



ره‌یافت محاسباتی برای کنترل بهینه تقریبی معادلات انتگرالی ولترا

اکبر هاشمی برزآبادی *

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ایران

دبیر مسئول: محمدهادی فراهی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۱۶

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۸/۱۰

چکیده: در این مقاله روشی برای یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه حاکم بر معادلات انتگرالی ولترا برای غیر خطی ارائه شده است. ابتدا با در نظر گرفتن قالبی از گسسته‌سازی، مسئله به شکل یک مسئله شبه تخصیص در نظر گرفته شده و سپس یک روش تکراری تلفیقی برای یافتن جواب معادلات انتگرالی با تخصیص یک کنترل گسسته به کار گرفته شده است. در گام بعدی با در اختیار داشتن کنترل گسسته و وضعیت حاصل از جواب معادله انتگرالی در گام قبل و تعیین تابع معیار تقریبی هدف به کمک این دو مقدار از یک روش تکاملی برای یافتن معیار بهینه و متناسب آن کنترل و وضعیت گسسته بهینه تقریبی استفاده شده است. در ادامه تحلیلی برای هم‌گرایی روش تکراری ارائه شده و هم‌چنین نتایج حاصل از به‌کارگیری روش ارائه شده در این مقاله، برای چند مثال عددی نمایش داده شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل بهینه، معادله انتگرالی ولترا، الگوریتم تکاملی، گسسته‌سازی، تقریب

رده‌بندی ریاضی: 49M99; 90C59; 93C23

۱ مقدمه

اخیراً الگوریتم‌های تکاملی ره‌یافت‌های موثری برای طیف وسیعی از مسائل در علوم مختلف شده‌اند و از این روش‌ها به‌طور وسیعی برای یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۷]. معمولاً شیوه کار در به‌کارگیری روش‌های تکاملی از یک رویه مشخص پیروی می‌کند که عبارت‌است از گسسته‌سازی فضای کنترل و در نهایت به‌کارگیری یک ره‌یافت مؤثر در حل معادله حاکم بر مسئله برای یافتن تابع معیار و سپس استفاده از یک فرایند تکاملی برای یافتن جوابی با بهترین تابع معیار. بدیهی است که روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه برای غلبه بر پیچیدگی‌های روش‌های تحلیلی ابداع می‌شوند. مروری بر این روش‌ها را می‌توان در [۸] یافت. اگرچه اغلب این روش‌ها برای معادلات انتگرالی به‌ویژه معادلات انتگرالی غیرخطی توسعه نیافته‌اند. برخی روش‌های عددی البته نه‌چندان فراگیر برای رده‌ای از مسائل کنترل بهینه با در نظر گرفتن محدودیت‌های متعدد روی هسته مسائل کنترل بهینه توسط بلباس در، [۹] و [۱۰] و [۱۱] ارائه شده است. هم‌چنین روش‌هایی مبتنی بر تقریب هسته معادله انتگرالی را که نهایتاً به یک مسئله کنترل بهینه تحت معادله دیفرانسیل تبدیل می‌شود، می‌توان در [۱۲] و [۱۳] یافت. البته می‌توان گفت که فقدان یک روش مناسب برای حل مسائل

*نویسنده مسئول مقاله

ایران‌نامه: borzabadi@mazust.ac.ir (A. Hashemi Borzabadi)

کنترل بهینه ولترا اصلی‌ترین چالش ارائه یک روش مستقیم کارآمد برای یافتن جواب‌های تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرالی ولترا است. لذا در این مقاله سعی شده است تلفیق یک روش قابل توجه در حل عددی معادلات انتگرالی فردهلم با روش‌های تکاملی که در [۱۴] ارائه گردیده با بهره‌مندی از یک روش موفق یافتن جواب‌های عددی معادلات انتگرالی ولترا به حل مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرالی ولترای غیرخطی تعمیم داده شود.

در این مقاله رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرالی ولترای غیر خطی به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\text{Minimize } J(x, u) = \int_0^T \zeta(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.1)$$

که در آن توابع $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ به ترتیب توابع وضعیت و کنترل‌اند و با در نظر گرفتن معادله انتگرالی حاکم بر سیستم به صورت

$$x(t) = y(t) + \int_0^t \kappa(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad \text{a.e. on } [0, T] \quad (2.1)$$

است، که در آن $\zeta \in C([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ و $\kappa, \kappa_x (= \frac{\partial \kappa}{\partial x}) \in C([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ و در این جا فرض شده است که مسئله دارای جواب است.

