



حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از ترکیب روش تبدیل دیفرانسیل با روش‌های چندگامی خطی کسری

سید حمیدرضا مرانی^۱، عبدالباقی سلطانی جوجهی، محمدحسین درخشان

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

دبیر مسئول: جلیل رشیدی‌نیا

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۹

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۴/۲۷

چکیده: در این مقاله یک روش تکراری برای به‌دست آوردن جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل کسری جزئی معرفی شده است. این روش براساس ترکیب روش تبدیل دیفرانسیل با روش‌های چندگامی خطی کسری بنا شده است. روش پیشنهادی دارای هزینه محاسباتی بسیار کم است که با استفاده از آن معادلات دیفرانسیل کسری جزئی به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. سپس معادلات حاصل با استفاده از اعمال روش‌های چندگامی خطی کسری همانند اویلر کسری با دقت بالا حل می‌شوند. سری جواب به‌دست‌آمده در روش تبدیل دیفرانسیل در ناحیه‌های بزرگ سرعت هم‌گرایی کندی دارد. در این مقاله با ترکیب روش یاد شده با روش‌های چندگامی خطی کسری این نقیصه برطرف می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که جواب‌های به‌دست‌آمده با جواب دقیق معادله دیفرانسیل کسری مطابقت خوبی دارند. نتایج حاصل شده پایداری و دقت اثبات‌شده روش را تایید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، جواب عددی، پایداری، روش تبدیل دیفرانسیل، روش چندگامی خطی کسری.

رده‌بندی ریاضی: 35A15; 26A33; 65L06; 65L20

مقدمه ۱

نظریه حسابان کسری به‌عنوان موضوعی قدیمی ولی در عین حال جدید است که اخیراً توجه دانشمندان زیادی را به خود جلب کرده است. از کاربردهای آن می‌توان به بسیاری از مدل‌سازی مسائل واقعی اشاره کرد. در دهه‌های اخیر، با بررسی مسائل مقدار اولیه ثابت شده است که رویکرد کلاسیک معادلات دیفرانسیل نمی‌تواند در مدل‌سازی برخی از پدیده‌های پیچیده جواب دهد. بنابراین رویکرد دیگری از معادلات دیفرانسیل به‌نام کسری بیان شد که کارایی بهتری دارد. از کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری در شاخه‌هایی از علوم می‌توان به موارد

^۱ نویسنده مسئول مقاله

رایانامه: (A. Soltani Joujehi) a.soltani.j69@gmail.com, (H.R. Marasi) marasi@tabrizu.ac.ir, (M.H. Derakhshan) m.h.derakhshan.20@gmail.com

متعدد از جمله ریاضیات، شیمی، فیزیک و مهندسی اشاره کرد [۴-۸]. برای حل معادلات دیفرانسیل کسری روش های متعدد زیادی به کار گرفته شده اند که از بین آنها می توان به روش های معروف تبدیل لاپلاس، تبدیل فوریه، تبدیل ملین و روش های تکراری مانند روش تجزیه آدومیان، روش های هوموتوبی، روش های آدامز، روش تبدیل دیفرانسیل و روش هایی در [۱، ۲، ۹-۱۲] اشاره نمود. روش تبدیل دیفرانسیل یک روش کارا برای حل معادلات دیفرانسیل است که کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی دارد. روش تبدیل دیفرانسیل اولین بار توسط ژو [۱۳] برای حل معادلات دیفرانسیل کسری معرفی شد که بعداً آریک اوگلو و اوزکل آن را تعمیم دادند [۱۴، ۱۵]. هم چنین عبیدت و شواقفه روش مشابهی را به عنوان فرمول تعمیم یافته تیلور معرفی کردند [۱۶]. در زمینه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری، کسکین و اتورانک روش تبدیل دیفرانسیل کاهش یافته را معرفی کردند [۱۷، ۱۸]. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به راحتی می توان سری جواب را محاسبه کرد. ولی در عمل جواب با یک سری از مرتبه متناهی تقریب زده می شود. گاهی اوقات این سری همان بسط تیلور تابع است. این سری جواب در ناحیه های کوچک از سرعت هم گرایی بالایی برخوردار است، ولی در ناحیه های بزرگ ممکن است هم گرایی آن کندتر باشد [۱۹، ۲۰]. در این مقاله نشان می دهیم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از ترکیب دو روش تبدیل دیفرانسیل با روش های چندگامی خطی کسری می توان این مشکل هم گرایی را برای ناحیه های بزرگ حل کرد. روش پیش نهادی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می کند. سپس این معادلات با استفاده از روش های چندگامی خطی کسری با دقت بالایی حل می شوند.

