



طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع دوم از توزیع پارتو بر اساس معیار تابع هزینه

الهام بصیری^۱، سمیه غفوری^۲

(۱) گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک، ۳۸۱۵۶-۸-۸۳۴۹، ایران

دبیر مسئول: محمد جلوداری ممقانی

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۶/۴

چکیده: سانسور هیبرید ترکیبی از دو سانسور نوع اول و دوم است که خود بر حسب تعیین معیار پایان دادن به آزمایش به دو سانسور هیبرید نوع اول و دوم تقسیم می‌شود. در این مقاله با در نظر گرفتن طرح سانسور هیبرید نوع دوم از توزیع پارتو، به تعیین طرح سانسور بهینه پرداخته می‌شود. برای تعیین طرح سانسور بهینه عوامل مختلفی را می‌توان در نظر گرفت که از مهم‌ترین آنها معیار هزینه نمونه‌گیری است. بنا بر این، طرح سانسور بهینه طوری تعیین می‌شود که مقدار هزینه کل آزمایش از مقدار از قبل تعیین شده‌ای بیشتر نشود. برای ارزیابی نتایج به دست آمده محاسبات عددی انجام شده‌اند. یک مثال واقعی هم بیان شده است. در پایان نتیجه‌گیری از مقاله ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تابع هزینه، سانسور هیبرید نوع دوم، طرح سانسور بهینه.

رده‌بندی ریاضی: 62N01; 62N05

۱ مقدمه

توزیع پارتو یکی از توزیع‌های مهم آماری است که اولین بار توسط پارتو [۲۱] به عنوان یک مدل برای توزیع درآمد یک جمعیت معرفی شد اما بعد از آن در توصیف پدیده‌هایی نظیر بیمه، اقتصاد، مهندسی و قابلیت اطمینان، داده‌های طول عمر و بسیاری موارد دیگر به کار می‌رود. متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتو با پارامترهای α و β است هرگاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع آن به ترتیب به صورت زیر باشند.

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad F_{\alpha,\beta}(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad \alpha, \beta > 0, x \geq \beta. \quad (1.1)$$

برای مطالعه بیشتر در مورد توزیع پارتو، ویژگی‌ها و کاربردهای آن می‌توان به آرنولد [۶] و جانسون [۲۰] مراجعه نمود.

*نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (S. Ghafouri) s-ghafouri@araku.ac.ir (E. Basiri), elhambasiri@kub.ac.ir

بسیاری از اوقات در آزمون‌های طول عمر به دلایل مختلف مانند زمان محدود، عدم دسترسی به همه واحدهای تمام آزمایش و یا گران بودن آن‌ها، آزمایش‌گر نمی‌تواند زمان دقیق از کارافتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. به واحدهای تحت آزمایش که به هر دلیلی در نمونه مشاهده نمی‌شوند در اصطلاح گویند که سانسور شده‌اند. سانسور به روش‌های مختلفی انجام می‌شود. سانسورهای نوع اول و دوم از رایج‌ترین روش‌های سانسور هستند. در سانسور نوع اول، آزمایش تا زمان از قبل تعیین شده T ادامه می‌یابد. در سانسور نوع دوم، آزمایش تا زمان مشاهده r -امین از کار افتادگی ادامه پیدا می‌کند. اولین بار اپستین [۱۹] طرحی را در یک آزمون طول عمر بررسی کرد که در آن آزمایش در زمان $T^* = \text{Min}(X_{r:n}, T)$ خاتمه می‌یابد، به طوری که مقادیر r و T از قبل تعیین شده‌اند. این طرح به سانسور هیبرید موسوم است و به علت این که مانند سانسور نوع اول، پایان آزمایش حداکثر در زمان T است، آن را سانسور هیبرید نوع اول نام‌گذاری کرده‌اند. ایراد این روش در این است که ممکن است تا زمان از قبل تعیین شده T تعداد بسیار کمی واحد از کار افتاده داشته باشیم. بنا بر این، در [۱۴] طرح سانسور دیگری به نام سانسور هیبرید نوع دوم معرفی شد. در این روش از سانسور آزمایش در زمان $T^* = \text{Max}(X_{r:n}, T)$ پایان می‌یابد که مقادیر r و T از قبل تعیین شده هستند. این طرح دارای این مزیت است که تضمین می‌کند حداقل r شکست مشاهده می‌شوند.