۲ گسسته‌سازی فضای کنترل

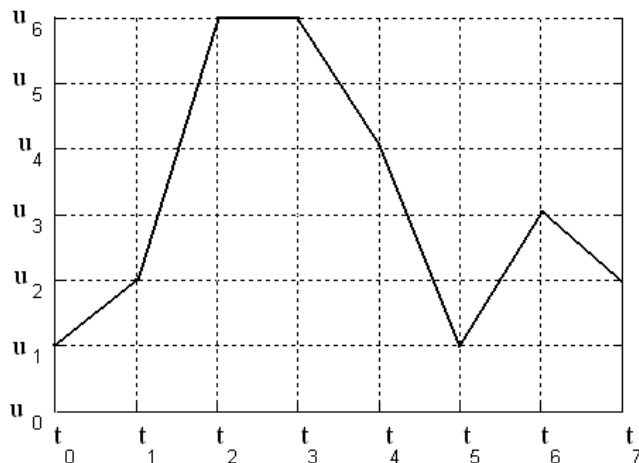
برای یافتن جواب بهینه مسئله می‌بایست تابع معیار برای حالت‌های ممکن برای مجموعه تمام زوج‌های وضعیت و کنترل مورد بررسی قرار بگیرد. این مجموعه، مجموعه تمام زوج‌های قابل قبول (x, u) که در شرایط (۲.۱) صدق می‌کند، نامیده شده و به وسیله \mathcal{P} نشان داده می‌شود. در این بخش گسسته‌سازی از فضای کنترل با افراز بازه زمانی $[0, T]$ به نقاط متساوی‌فاصله به صورت $\Delta_n = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}$ با طول گام $h = t_{i+1} - t_i$ ، $i = 0, 1, \dots, n-1$ مورد نظر قرار گرفته است. مجموعه مقادیر تابع کنترل به صورت کراندار فرض شده و به m بازه متساوی‌فاصله با گره‌های u_0, u_1, \dots, u_m تقسیم شده است. به این ترتیب فضای کنترل و زمان گسسته سازی شده و تابع کنترل به صورت یک تابع قطعه‌ای خطی لحاظ می‌گردد. به عبارتی با در نظر گرفتن تابع مشخصه

$$\chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_{k-1}, t_k), \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع کنترل می‌تواند به صورت

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \nu_k(t) \chi_{[t_{k-1}, t_k)}(t), \quad (1.2)$$

نمایش داده شود که در آن $\nu_k(t)$ قطعه‌ای از تابع قطعه‌ای خطی $v(t)$ روی بازه $[t_{k-1}, t_k]$ است که از اتصال دو نقطه (t_{k-1}, u_{k-1}) و (t_k, u_k) به دست می‌آید. نمایشی از این شیوه گسسته‌سازی در شکل ۱ با $n = 7$ و $m = 6$ نمایش داده شده است. اکنون یک روش بدیهی برای یافتن جواب‌های تقریباً بهینه برای مسئله (۱.۱)–(۲.۱) عبارت است از محاسبه همه الگوهای ممکن و مقایسه همه آن‌ها برای یافتن الگوی بهینه. این روش بدیهی نیاز به ارزیابی $(m+1)^{(n+1)}$ حالت ممکن برای تمامی توابع کنترل را خواهد داشت که با محاسبه فرایند یافتن تابع معیار، منجر به پیچیدگی بسیار زیادی برای مسئله خواهد شد. برای عدم مواجه با چنین حجم بزرگی از محاسبات به سمت به کارگیری یک روش تکاملی هم‌چون روش ژنتیک برای دستیابی به یک الگوی نزدیک به بهینه رهنمون می‌شویم. به منظور استفاده از یک روش تکاملی نیاز به یافتن تابع معیار متناسب با تابع هدف مسئله اصلی است و از این‌رو برای هر الگوی کنترل نیاز به محاسبه وضعیت و به تبع آن تابع هدف نظیر این دو مقدار است. بدیهی است متناظر با یک الگوی کنترلی حاصل از گسسته‌سازی فضای کنترل و زمان، یک تابع وضعیت گسسته مورد انتظار است. لذا یک قالب گسسته از مسئله اصلی متناسب با گسسته‌سازی فضای زمان و کنترل به قسمی می‌بایست مدنظر قرار بگیرد که جواب حاصل از آن با تعریف افراز به جواب مسئله (۱.۱)–(۲.۱) هم‌گرا باشد. بدون کاستن از کلیت، گسسته‌سازی فضای زمان کنترل را به نحوی در نظر می‌گیریم که $m = n$.



شکل ۱: نمونه‌ای از تابع کنترل قطعه‌ای خطی حاصل از گسسته‌سازی فضای کنترل و زمان.

اکنون اگر (x, u) یک زوج قابل قبول باشد، آن گاه برای افراز Δ_n روی $[0, T]$ داریم:

$$x(t_i) = y(t_i) + \int_0^{t_i} k(t_i, s, x(s), u(s)) ds, \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{2.2}$$

در (۲.۲) عبارت انتگرالی می‌تواند با یک روش انتگرال گیری عددی به‌ویژه روش قابل توسیعی چون قاعده ذوزنقه برآورد گردد. لذا با لحاظ افراز متساوی الفاصله هم‌چون افرازی که برای بازه زمان در بالا در نظر گرفته شده و با در نظر گرفتن وزن‌های $i, j = 0, 1, \dots, n$ ، $w_{i,j}$ تساوی (۲.۲) می‌تواند به شکل زیر

$$x_i = y_i + \sum_{j=0}^i w_{i,j} k(t_i, s_j, x_j, u_j) + O(h^\nu), \quad i = 0, 1, \dots, n \tag{3.2}$$

نوشته شود که در آن $x_i = x(t_i)$ ، $y_i = y(t_i)$ ، $i = 0, 1, \dots, n$ و ν به مرتبه قاعده ذوزنقه و یا توسیعی از آن وابسته است. یک روش مشابه با افراز بندی یکسان می‌تواند برای تابع هدف (۱.۱) به صورت زیر به کار گرفته شود:

$$J(x, u) = \sum_{j=0}^n w_j \zeta(t_j, x_j, u_j) + O(h^\nu). \tag{4.2}$$

برای افراز Δ_n ، و با صرف نظر کردن از خطای برشی، مسئله کمینه سازی

$$\text{Minimize } J_{\Delta_n} = \sum_{j=0}^n w_j \zeta(t_j, \xi_j, v_j), \tag{5.2}$$

با شرایط

$$\xi_i = y_i + \sum_{j=0}^i w_{i,j} k(t_i, s_j, \xi_j, v_j), \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{6.2}$$

می‌تواند در نظر گرفته شود.