در روش حاضر جواب معادله ${}^C D_t^\alpha u(x, t) = L[u(x, t)] + f(t, u(x, t))$ که در آن L یک عملگر مشتق نسبت به متغیر x مثل $L = u_{xx}$ است، به شکل یک چندجمله ای به عنوان تقریبی از جواب دقیق به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_0(t) + U_1(t)x + U_2(t)x^2 + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t)x^j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن $U_k(t)$ به ازای $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ k -مین تبدیل دیفرانسیل $u(x, t)$ در نقطه t است. در این صورت مسئله منوط می شود به یافتن این تبدیلات دیفرانسیل که در معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به متغیر t صدق می کنند و این معادلات نیز به کمک روش های چندگامی خطی کسری حل خواهند شد.

تعاریف زیر را برای استفاده های بعدی می آوریم.

تعریف ۱.۱. [۲۱] مشتق کسری کاپوتو به صورت

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(x, s) ds, \quad (2.1)$$

تعریف می شود که در آن $n-1 \leq \alpha < n$ ، $n = [\alpha] + 1$ و $[\alpha]$ نمایش قسمت صحیح α است.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم که u_k و v_k به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ به ترتیب جواب های روش پیش نهادی با مقادیر اولیه $u_0^{(j)}$ و $v_0^{(j)}$ $j = 0, 1, \dots, n-1$ باشند. اگر ثابت C مستقل از Δt و n وجود داشته باشد، به طوری که

$$|u_k - v_k| \leq C \sum_{j=0}^{n-1} |u_0^{(j)} - v_0^{(j)}|, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in [0, 1],$$

آن گاه روش پایدار است.

لم زیر به نامساوی گرانوال معروف است.

لم ۳.۱. [۲۲] فرض کنیم که $C, \alpha, T > 0$ و $b_{j,n} = C_0 (t_n - t_j)^{\alpha-1}$ به ازای $j = 0, 1, \dots, n-1$ فرض کنیم که برای $j \geq n$ ، $b_{j,n} = 0$ ، که در آن ضرایب تعریف شده در (۵.۲) اند. فرض کنیم M_0 مثبت باشد و دنباله $\{\varphi_k\}$ در

$$\begin{cases} \varphi_0 \leq M_0, \\ \varphi_k \leq \sum_{j=0}^{k-1} b_{j,k} \varphi_j + M_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

صدق کند که در آن $k = 1, 2, \dots, n$. آن گاه

$$\varphi_k \leq CM_0, \quad (4.1)$$

که در آن C ثابتی مثبت و مستقل از k است.

۲ مروری بر روش‌ها

در این بخش برخی از تعاریف و مقدمات روش تبدیل دیفرانسیل و روش‌های چندگامی خطی کسری بیان خواهد شد که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فرض کنیم $f(t) \in C(I)$ که $I = [t_0, T]$ برای عدد صحیح مثبت n_T و زمان T ، بازه زمانی $[t_0, T]$ را به صورت $t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < T$ نسبت به متغیر t افراز می‌کنیم. فرض کنیم $t_0 = 0$ و $t_{n_T} = T$ و $\Delta t = \frac{T}{n_T}$ طول گام باشد که در آن $n_T \in \mathbb{N}$ و به‌ازای $n = 0, 1, \dots, n_T$ ، $t_n = n\Delta t$ تعریف شوند. از طرف دیگر، فرض کنیم که N عدد صحیح مثبت باشد. می‌توان طول گام مکان را به صورت $\Delta x = \frac{T}{N}$ تعریف کرد که در آن صورت نقاط گرهی مکان به‌ازای $i = 0, 1, \dots, N$ به صورت $x_i = i\Delta x$ خواهند بود.

