقادیر $\mathbf{u} = \{u(\mathbf{x}_i)\}_{i=1}^n$ در نقاط $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ داده شده‌اند. روش MLS برای هر نقطه‌ی $\mathbf{x} \in \Omega$ یک مسئله‌ی کم‌ترین مربعات وزن‌دار موضعی حل می‌کند. لازم به ذکر است که تقریب تابع در هر نقطه $\mathbf{x} \in \Omega$ بر حسب مقدار تابع در نقاط مجاور نوشته شده و برای تعیین میزان تأثیر هر نقطه از یک تابع وزن به فرم $W: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ استفاده می‌شود که با دور شدن از نقطه‌ی \mathbf{x} مقدار آن به صفر میل می‌کند. حال به منظور محاسبه تقریب تابع مجهول $u(\mathbf{x})$ (که در ناحیه Ω داده شده است) ابتدا یک زیردامنه مانند Ω_x انتخاب می‌کنیم. این زیر دامنه به عنوان دامنه تعریف تقریب MLS برای تابع درون‌یاب در نقطه \mathbf{x} است و داخل Ω (کل دامنه) قرار می‌گیرد. اگر زیردامنه‌ی انتخاب شده یک همسایگی از نقطه \mathbf{x} باشد، تقریب کم‌ترین مربعات متحرک را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۲.۲. مقدار تقریب کم‌ترین مربعات متحرک $u^h(\mathbf{x})$ از تابع $u(\mathbf{x})$ برای $\mathbf{x} \in \Omega$ ، برابر است با $u^h(\mathbf{x}) = p^*(\mathbf{x})$ به طوری که $p^*(\mathbf{x})$ جواب مسئله مینیمم‌سازی

$$\min \sum_{i \in I(\mathbf{x})} (u(\mathbf{x}_i) - p(\mathbf{x}_i))^2 W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), \quad p \in \mathbb{P}_m^N, \quad (4.2)$$

است به طوری که $I(\mathbf{x}) := \{i \in \{1, \dots, n\} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 \leq d\}$ فضای چندجمله‌ای‌های N -بعدی با مرتبه m است که $Q = \dim(\mathbb{P}_m^N) = \binom{N+m}{N}$ [۸۸].

برای تعمیم تقریب MLS فرض کنیم $u \in C^m(\Omega)$ برای $0 \leq m$ ، همچنین فرض کنیم $\{\lambda_i(u)\}_{i=1}^n$ مجموعه‌ای از تابع‌های خطی و پیوسته از دوگان $C^m(\Omega)$ یعنی $C^m(\Omega)^*$ باشند. برای یک تابع ثابت داده شده‌ی $\varphi \in C^m(\Omega)^*$ مسئله یافتن تقریب مقدار ثابت $\varphi(u)$ به کمک مقادیر $\{\lambda_i(u)\}_{i=1}^n$ است [۱۰].
تابع‌های φ و λ_i برای $1 \leq i \leq n$ می‌توانند ارزیاب‌های نقطه‌ای تابع u یا مشتقات آن تا مرتبه‌ی m ، یا انتگرال‌های موضعی شامل تابع u و مشتقات این تابع باشند. تقریب $\varphi(u)$ از $\varphi(u)$ بایستی نسبت به داده‌های $\lambda_i(u)$ خطی باشد، یعنی باید بتوان آن را به فرم زیر نوشت:

$$\widehat{\varphi(u)} = \sum_{i=1}^n \psi_i(\varphi) \lambda_i(u), \quad (5.2)$$

همچنین ضرایب ψ_i باید نسبت به φ خطی باشند. همانند تقریب MLS، فرض کنید معادله‌ی تقریبی (۵.۲) برای یک زیر فضای با بعد متناهی

$$\mathcal{P} = \text{span} \{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \subset C^m(\Omega)$$

دقیق باشد، یعنی

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(\varphi) \lambda_i(p) = \varphi(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (6.2)$$

تقریب GMLS برای تابع $\varphi(u)$ ، تقریبی عددی به صورت $\widehat{\varphi(u)} = \varphi(p^*)$ را فراهم می کند به طوری که $p^* \in \mathcal{P}$ با کمینه کردن خطای کمترین مربعات وزن دار

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i(u) - \lambda_i(p))^2 w_i, \quad (7.2)$$

روی $p \in \mathcal{P}$ حاصل می شود. در این مسئله ی بهینه سازی توابع وزن به صورت

$$w_i = W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = W_d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = W(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2/d), \quad 1 \leq i \leq n \quad (8.2)$$

در نظر گرفته می شوند به طوری که تابع نامنفی W برای حالتی که فاصله ی آرگومان های آن از d بیش تر است، صفر می شود. همچنین فرض کنید این تابع روی گوی $B(\circ, 1/2)$ اکیدا مثبت باشد. (این فرض برای آنالیز خطای روش لازم است). اکنون رابطه معادل تقریب کلاسیک MLS از کمینه سازی فرم درجه دوم را به عنوان تابعی از ضرایب $\psi_i(\varphi)$ که در شرط (۶.۲) صدق می کند به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i^2(\varphi) / w_i \quad (9.2)$$

بنابراین جواب های بهینه p^* و $\psi^*(\varphi) = (\psi_1^*(\varphi), \dots, \psi_n^*(\varphi))^T$ از مسئله های بهینه سازی (۷.۲) و (۹.۲) با رابطه ی

$$\widehat{\varphi(u)} = \varphi(p^*) = \sum_{i=1}^n \psi_i^*(\varphi) \lambda_i(u), \quad (10.2)$$

در ارتباط اند که این موضوع درستی رابطه (۵.۲) را نشان می دهد. توجه کنید که جواب بهینه p^* از مسئله ی بهینه سازی (۷.۲) به تابع φ وابسته نیست. با محاسبه ی p^* از داده های $\lambda_i(u)$ می توان تقریبی از $\varphi(u)$ برای همه ی φ ها با محاسبه ی $\varphi(p^*)$ به دست آورد. همچنین این روش در تقریب مشتقات روش MLS بسیار مهم است؛ اما بایستی به نقش استقلال توابع وزن از تابع φ توجه داشت [۱۱]. حال فرض کنید تابع

$$\lambda_{\mathbf{x},\alpha}(u) := \delta_{\mathbf{x}} D^{\alpha} u \quad (11.2)$$

برای نقطه ی ثابت $\mathbf{x} \in \Omega$ تعریف شود که در آن $|\alpha| \leq m$ یک چند اندیس به فرم

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

است به طوری که $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ و $\alpha_d, \dots, \alpha_2, \alpha_1$ اعداد صحیح نامنفی اند. تقریب GMLS تابع فوق، مشتقات مستقیم تابع u را تقریب می زند. می توان تابع بالا را به صورت کلی تر

$$\lambda(u) = \lambda_{\mathbf{x},\alpha,w}(u) := \int_{\Omega} w(y) \mathcal{L} u(y) dy, \quad \Omega = \Omega_x \quad \text{or} \quad \partial \Omega_x, \quad (12.2)$$

تعریف کرد که در آن \mathcal{L} یک عمل گر دیفرانسیل خطی و $\Omega_x \subseteq \Omega$ یک دامنه ی موضعی شامل نقطه ثابت \mathbf{x} است و $\partial \Omega_x$ مرز آن است. برای مثال $\partial \Omega_x$ می تواند گوی $B(\mathbf{x}, \sigma)$ یا یک مربع یا مکعب به مرکز \mathbf{x} باشد. بنابراین تابع (۱۱.۲) نیز حالت خاصی از تابع (۱۲.۲) است که در آن w تابع دلتای دیراک در نقطه \mathbf{x} و $\mathcal{L} = D^{\alpha}$ [۱۲].

همان گونه که پیش تر اشاره شد، نحوه انتخاب توابع وزن در تقریب های MLS و GMLS از اهمیت ویژه ی برخوردار است. در حقیقت وزن های (۸.۲) که در تقریب MLS کلاسیک به کار می روند در حالتی که از تابع های کلی تر استفاده شود نیز به کار گرفته می شوند. برای به دست آوردن یک تقریب موضعی در اطراف نقطه ی ثابت \mathbf{x} ، اندیس های $i \in \{1, \dots, n\}$ به

$$I(\mathbf{x}) := \{i : 1 \leq i \leq n, w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) > \circ\}$$

کاهش می یابند. با انتخاب پایه $\{p_1, \dots, p_Q\}$ از فضای \mathcal{P} می توان مسئله (۷.۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min \|\sqrt{W}(\mathbf{u} - P\Phi)\|_2^2$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}\Phi &= (\phi_1, \dots, \phi_Q)^T \in \mathbb{R}^Q, \\ \mathbf{u} &= (u(\mathbf{x}_i) : i \in I(\mathbf{x}))^T \in \mathbb{R}^{|I(\mathbf{x})|}, \\ P &= [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]^T \\ W &= \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & w_2(\mathbf{x}) & \cdots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{n \times n}.\end{aligned}$$

که در این جا $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_Q(\mathbf{x})]^T$ اکنون با استفاده از نظریه‌ی بهینه‌سازی کم‌ترین مربعات، جواب بهینه‌ی Φ^* در معادله‌ی نرمال

$$A\Phi^* = B\mathbf{u} \quad (۱۳.۲)$$

صدق می‌کند که در آن $A = P^T W P$ و $B = P^T W$. ماتریس A از مرتبه‌ی $Q \times Q$ است و دارای نقش مهمی در تقریب GMLS است. اگر رتبه‌ی سطری (یا ستونی) A برابر Q باشد آن‌گاه جواب بهینه یکتا خواهد بود. فرض کنید چنین باشد، یعنی فرض کنید مجموعه نقاط $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ در شرط \mathcal{P} -یکتاهل‌کنندگی صدق کند. در این صورت بهترین جواب تقریبی $\psi^*(\varphi)$ از (۱۰.۲) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\psi^*(\varphi) = W P^T (P W P^T)^{-1} \varphi(p)$$