۳ هم‌گرایی

جواب مسئله بهینه‌سازی غیرخطی (۵.۲)–(۶.۲)، تقریبی از مسئله کمینه‌سازی $J(x, u)$ روی زیرمجموعه‌های \mathcal{P}_n از مجموعه تمام زوج‌های قابل قبول \mathcal{P} را، که عبارت‌اند از مجموعه تمام توابع قطعه‌ای خطی $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ با گره‌های $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ و v_0, v_1, \dots, v_n که در (۶.۲) صدق می‌کنند، نتیجه می‌دهد. به این منظور ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_3 \dots$.

لم ۱.۳. جانشانی چنان است که برای هر $n = 1, 2, \dots$ هر مجموعه \mathcal{P}_n را به زیرمجموعه‌ای از \mathcal{P}_{n+1} می‌نگارد.

برهان. برای سادگی در نمادگذاری حکم را برای $n = 1$ ثابت می‌کنیم به طور مشابه و به استقرا، اثبات برای $n > 2$ برقرار خواهد بود. زوج دل‌خواه (x, u) در \mathcal{P}_1 را که به وسیله ξ_0, ξ_1, v_0, v_1 با گره‌های $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ نمایش داده می‌شود، در نظر می‌گیریم. بنا داریم زوج (\hat{x}, \hat{u}) در \mathcal{P}_2 را به شکل $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{v}_0, \hat{v}_1$ متناظر با (x, u) بیابیم. از تعلق (x, u) به \mathcal{P}_1 و با فرض در نظر گرفتن قاعده دوزنقه برای انتگرال‌گیری داریم:

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 + \frac{T}{\Psi}(\kappa(t_0, s_0, \xi_0, v_0)), \\ x_1 &= y_1 + \frac{T}{\Psi}(\kappa(t_1, s_0, \xi_0, v_0) + \kappa(t_1, s_1, \xi_1, v_1)). \end{aligned}$$

از طرفی عضو دل‌خواهی هم‌چون (\hat{x}, \hat{u}) در \mathcal{P}_2 ، در تساوی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= y_0 + \frac{T}{\Psi}(\kappa(\hat{t}_0, \hat{s}_0, \hat{\xi}_0, \hat{v}_0)), \\ \hat{x}_1 &= y_1 + \frac{T}{\Psi}(\kappa(\hat{t}_1, \hat{s}_0, \hat{\xi}_0, \hat{v}_0) + \kappa(\hat{t}_1, \hat{s}_1, \hat{\xi}_1, \hat{v}_1)), \\ \hat{x}_2 &= y_2 + \frac{T}{\Psi}(\kappa(\hat{t}_2, \hat{s}_0, \hat{\xi}_0, \hat{v}_0) + \Psi\kappa(\hat{t}_2, \hat{s}_1, \hat{\xi}_1, \hat{v}_1) + \kappa(\hat{t}_2, \hat{s}_2, \hat{\xi}_2, \hat{v}_2)). \end{aligned}$$

به‌وضوح در این‌جا داریم $\hat{t}_0 = t_0$ و $\hat{t}_1 = t_1$ ، اکنون از تعریف κ می‌توان مولفه‌های $\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ را به‌قسمی انتخاب نمود که برای $j = 0, \dots, 2$ داشته باشیم $\kappa(\hat{t}_j, \hat{s}_j, \hat{\xi}_j, \hat{v}_j) = \Psi\kappa(t_j, s_j, \xi_j, v_j)$ که در آن $j = 0, 1$. بنابراین داریم،

$$\hat{x}_j = x_j, \quad j = 0, 1.$$

و این نشان می‌دهد که زوج (\hat{x}, \hat{u}) متناظر با (x, u) به \mathcal{P}_2 تعلق دارد. لم بالا نتیجه مهمی را که نشان‌دهنده نزولی بودن رفتار مقدار بهینه تابع هدف است، در پی دارد و این خود منجر به قضیه زیر می‌شود.

قضیه ۲.۳. اگر برای $n = 1, 2, \dots$ $\mu_n = \inf_{\mathcal{P}_n} J_{\Delta_n}$ و $\mu^* = \inf_{\mathcal{P}} J(x, u)$ ، آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu^*$.

برهان. از لم ۱.۳ داریم $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu^*$. بنابراین این دنباله نزولی و هم‌گرا به حد μ° (که $\mu^\circ \geq \mu^*$) است. کافی است نشان دهیم $\mu^\circ = \mu^*$. اگر $\mu^\circ > \mu^*$ آن‌گاه، $\epsilon = \mu^\circ - \mu^* > 0$ و از پیوستگی $J(x, u)$ می‌توان زوج وضعیت و کنترل قطعه‌ای خطی $(x_{n_\circ}, u_{n_\circ})$ را چنان یافت که $|J(x_{n_\circ}, u_{n_\circ}) - \mu^*| < \epsilon$ ، آن‌گاه، $J(x_{n_\circ}, u_{n_\circ}) < \mu^\circ$ و بنابراین $\mu_{n_\circ} < \mu^\circ$. که یک نتیجه نادرست بوده و در نتیجه $\mu^\circ = \mu^*$. \square