۱.۰.۲ روش‌های چندگامی خطی کسری

یک روش چندگامی خطی برای حل مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

به صورت زیر است:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}. \quad (1.2)$$

شکل کسری شده روش‌های فوق برای حل مسئله

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

به صورت زیر است [۹، ۱۰]:

$$y_n = y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_j f(t_{n-j}, y_{n-j}) + h^\alpha \sum_{j=0}^s w_{n,j} f(t_j, y_j) + \mathcal{O}(\Delta t)^p, \quad (3.2)$$

که در آن وزن‌های آغازین اند که شامل $s+1$ معادلات خطی $f(t_j, y_j)$ است، p مرتبه روش است و ω_j ها ضرایب بسط تیلور تابع مولد $\omega^\alpha(\xi) = \left(\frac{\sigma(\frac{1}{\xi})}{\rho(\frac{1}{\xi})}\right)^\alpha$ اند به طوری که $\rho(\xi)$ و $\sigma(\xi)$ چندجمله‌ای مشخصه اول و دوم روش چندگامی خطی (۱.۲) اند. به‌عنوان مثال، روش اویلر کسری به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, u_j) + \mathcal{O}(\Delta t)^p, \quad (4.2)$$

که در آن m عدد صحیح مثبت است، p مرتبه روش و

$$m-1 \leq \alpha < m, \quad b_{j,n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha \right], \quad (5.2)$$

و $b_{j,n+1}$ ضرایب به دست آمده از درون‌یابی خطی تابع f است.

۲.۰.۲ روش تبدیل دیفرانسیل

برای تابع $u(x, t)$ تعریف شده در (۱.۱)، k -امین مشتق به صورت

$$\mathbf{U}_k(t) = \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}, \quad (۶.۲)$$

تعریف می شود که در آن $\mathbf{U}_k(t)$ تبدیل دیفرانسیل تابع $u(x, t)$ نامیده می شود و تبدیل دیفرانسیل وارون $\mathbf{U}_k(t)$ به صورت

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t) x^k, \quad (۷.۲)$$

تعریف می شود. با ترکیب (۶.۲) و (۷.۲) داریم:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x, t) x^k, \quad (۸.۲)$$

که نشان می دهد روش تبدیل دیفرانسیل مشابه بسط سری تیلور تابع است. روابط زیر در محاسبه تبدیلات دیفرانسیل تابع برقرارند (برای جزئیات بیش تر به [۳] مراجعه شود)

الف) اگر $u(x, t) = cf(x, t)$ آن گاه $\mathbf{U}_k(t) = c\mathbf{F}_k(t)$

ب) اگر $u(x, t) = \frac{\partial^i f(x, t)}{\partial x^i}$ آن گاه $\mathbf{U}_k(t) = (k+i)(k+i-1)\cdots(k+2)(k+1)\mathbf{F}_{k+i}(t)$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$

ج) اگر $u(x, t) = D_x^\alpha f(x, t)$ آن گاه $\mathbf{U}_k(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{k}{\theta})}{\Gamma(1+\frac{k}{\theta})} F_{(k+\alpha\theta)}(t)$ که در آن $\mathbf{U}_k(t)$ و $\mathbf{F}_k(t)$ به ترتیب تبدیل دیفرانسیل توابع $u(x, t)$ و $f(x, t)$ اند.

۱.۲ ترکیب روش تبدیل دیفرانسیل با روش های چندگامی خطی کسری

ابتدا یک معادله دیفرانسیل خطی به صورت زیر را در نظر بگیریم:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) + Ru(x, t) = f(x, t), \quad n-1 < \alpha \leq n, t \geq 0, \quad (۹.۲)$$

که در آن ${}^C D_t^\alpha u(x, t)$ مشتق کسری کاپوتو است، R عملگر خطی نسبت به x و $f(x, t)$ تابع معلومی است. با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل به طرفین (۹.۲) داریم:

$$DTM[{}^C D_t^\alpha u(x, t)] + DTM[Ru(x, t)] = DTM[f(x, t)]. \quad (۱۰.۲)$$

با استفاده از ویژگی های روش تبدیل دیفرانسیل و با ساده کردن رابطه (۱۰.۲)، داریم:

$${}^C D_t^\alpha \mathbf{U}_k(t) = F_k(t) - DTM[Ru(x, t)]. \quad (۱۱.۲)$$

با اعمال تبدیل دیفرانسیل وارون از طرفین (۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$u(x, t) = F(x, t) - (DTM)^{-1} [DTM[Ru(x, t)]], \quad (۱۲.۲)$$