حال فرض کنید قصد طراحی نمونه‌ای سانسور شده داریم تا بر اساس آن پژوهش‌های دیگری را نظیر برآورد پارامترها، پیش‌بینی نمونه‌های آتی و ... انجام دهیم. سؤالی که در طراحی سانسور مورد نظر مطرح می‌شود چگونگی طراحی آن است به طوری که اطلاعات کافی برای پژوهش‌های آتی به دست آید. برای پاسخ به این سؤال معیارهای مختلفی را می‌توان در نظر گرفت. با توجه به این که در بیشتر شرایط هزینه آزمایش محدود است، این معیار نیز می‌تواند برای طراحی سانسور مورد توجه قرار گیرد. مسأله‌ی تعیین طرح سانسور بهینه تاکنون توسط پژوهش‌گران زیادی با در نظر گرفتن معیارهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان مثال، با در نظر گرفتن طرح سانسور هیبرید نوع اول از توزیع نمایی، اندازه نمونه بهینه در [۱۸] به دست آمد. در [۲۲] و [۲۳] با در نظر گرفتن یک تابع هزینه که تنها مبتنی بر زمان آزمایش و تعداد واحدهای تحت آزمایش بود، به تعیین تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو پرداخته شد. طرح بهینه در سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست با کمینه کردن واریانس بهترین برآوردگرهای خطی ناریب در خانواده‌ی توزیع‌های مکان-مقیاس توسط پژوهش‌گران [۱۱] و [۱۲] و [۱۳] تعیین شده است. با در نظر گرفتن معیار پیتمن نیز طرح بهینه‌ی سانسور فزاینده در پژوهشی دیگر به دست آمد [۲۵]. در پژوهشی دیگر پژوهش‌گران بعد از به دست آوردن برآوردگر بیشینه درست‌نمایی برای پارامترهای توزیع بیرنایم-ساندرز بر اساس آماره‌های مرتب سانسور فزاینده‌ی نوع دو، به مقایسه‌ی دو طرح سانسور مختلف پرداختند و طرح بهینه را تعیین نمودند [۲۴]. در پژوهش [۸] با در نظر گرفتن طرح سانسور هیبرید نوع اول و با معرفی یک تابع هزینه، به تعیین طرح بهینه سانسور پرداخته شد. با در نظر گرفتن تابع هزینه پژوهش‌گران دیگری به معرفی یک الگوریتم به منظور تعیین طرح بهینه‌ی سانسور در خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس پرداختند [۹]. با تعریف یک تابع هزینه جدید به عنوان تعمیمی از توابع هزینه‌ی تعریف شده در [۲۲] و [۲۳]، که علاوه بر مدت زمان آزمایش، قابلیت اعتماد آزمایش را هم در نظر می‌گیرد، تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو در حالتی که $r = 2$ شکست مشاهده شود، مطالعه شد [۱۵]. تعداد شکست‌های بهینه در سانسور نوع دو از راست از توزیع رایلی نیز بر اساس معیار هزینه تعیین شد [۷]. مسأله‌ی طرح بهینه سانسور فزاینده‌ی نوع دو از توزیع پارتو بر اساس معیار اطلاع فیشر مورد مطالعه قرار گرفت [۱]. با در نظر گرفتن سانسور فزاینده‌ی نوع دو از راست و معیار تابع هزینه و توزیع وایبول برای طول عمر داده‌های مورد بررسی مقدار بهینه برای n تعیین شد [۵]. طرح بهینه سانسور فزاینده‌ی نوع دو با فرض اینکه طرح سانسور متغیری تصادفی از توزیع دو جمله‌ای باشد بر اساس دو معیار هزینه آزمایش و میانگین توان دوم خطای پیش‌بین در مسأله‌ی پیش‌بینی دو نمونه‌ای بی‌زی، به دست آمد [۴]. در [۱۰] با در نظر گرفتن هم‌زمان دو معیار واریانس برآوردگر بیشینه درست‌نمایی و هزینه در طرح سانسور هیبرید، به مسأله‌ی بهینه‌سازی پرداخته شد. طرح بهینه سانسور هیبرید نوع اول از توزیع بر نوع دوازده بر اساس معیار هزینه در پژوهش [۲] تعیین شد. با فرض اینکه اندازه نمونه متغیری تصادفی از توزیع دو جمله‌ای باشد، اندازه نمونه بهینه در سانسور فزاینده‌ی نوع دو بر مبنای معیار هزینه در [۳] به دست آمد.

در این مقاله، هدف تعیین طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع دوم از توزیع پارتو و بر اساس معیار هزینه آزمایش است. برای این منظور بعد از معرفی یک تابع هزینه که تابعی برحسب n و r است، به تعیین مقادیر بهینه برای آنها پرداخته می‌شود. با توجه به این که تابع هزینه تابعی نانزولی از n و r است، کمترین مقدار برای این مقادیر منجر به کمترین هزینه می‌شود. اما از آنجا که تعداد داده‌های کم برای پژوهش‌های بعدی مانند برآورد پارامترها و ... نمی‌تواند مناسب باشد، به دنبال بیشترین مقدار برای n و r هستیم به گونه‌ای که مقدار تابع هزینه از حداکثر بودجه در نظر گرفته شده، یعنی C^* بیشتر نشود.

ساختار مقاله به این صورت است که در ابتدا در بخش دوم به بیان تابع هزینه که نقش اساسی در مقاله دارد، پرداخته می‌شود. در ادامه، با در نظر گرفتن این تابع هزینه، طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع دوم تعیین می‌شود. برای این منظور، سه حالت مختلف فرض می‌شود: حالت اول این که مقادیر r و T معلوم باشند و هدف تعیین مقدار بهینه برای n باشد؛ در حالت دوم مقادیر n و T معلوم هستند و هدف تعیین مقدار بهینه برای r است؛ و در حالت سوم مقادیر n و r معلوم فرض می‌شوند و هدف تعیین مقدار بهینه برای T است. در هر سه حالت مقدار مجهول به گونه‌ای تعیین می‌شود که مقدار تابع هزینه از مقدار از پیش تعیین شده C^* بیشتر نشود. برای ارزیابی نتایج محاسبات عددی و مثالی واقعی نیز ارائه شده‌اند. در انتها، جمع‌بندی و نتیجه‌گیری از مقاله بیان شده است.

۲ توصیف مدل

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی n از توزیع پارتو با پارامترهای α و β و با تابع چگالی و تابع توزیع (۱.۱) باشد. همچنین فرض کنید $X_{r:n}$ نشان‌دهنده‌ی r امین آماره‌ی مرتب از این نمونه باشد. در این صورت تابع هزینه متناسب با سانسور هیبرید نوع دوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$C(r, n, T) = c_0 + c_u n + c_t \text{Max}(X_{r:n}, T), \quad (1.2)$$

به طوری که c_0 هزینه اولیه آزمایش، c_u هزینه هر واحد آزمایش و c_t هزینه زمان آزمایش است. در این بخش به دنبال بیشترین مقدار برای n و T هستیم به گونه‌ای که مقدار تابع هزینه از حداکثر بودجه در نظر گرفته شده، یعنی C^* بیشتر نشود که این مقادیر را به ترتیب با T_{opt} و n_{opt} نمایش می‌دهیم. با توجه به اینکه $\text{Max}(X_{r:n}, T)$ متغیری تصادفی است، متوسط تابع هزینه را به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم.