۴ ره‌یافت تلفیقی

بدون شک یافتن مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۵.۲)–(۶.۲) کار ساده‌ای نیست. لذا تلفیق دو روش یکی برای یافتن جوابی از معادله انتگرالی و دیگری الگوریتمی تکاملی ممکن است منجر به نتایج ارزشمندی برای یافتن جواب تقریبی مسئله باشد. برای یک ره‌یافت تکراری موفق در حل معادله انتگرالی ولترای غیرخطی، روش تکرار متوالی، مشابه روش گوس سایدل برای حل دستگاه معادلات خطی، با الهام از روش ارائه شده در [۱۴]، مورد استفاده قرار گرفته است. به این منظور فرایند تکراری که منجر به تولید دنباله‌ای از بردارها به صورت $\{\xi^{(k)}\}$ لحاظ

می‌کنیم که در آن مؤلفه‌های هر بردار در فرمول تکراری

$$\xi_i^{(k+1)} = y_i + \sum_{j=0}^i w_{ij} \kappa(t_i, s_j, \xi_j^{(k)}, v_j), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

صدق می‌کنند. هم‌چون بخش گذشته در این‌جا نیز گسسته‌سازی از فضای کنترل و زمان با افزایش n از بازه زمان در نظر گرفته شده است. با در نظر گرفتن شرایطی روی هسته κ ، هم‌گرایی دنباله $\{\xi^{(k)}\}$ به یک جواب دقیق از (۶.۲) متناظر با یک تابع کنترل قطعه‌ای خطی هم‌چون (۳) قابل تضمین خواهد بود.

گزاره ۱.۴. فرض کنیم

$$\kappa(t, s, \xi(s), v(s)) \in C([0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \quad (i)$$

$$\kappa_\xi(t, s, \xi(s), v(s)) \text{ روی } [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ وجود دارد و } \gamma < \frac{1}{T}, \text{ که در آن}$$

$$\gamma = \sup_{s, t \in [0, T]} |\kappa_\xi(t, s, \xi(s), v(s))|.$$

در این صورت

$$\|x^* - \xi^*\|_\infty \leq \frac{|O(h^\nu)|}{1 - T\gamma} \quad (2.4)$$

که در آن $x^* = (x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ و $\xi^* = (\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_n^*)^T$ به ترتیب جواب‌های دقیق دستگاه‌های غیرخطی ۳.۲ و ۶.۲ اند.

برهان.

فرض کنیم

$$|x_p^* - \xi_p^*| = \|x^* - \xi^*\|_\infty,$$

که در آن $0 \leq p \leq n$. از (۳.۲) و (۶.۲) داریم:

$$x_p^* - \xi_p^* = \sum_{j=0}^p w_{pj} (\kappa(t_p, s_j, x_j^*, v_j) - \kappa(t_p, s_j, \xi_j^*, v_j)) + O(h^\nu).$$

از (ii) داریم:

$$\kappa(t_p, s_j, x_j^*, v_j) - \kappa(t_p, s_j, \xi_j^*, v_j) = \frac{\partial \kappa}{\partial \xi}(t_p, s_j, \eta_j, v_j)(x_j^* - \xi_j^*), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

که در آن برای هر $j = 0, 1, \dots, n$ یک عدد حقیقی بین x_j^* و ξ_j^* است. دوباره از (ii) و تساوی‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت

$$|x_p^* - \xi_p^*| \leq \gamma \sum_{j=0}^p w_{pj} |x_j^* - \xi_j^*| + |O(h^\nu)|$$

$$\leq \gamma |x_p^* - \xi_p^*| \sum_{j=0}^p w_{pj} + |O(h^\nu)|.$$

چون در قاعده دوزنقه $\sum_{j=0}^p w_{pj} = T$ ، بنابراین

$$|x_p^* - \xi_p^*| \leq \frac{|O(h^\nu)|}{1 - T\gamma}.$$

تساوی (۲.۴) منجر به نتیجه زیر خواهد بود.

نتیجه ۲.۴. $\|x^* - \xi^*\|_\infty$ به صفر هم‌گرا است، هرگاه $h \rightarrow 0$.

قضیه ۳.۴. با فرض‌های گزاره ۱.۴، دنباله $\{\xi^{(k)}\}$ تولیدشده از تکرارهای فرایند (۱.۴)، به جواب دقیق (۶.۲) که آن را ξ^* می‌نامیم برای هر بردار شروع $\xi^{(0)}$ هم‌گرا است.

برهان. از (۶.۲) و (۱.۴) داریم:

$$\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^* = \sum_{j=0}^i w_{ij} (\kappa(t_i, s_j, \xi_j^{(k)}, v_j) - \kappa(t_i, s_j, \xi_j^*, v_j)), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

بر اساس شرط (ii)، از گزاره ۱.۴ خواهیم داشت:

$$\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^* = \sum_{j=0}^i w_{ij} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi}(t_i, s_j, \eta_j^{(k)}, v_j) (\xi_j^{(k)} - \xi_j^*), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

که در آن $\eta_j^{(k)}$ یک عدد حقیقی بین $\xi_j^{(k)}$ و ξ_j^* برای $j = 0, 1, \dots, n$ است. بنابراین برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ می‌توان نامساوی

$$|\xi_i^{(k+1)} - \xi_i^*| \leq \|\xi^{(k)} - \xi^*\|_\infty \sum_{j=0}^i w_{ij} \left| \frac{\partial \kappa}{\partial \xi}(t_i, s_j, \eta_j^{(k)}, v_j) \right|$$

$$\leq \gamma \|\xi^{(k)} - \xi^*\|_\infty \sum_{j=0}^i w_{ij},$$

را که در آن $i = 0, 1, \dots, n$ به دست آورد. با لحاظ $\lambda = T\gamma$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\|\xi^{(k+1)} - \xi^*\|_\infty \leq \lambda \|\xi^{(k)} - \xi^*\|_\infty.$$