که در آن W یک ماتریس قطری با درایه‌های وزنی w_i و $P_{n \times Q}$ یک ماتریس با درایه‌های $\varphi_i(p_k)$ است. برای به‌دست آوردن درایه‌های ماتریس وزنی W می‌توان از توابع وزن متفاوتی نظیر اسپلاین‌ها، تابع وزن نمایی و همچنین تابع وزن گاوسی استفاده کرد. توابع وزن از نظر مرتبه همواری دارای اهمیت بسیاری هستند. این توابع می‌توانند با هر مرتبه همواری دل‌خواه ساخته شوند. در این مقاله از تابع وزن گاوسی که به فرم زیر تعریف می‌شود، استفاده شده است:

$$W(x - x_i) = \begin{cases} \frac{\exp[-(r/c)^2] - \exp[-(\delta/c)^2]}{1 - \exp[-(\delta/c)^2]}, & 0 \leq r \leq \delta \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

در این تابع پارامتر c عددی ثابت است و شکل تابع وزن را کنترل می‌کند. مقادیر کوچک‌تر c منجر به تابعی با قله‌ی شیب‌دارتر می‌شود. اگرچه در نگاه اول این پارامتر ثابتی کم‌اثر نشان می‌دهد، اما در پایداری روش مؤثر است. مقدار بهینه‌ای برای این عدد در دست نیست و همواره سعی بر این است که بسته به نوع مسئله مقدار آزمایشی مناسبی برای آن در نظر گرفته شود.

۱.۲ آنالیز خطای تقریب GMLS

برای بررسی دقیق‌تر وزن‌های تابع تقریب، تابع پیوسته‌ی $W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ که

$$\begin{aligned}W(r) &> 0, \quad 0 \leq r < 1, \\ W(r) &= 0, \quad r \geq 1,\end{aligned}$$

را انتخاب و

$$W_d(\mathbf{x} - y) = W\left(\frac{\|\mathbf{x} - y\|_2}{d}\right), \quad (۱۵.۲)$$

را با $d > 0$ به‌عنوان تابع وزن در نظر می‌گیریم. اکنون مجموعه اندیس

$$I(\mathbf{x}) := \{i : 1 \leq i \leq n, w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) > 0\}$$

را تعریف کرده و فرض می‌کنیم $\mathcal{P} = \mathbb{P}_m^N$. برای یافتن نرخ هم‌گرایی باید یک دستگاه باز تولید موضعی چندجمله‌ای پایدار تعمیم یافته را تعریف کنیم و سپس کرانی برای خطای روش GMLS ارائه خواهیم کرد.

تعریف ۳.۲. اگر بتوان برای هر مجموعه‌ی \mathbb{P}_m^N یک تاحل کننده‌ی $X = \{\mathbf{x}\}_{i=1}^n \subset \Omega$ خانواده‌ای از توابع به صورت $s_{\alpha,i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یافت به طوری که چند اندیشه α در ویژگی $|\alpha| \leq m$ صدق کند و تقریب

$$\varphi_{\mathbf{x},\alpha}(u) \approx \sum_{i=1}^n s_{\alpha,i}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}_i) \quad (۱۶.۲)$$

برای تابع $u \in C^m(\Omega)$ موجود باشد، آن گاه گوئیم یک باز تولید موضعی چند جمله‌ای پایدار تعمیم یافته از درجه m روی ناحیه Ω وجود دارد اگر ثابت‌های مثبت h_0 ، C_1 و C_2 موجود باشند به طوری که روابط

$$۱) \sum_{i=1}^n s_{\alpha,i}(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_i) = \varphi_{\mathbf{x},\alpha}(p), \quad \forall p \in \mathbb{P}_m^N,$$

$$۲) \sum_{i=1}^n |s_{\alpha,i}(\mathbf{x})| \leq C_1 h_{X,\Omega}^{-|\alpha|}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$۳) s_{\alpha,i}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{اگر} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 > C_2 h_{X,\Omega},$$

برای هر $|\alpha| \leq m$ و هر X با ویژگی $h_{X,\Omega} \leq h_0$ برقرار باشند [۱۲].

قضیه ۴.۲. [۱۲] فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ یک مجموعه کران دار و Ω^* بستر مجموعه $B(\mathbf{x}, C_2 h_0)$ باشد. با توجه به رابطه (۱۶.۲) خواهیم داشت:

$$\widehat{\varphi_{\mathbf{x},\alpha}(u)} = \sum_{i=1}^n s_{\alpha,i}(\mathbf{x})u(\mathbf{x}_i),$$

که $\{s_{\alpha,i}\}_{i=1}^n$ یک باز تولید موضعی چند جمله‌ای پایدار تعمیم یافته از درجه m روی ناحیه Ω است. اگر $u \in C^{m+1}(\Omega^*)$ ، آن گاه برای تمامی X ها با ویژگی $h_{X,\Omega} \leq h_0$ ، ثابت C موجود است به طوری که

$$\left| \widehat{\varphi_{\mathbf{x},\alpha}(u)} - \varphi_{\mathbf{x},\alpha}(u) \right| \leq C h_{X,\Omega}^{m+1-|\alpha|} |u|_{C^{m+1}(\Omega^*)}. \quad (۱۷.۲)$$

□

اثبات. برای اثبات به [۱۲] مراجعه شود.

۳ فرم ضعیف موضعی معادله فیشر و پیاده سازی روش DMLPG

برای پیاده سازی روش DMLPG مجموعه‌ای از نقاط پراکنده به صورت $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را در دامنه‌ی Ω و مرز Γ در نظر می گیریم. سپس در همسایگی هر نقطه x_k یک زیر دامنه‌ی کوچک $\Omega_x \subset \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ انتخاب می کنیم. این زیر دامنه ها در فضای دو بعدی به صورت دایره و یا مستطیل در نظر گرفته می شوند. اکنون با ضرب طرفین معادله‌ی فیشر (۱.۱) در تابع تست v و با انتگرال گیری روی زیر دامنه‌ی Ω_x ، فرم ضعیف موضعی معادله‌ی فیشر به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_{\Omega_x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \nabla^2 u - \mu F(u) \right) v d\Omega = 0, \quad (۱.۳)$$

که در این جا $F(u) = u(1-u)$. با استفاده از قضیه دیورژانس و خاصیت خطی بودن انتگرال داریم:

$$\int_{\Omega_x} u_t v d\Omega = \lambda \int_{\partial\Omega_x} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma - \lambda \int_{\Omega_x} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \mu \int_{\Omega_x} F(u) v d\Omega. \quad (۲.۳)$$

تمامی انتگرال ها در فرم ضعیف موضعی (۲.۳) با استفاده از روش GMLS به صورت زیر تقریب زده می شوند:

$$\varphi_{1,k}(u) := \int_{\Omega_x} u v d\Omega \approx \widehat{\varphi_{1,k}(u)} = \sum_{i=1}^n \psi_{1,i}(x_k) u(x_i), \quad (۳.۳)$$

$$\varphi_{2,k}(u) := \int_{\partial\Omega_x} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \approx \widehat{\varphi_{2,k}(u)} = \sum_{i=1}^n \psi_{2,i}(x_k) u(x_i), \quad (۴.۳)$$

$$\varphi_{3,k}(u) := \int_{\Omega_x} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \approx \widehat{\varphi_{3,k}(u)} = \sum_{i=1}^n \psi_{3,i}(x_k) u(x_i). \quad (۵.۳)$$

اکنون برای گسسته‌سازی مشتقات مربوط به متغیرهای زمانی و مکانی، از تقریب کرانک-نیکلسون که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم:

$$u_t^{k+\frac{1}{2}} \simeq \frac{u^{(k+1)} - u^{(k)}}{dt}, \quad u^{k+\frac{1}{2}} \simeq \frac{u^{(k+1)} + u^{(k)}}{2}. \quad (۶.۳)$$

بنابراین فرم ماتریسی معادله (۲.۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(\mathfrak{A}^{(1)} - \lambda dt B) u^{(k+1)} = (\mathfrak{A}^{(1)} + \lambda dt B) u^{(k)} + \mathfrak{A} \mu dt F(t), \quad (۷.۳)$$

که در آن dt گام زمان، $F(t)$ انتگرال تابع سمت راست و $B = A_1 + A_2$ k -امین سطر ماتریس‌های $A^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2, 3$ به صورت زیر است:

$$a_{k,:}^{(\ell)} = W P^T (P W P^T)^{-1} \varphi_{\ell,k}(\mathbf{p}) \quad (۸.۳)$$

که در آن

$$\varphi_{1,k}(\mathbf{p}) = \left[\int_{\Omega_x} p_1 v d\Omega, \int_{\Omega_x} p_2 v d\Omega, \dots, \int_{\Omega_x} p_Q v d\Omega \right]^T, \quad (۹.۳)$$

$$\varphi_{2,k}(\mathbf{p}) = \left[\int_{\partial\Omega_x} \frac{\partial p_1}{\partial n} v d\Gamma, \int_{\partial\Omega_x} \frac{\partial p_2}{\partial n} v d\Gamma, \dots, \int_{\partial\Omega_x} \frac{\partial p_Q}{\partial n} v d\Gamma \right]^T, \quad (۱۰.۳)$$

$$\varphi_{3,k}(\mathbf{p}) = \left[\int_{\Omega_x} \nabla p_1 \cdot \nabla v d\Omega, \int_{\Omega_x} \nabla p_2 \cdot \nabla v d\Omega, \dots, \int_{\Omega_x} \nabla p_Q \cdot \nabla v d\Omega \right]^T. \quad (۱۱.۳)$$

۴ انواع روش‌های DMLPG

یکی از مسائل مهم و اساسی در روش‌های DMLPG این است که می‌توان فضای آزمون و فضای توابع تست را متفاوت از یکدیگر انتخاب کرد. همچنین می‌توان توابع تقریب مختلفی را بر اساس نقاط آزمون در نظر گرفت که معمولاً در روش DMLPG از تقریب GMLS به عنوان توابع تقریب استفاده می‌شود. با انتخاب توابع تست متفاوت می‌توان انواع روش‌های DMLPG را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

(۱) توابع وزن موجود در تقریب GMLS.