$$EC(r, n, T) = c_0 + c_u n + c_t E(\text{Max}(X_{r:n}, T)). \quad (2.2)$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} E(\text{Max}(X_{r:n}, T)) &= E[T|T > X_{r:n}]P(X_{r:n} < T) + E[X_{r:n}|X_{r:n} \geq T]P(X_{r:n} \geq T) \\ &= T.P(X_{r:n} < T) + E[X_{r:n}|X_{r:n} \geq T]P(X_{r:n} \geq T) \\ &= T - T.P(X_{r:n} \geq T) + E[X_{r:n}|X_{r:n} \geq T]P(X_{r:n} \geq T) \\ &= T + E[(X_{r:n} - T)|X_{r:n} \geq T]P(X_{r:n} \geq T). \end{aligned} \quad (3.2)$$

همچنین داریم

$$E[(X_{r:n} - T)|X_{r:n} \geq T] = \frac{1}{P(X_{r:n} \geq T)} \int_T^\infty (t - T)f_{X_{r:n}}(t)dt,$$

به طوری که $f_{X_{r:n}}(\cdot)$ تابع چگالی $X_{r:n}$ است. همچنین با توجه به [۱۷] داریم

$$f_{X_{r:n}}(x) = r \binom{n}{r} F(x)^{r-1} \bar{F}(x)^{n-r} f(x),$$

که در آن $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. بنا بر این به دست می‌آوریم

$$E[(X_{r:n} - T)|X_{r:n} \geq T] = \frac{r \binom{n}{r}}{P(X_{r:n} \geq T)} \int_T^\infty (t - T)F(t)^{r-1} \bar{F}(t)^{n-r} f(t)dt.$$

با به کارگیری بسط دوجمله‌ای برای عبارت $F(x)^{r-1} = (1 - \bar{F}(x))^{r-1}$ نتیجه می‌گیریم

$$E[(X_{r:n} - T)|X_{r:n} \geq T] = \frac{r \binom{n}{r}}{P(X_{r:n} \geq T)} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j-1} \int_T^\infty (t - T)\bar{F}(t)^{n-j-1} f(t)dt. \quad (4.2)$$

از رابطه‌های (۳.۲) و (۴.۲) به دست می‌آوریم

$$E(\text{Max}(X_{r:n}, T)) = T + r \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j-1} \int_T^\infty (t - T)\bar{F}(t)^{n-j-1} f(t)dt.$$

بنا بر این تابع هزینه در رابطه (۲.۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$EC(r, n, T) = c_0 + c_u n + c_t T + c_t r \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j-1} \int_T^{\infty} (t-T) \bar{F}(t)^{n-j-1} f(t) dt. \quad (5.2)$$

در توزیع پارتو با توجه به رابطه (۱.۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} (t-T) \bar{F}(t)^{n-j-1} f(t) dt &= \int_T^{\infty} (t-T) \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha(n-j-1)} \frac{\alpha \beta^{\alpha}}{t^{\alpha+1}} dt \\ &= \alpha \beta^{\alpha(n-j)} \left[\int_T^{\infty} t^{-\alpha(n-j)} dt - T \int_T^{\infty} t^{-\alpha(n-j)-1} dt \right] \\ &= \frac{\alpha \beta^{\alpha(n-j)}}{T^{\alpha(n-j)-1}} \left[\frac{1}{\alpha(n-j)-1} - \frac{1}{\alpha(n-j)} \right]. \end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه فوق در (۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} EC(r, n, T) &= c_0 + c_u n + c_t T + c_t r \binom{n}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^{r-j-1} \\ &\quad \times \frac{\alpha \beta^{\alpha(n-j)}}{T^{\alpha(n-j)-1}} \left[\frac{1}{\alpha(n-j)-1} - \frac{1}{\alpha(n-j)} \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

همان‌طور که از رابطه (۶.۲) مشاهده می‌شود، متوسط تابع هزینه به پارامترهای توزیع وابسته است. بنا بر این چنانچه این پارامترها نامعلوم باشند نیاز است تا برآورد آنها براساس اطلاعات قبلی جایگزین شوند.

مقدار تابع هزینه $EC(r, n, T)$ به‌ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_0 = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n, r و T در جدول ۱ آورده شده‌اند. از جدول ۱ مشاهده می‌شود تابع هزینه $EC(r, n, T)$ تابعی نانزولی از r و T است، به طوری که سایر مقادیر ثابت فرض شوند. لازم به ذکر است که در این مقاله برای انجام محاسبات از نرم‌افزار R استفاده شده است.

در ادامه، در ابتدا فرض می‌شود که مقادیر r و T از قبل تعیین شده‌اند و باید مقدار بهینه برای n یعنی n_{opt} به‌گونه‌ای تعیین شود که مقدار متوسط تابع هزینه از مقدار c^* بیشتر نشود. به عبارت دیگر به‌ازای $n \geq r$

$$n_{opt} = \sup \{n; EC(r, n, T) \leq c^*\}.$$

به‌عنوان مثال فرض کنید $\alpha = 2, \beta = 1, c_0 = 10, c_u = 15, c_t = 20$ ، در این صورت مقادیر بهینه برای n ، یعنی n_{opt} به‌ازای انتخاب‌های متفاوت c^*, r و T محاسبه و در جدول ۲ گزارش شده‌اند. در جدول ۲ اعداد داخل پرانتز مقادیر بهینه تابع هزینه یعنی $EC(r, n_{opt}, T)$ هستند. خط تیره (-) در جدول ۲ نشان‌دهنده‌ی این است که هیچ مقداری برای n وجود ندارد که به‌ازای آن مقدار تابع هزینه از c^* کمتر شود. شکل ۱ نیز مقادیر تابع هزینه $EC(r, n, T)$ را برحسب n به‌ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_0 = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت c^*, r و T نمایش می‌دهد. شکل ۱ نتایج جدول ۲ را تایید می‌کند. از شکل ۱ مشاهده می‌شود که به‌ازای $n = r + 1, r + 2, \dots$ ، n تابع هزینه $EC(r, n, T)$ تابعی نانزولی برحسب n است.