با استقرای روی k داریم:

$$\|\xi^{(k+1)} - \xi^*\|_\infty \leq \lambda^k \|\xi^{(0)} - \xi^*\|_\infty,$$

برای هر $k = 0, 1, \dots$ چون $0 < \lambda < 1$ پس $\|\xi^{(k+1)} - \xi^*\|_\infty$ به صفر میل می‌کند وقتی $k \rightarrow +\infty$. اکنون یک الگوریتم تکاملی، هم‌چون ژنتیک با ملاحظه تابع هدف (Y) برای زوج تقریبی (ξ, v) که دربرگیرنده تابع کنترل قطعه‌ای خطی و وضعیت تقریبی متناظر آن است و در فرایند (۱.۴) به دست آمده، می‌تواند به کار گرفته شود. توجه کنیم که ممکن است شرط (ii) در قضیه (۳.۴) شرط محدودکننده‌ای به نظر برسد. برای غلبه با این مشکل، مسئله اصلی را می‌توان به نحوی به زیربازه‌های با طول گام قابل قبول تقسیم نمود. موضوع اختتام الگوریتم و این که در چه گامی می‌بایست فرایند الگوریتم متوقف شود نیز ممکن است یک چالش محسوب گردد. لذا فرض کنیم $\xi^{(k)}$ برداری باشد که در k امین تکرار الگوریتم فوق حاصل شده باشد. یک معیار توقف می‌تواند به صورت

$$\frac{\|\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}\|}{\|\xi^{(k)}\|} < \epsilon \quad (3.4)$$

به‌زای یک عدد مثبت دل‌خواه از پیش تعیین شده ϵ ، لحاظ گردد. در این جا $\|\cdot\|$ نرمی روی $R^{(n+1)}$ است.

۵ الگوریتم ره‌یافت

در این بخش الگوریتمی بر پایه مباحث قبلی ارائه شده است. این الگوریتم در سه مرحله گام ابتدایی، گام‌های فرعی و گام‌های اصلی طراحی شده است. در گام‌های فرعی فرایند ساخت تابع برآزش برای $(n+1)$ تایی (v_0, \dots, v_n) از فضای گسسته‌شده کنترل زمان که در آن $v_i, i = 1, \dots, n$ گره‌های متساوی‌فاصله روی بازه مقادیر کنترل‌اند، مشخص شده است. گام‌های اصلی ساختار اصلی الگوریتم را با درنظر گرفتن گام‌های ابتدایی و فرعی شامل می‌شود.
گام ابتدایی:

$\epsilon > 0$ دل خواه، افراز متساوی الفاصله روی بازه $[0, T]$ با طول گام Δ_n ، با $i = 0, 1, \dots, n-1$ ، $h = t_{i+1} - t_i$ افراز متساوی الفاصله روی بازه مقادیر کنترل با گره های $\{v_0, \dots, v_n\}$ و بردار ابتدایی $\xi^{(0)} = (\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)})^T$ را در نظر می گیریم.

گام های فرعی:

گام ۱. $\xi^{(k+1)}$ را از (۱.۴) محاسبه می کنیم.

گام ۲. $\|\xi^{(k+1)} - \xi^{(k)}\|$ و $\|\xi^{(k)}\|$ را محاسبه می کنیم.

گام ۳. اگر معیار توقف (۳.۴) برقرار شد متوقف می شویم. در غیر این صورت قرار می دهیم $k = k + 1$ و به گام ۱ می رویم.

گام های اصلی:

گام ۱. جمعیتی از افراد را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم. به عبارتی $(n+1)$ تایی های به صورت (v_0, \dots, v_n) از فضای افراز شده زمان و کنترل.

گام ۲. برای هر یک از افراد نسل انتخاب شده از گام های فرعی مقدار برازش را به دست می آوریم.

گام ۳. قواعد ایجاد جمعیت جدید متناسب با الگوریتم تکاملی مورد استفاده را به کار می بندیم.

گام ۴. برای جمعیت جدید ایجاد شده در گام ۳ شرط اختتام را بررسی می کنیم. در صورت برقرار شدن شرط اختتام، توقف و در غیر این صورت به گام ۳ می رویم.

۶ نتایج عددی

در این بخش الگوریتم ارائه شده در بخش قبل برای برخی مثال های عددی مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمایش دقت روش، تابع خطای مسیر را به صورت

$$e(t) = |x^*(t) - x(t)|$$

در نظر می گیریم، که در آن $x(t)$ و $x^*(t)$ به ترتیب توابع مسیر دقیق و تقریبی که از توابع کنترل دقیق و تقریبی نظیر به دست آمده اند، می باشند. سه الگوریتم تکاملی ژنتیک GA، بهینه سازی ازدحام ذرات PSO و بهینه سازی علف های هرز IWO در این مثال ها به کار گرفته شده اند.