(۲) تابع دلتای دیراک.

(۳) تابع خطا در معادله‌ی دیفرانسیل با استفاده از کم‌ترین مربعات گسسته.

(۴) جواب پایه‌ای اصلاح شده‌ی معادلات دیفرانسیل.

(۵) توابع ثابت (مانند توابع هویساید) برای معادلات از مرتبه‌ی دوم و توابع خطی برای معادلات از مرتبه‌ی چهارم.

(۶) تابع آزمون به عنوان تابع تست.

برای اطلاع از انواع دیگری از روش‌های DMLPG به مقاله [۲] مراجعه شود. در ذیل به بیان مختصری از انواع روش‌های فوق می‌پردازیم.

۱.۴ روش‌های DMLPG ۶/۵/۱

روش DMLPG ۱ مبتنی بر فرم ضعیف موضعی (۲.۳) است. در این روش‌ها هر تابع پیوسته روی زیر دامنه Ω_x که روی $\partial\Omega_x \cap \Gamma$ صفر شود، می‌تواند به عنوان تابع تست انتخاب شود. به عنوان مثال می‌توان تابع تست را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$v = v(x; x_k) = W \left(\frac{\|x - x_k\|_2}{r_0} \right)$$

به طوری که W تابع وزن تقریب GMLS با شعاع d بوده و در دامنه‌ی موضعی Ω_x ، تابع وزن مذکور با شعاع r در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله برای پیاده‌سازی روش ۱DMLPG از تابع وزن گاوسی (۱۴.۲) به عنوان تابع تست استفاده شده است. در این صورت بردار (۱۰.۳) برابر صفر خواهد بود.

روش ۵DMLPG نیز مبتنی بر فرم ضعیف موضعی (۲.۳) است. معمولاً در این روش‌ها از توابع ثابت در معادلات با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم و از توابع خطی در معادلات با مشتقات جزئی مرتبه‌ی چهارم به عنوان توابع تست استفاده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان از تابع هویساید به فرم

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_x \\ 0, & x \notin \Omega_x \end{cases} \quad (۱.۴)$$

به عنوان تابع تست در معادلات با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم استفاده کرد. در این صورت بردار (۱۱.۳) برابر صفر خواهد بود. در روش ۶DMLPG توابع تقریب در نقاط آزمون و توابع تست از فضای یکسان انتخاب می‌شوند. این روش‌ها نیز بر پایه فرم ضعیف موضعی (۲.۳) است. از آنجا که توابع تست و توابع تقریب یکسان است پس روش‌های ۶DMLPG از نوع روش‌های گالرکین‌اند و واضح است که زیر دامنه‌های موضعی بایستی براساس دامنه‌های تعریف نقاط در فضای آزمون باشند. به وضوح محاسبه‌ی انتگرال‌های عددی در این روش‌ها بسیار دشوارتر است. برای اطلاع راجع به نحوه‌ی به دست آوردن ماتریس ضرایب و بردار سمت راست در روش‌های ۶DMLPG به [۳] مراجعه شود.

۲.۴ روش‌های ۳/۲DMLPG

تابع دلتای دیراک در زیر دامنه‌ی موضعی Ω_x در رابطه‌ی (۱.۳) در روش ۲DMLPG می‌تواند به عنوان تابع تست ν انتخاب شود؛ یعنی در این روش‌ها مجموعه‌ای از شکل قوی PDE و تمامی شرایط مرزی وجود دارد. روش ۲DMLPG یک روش مناسب برای حذف و نادیده گرفتن انتگرال‌های عددی است. بدین دلیل یک روش بدون شبکه‌بندی و آسان در بین تمامی روش‌های DMLPG است. اما این روش نیازمند مشتق مراتب بالاتر است و بنابراین مرتبه‌ی هم‌گرایی با مرتبه‌ی مشتق کاهش می‌یابد. گاهی اوقات به روش ۲DMLPG روش مجموعه‌ی کم‌ترین مربعات متحرک مستقیم گفته می‌شود [۱۲].

روش ۳DMLPG تابع خطای به وجود آمده از اعمال توابع تقریب در فرم ضعیف موضعی (۱.۳) را به عنوان تابع تست در هر زیر دامنه موضعی در نظر می‌گیرد. همچنین در این روش می‌توان از کم‌ترین مربعات گسسته به عنوان تابع تست استفاده کرد. از این رو، توابع تقریب و توابع تست از فضای یکسان انتخاب می‌شوند. نحوه‌ی به دست آوردن ماتریس ضرایب و بردار سمت راست در روش ۳DMLPG در [۳] آورده شده است.

۳.۴ روش ۴DMLPG

این روش بر پایه‌ی فرم ضعیف موضعی (۲.۳) بوده و از جواب اساسی یک معادله‌ی بیضوی فضایی به عنوان تابع تست استفاده می‌کند. لازم به ذکر است که این روش برای مسائل دو بعدی پیاده‌سازی می‌شود. بدین منظور از عملگر لاپلاس دو بعدی به فرم زیر استفاده می‌شود:

$$v(x; y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}, \quad r = \|x - y\|_2,$$

که مطابق با معادله‌ی پواسون $\Delta v(x; y) + \delta(r) = 0$ بوده و جواب اساسی برای $r = r_0$ به سمت صفر میل می‌کند. در این روش نیازی به مشتقات توابع شکل در تولید ماتریس ضرایب نیست. از سوی دیگر با توجه به ساختار توابع تست تمامی انتگرال‌های موجود در فرم ضعیف موضعی تکین بوده که این موضوع مستلزم استفاده کردن از روش‌های خاص برای حل انتگرال‌ها است.

از نظر محاسباتی روش‌های ۱DMLPG و ۵DMLPG بیشتر از سایر روش‌ها مورد توجه پژوهشگران واقع شده‌اند. زیرا پیاده‌سازی این روش‌ها با توجه به نوع انتخاب توابع تست ساده‌تر از سایر روش‌ها است. بنابراین در این مقاله، ما نتایج عددی حاصل از دو روش ۱DMLPG و ۵DMLPG را برای معادله فیشر دو بعدی را به دست آورده و در بخش‌های بعد گزارش می‌دهیم.

۵ آنالیز پایداری برای طرح زمانی

در این بخش به بررسی آنالیز پایداری طرح زمانی گسسته‌سازی شده می‌پردازیم. بدین منظور قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. فرض کنید $\widehat{u} \in H_0^{\gamma}(\Omega)$ جواب تقریبی معادله‌ی (۱.۱) باشد به‌طوری‌که

$$H_0^{\gamma}(\Omega) = \{u \in L^{\gamma}(\Omega), D^{\alpha}u \in L^{\gamma}(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq \gamma\}.$$

در این صورت طرح زمانی نیمه گسسته

$$\widehat{u}_t^{k+\frac{1}{\gamma}} - \lambda \nabla^{\gamma} \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}} = \mu F^{k+\frac{1}{\gamma}} \quad (۱.۵)$$

به‌صورت نامشروط پایدار است.

اثبات. در اولین گام، با استفاده از قضیه دیورژانس، فرم ضعیف معادله‌ی (۱.۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\widehat{u}_t^{k+\frac{1}{\gamma}}, v\right) + \lambda \left(\nabla \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}, \nabla v\right) = \mu \left(F^{k+\frac{1}{\gamma}}, v\right). \quad (۲.۵)$$

با قرار دادن $v = dt \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}$ خواهیم داشت:

$$dt \left(\widehat{u}_t^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right) + \lambda dt \left(\nabla \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}, \nabla \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right) = \mu dt \left(F^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right). \quad (۳.۵)$$

در گام دوم، مجموعی برای k از ۰ تا $K-1$ را برای معادله‌ی (۳.۵) به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(\widehat{u}_t^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right) + \lambda dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(\nabla \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}, \nabla \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right) = \mu dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(F^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right). \quad (۴.۵)$$

حال برای جواب تقریبی \widehat{u} ، می‌توان اولین جمله از معادله‌ی (۴.۵) را به فرم ساده‌تر نوشت. یعنی

$$\begin{aligned} dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{\widehat{u}^{k+1} - \widehat{u}^k}{dt}, \frac{\widehat{u}^{k+1} + \widehat{u}^k}{2}\right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} (\widehat{u}^{k+1} - \widehat{u}^k, \widehat{u}^{k+1} + \widehat{u}^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} [\|\widehat{u}^{k+1}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 - \|\widehat{u}^k\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2] \\ &= \frac{1}{2} [\|\widehat{u}^K\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 - \|\widehat{u}^0\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2]. \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

اکنون می‌توان معادله‌ی (۴.۵) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} [\|\widehat{u}^K\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 - \|\widehat{u}^0\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2] + \lambda dt \sum_{k=0}^{K-1} \|\widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 = \mu dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(F^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right). \quad (۶.۵)$$