حال فرض می‌شود که مقادیر n و T از قبل تعیین شده‌اند و باید مقدار بهینه برای r یعنی r_{opt} به‌گونه‌ای تعیین شود که مقدار متوسط تابع هزینه از مقدار c^* بیشتر نشود. به عبارت دیگر به‌ازای $r \leq n$

$$r_{opt} = \sup \{r; EC(r, n, T) \leq c^*\}.$$

جدول ۱: مقادیر تابع هزینه $EC(r, n, T)$ به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و r و T .

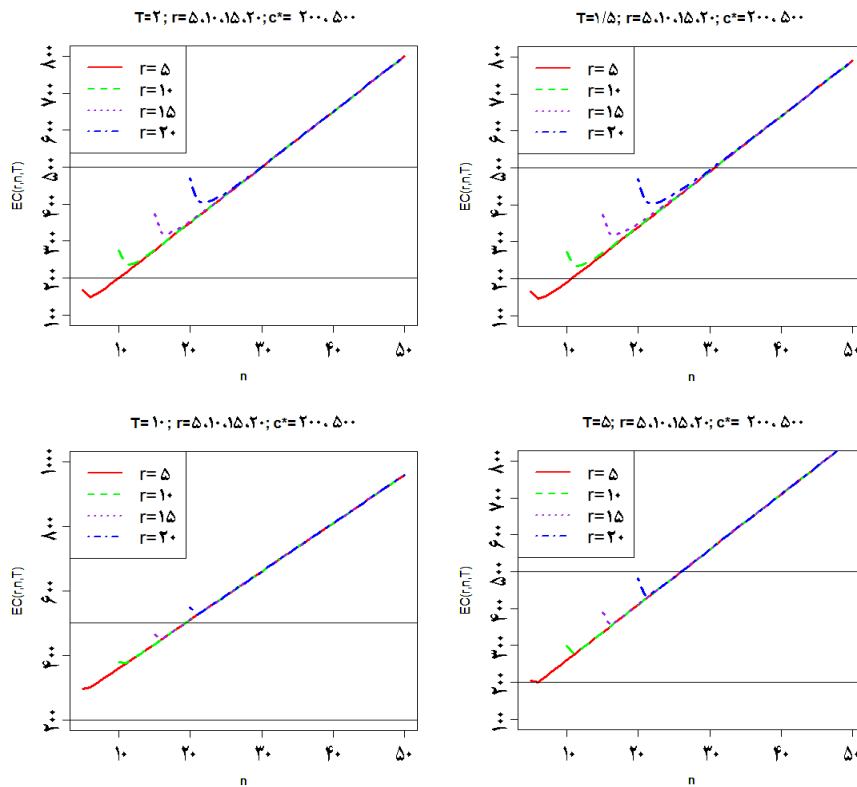
10	5	2	$5/1$	T/r	n
۲۸۵	۱۸۵	۱۲۵	۱۱۵	۱	۵
۲۸۵	۱۸۵	۱۱/۱۲۵	۸۳/۱۱۵	۲	
۲۸۵	۰۱/۱۸۵	۹۱/۱۲۵	۷۵/۱۱۷	۳	
۰۶/۲۸۵	۵۰/۱۸۵	۱۶/۱۳۱	۷۲/۱۲۶	۴	
۹۳/۲۹۴	۴۷/۲۰۴	۸۰/۱۶۷	۳۴/۱۶۶	۵	
۳۶۰	۲۶۰	۲۰۰	۱۹۰	۱	۱۰
۳۶۰	۲۶۰	۲۰۰	۰۴/۱۹۰	۳	
۳۶۰	۲۶۰	۰۸/۲۰۰	۹۳/۱۹۰	۵	
۳۶۰	۲۶۰	۷۸/۲۰۱	۱۴/۱۹۶	۷	
۷۰/۳۷۹	۷۴/۲۹۷	۷۴/۲۷۳	۵۱/۲۷۳	۱۰	
۵۱۰	۴۱۰	۳۵۰	۳۴۰	۱	۲۰
۵۱۰	۴۱۰	۳۵۰	۳۴۰	۵	
۵۱۰	۴۱۰	۳۵۰	۶۰/۳۴۰	۱۰	
۵۱۰	۴۱۰	۶۰/۳۵۲	۳۴/۳۴۹	۱۵	
۷۷/۵۴۸	۱۶/۴۸۱	۵۳/۴۶۹	۵۲/۳۶۹	۲۰	
۶۶۰	۵۶۰	۵۰۰	۴۹۰	۱	۳۰
۶۶۰	۵۶۰	۵۰۰	۴۹۰	۵	
۶۶۰	۵۶۰	۵۰۰	۴۹۰	۱۰	
۶۶۰	۵۶۰	۵۰۰	۴۱/۴۹۰	۱۵	
۶۶۰	۵۶۰	۳۵/۵۰۰	۵۶/۴۹۴	۲۰	
۲۵/۷۱۷	۱۳/۶۶۱	۹۷/۶۵۴	۹۷/۶۵۴	۳۰	

جدول ۲: مقادیر n_{opt} ($EC(r, n_{opt}, T)$) به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت r و c^* .