مثال ۱. مسئله کنترل بهینه

$$\text{Minimize} \int_0^1 (x(t) - t)^2 + (u(t) - t^2)^2 dt$$

به شرط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(s)(u(s) + ts) ds$$

را در نظر می گیریم که در آن $y(t) = t - \frac{1}{\sqrt{t}} t^4$. مقادیر وضعیت و کنترل دقیق مسئله به ترتیب عبارت اند از $x^*(t) = t$ و $u^*(t) = t^2$. افراز متساوی الفاصله روی بازه $[0, 1]$ با ۱۰ گره لحاظ گردیده است. نتایج حاصل از به کارگیری الگوریتم با تعداد ۱۰۰ تکرار و جمعیت با اندازه ۱۰ در شکل های ۲ و ۳ و توابع وضعیت و کنترل حاصل از روش، همراه با جواب دقیق متناظر نمایش داده شده است. تابع خطای وضعیت در شکل ۴ نشان داده شده است.

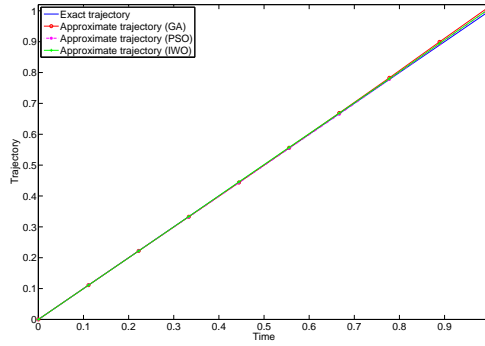
مثال ۲. در این مثال مسئله کنترل بهینه با هدف

$$\text{Minimize} \int_0^1 (x(t) - \cos(t))^2 + (u(t) - t)^2 dt$$

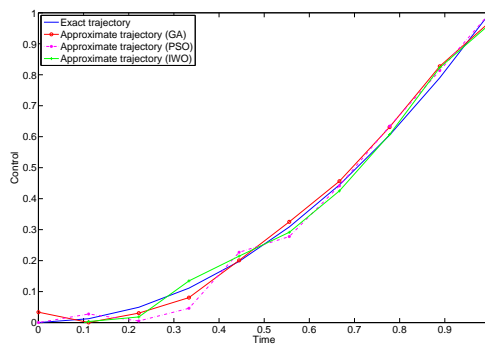
تحت شرایط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t u^2(s)(x(s) + ts) ds$$

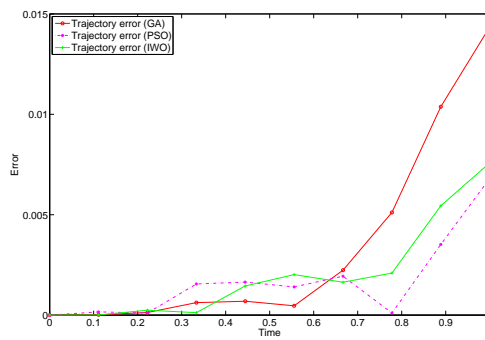
را در نظر می گیریم که در آن $y(t) = (1 - 2t)\cos(t) + (2 - t^2)\sin(t) - \frac{1}{4}t^5$. جواب دقیق تابع وضعیت و تابع کنترل به ترتیب عبارت اند از $x^*(t) = \cos(t)$ و $u^*(t) = t$. با در نظر گرفتن افراز متساوی الفاصله روی بازه $[0, 1]$ با ۱۰ گره، توابع وضعیت و کنترل حاصل از به کارگیری الگوریتم با تعداد ۱۰۰ تکرار و جمعیت با اندازه ۱۰ همراه با جواب دقیق مسئله در شکل های ۵ و ۶، نمایش



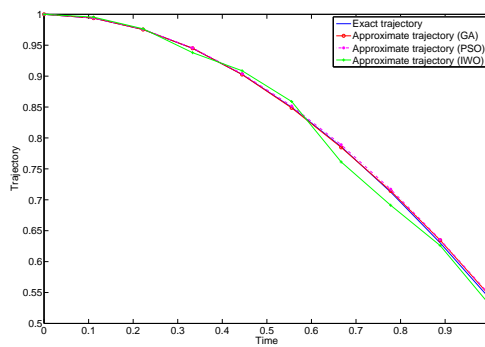
شکل ۲: تابع مسیر بهینه تقریبی و دقیق مثال ۱



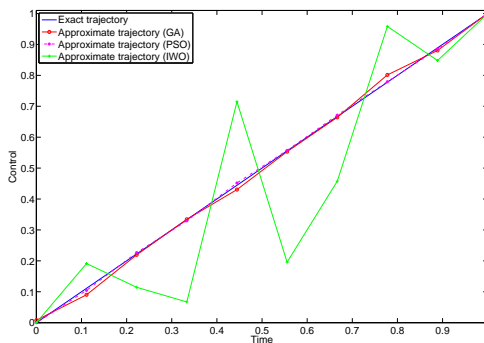
شکل ۳: تابع کنترل بهینه تقریبی و دقیق مثال ۱



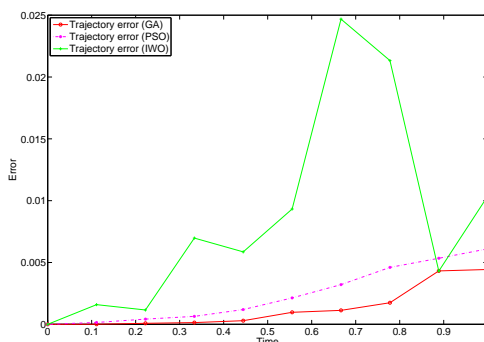
شکل ۴: تابع خطای مسیر مثال ۱



شکل ۵: تابع مسیر بهینه تقریبی و دقیق مثال ۲



شکل ۶: تابع کنترل بهینه تقریبی و دقیق مثال ۲.