بنابراین رابطه (۶.۵) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\|\widehat{u}^K\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 - \|\widehat{u}^0\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2] + \lambda dt \sum_{k=0}^{K-1} \|\widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 &= \mu dt \sum_{k=0}^{K-1} \left(F^{k+\frac{1}{\gamma}}, \widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\right) \\ &\leq \frac{\mu dt}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \|F^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 + \frac{\mu dt}{2} \sum_{k=0}^{K-1} \|\widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (۷.۵)$$

حال داریم:

$$\|\widehat{u}^K\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 \leq \|\widehat{u}^0\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 + \mu dt \sum_{k=0}^{K-1} \|F^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 + (\mu - 2\lambda) dt \sum_{k=0}^{K-1} \|\widehat{u}^{k+\frac{1}{\gamma}}\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^2 \quad (۸.۵)$$

برای $K = k$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu dt \sum_{n=\circ}^{k-1} \|F^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C} \sum_{n=\circ}^{k-1} \|u^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ &\leq \|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu dt \sum_{n=\circ}^{k-1} \|F^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tilde{C}}{\gamma} \sum_{n=\circ}^{k-1} \left(\|\widehat{u}^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \|\widehat{u}^n\|^2 \right) \\ &\leq \|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu dt \sum_{n=\circ}^{k-1} \|F^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{C} \sum_{n=\circ}^k \|\widehat{u}^n\|^2,\end{aligned}\quad (۹.۵)$$

به طوری که $\tilde{C} = (\mu - 2\lambda)dt$.

اکنون با ساده سازی معادله (۹.۵) و استفاده از لم گرانوال [۱۴] خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}^k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left[\|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2 + k\mu dt \max_{\circ \leq n \leq k} \|F^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \exp(\tilde{C}) \\ &\leq \left[\|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\mu T \max_{\circ \leq n \leq k} \|F^{n+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \exp(\tilde{C}) \\ &\leq C \|\widehat{u}^\circ\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}\quad (۱۰.۵)$$

□

۶ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده سازی دو روش DMLPG و Δ DMLPG بر روی معادله غیر خطی فیشر دو بعدی گزارش خواهد شد. تمامی برنامه ها با استفاده از نرم افزار Matlab نوشته شده و روی کامپیوتری با مشخصات Core i۵ ۳/۸ GHz با ۸ GB حافظه RAM اجرا شده است. خطای نتایج عددی با استفاده از دو نرم بینهایت L_∞ و نرم دو L_2 گزارش شده و نرخ هم گرایی عددی

$$C - \text{order} = \frac{\log\left(\frac{L_\infty(\Delta_1)}{L_\infty(\Delta_2)}\right)}{\log\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)},$$

نیز گزارش شده است که $L_\infty(\Delta_1)$ و $L_\infty(\Delta_2)$ مقدار حداکثر خطا برای گام های زمانی و یا مکانی مختلف است. همچنین برای پی بردن به کارایی و دقت روش های DMLPG تمامی نتایج به دست آمده با نتایج گزارش شده برای روش موجک در [۱۳] مقایسه شده است.

۱.۶ مثال ۱

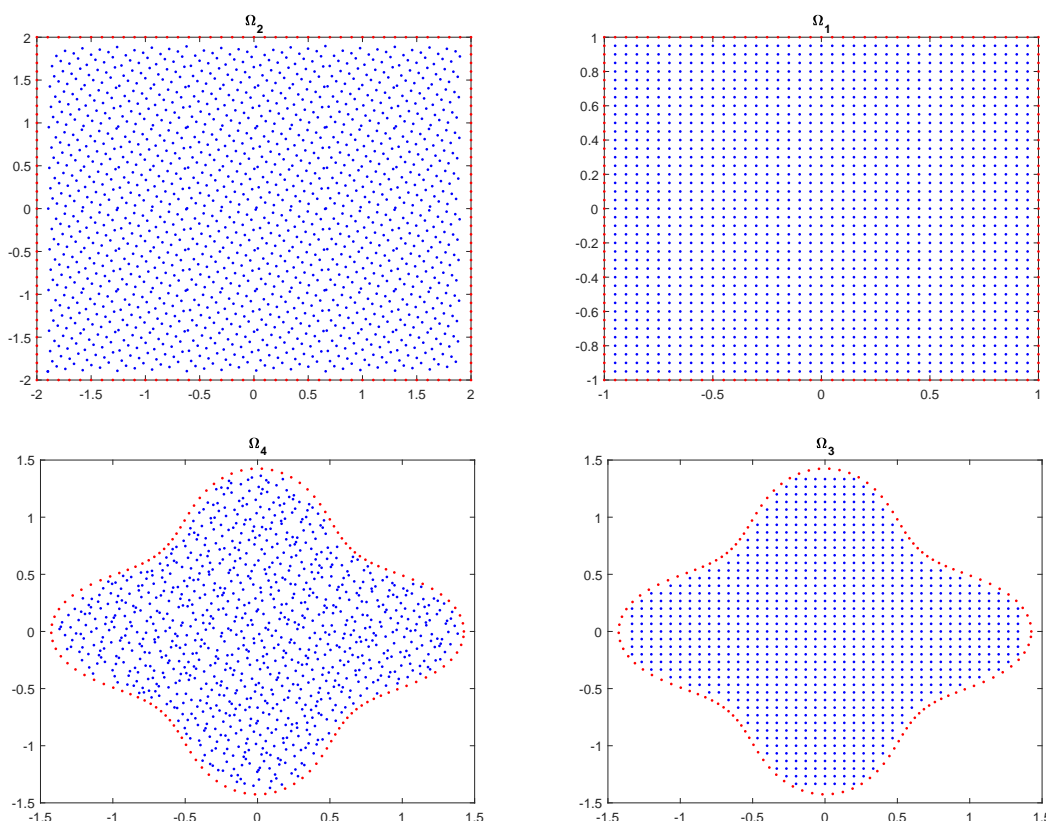
برای اولین مثال عددی، چهار ناحیه متفاوت (دو ناحیه منظم و دو ناحیه نامنظم) به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned}\Omega_i &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \circ \leq x, y \leq L\}, \quad i = 1, 2 \\ \Omega_i &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r_i \cos(\alpha), y = r_i \sin(\alpha)\}, \quad i = 3, 4,\end{aligned}$$

به طوری که $\circ \leq \alpha \leq 2\pi$ و $r_3 = r_4 = \left(\cos(4\alpha) + \sqrt{\frac{18}{5} - \sin^2(4\alpha)} \right)^{1/2}$. توزیع نقاط در داخل و بر روی مرز Ω_i ها در شکل ۱ نشان داده شده است. حال معادله غیر خطی فیشر دو بعدی (۱.۱) را با $\lambda = \mu = 1$ و جواب تحلیلی زیر در نظر می گیریم:

$$u(x, y, t) = \left[1 + \exp\left(\frac{((x - y)/\sqrt{2}) - (5/\sqrt{6})t}{\sqrt{6}} \right) \right]^{-2}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (۱.۶)$$

به طوری که شرایط اولیه و شرایط مرزی به راحتی از جواب تحلیلی قابل محاسبه است. برای این مثال ۴ حالت مختلف را در نظر می گیریم.



شکل ۱: توزیع نقاط منظم و نامنظم در دامنه‌های مختلف Ω_i برای مثال ۱.

حالت اول: توزیع نقاط منظم در دامنه منظم Ω_1

در این حالت، توزیع نقاط در دامنه Ω_1 به صورت منظم در نظر گرفته شده است. جدول ۱ حداکثر خطا، نرم دو خطا و زمان اجرای (به ثانیه) هر یک از روش‌های ۱DMLPG و ۵DMLPG را در زمان‌های متفاوت با گام زمانی $dt = 0.01$ با تعداد نقاط منظم 41×41 نشان می‌دهد. نتایج گزارش شده در این جدول بیان می‌کند که روش‌های ۱DMLPG و ۵DMLPG از دقت مناسبی برای حل مسائل با توزیع نقاط منظم برخوردارند. همچنین، می‌توان مشاهده کرد که در زمان‌های بالاتر روش ۵DMLPG نسبت به روش ۱DMLPG سریع‌تر است. جدول ۲ نشان‌دهنده حداکثر خطا، نرم دو خطا و مرتبه همگرایی عددی برای گام‌های زمانی متفاوت و تعداد متفاوتی از نقاط است. در این حالت با زیاد شدن تعداد نقاط توزیع شده در دامنه و کوچک‌تر شدن گام زمانی خطای محاسباتی هر دو روش DMLPG کاهش می‌یابد. علاوه بر این، نمودار جواب تحلیلی و جواب عددی و همچنین نمودار خطای مطلق در شکل ۲ رسم شده است.

حالت دوم: توزیع پراکنده نقاط در دامنه منظم Ω_2

در این حالت توزیع پراکنده‌ای از نقاط را در دامنه منظم Ω_2 در نظر می‌گیریم. جداول ۳ و ۴ حداکثر خطاها، نرم دو خطا، زمان اجرا (ثانیه) و مرتبه همگرایی را برای روش‌های ۱DMLPG و ۵DMLPG با شرایط متفاوت نشان می‌دهند. نتایج گزارش شده در این جداول بیان می‌کند که روش‌های DMLPG از دقت مناسبی برای حل مسائل با توزیع نقاط پراکنده برخوردارند. همچنین شکل ۳ نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و همچنین نمودار خطای مطلق را با استفاده از روش ۱DMLPG در زمان $t = 4$ با گام زمانی $dt = 0.01$ و $N = 1681$ نشان می‌دهد.