10	5	2	$5/1$	T/r	c^*
-	(۲۰۰)۶	(۲۰۰)۱۰	(۱۹۰)۱۰	۱	۲۰۰
-	(۲۰۰)۶	(۲۰۰)۱۰	(۰۴/۱۹۰)۱۰	۳	
-	-	(۲۶/۱۸۵)۹	(۹۳/۱۹۰)۱۰	۵	
-	-	(۶۹/۱۸۹)۹	(۱۴/۱۹۶)۱۰	۷	
-	-	-	-	۱۰	
(۴۹۵)۱۹	(۵۰۰)۲۶	(۵۰۰)۳۰	(۴۹۰)۳۰	۱	۵۰۰
(۴۹۵)۱۹	(۵۰۰)۲۶	(۵۰۰)۳۰	(۴۹۰)۳۰	۵	
(۴۹۵)۱۹	(۵۰۰)۲۶	(۵۰۰)۳۰	(۴۹۰)۳۰	۱۰	
(۴۹۵)۱۹	(۵۰۰)۲۶	(۵۰۰)۳۰	(۴۲/۴۹۰)۳۰	۱۵	
-	(۵۰۰)۲۶	(۶۳/۴۸۵)۲۹	(۵۶/۴۹۴)۳۰	۲۰	
-	-	-	-	۳۰	

با فرض $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ مقادیر بهینه برای r یعنی r_{opt} ، به ازای انتخاب های متفاوت c^* ، n و T محاسبه و در جدول ۳ ارائه شده اند. در جدول ۳ اعداد داخل پرانتز مقادیر بهینه تابع هزینه یعنی $EC(r_{opt}, n, T)$ هستند. در جدول ۳ خط تیره (-) نشان دهنده این است که هیچ مقداری برای r وجود ندارد که به ازای آن مقدار تابع هزینه از c^* کمتر شود. شکل ۲ نیز مقادیر تابع هزینه $EC(r, n, T)$ را بر حسب r به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و T نمایش می دهد. در شکل ۲ مشاهده می شود که تابع هزینه $EC(r, n, T)$ تابعی نانوولی از r است.

حال با فرض معلوم بودن مقادیر r و n مقدار بهینه برای T یعنی T_{opt} ، به گونه ای تعیین می شود که مقدار متوسط تابع هزینه از c^* بیشتر نشود. به عبارت دیگر



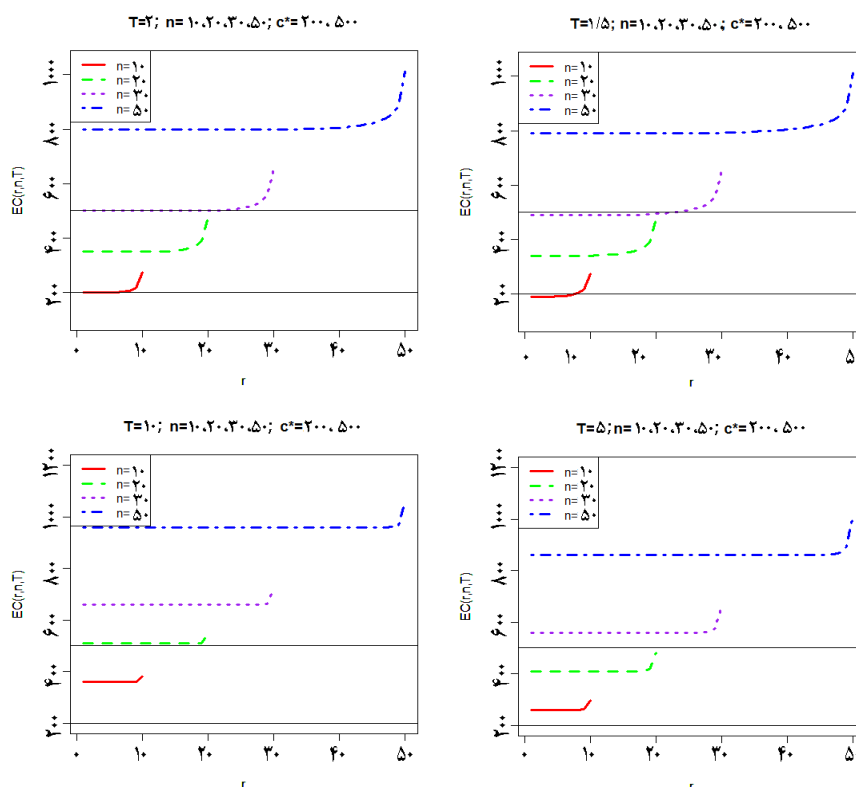
شکل ۱: نمودار تابع هزینه $EC(r, n, T)$ برحسب n و به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت T, r, c^* .

جدول ۳: مقادیر $r_{opt}(EC(r_{opt}, n, T))$ به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت c^*, n و T .

	۱۰	۵	۲	۵/۱	T/n	c^*
-	-	(۵۰/۱۸۵)۴	(۸۰/۱۶۷)۵	(۳۴/۱۶۶)۵	۵	۲۰۰
-	-	-	(۲۰۰)۳	(۱۴/۱۹۶)۷	۱۰	-
-	-	-	-	-	۲۰	-
-	-	-	-	-	۳۰	-
(۹۳/۲۹۴)۵	(۴۷/۲۰۴)۵	(۸۰/۱۶۷)۵	(۳۴/۱۶۶)۵	۵	۵۰۰	
(۷۰/۳۷۹)۱۰	(۷۴/۲۹۷)۱۰	(۷۴/۲۷۳)۱۰	(۵۱/۲۷۳)۱۰	۱۰	-	
-	(۱۶/۴۸۱)۲۰	(۵۳/۴۶۹)۲۰	(۵۲/۴۶۹)۲۰	۲۰	-	
-	-	(۵۰۰)۱۶	(۳۲/۴۹۸)۲۲	۳۰	-	

$$T_{opt} = \sup \{T; EC(r, n, T) \leq c^*\}.$$

مقادیر بهینه برای T ، یعنی T_{opt} ، به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و $c^* = 500$ محاسبه و در جدول ۴ گزارش شده‌اند. از جدول ۴ مشاهده می‌شود که مقادیر T_{opt} نسبت به r و n نزولی و نسبت به c^* صعودی هستند. شکل ۳ نیز مقادیر تابع هزینه $EC(r, n, T)$ را برحسب T به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت c^*, n و r نمایش می‌دهد. از شکل ۳ مشاهده می‌شود تابع هزینه تابعی نانزولی از T است.