شکل ۷: تابع خطای مسیر مثال ۲.

داده شده‌اند. تابع خطای وضعیت در شکل ۷ نشان داده شده است. مثال ۳. مسئله کمینه‌سازی با هدف

$$\text{Minimize } \int_0^1 (x(t) - e^t)^2 + (u(t) - e^t)^2 dt,$$

با شرایط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t u(s)(x(s) + t) ds,$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $y(t) = e^t(1 - t - \frac{1}{4}e^t) + t + \frac{1}{4}$ و $u^*(t) = e^t$ افزایش متساوی‌فاصله روی بازه $[0, 1]$ با 10^6 گره لحاظ گردیده است. توابع وضعیت و کنترل حاصل از به‌کارگیری الگوریتم با تعداد 1000 تکرار و جمعیت با اندازه 10^6 همراه با جواب دقیق مسئله در شکل‌های ۸ و ۹، نشان داده شده‌اند. تابع خطای وضعیت در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

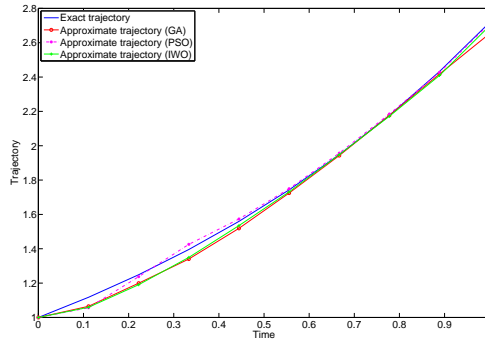
مثال ۴. در این مثال یک مسئله با افق نامتناهی با هدف بیشینه‌سازی به صورت

$$\text{Maximize } \int_0^{+\infty} e^{-t}(x(t) - u^2(t)) dt, \tag{1.6}$$

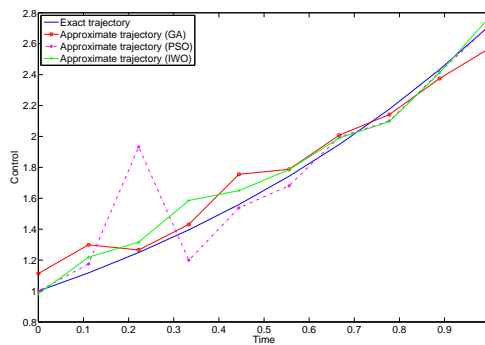
به شرط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t (\frac{1}{4}e^{-t}e^{-s}x(s) - u^2(s)) ds,$$

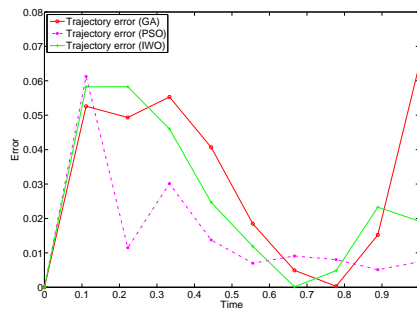
را در نظر می‌گیریم که در آن $y(t) = e^{-t}$ و توابع وضعیت و کنترل در گوی واحد کران دارند. با فرض ناسره بودن انتگرال (۱.۶)، توابع وضعیت و کنترل بهینه مسئله به ترتیب $x^*(t) = e^{-t}e^{\frac{1-e^{-2t}}{4}}$ و $u^*(t) = 0$ اند. از ناسره بودن انتگرال (۱.۶) می‌توان نتیجه گرفت



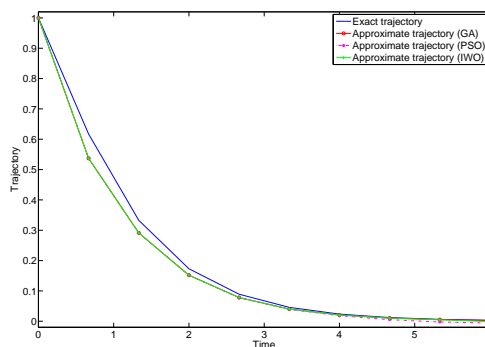
شکل ۸: تابع مسیر بهینه تقریبی و دقیق مثال ۳.



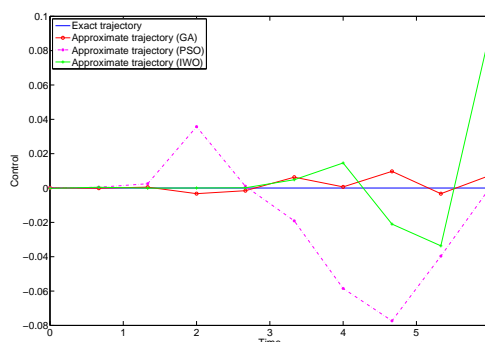
شکل ۹: تابع کنترل بهینه تقریبی و دقیق مثال ۳.



شکل ۱۰: تابع خطای مسیر مثال ۳.



شکل ۱۱: تابع مسیر بهینه تقریبی و دقیق مثال ۴.



شکل ۱۲: تابع کنترل بهینه تقریبی و دقیق مثال ۴.