که در آن $F(x, t)$ عبارتی را نشان می دهد که از جمله منبع ناشی می شود. اکنون فرض می کنیم که جواب (۱۲.۲) به شکل زیر باشد:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{U}_m(t) x^m. \quad (۱۳.۲)$$

با جای گذاری روابط (۱۳.۲) در (۱۲.۲) خواهیم داشت:

$${}^C D_t^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)x^m = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(t)x^m - (DTM)^{-1} \left[DTM \left[R \left(\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)x^m \right) \right] \right]. \quad (14.2)$$

اکنون با برابر قرار دادن عبارت‌های شامل توان‌های یکسان x ، می‌توان یک سری از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی برای تبدیلات دیفرانسیل تابع مجهول به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha U_0(t) &= F_0(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_0(t)] \right] \\ {}^C D_t^\alpha U_1(t) &= F_1(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_1(t)] \right] \\ {}^C D_t^\alpha U_2(t) &= F_2(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_2(t)] \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (15.2)$$

برای حل معادلات فوق، (۱۵.۲)، از روش‌های چندگامی خطی کسری مثل اویلر کسری استفاده می‌کنیم. در نهایت بعد از به دست آوردن تبدیلات دیفرانسیل می‌توان جواب تقریبی $u(x, t)$ را به صورت

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k U_i(t)x^i, \quad (16.2)$$

به دست آورد.

اکنون شکل کلی معادله دیفرانسیل کسری غیرخطی ناهمگن زیر را در نظر می‌گیریم:

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), \quad t \geq 0, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad (17.2)$$

که در آن R ، ${}^C D_t^\alpha u(x, t)$ و $f(x, t)$ در (۹.۲) تعریف شده‌اند و N عملگر غیرخطی است. با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل از طرفین (۱۷.۲) خواهیم داشت:

$$DTM \left[{}^C D_t^\alpha u(x, t) \right] + DTM \left[Ru(x, t) + Nu(x, t) \right] = DTM \left[f(x, t) \right]. \quad (18.2)$$

در نتیجه:

$${}^C D_t^\alpha U_k(t) = F_k(t) - DTM \left[Ru(x, t) + Nu(x, t) \right]. \quad (19.2)$$

اکنون با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل وارون روی طرفین (۱۹.۲) داریم:

$$u(x, t) = F(x, t) - (DTM)^{-1} \left[DTM \left[Ru(x, t) + Nu(x, t) \right] \right], \quad (20.2)$$

که در آن $F(x, t)$ عبارت ناشی از جمله منبع است. فرض کنیم که جواب (۲۰.۲) به صورت زیر باشد:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)x^m. \quad (21.2)$$

عبارت غیرخطی در (۲۰.۲) را می‌توان به صورت

$$Nu(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)A_m(t), \quad (22.2)$$

تقریب زد که در آن A_m -ها چندجمله‌ای‌های آدومیان‌اند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) x^i \right) \right]_{x=0}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (23.2)$$

واضح است که اگر

$$f(u) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \quad (24.2)$$

آن‌گاه چندجمله‌ای‌های آدومیان به صورت

$$\begin{aligned} A_0 &= f(u_0), \\ A_1 &= u_1 f'(u_0), \\ A_2 &= u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 f''(u_0), \\ A_3 &= u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 f'''(u_0), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (25.2)$$

به دست می‌آیند. با جای‌گذاری روابط (۲۱.۲) و (۲۳.۲) در (۲۰.۲)، به معادلات خطی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t) x^m = F_m(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM \left[R \left(\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t) x^m \right) + \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t) A_m(t) \right] \right]. \quad (26.2)$$