شکل ۲: نمودار تابع هزینه $EC(r, n, T)$ بر حسب r و به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n, c^*, T .

جدول ۴: مقادیر T_{opt} به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n, r و c^*

c^*	r/n	۱	۲	۳	۴	۵	۷	۱۰	۱۵	۲۰
۲۰۰	۵	۷۵/۵	۷۵/۵	۷۴۹/۵	۷۳۳/۵	۷۲۱/۴	-	-	-	-
	۱۰	۲	۲	۹۹۹/۱	۹۹۹/۱	۹۹۵/۱	۸۷۸/۱	-	-	-
	۱۵	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	۲۰	-	-	-	-	-	-	-	-	-
۵۰۰	۵	۷۵/۲۰	۷۵/۲۰	۷۵/۲۰	۷۴۹/۲۰	-	-	-	-	-
	۱۰	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷	۱۷	۳۹۳/۱۶	-	-
	۱۵	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۵/۱۳	۲۲/۱۲	-
	۲۰	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۵۰/۹	۷۱۵/۶
	۳۰	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۹۸۰/۱

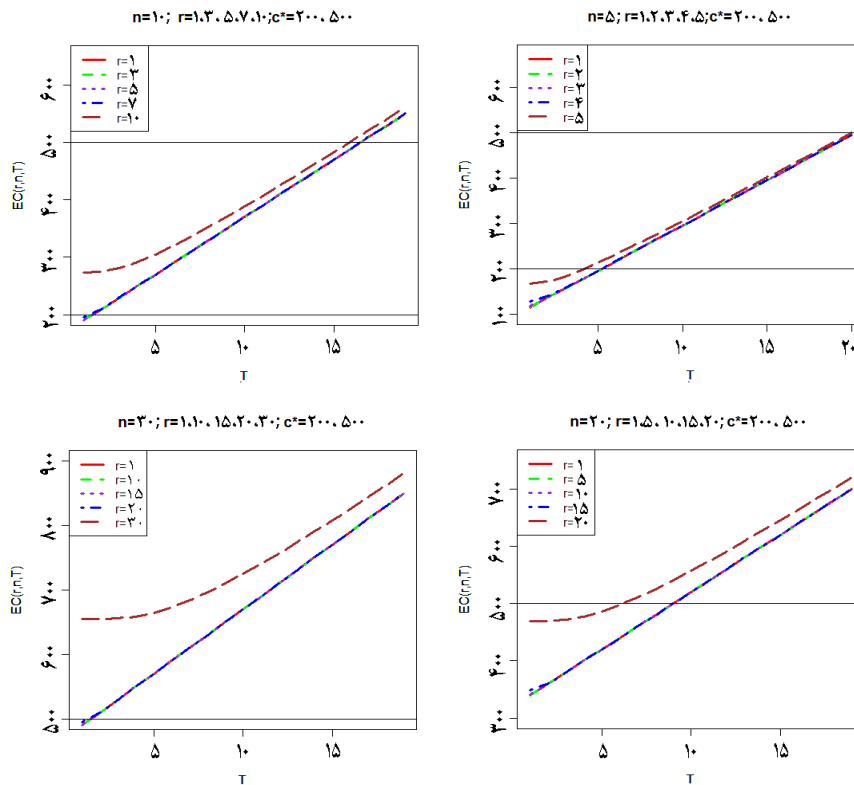
۳ مثال واقعی

در این بخش به منظور ارزیابی نتایج به ارائه یک مثال واقعی پرداخته می شود. داده های زیر از [۱۶] نشان دهنده ی طول عمر نمونه های فولادی هستند که در سطح تنش ۵/۳۸ مورد آزمایش قرار گرفته اند.

۶۰، ۵۱، ۸۳، ۱۴۰، ۱۰۹، ۱۰۶، ۱۱۹، ۷۶، ۶۸، ۶۷، ۱۱۱، ۵۷، ۶۹، ۷۵، ۱۲۲، ۱۲۸، ۹۵، ۸۷، ۸۲، ۱۳۲.

به منظور برازش توزیع پارتو با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\beta = 51$ برای این مجموعه داده با استفاده از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف، پی-مقدار متناظر برابر با ۱۰۶۹/۰ به دست آمد. بنا بر این توزیع می تواند برای برازش داده ها مناسب باشد. به منظور استفاده از نتایج جدول های ۲-۴، با تقسیم داده ها بر $\beta = 51$ به دست می آوریم

۱/۱۷۶۴، ۱/۰۰۰۰، ۱/۶۲۷۴، ۲/۷۴۵۰، ۲/۱۳۷۲، ۲/۰۷۸۴، ۲/۳۳۳۳، ۱/۴۹۰۱، ۱/۳۳۳۳، ۱/۳۱۳۷،
 ۲/۱۷۶۴، ۱/۱۱۷۶، ۱/۳۵۲۹، ۱/۴۷۰۵، ۲/۳۹۲۱، ۲/۵۰۹۸، ۱/۸۶۲۷، ۱/۷۰۵۸، ۱/۶۰۷۸، ۲/۵۸۸۲.