که برای هر $\epsilon > 0$ ، $M \in \mathbb{N}$ وجود دارد به قسمی که

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(x(t) - u^*(t))dt = \int_0^M e^{-t}(x(t) - u^*(t))dt + \int_M^{+\infty} e^{-t}(x(t) - u^*(t))dt$$

و

$$\int_M^{+\infty} e^{-t}(x(t) - u^*(t))dt < \epsilon. \tag{۲.۶}$$

اکنون از (۲.۶) داریم:

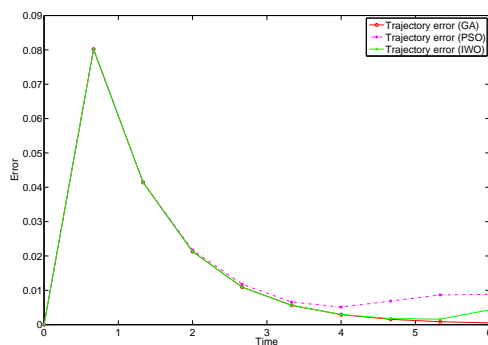
$$\int_M^{+\infty} \gamma e^{-t}dt < \epsilon. \tag{۳.۶}$$

زیرا $|x(t) - u^*(t)| < \gamma$ و بنابراین از (۳.۶) داریم $M > \ln \frac{\gamma}{\epsilon}$.

به منظور به کارگیری الگوریتم ارائه شده در بخش ۵ برای مسئله فوق، $\epsilon = 0.01$ ، تعداد تکرارها 500 و اندازه جمعیت 10 در نظر گرفته شده است. در شکل های ۱۱ و ۱۲، مقایسه توابع وضعیت و کنترل حاصل از به کارگیری الگوریتم با جواب دقیق مسئله نمایش داده شده است. تابع خطای وضعیت در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

۷ نتیجه گیری

در این مقاله یک روش تلفیقی برای یافتن جواب تقریبی مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرالی ولترا ارائه شده است. در روش ارائه شده، غیرخطی بودن تابع هدف و هسته معادله انتگرالی تأثیر مستقیمی روی فرایند استخراج جواب ندارد. اگرچه این روش با فرایندهای تقریبی زیادی همراه است، ولی سادگی روش و همچنین ساختار آن اجازه استفاده از روش های موازی سازی را به خوبی برای افزایش کارایی روش می دهد.



شکل ۱۳: تابع خطای مسیر مثال ۴.

فهرست منابع

- [1] Askarirobati, GH. and Borzabadi, A.H. and Heydari, A. (2019). Solving Multi-objective Optimal Control Problems of chemical processes using Hybrid Evolutionary Algorithm, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, 10(2), 103-126.
- [2] Borzabadi, A.H. and Mehne, H.H. (2009). Ant Colony Optimization for Optimal Control Problems, *Journal of Information and Computing Science*, 4(4), 259-264.
- [3] Borzabadi, A.H. and Heidari, M. (2010). Comparison of Some Evolutionary Algorithms for Approximate Solutions of Optimal Control Problems, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 4(8), 3366–3382.
- [4] Fard, O.S. and Borzabadi, A.H. (2007). Optimal control problem, quasi-assignment problem and genetic algorithm, *Enformatika, Transaction on Engin. Compu. and Tech.*, 19, 422-424.
- [5] Mînzú, V. and Arama, I. (2022). Optimal Control Systems Using Evolutionary Algorithm-Control Input Range Estimation, *Automation*, 3(1), 95-115.
- [6] Miriyala, S.S. and Kishalay, M. (2020). Optimal Control using Evolutionary Algorithms through Neural network based TRANSFORMAtion, *2020 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI), Canberra, ACT, Australia*, 1379-1386.
- [7] Wuerl, A. and Crain, T. and Braden, E. (2003). Genetic Algorithms and Calculus of Variations-Based Trajectory Optimization Technique, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 40(6), 882-888.
- [8] Schmidt, W.H. (2006). Numerical Methods for Optimal Control Problems with ODE or Integral Equations, *Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin / Heidelberg*, 3743.
- [9] Belbas, S.A. (1999). Iterative schemes for optimal control of Volterra integral equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 37, 57-79.
- [10] Belbas, S.A. (2007). A new method for optimal control of Volterra integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 1902-1915.
- [11] Belbas, S.A. (2008). A reduction method for optimal control of Volterra integral equations, *Applied Mathematics and Computation*, 197(2), 880-890.

- [12] Lukas, M.A. and Teo, K.L. (1991). A computational method for a general class of optimal control problems involving integrodifferential equations, *Optimal Control Applications and Methods*, 12, 141-162.
- [13] Wu, C.Z. and Teo, K.L. and Zhao, Yi. and Yan, W.Y. (2007). An optimal control problem involving impulsive integrodifferential systems, *Optimization Methods and Software*, 22(3), 531-549.
- [14] Borzabadi, A.H. and Fard, O.S. and Mehne, H.H. (2012). A hybrid algorithm for approximate optimal control of nonlinear Fredholm integral equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 89(16), 2259-2273.



A computational approach for approximate optimal control of nonlinear Volterra integral equations

Akbar Hashemi Borzabadi[†]

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, University of Science and Technology of Mazandaran, Behshahr, Iran

Communicated by: Mohammad Hadi Farahi

Received: 2022/11/1

Accepted: 2023/1/6

Abstract: In this paper, a new method for solving optimal control problems governed by nonlinear Volterra integral equations is presented. First by converting to a discretized form, the problem is considered as a quasi assignment problem and then an iterative method is applied to find approximate solution for discretized form of the integral equation. Next step using evolutionary algorithms, approximate solution of optimal control problems is obtained. An analysis for convergence of the proposed iterative method and its implementation for numerical examples are also given.

Keywords: Optimal control; Volterra integral equation; Evolutionary algorithm; Iterative method; Discretization; Approximation.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: borzabadi@mazust.ac.ir