حالت سوم: توزیع نقاط منظم در ناحیه نامنظم Ω_3

همان‌طور که می‌دانیم ویژگی اصلی روش‌های بدون شبکه‌بندی مانند DMLPG پیاده‌سازی این روش‌ها بر روی نواحی نامنظم است که شبکه‌بندی آن‌ها سخت است. از این رو در این حالت، ما ناحیه نامنظم Ω_3 را با توزیع 1075 نقطه منظم (شامل 959 نقطه داخلی و 126 نقطه مرزی) در نظر می‌گیریم. جداول ۵ و ۶ حداکثر خطاها، نرم دو خطا، زمان اجرا (ثانیه) و مرتبه همگرایی را برای روش‌های ۱DMLPG

جدول ۱: حداکثر خطا، نرم دو خطا و زمان اجرا برای روش های Δ DMLPG و موجک [۱۳] در زمان های مختلف با گام زمانی ثابت $dt = 1/25$ و تعداد نقاط منظم 41×41 در Ω_1 .

Wavlet collocation method [۱۳]			Δ DMLPG		
زمان اجرا	L_∞		زمان اجرا	L_∞	t
۵/۲۲	3.39×10^{-4}		۵/۸۱	2.23×10^{-4}	۱
۱۴/۲۶	7.62×10^{-4}		۴/۲۵	4.09×10^{-4}	۳
۲۳/۲۹	1.18×10^{-3}		۵/۷۴	1.33×10^{-4}	۵
۳۲/۷۴	7.64×10^{-3}		۵/۶۱	2.78×10^{-5}	۷
۴۱/۴۸	4.77×10^{-2}		۸/۸۵	7.27×10^{-6}	۹

جدول ۲: حداکثر خطا، نرم دو خطا و مرتبه همگرایی برای روش های Δ DMLPG و Δ DMLPG در زمان $t = 1$ با گام های زمانی متفاوت و تعداد متفاوت نقاط در Ω_1 .

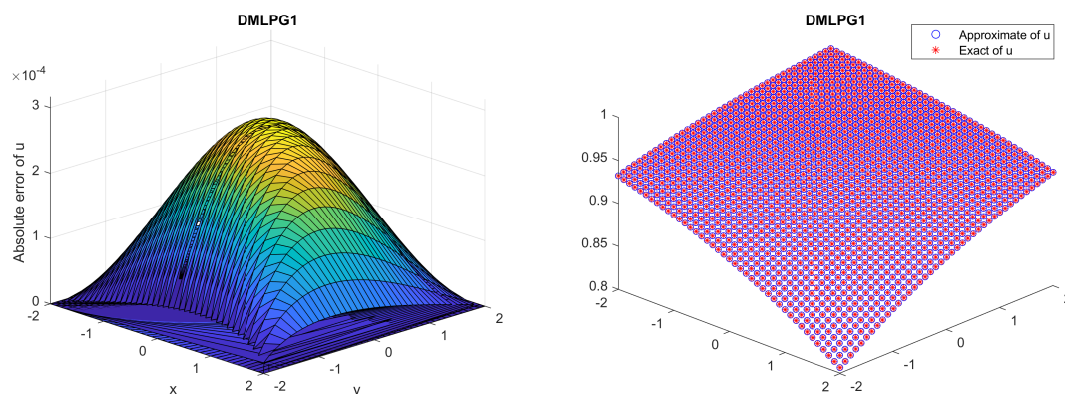
Δ DMLPG			Δ DMLPG			N	dt
C-order	L_2	L_∞	C-order	L_2	L_∞		
—	6.06×10^{-4}	2.36×10^{-4}	—	6.45×10^{-4}	2.70×10^{-4}	۳۶	۰/۰۱
۱/۸۱	4.08×10^{-4}	9.88×10^{-4}	۱/۲۵	6.77×10^{-4}	1.48×10^{-4}	۱۲۱	۰/۰۱/۲
۱/۲۴	5.28×10^{-4}	6.32×10^{-5}	۱/۳۶	7.02×10^{-4}	7.69×10^{-5}	۴۴۱	۰/۰۱/۴
۱/۲۰	6.22×10^{-4}	3.54×10^{-5}	۱/۴۱	7.15×10^{-4}	3.90×10^{-5}	۱۶۸۱	۰/۰۱/۸

جدول ۳: حداکثر خطا، نرم دو خطا و زمان اجرا برای روش های Δ DMLPG و Δ DMLPG در زمان های متفاوت با گام زمانی ثابت $dt = 0.1$ و تعداد نقاط منظم 41×41 در Ω_2 .

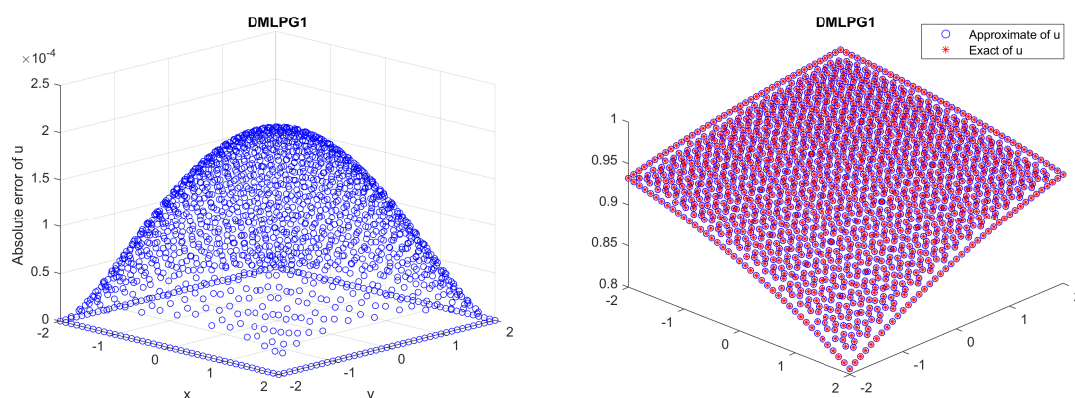
Δ DMLPG			Δ DMLPG			t
زمان اجرا	L_2	L_∞	زمان اجرا	L_2	L_∞	
۴۹۰	5.88×10^{-3}	3.12×10^{-4}	۵/۵۲	5.98×10^{-3}	3.16×10^{-4}	$t = 1$
۶/۴۰	3.03×10^{-3}	1.46×10^{-4}	۶/۳۹	2.96×10^{-3}	1.43×10^{-4}	$t = 2$
۷/۷۱	6.28×10^{-3}	2.61×10^{-4}	۷/۹۷	6.26×10^{-3}	2.60×10^{-4}	$t = 3$
۹/۰۰	2.11×10^{-3}	4.88×10^{-3}	۸/۸۵	4.91×10^{-3}	2.12×10^{-4}	$t = 4$

جدول ۴: حداکثر خطا، نرم دو خطا و مرتبه همگرایی برای روش های Δ DMLPG و Δ DMLPG در زمان $t = 1$ با گام های زمانی متفاوت و تعداد متفاوت نقاط در Ω_2 .

Δ DMLPG			Δ DMLPG			N	dt
C-order	L_2	L_∞	C-order	L_2	L_∞		
—	7.55×10^{-4}	3.53×10^{-4}	—	7.21×10^{-4}	3.32×10^{-4}	۳۶	۰/۰۱
۲/۶۰	4.41×10^{-4}	1.00×10^{-4}	۱/۶۶	7.45×10^{-4}	1.49×10^{-4}	۱۲۱	۰/۰۱/۲
۰/۹۸	5.54×10^{-4}	6.28×10^{-5}	۱/۳۷	7.38×10^{-4}	7.70×10^{-5}	۴۴۱	۰/۰۱/۴
۱/۱۹	6.38×10^{-4}	3.54×10^{-5}	۱/۴۱	7.34×10^{-4}	3.90×10^{-5}	۱۶۸۱	۰/۰۱/۸



شکل ۲: نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق برای حالت اول از مثال ۱ با $dt = 0.01$ و $N = 1681$ نقطه منظم در زمان نهایی $t = 4$.



شکل ۳: نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق برای حالت دوم از مثال ۱ با $dt = 0.01$ و $N = 1681$ نقطه منظم در زمان نهایی $t = 4$.

و \mathcal{DMLPG}^5 با شرایط متفاوت نشان می‌دهند. نتایج گزارش شده در این جداول بیان می‌کند که روش \mathcal{DMLPG} از دقت مناسبی برای حل مسائل با توزیع نقاط یکنواخت در نواحی نامنظم برخوردار است. شکل ۴ نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق را برای روش \mathcal{DMLPG}^1 در زمان $t = 4$ نشان می‌دهد. با مشاهده این شکل می‌توان به دقت بالای روش \mathcal{DMLPG} در نواحی نامنظم پی برد. بایستی متذکر شویم که نتایج حاصل از روش \mathcal{DMLPG}^5 نیز مشابه روش \mathcal{DMLPG}^1 است.