شکل ۳: نمودار تابع هزینه $EC(r, n, T)$ برحسب T و به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n, c^* و r

بنا بر این داده‌های فوق از توزیع پارتو با پارامترهای $\alpha = 2$ و $\beta = 1$ پیروی می‌کنند. برای بررسی نتایج بخش قبل سه حالت مختلف را در نظر می‌گیریم:

- مقادیر r و T معلوم باشند: در این حالت ابتدا با فرض $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20, c^* = 200$ مقادیر متفاوت r و T و استفاده از نتایج جدول ۲ مقادیر n_{opt} را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از رابطه (۱.۲) مقادیر $C(r, n_{opt}, T)$ را محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۵ گزارش شده‌اند. به عنوان مثال اگر $T = 1/5$ و $r = 1$ باشد آنگاه از جدول ۲ داریم $n_{opt} = 10$. در این حالت به دست می‌آوریم $X_{r:n_{opt}} = 1/5$ و $Max(X_{r:n_{opt}}, T) = 1/5$. حال از رابطه (۱.۲) داریم

$$C(r, n_{opt}, T) = 10 + 15n_{opt} + 20Max(X_{r:n_{opt}}, T) = 190.$$

از جدول ۵ مشاهده می‌کنیم که در بیشتر حالت‌ها شرط $C(r, n_{opt}, T) \leq c^*$ برقرار است.

جدول ۵: مقادیر $C(r, n_{opt}, T)$ به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20, c^* = 200$ و مقادیر متفاوت r و T

	۱۰	۵	۲	۵/۱	T/r
-	۲۰۰	۲۰۰	۱۹۰		۱
-	۲۰۰	۲۰۰	۱۹۰		۳
-	-	۱۸۵	۱۹۰		۵
-	-	۷۴۴/۱۸۷	۵۶۸/۲۰۱		۷
-	-	-	-		۱۰

مقادیر n و T معلوم باشند: در این حالت نیز با فرض $\alpha = 2, \beta = 1, c^* = 200, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و T ، با مراجعه به جدول ۳ مقادیر r_{opt} را به دست می آوریم. سپس با استفاده از رابطه (۱.۲) می توان مقادیر $C(r_{opt}, n, T)$ را محاسبه کرد. مقادیر $C(r_{opt}, n, T)$ در جدول ۶ ارائه شده اند. از جدول ۶ نیز مشاهده می کنیم که در بیشتر حالت ها شرط $C(r_{opt}, n, T) \leq c^*$ برقرار است.

جدول ۶: مقادیر $C(r_{opt}, n, T)$ به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c^* = 200, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و T .

	۱۰	۵	۲	۵/۱	T/n
-	۱۸۵	۹۰/۱۳۹	۹۰/۱۳۹	۵	
-	-	۲۰۰	۵۶۸/۲۰۱	۱۰	
-	-	-	-	۲۰	

•

مقادیر n و r معلوم باشند: در این حالت نیز با فرض $\alpha = 2, \beta = 1, c^* = 200, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و r ، و استفاده از جدول ۳ و رابطه (۱.۲) مقادیر $C(r, n, T_{opt})$ محاسبه و در جدول ۷ ارائه شده اند. از جدول ۷ نیز می توان مشاهده کرد که در بیشتر حالت ها شرط $C(r, n, T_{opt}) \leq c^*$ برقرار است.

جدول ۷: مقادیر $C(r, n, T_{opt})$ به ازای $\alpha = 2, \beta = 1, c^* = 200, c_o = 10, c_u = 15, c_t = 20$ و مقادیر متفاوت n و r .

	۲۰	۱۵	۱۰	۷	۵	۴	۳	۲	۱	r/n
-	-	-	-	۴۲/۱۷۹	۶۶/۱۹۹	۹۸/۱۹۹	۲۰۰	۲۰۰	۵	
-	-	-	۵۶۸/۲۰۱	۹۰/۱۹۹	۹۸/۱۹۹	۹۸/۱۹۹	۲۰۰	۲۰۰	۱۰	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	۲۰	

۴ نتیجه گیری

تعیین طرح سانسور بهینه از جمله مسائلی است که تاکنون توسط پژوهش گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. این مسأله در سانسور هیبرید نوع دوم از توزیع پارتو و براساس معیار هزینه در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت. هزینه آزمایش تابعی نانزولی از n و T است بنابراین کمترین مقدار برای این مقادیر منجر به کمترین هزینه می شود. اما از آنجا که تعداد داده های کم برای پژوهش های بعدی مانند برآورد پارامترها، پیش بینی مشاهدات آتی و ... نمی تواند مناسب باشد، در این مقاله به دنبال بیشترین مقدار برای n و T بودیم به گونه ای که مقدار تابع هزینه از حداکثر بودجه در نظر گرفته شده، یعنی c^* بیشتر نشود. برای این منظور سه حالت مختلف در نظر گرفته شد: در حالت اول مقادیر r و T معلوم فرض شدند و هدف تعیین مقدار بهینه برای n بود؛ در حالت دوم مقادیر n و T معلوم بودند و هدف تعیین مقدار بهینه برای r بود؛ و در حالت سوم مقادیر n و r معلوم فرض شدند و هدف تعیین مقدار بهینه برای T بود. مثال واقعی ارائه شده در مقاله، نتایج را مورد ارزیابی قرار داد. برای تعیین طرح سانسور بهینه می توان معیارهای دیگری مانند اطلاع فیشر و ... را در نظر گرفت که پژوهشی جداگانه را طلب می کند و بی شک در نتایج تغییر حاصل خواهد شد.

تقدیر و تشکر

در اینجا لازم است از سردبیر، داوران و هیئت تحریریه محترم مجله به خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادهای ارزنده، تقدیر و تشکر شود.