با برابر قرار دادن عبارت‌های شامل توان‌های یکسان x ، می‌توان معادلات خطی کسری معمولی را به صورت زیر برای تبدیلات دیفرانسیل تابع مجهول به دست آورد:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha U_0(t) &= F_0(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_0(t) + A_0] \right] \\ {}^C D_t^\alpha U_1(t) &= F_1(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_1(t) + A_1] \right] \\ {}^C D_t^\alpha U_2(t) &= F_2(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_2(t) + A_2] \right] \\ {}^C D_t^\alpha U_3(t) &= F_3(t) - (DTM)^{-1} \left[DTM [R U_3(t) + A_3] \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (27.2)$$

که با اعمال روش‌های چندگامی خطی کسری حل می‌شوند. در نهایت می‌توان جواب تقریبی $u(x, t)$ را با استفاده از سری برشی

$$u(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k U_i(t) x^i, \quad (28.2)$$

به دست آورد.

۳ آنالیز پایداری

در این بخش آنالیز پایداری روش پیش‌نهادی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم که جواب حاصل از روش پیش‌نهادی برای تبدیلات دیفرانسیل تابع مجهول $U_j(t)$ ، $j = 1, \dots, n$ باشد و تابع $f(t, u)$ نسبت به مؤلفه دوم u با ثابت $L \geq 0$ در شرط لیپشیتز صدق کند (t یک ثابت است)، آن‌گاه روش پایدار است.

اثبات. فرض کنیم $\tilde{U}_i(t_0)$ و $\tilde{U}_j(t_l)$ به‌ازای $j = 0, 1, \dots, i+2$ و $l = 1, 2, \dots, n$ به‌ترتیب پریشیده‌های $U_i(t_0)$ و $U_j(t_l)$ باشند. داریم:

$$\begin{cases} U_i(t_l) = U_i(t_0) + \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} f(t_j, U_{i+2}(t_j)), \\ U_i(t_l) + \tilde{U}_i(t_l) = (U_i(t_0) + \tilde{U}_i(t_0)) + \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} f(t_j, U_{i+2}(t_j) + \tilde{U}_{i+2}(t_j)), \end{cases}$$

که در آن $l, i = 1, 2, \dots, n$ بنابراین

$$\tilde{U}_i(t_l) = \tilde{U}_i(t_0) + \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} (f(t_j, U_{i+2}(t_j) + \tilde{U}_{i+2}(t_j)) - f(t_j, U_{i+2}(t_j))).$$

با انتخاب $U_0 = \max_{0 \leq i \leq n} (\tilde{U}_i(t_0))$ ، داریم:

$$\begin{aligned} |\tilde{U}_i(t_l)| &= \left| \tilde{U}_i(t_0) + \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} (f(t_j, U_{i+2}(t_j) + \tilde{U}_{i+2}(t_j)) - f(t_j, U_{i+2}(t_j))) \right| \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} (\tilde{U}_i(t_0)) + \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} \left| (f(t_j, U_{i+2}(t_j) + \tilde{U}_{i+2}(t_j)) - f(t_j, U_{i+2}(t_j))) \right| \\ &\leq U_0 + L \sum_{j=0}^{l-1} b_{j,l} |\tilde{U}_{i+2}(t_j)| \\ &\leq CU_0, \end{aligned}$$

□

که در آن از نامساوی گرانوال ۳.۱ استفاده کرده‌ایم. در نتیجه اثبات کامل است.

۴ آنالیز خطا

برای آنالیز خطای روش پیش‌نهادشده در ابتدا، به‌ازای $t \in (t_k, t_{k+1})$ به‌سادگی می‌توان $u'(x, t_k)$ و $u''(x, t_k)$ را به‌صورت

$$u'(x, t_k) \simeq U_1^{(j)}(t_k) + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (1.4)$$

و

$$u''(x, t_k) \simeq 2U_2^{(j)}(t_k) + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad (2.4)$$

به‌ازای $j = 0, 1, \dots, n-1$ تقریب زد که در آن $U_1^{(j)}(t_k)$ و $U_2^{(j)}(t_k)$ به‌ترتیب تقریب‌های مرتبه اول و دوم مشتق در $[t_0, T]$ اند که در ادامه برای به‌دست آوردن ثابت خطای روش از آن استفاده می‌شود. اکنون به‌ازای $t \in (t_k, t_{k+1})$ ، $\xi \in [t_k, t_{k+1}]$ وجود دارد