حالت چهارم: توزیع نقاط پراکنده در ناحیه نامنظم Ω_4

در این حالت ۱۱۰۸ نقطه پراکنده با توزیع نامنظم (شامل ۹۸۲ نقطه داخلی و ۱۲۶ نقطه مرزی) در نظر گرفته شده است. جداول ۷ و ۸ حداکثر خطاها، نرم دو خطا، زمان اجرا (ثانیه) و مرتبه همگرایی را برای روش‌های \mathcal{DMLPG}^1 و \mathcal{DMLPG}^5 با شرایط متفاوت نشان می‌دهند. نتایج گزارش شده در این جداول بیان می‌کند که روش‌های \mathcal{DMLPG} از دقت مناسبی برای حل مسائل با توزیع نقاط پراکنده در نواحی نامنظم برخوردارند. شکل ۵ نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق تابع u را با روش \mathcal{DMLPG}^1 در زمان $t = 4$ نشان می‌دهد. نتایج گزارش شده در این شکل نشان‌دهنده توانایی و دقت بالای روش \mathcal{DMLPG}^1 برای نواحی نامنظم با توزیع نقاط نامنظم است. بایستی متذکر شویم که نتایج حاصل از روش \mathcal{DMLPG}^5 نیز مشابه روش \mathcal{DMLPG}^1 است.

جدول ۵: حداکثر خطا، نرم دو خطا و زمان اجرا برای روش های Δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان های متفاوت با گام زمانی ثابت $dt = 0.01$ و تعداد نقاط نامنظم 1075 در Ω_3 .

Δ DMLPG			\backslash DMLPG			t
زمان اجرا	L_2	L_∞	زمان اجرا	L_2	L_∞	
۲۸۳	9.17×10^{-4}	6.03×10^{-5}	۲۸۵	9.33×10^{-4}	6.12×10^{-5}	$t = 1$
۳۵۶	1.62×10^{-3}	9.21×10^{-5}	۳۷۳	1.61×10^{-3}	9.16×10^{-5}	$t = 2$
۴۳۹	1.87×10^{-3}	1.06×10^{-4}	۴۰۸	1.87×10^{-3}	1.06×10^{-4}	$t = 3$
۵۱۲	1.18×10^{-3}	6.79×10^{-5}	۴۷۷	1.19×10^{-3}	6.82×10^{-5}	$t = 4$

جدول ۶: حداکثر خطا، نرم دو خطا و مرتبه همگرایی برای روش های Δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان $t = 1$ با گام های زمانی متفاوت و 1075 نقطه یکنواخت در Ω_3 .

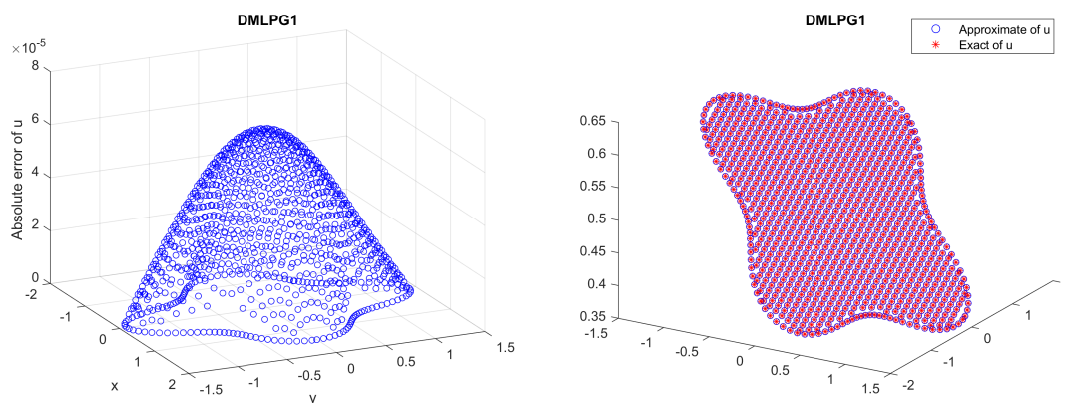
Δ DMLPG			\backslash DMLPG			dt
C-order	L_2	L_∞	C-order	L_2	L_∞	
—	9.17×10^{-4}	6.03×10^{-5}	—	9.33×10^{-4}	6.12×10^{-5}	0.01
۱/۴۸	4.47×10^{-4}	2.95×10^{-5}	۱/۴۵	4.64×10^{-4}	3.04×10^{-5}	$0.01/2$
۱/۵۲	2.14×10^{-4}	1.42×10^{-5}	۱/۴۵	2.30×10^{-4}	1.51×10^{-5}	$0.01/4$
۱/۶۰	9.78×10^{-5}	6.56×10^{-6}	۱/۴۶	1.14×10^{-4}	7.50×10^{-6}	$0.01/8$

جدول ۷: حداکثر خطا، نرم دو خطا و زمان اجرا برای روش های Δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان های متفاوت با گام زمانی ثابت $dt = 0.01$ و تعداد نقاط نامنظم 1108 در Ω_4 .

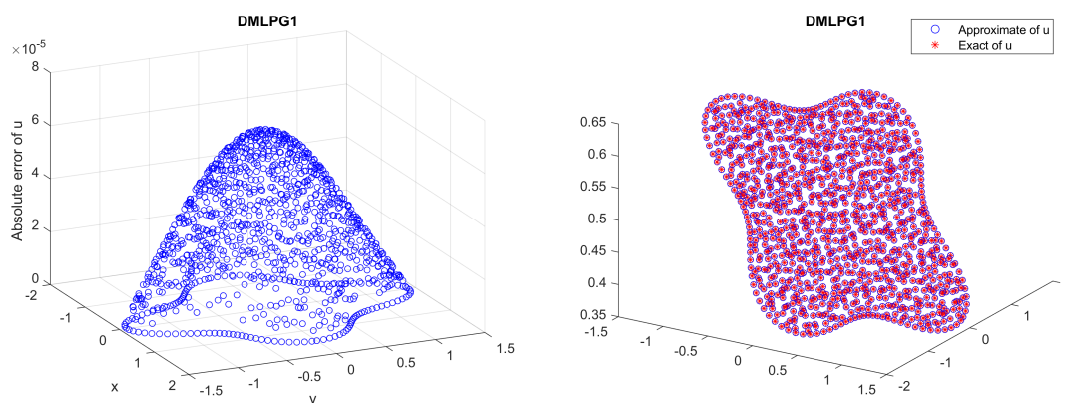
Δ DMLPG			\backslash DMLPG			t
زمان اجرا	L_2	L_∞	زمان اجرا	L_2	L_∞	
۳۸۴	9.32×10^{-4}	6.03×10^{-5}	۲۹۵	9.49×10^{-4}	6.13×10^{-5}	$t = 1$
۳۵۴	1.65×10^{-3}	9.20×10^{-5}	۳۴۷	1.64×10^{-3}	9.16×10^{-5}	$t = 2$
۴۱۹	1.90×10^{-3}	1.06×10^{-4}	۳۹۹	1.90×10^{-3}	1.06×10^{-4}	$t = 3$
۴۸۳	1.20×10^{-3}	6.79×10^{-5}	۴۸۵	1.21×10^{-3}	6.81×10^{-5}	$t = 4$

جدول ۸: حداکثر خطا، نرم دو خطا و مرتبه همگرایی برای روش های Δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان $t = 1$ با گام های زمانی متفاوت و 1108 نقطه پراکنده در Ω_4 .

Δ DMLPG			\backslash DMLPG			dt
C-order	L_2	L_∞	C-order	L_2	L_∞	
—	9.32×10^{-4}	6.03×10^{-5}	—	9.49×10^{-4}	6.13×10^{-5}	0.01
۱/۴۸	4.55×10^{-4}	2.95×10^{-5}	۱/۴۵	4.71×10^{-4}	3.05×10^{-5}	$0.01/2$
۱/۵۲	2.17×10^{-4}	1.42×10^{-5}	۱/۴۵	2.34×10^{-4}	1.51×10^{-5}	$0.01/4$
۱/۶۰	9.94×10^{-5}	6.58×10^{-6}	۱/۴۶	1.15×10^{-4}	7.51×10^{-6}	$0.01/8$



شکل ۴: نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق برای حالت سوم از مثال ۱ با $dt = 0.1$ و $N = 1075$ نقطه منظم در زمان نهایی $t = 4$.



شکل ۵: نمودار جواب تحلیلی، جواب عددی و خطای مطلق برای حالت چهارم از مثال ۱ با $dt = 0.1$ و $N = 1075$ نقطه پراکنده در زمان نهایی $t = 4$.

۲.۶ مثال ۲

برای دومین مثال عددی، چهار ناحیه متفاوت (دو ناحیه منظم و دو ناحیه نامنظم) به فرم زیر را در نظر می‌گیریم:

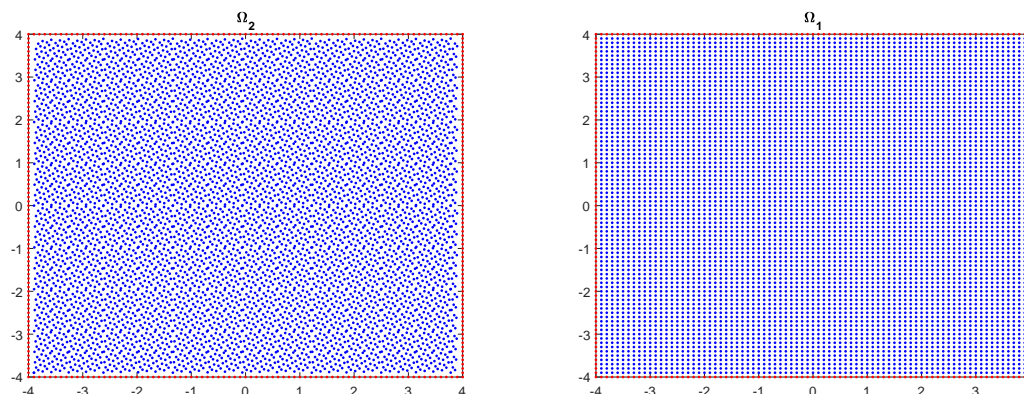
$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq L\}, \quad i = 1, 2$$