فهرست منابع

- [۱] ا. بصیری، اندازه نمونه و طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو براساس معیار اطلاع فیشتر در توزیع پارتو، مجله اندیشه آماری، ۲۴(۲) (۱۳۹۸)، ۲۵-۳۵.
- [۲] ا. بصیری، تعیین طرح بهینه در سانسور هیبرید نوع اول از توزیع بر نوع دوازده براساس تابع هزینه، نشریه علمی پژوهشی مهندسی و مدیریت کیفیت، ۱۱(۲) (۱۴۰۰)، ۲۰۲-۱۹۱.
- [۳] ا. بصیری، بهینه‌سازی اندازه نمونه تصادفی در سانسور فزاینده نوع دو بر مبنای معیار هزینه، پژوهش‌های ریاضی، ۸(۲) (۱۴۰۱)، ۴۹-۶۴.
- [۴] ا. بصیری، س. بیگی، طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های دو جمله‌ای از توزیع رایلی براساس پیش‌بینی دونمونه‌ای بیزی و تابع هزینه، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، ۱۰(۱) (۱۳۹۹)، ۱۵۷-۱۳۵.
- [۵] ا. بصیری، س.م. صالحی، اندازه نمونه بهینه براساس تابع هزینه در مدل سانسور فزاینده نوع دو، علوم آماری، ۱۴(۱) (۱۳۹۹)، ۵۴-۴۱.
- [6] B.C. Arnold, *Pareto Distributions*, CRC press, Boca Raton, London and New York, 2015.
- [7] E. Basiri, *Optimal Number of Failures in Type II Censoring for Rayleigh Distribution*, Journal of Applied Research on Industrial Engineering, **4(1)** (2017), 67-74.
- [8] R. Bhattacharya, B. Pradhan and A. Dewanji, *Optimum life testing plans in presence of hybrid censoring: a cost function approach*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, **30(5)** (2014), 519-528.
- [9] R. Bhattacharya, B. Pradhan and A. Dewanji, *On optimum life-testing plans under Type-II progressive censoring scheme using variable neighborhood search algorithm*, Test, **25(2)** (2016), 309-330.
- [10] R. Bhattacharya, B.N. Saha, G.G Fariás and N. Balakrishnan, *Multi-criteria-based optimal life-testing plans under hybrid censoring scheme*, Test, **29(2)** (2020), 430-453.
- [11] M. Burkschat, E. Cramer and U. Kamps, *On optimal schemes in progressive censoring*, Statistics and probability letters, **76(10)** (2006), 1032-1036.
- [12] M. Burkschat, E. Cramer and U. Kamps, *Linear estimation of location and scale parameters based on generalized order statistics from generalized Pareto distributions*, Recent Developments in Ordered Random Variables, (2007), 253-261.
- [13] M. Burkschat, E. Cramer and U. Kamps, *Optimality criteria and optimal schemes in progressive censoring. Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36(7)** (2007), 1419-1431.
- [14] A. Childs, B. Chandrasekar, N. Balakrishnan and D. Kundu, *Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, **55(2)** (2003), 319-330.
- [15] J.B. Cordeiro and H. Pham, *Optimal Design of Life Testing Cost Model for Type-II Censoring Weibull Distribution Lifetime Units with Respect to Unknown Parameters*, International Journal of System Assurance Engineering and Management, **8** (2017), 28-32.
- [16] M. Crowder, *Tests for a family of survival models based on extremes*. In Recent Advances in Reliability Theory (pp. 307-321). Birkhäuser, Boston, MA, 2000.
- [17] H.A. David and H.N. Nagaraja, *Order Statistics*, 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

- [18] N. Ebrahimi, *Determining the sample size for a hybrid life test based on the cost function*, Naval Research Logistics (NRL), **35(1)** (1988), 63-72.
- [19] B. Epstein, *Truncated life tests in the exponential case*, The Annals of Mathematical Statistics, **25 (3)** (1954), 555-564.
- [20] N.L. Johnson, S. Kotz and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions*, volume 2 (Vol. 289), John Wiley & Sons, 1995.
- [21] V. Pareto, *Cours d'Economie Politique*, volume 2, F. Rouge, Lausanne, 1897.
- [22] H. Pham, *Optimal design of life testing for ULSI Circuit Manufacturing*, IEEE transactions on semiconductor manufacturing, **5** (1992), 68-70.
- [23] H. Pham and X. Zhang, *A software cost model with warranty and risk costs*, IEEE Transactions on Computers, **48** (1999), 71-75.
- [24] B. Pradhan and D. Kundu, *Inference and optimal censoring schemes for progressively censored Birnbaum-Saunders distribution*, Journal of Statistical Planning and Inference, **143(6)** (2013), 1098-1108.
- [25] W. Volterman, F.K. Davies and N. Balakrishnan *Pitman closeness as a criterion for the determination of the optimal progressive censoring scheme*, Statistical Methodology, **9(6)** (2012), 563-572.



Optimal scheme in Type II hybrid censoring of Pareto distribution based on cost function criterion

Elham Basiri^{1, †}, Somayeh Ghafouri²

(1) Department of Mathematics and Applications, Faculty of Basic Sciences, Kosar University of Bojnord, Bojnord, Iran

(2) Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Arak University, Arak, 38156-8-8349, Iran

Communicated by: Mohammad Jolodari Mamaghani

Received: 2022/8/20

Accepted: 2023/1/12

Abstract: A hybrid censoring is a mixture of Type I and Type II censoring schemes, which is divided into Type I and Type II hybrid censoring according to the criteria for terminating the test. In this article, considering Type II hybrid censoring scheme of Pareto distribution, the optimal censoring scheme is determined. To determine the optimal censoring scheme, various factors can be considered, the most important of which is the sampling cost criterion. Therefore, the optimal censoring scheme is determined so that the total cost of the test does not exceed a predetermined value. To evaluate the obtained results, numerical computations have been performed. A real example is also expressed. Finally, the conclusion of the article is presented.

Keywords: Cost function, Optimal censoring scheme, Type II hybrid censoring.



©2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

[†]Corresponding author.

E-mail addresses: elhambasiri@kub.ac.ir (E. Basiri), s-ghafouri@araku.ac.ir (S. Ghafouri).