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r_i \cos(\alpha), y = r_i \sin(\alpha)\}, \quad i = 3, 4,$$

به طوری که $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ و $r_3 = r_4 = 0.75(\cos(\alpha)^2 + \cos(2\alpha)^2 + \cos(5\alpha)^2)^{1/2}$. توزیع نقاط در داخل و بر روی مرز Ω_i ها در شکل ۶ نشان داده شده است. حال معادله غیر خطی فیشر دو بعدی (۱.۱) را با $\lambda = 0.1$ و $\mu = 0.1$ در نظر می‌گیریم. در این حالت جواب تحلیلی برای معادله وجود نداشته و شرایط اولیه برابر است با $u(x, y, 0) = e^{-10(x^2 + y^2)}$. همچنین شرایط مرزی برای این معادله از نوع دیریکله همگن است. مانند مثال اول برای این مثال نیز چهار حالت مختلف را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: توزیع نقاط منظم در دامنه منظم Ω_1

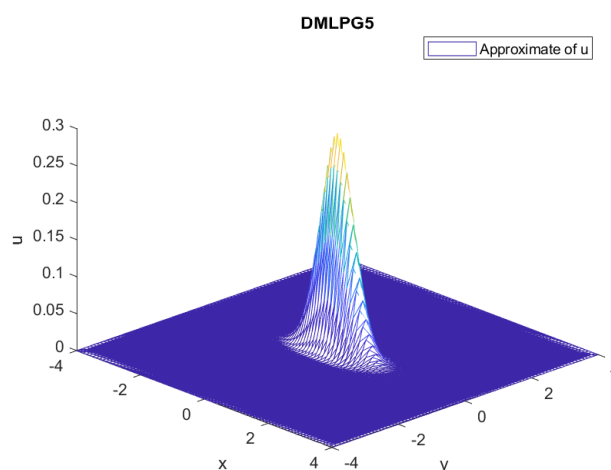
در این حالت، تعداد ۶۵۶۱ نقطه منظم در دامنه مستطیلی $[-4, 4] \times [-4, 4]$ در نظر گرفته شده است (شکل Ω_1 را از شکل ۶ ببینید). نمودار جواب تقریبی برای این حالت در شکل ۷ در زمان $t = 1$ با گام زمانی $dt = 0.1$ با روش DMLPG۵ رسم شده است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل از روش DMLPG۱ شبیه به روش DMLPG۵ است.



شکل ۶: توزیع نقاط منظم و نامنظم در دامنه های مختلف Ω_i برای مثال ۲.

حالت دوم: توزیع پراکنده نقاط در دامنه منظم Ω_2

برای نشان دادن کارایی روش DMLPG، در این حالت تعداد ۶۵۶۱ نقطه پراکنده را در دامنه منظم مستطیلی $[-4, 4] \times [-4, 4]$ در نظر می گیریم (Ω_2). شکل ۷ نشان دهنده ی نمودار جواب عددی با روش ۵DMLPG بوده که در زمان $t = ۱$ با گام زمانی $dt = ۰/۰۱$ رسم شده است. بایستی متذکر شویم که نتایج حاصل از روش DMLPG نیز مشابه روش ۵DMLPG است.



شکل ۷: نمودار جواب عددی برای حالت اول از مثال ۲ با $dt = ۰/۰۱$ و $N = ۶۳۱$ نقطه منظم در زمان نهایی $t = ۴$.

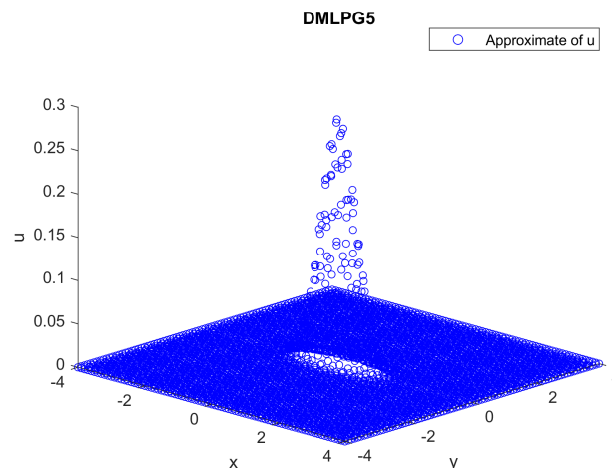
۳.۶ مثال ۳

معادله فیشر دو بعدی زیر را در نظر می گیریم [۲۳]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + bu(1 - u^p)$$

به طوری که در معادله فوق u نشان دهنده تراکم جمعیت، $a > 0$ ضریب نفوذ، $b > 0$ و $p \geq 1$ پارامترهای ثابت هستند. همچنین جواب تحلیلی این معادله به صورت زیر است:

$$u^{\pm}(x, y, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left(\pm \frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right) + \frac{1}{2} \right\}^{\frac{2}{p}},$$



شکل ۸: نمودار جواب عددی برای حالت دوم از مثال ۱ با $dt = 0.1$ و $N = 600$ نقطه پراکنده در زمان نهایی $T = 4$.

جدول ۹: حداکثر خطا، نرم دو و مرتبه همگرایی تابع u برای روش‌های δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان $t = 25$ با گام زمانی متفاوت dt با 3721 نقطه منظم در دامنه دانه منظم $\Omega = [-30, 30]^2$.

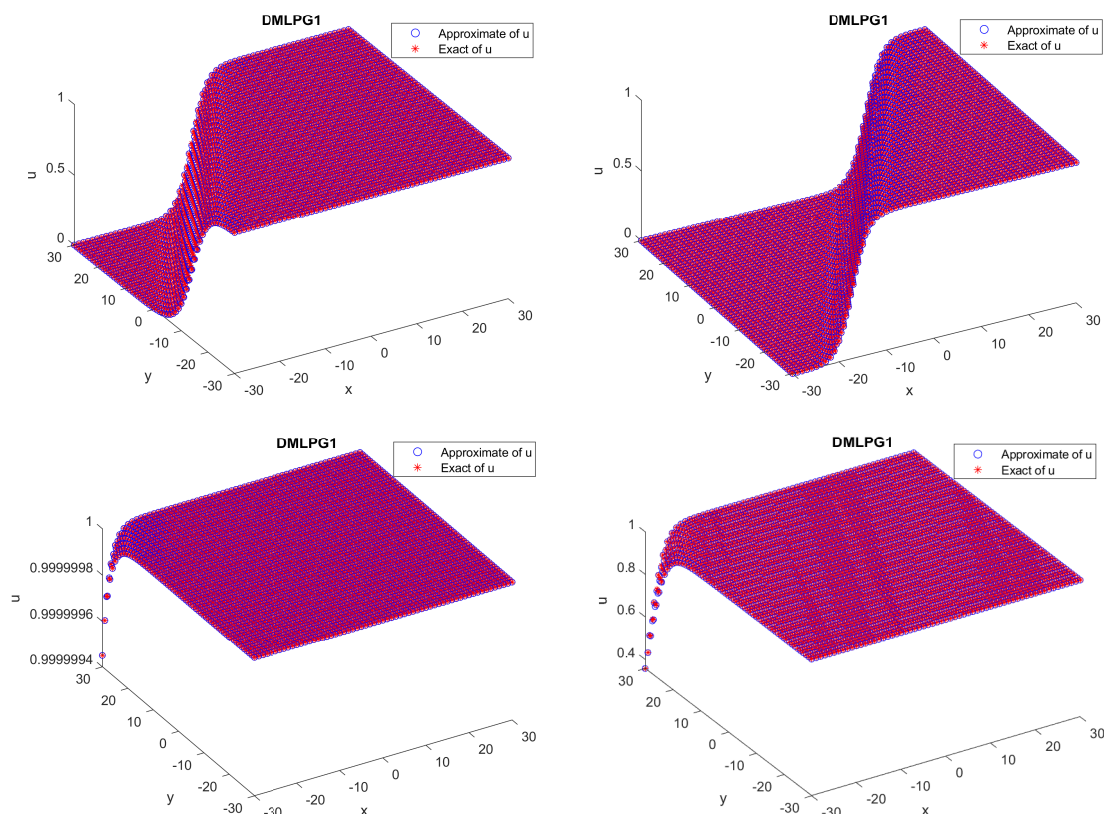
δ DMLPG			\backslash DMLPG			dt
C-order	L_2	L_∞	C-order	L_2	L_∞	
—	1.92×10^{-6}	6.69×10^{-7}	—	1.09×10^{-5}	3.60×10^{-6}	$1/50$
$-3/5$	8.64×10^{-6}	2.90×10^{-6}	$1/94$	4.16×10^{-6}	1.418×10^{-6}	$1/100$
-6.89×10^{-1}	1.20×10^{-5}	4.04×10^{-6}	$3/09$	9.38×10^{-7}	3.18×10^{-7}	$1/200$
-2.75×10^{-1}	1.38×10^{-5}	4.61×10^{-6}	$-1/63$	1.30×10^{-6}	6.97×10^{-7}	$1/400$

به‌طوری‌که u^+ و u^- دو جواب از این معادله بوده و φ و C اعداد حقیقی دلخواه است. برای این مثال یک ناحیه مستطیلی شکل به فرم $\Omega = [-30, 30]^2$ و ثابت‌ها را به‌صورت $a = b = 1$, $p = 2$, $C = -\ln \sqrt{5}$ و $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ در نظر می‌گیریم. همچنین در این مثال u^+ به عنوان جواب تحلیلی در نظر گرفته شده است. نمودار جواب تحلیلی و عددی با $dt = 0.2$ و 3721 نقطه منظم در زمان‌های متفاوت در شکل ۹ رسم شده است. همان‌طور که می‌دانیم جواب معادله فیشرفشاری موجی شکل داشته و با مشاهده شکل ۹ می‌توان تداوم این رفتار را برای زمان‌های بالا نیز مشاهده کرد. همچنین جدول ۹ حداکثر خطا، نرم دو و مرتبه همگرایی عددی را برای روش‌های δ DMLPG و \backslash DMLPG در زمان $t = 25$ به‌ازای گام‌های زمانی متفاوت با 61×61 نقطه منظم نشان می‌دهد.

با مشاهده نتایج این جدول می‌توان به دقت و کارایی روش ارائه‌شده در این مقاله پی برد. لازم به ذکر است که نتایج عددی برای جواب تحلیلی u^- نیز مشابه نتایج به‌دست‌آمده برای حالت u^+ است و لذا از گزارش آن‌ها اجتناب کردیم.

مدل معادله فیشری که ما در این مقاله به بررسی آن پرداختیم در حقیقت مدل Fisher-KPP است که در آن جواب مدل بدون توجه به انتخاب پارامترها هرگز منجر به انقراض نمی‌شود. مدل دیگری که توسط دانشمندان پیش‌نهاد شده است مدل Fisher-Stefan است که می‌تواند جزئیات بیش‌تری را که مورد توجه عملی است ضبط و پیش‌بینی کند؛ زیرا به‌خوبی معلوم شده است که بسیاری از جمعیت‌های کوچک انتقال‌یافته، در ابتدا منقرض خواهند شد. این یکی از کاستی‌های مدل Fisher-KPP است؛ زیرا این مدل نشان می‌دهد که هر جمعیت اولیه کوچک همیشه به تهاجم موفق منجر می‌شود.

مدل Fisher-KPP همچنین دارای جواب‌های موجی شکل است که با توجه به شرایط اولیه، با افزایش زمان به‌کندی از بین می‌روند. اگرچه در اکثر کاربردهای عملی ما به جواب‌های موج سالی‌تونی علاقه‌مندیم که با حداقل سرعت موج حرکت می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر در مورد انواع جواب‌های معادلات فیشرفشار می‌توان به [۲۴] و مراجع موجود در آن مراجعه کرد.



شکل ۹: نمودار جواب تحلیلی و عددی برای مثال ۳ با $dt = 0.2^\circ$ و 3721 نقطه منظم در زمان های متفاوت. (شکل بالا سمت راست در زمان $T = 1^\circ$ ، شکل بالا سمت چپ در زمان $T = 1^\circ$ ، شکل پایین سمت راست در زمان $T = 2^\circ$ و شکل پایین سمت چپ در زمان $T = 3^\circ$).

۷ نتیجه گیری

در این مقاله، ما برای حل عددی معادله غیر خطی فیشر دو بعدی از روش بدون شبکه بندی پترو-گالرکین مستقیم برای حل عددی معادله غیر خطی فیشر دو بعدی استفاده کردیم. این روش بر پایه تقریب کمترین مربعات متحرک تعمیم یافته بوده و یک روش بدون شبکه بندی واقعی است؛ زیرا در فرایند حل مسئله (تقریب تابع مجهول و انتگرال گیری) به شبکه بندی دامنه نیازی نیست. همچنین تقریب GMLS از مقادیر گره ای برای تقریب جواب بدون در نظر گرفتن توابع شکل استفاده کرده و انتگرال ها فقط بر روی چند جمله ای های پایه ای فضا اعمال می شوند. دو مثال عددی با چهار حالت مختلف (دو ناحیه منظم و دو ناحیه نامنظم) در این مقاله ارائه شده است. با مشاهده نتایج عددی دو مثال ارائه شده در این مقاله می توان به کارایی و دقت بالای روش های DMLPG^۱ و DMLPG^۵ برای نواحی منظم و نامنظم با توزیع نقاط یکنواخت یا پراکنده پی برد.

فهرست منابع

[۱] ع. شکری، ع. بهمنی حل عددی معادله تلگراف دو بعدی با استفاده از روش پترو-گالرکین موضعی بدون شبکه بندی مستقیم، مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی، سال ۱۳۹۹، دوره ۱۰، شماره ۲، ص ۲۶۷-۲۸۷.

[2] S. N. Atluri, S. Shen. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*. Tech Science Press, 2002.

[3] S. N. Atluri, S. Shen. *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods*. Computer Modeling in Engineering and Sciences, **3(1)** (2002) 11-52.

- [4] E. Bahmani, A. Shokri *Numerical study of the unsteady 2D coupled magneto-hydrodynamic equations on regular/irregular pipe using direct meshless local Petrov–Galerkin method*. App Math and Comput **417** (2022) 126769.
- [5] M. Darani, *Direct meshless local Petrov–Galerkin method for the two-dimensional Klein-Gordon equation*. Eng. Anal. Bound. Elem, **74** (2017) 1–13.
- [6] R.A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*. J Math Phys, **10** (1969) 1862–1868.
- [7] C. José, *Diffusion in nonlinear multiplicative media*. Ann Eugen, **7(4)** (1937) 355–369.
- [8] A. Kolmogorov, N. Petrovsky, S. Piscounov *Étude de l'équations de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application a un problème biologique*. Bull Univ Moskou, **1** (1937) 1–25.
- [9] JE. Macias-Diaz, *A bounded finite-difference discretization of a two-dimensional diffusion equation with logistic nonlinear reaction*. Int J Mod Phys C **22(09)** (2011) 953–966.
- [10] D. Mirzaei, R. Schaback, M. Dehghan, *On generalized moving least squares and diffuse derivatives*. IMA Journal of Numerical Analysis, **32** (2012) 983–1000.
- [11] D. Mirzaei, R. Schaback, *Direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method: A generalized MLS approximation*. Applied Numerical Mathematics, **68** (2013) 73–82.
- [12] D. Mirzaei, *Error bounds for GMLS derivatives approximations of Sobolev functions*. J. Comput. Appl. Math, **294** (2016) 93–101.
- [13] O. Oruç . *An efficient wavelet collocation method for nonlinear two-space dimensional Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov equation and two-space dimensional extended Fisher–Kolmogorov equation*. Engineering with Computers , <https://doi.org/10.1007/s00366-019-00734-z>.
- [14] B.G. Pachpatte, *Inequalities for differential and integral equations*. San Diego: Academic Press, (1998), ISBN: 9780080534640.
- [15] K. Parand, M. Nikarya, *A numerical method to solve the 1D and the 2D reaction diffusion equation based on Bessel functions and Jacobian free Newton-Krylov subspace methods*. Eur Phys J Plus. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11787-x>.
- [16] W. Qin, D. Ding, X. Ding, *Two boundedness and monotonicity preserving methods for a generalized Fisher-KPP equation*. Appl Math Comput. **252** (2015) 552–567.
- [17] J. Roessler, H. Hüssner *Numerical solution of the 1+2 dimensional Fisher's equation by finite elements and the Galerkin method*. Math Comput Modell. **25** (1997) 57–67.
- [18] D. Shepard. *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*. In Proceedings of the 23th National Conference ACM, (1968) 517-523.
- [19] A. Shokri, E. Bahmani, *A study of nonlinear systems arising in the physics of liquid crystals, using MLPG and DMLPG methods*. Mathematics and Computers in Simulation **187** (2021) 261–281.
- [20] A. Shokri, E. Bahmani, *Direct Meshless Local Petrov–Galerkin (DMLPG) method for 2D complex Ginzburg-Landau equation*. Eng. Anal. Bound. Elem. **100** (2019) 195–203.
- [21] S. Tang, S. Qin, RO. Weber, *Numerical studies on 2-dimensional reaction–diffusion equations*. J Aust Math Soc Sen B. **35** (1993) 223–243.

- [22] S. Zheng, *Nonlinear evolution equations. Monographs and surveys in pure and applied mathematics.* Chapman and Hall/CRC, CRC Press, Boca Raton. (2004)
- [23] W. Qin, D. Ding, X. Ding, *Two boundedness and monotonicity preserving methods for a generalized Fisher-KPP equation.* Applied Mathematics and Computation. **252** (2015) 552–567.
- [24] M. El-Hachem, S. W. McCue, W. Jin, Y. Du and M. J. Simpson, Revisiting the Fisher–Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation to interpret the spreading–extinction dichotomy, Proc. R. Soc. A.475: 20190378 <http://doi.org/10.1098/rspa.2019.0378>



Study of the growth ratio of genetic communities using a new truly meshless method

Erfan Bahmani[†], Ali Shokri

Department of Mathematics, Faculty of sciences, University of Zanjan, Zanjan, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2022/2/20

Accepted: 2023/1/10

Abstract: In recent decades researchers introduced many numerical methods for solving partial differential equations. Some of these methods have limitations in solving problems with complex domains because of the need to construct meshes. Therefore, scientists developed a new set of numerical methods called meshless methods. In this paper, we introduce the direct meshless local Petrov-Galerkin method to the numerical study of the nonlinear two-dimensional Fisher equation. This method is based on the local weak form of the equation and uses the generalized moving least square method to approximate the unknown function. To show the efficiency and capability of the method, we report the numerical results in regular and irregular domains with a uniform and scattered distribution of nodes. Comparison of the obtained results with other methods indicates the accuracy and efficiency of this method.

Keywords: Direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method, Generalized moving least square, Local weak form, Nonlinear two-dimensional Fisher equation.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Erfan Bahmani

E-mail addresses: erfan.bahmani@znu.ac.ir (F. Author), erfan.bahmani@znu.ac.ir, (S. Author).