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}
 \left| u'(x, t) - \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right| &\simeq \left| u'(x, t_k) + (t - t_k) \frac{1}{\gamma} u''(x, \xi) - \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right| \\
 &\simeq \left| \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) + (t - t_k) \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) - \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right| \\
 &\simeq \left| (t - t_k) \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right| \\
 &\leq |t - t_k| \max_{t_0 \leq t \leq t_n} \left(\mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right) \\
 &\leq \Delta t \mathbf{U}_\gamma,
 \end{aligned} \tag{۳.۴}$$

که در آن خطای برشی از مرتبه $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ است و

$$|t - t_k| \leq \Delta t, \quad \mathbf{U}_\gamma = \max_{t_0 \leq t \leq t_n} \left(\mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right).$$

با نادیده گرفتن خطای برشی (۱.۴) و (۲.۴)، روشن است که

$$\begin{aligned}
 {}^C D_t^\alpha u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} u'(x, s) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} u'(x, s) ds \\
 &\simeq \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} ds \\
 &\simeq \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t),
 \end{aligned} \tag{۴.۴}$$

که در آن

$$t_0 = t_0, \quad b_{n-k} = \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[(n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha} \right].$$

لم ۱.۴. فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ و $u(x, t) \in C^\alpha[t_0, T]$ با x ثابت باشد. آن‌گاه

$$\left| \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n - s)^{-\alpha} u'(x, s) ds - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} \mathbf{U}_\gamma^{(k)}(t) \right| \leq C(\Delta t)^{2-\alpha},$$

که در آن ثابت C مستقل از α و f است.

اثبات. با استفاده از (۲.۱)، (۴.۲) و (۳.۴)، می توان ثابت خطا را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t_n} (t_n-s)^{-\alpha} u'(x,s) ds - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} \mathbf{U}_1^{(k)}(t) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{-\alpha} u'(x,s) ds - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} \mathbf{U}_1^{(k)}(t) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{-\alpha} u'(x,s) ds - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{U}_1^{(k)}(t) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{-\alpha} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{-\alpha} \left(u'(x,s) - \mathbf{U}_1^{(k)}(t) \right) ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n-s)^{-\alpha} \left| u'(x,s) - \mathbf{U}_1^{(k)}(t) \right| ds \\
 &\leq \frac{\Delta t \mathbf{U}_\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(t_n-t_k)^{1-\alpha} - (t_n-t_{k+1})^{1-\alpha} \right] \\
 &= \frac{\Delta t \mathbf{U}_\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha)} \left[(t_n-t_0)^{1-\alpha} - (t_n-t_1)^{1-\alpha} + (t_n-t_1)^{1-\alpha} - (t_n-t_2)^{1-\alpha} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (t_n-t_{n-1})^{1-\alpha} - (t_n-t_n)^{1-\alpha} \right] \\
 &= \frac{\Delta t \mathbf{U}_\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha)} (t_n-t_0)^{1-\alpha} \\
 &= \frac{(\Delta t)^{\Upsilon-\alpha} \mathbf{U}_\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha)} n^{1-\alpha} \\
 &= C(\Delta t)^{\Upsilon-\alpha},
 \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

که در آن

$$C = \frac{\mathbf{U}_\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha)} n^{1-\alpha}, \quad \mathbf{U}_\Upsilon = \max_{0 \leq t \leq t_n} \left(\mathbf{U}_\Upsilon^{(k)}(t) \right).$$

□

بنابراین اثبات کامل است.

۵ نتایج عددی

برای توضیح روش پیش‌نهادی چند مثال عددی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری خطی و غیرخطی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در این مثال‌ها از ماکسیمم خطای نرم L^Υ به صورت

$$\max_{0 \leq n \leq n_T} \|\mathbf{u} - U^n\|_N = \max_{0 \leq n \leq n_T} \sqrt{\Delta x \sum_{j=0}^{N-1} (U(x_j, t_n) - u(x_j, t_n))^\Upsilon}, \tag{۱.۵}$$

استفاده می‌کنیم که در آن $U(x_j, t_n)$ و $u(x_j, t_n)$ به ترتیب جواب‌های دقیق و عددی حاصل از روش در (x_j, t_n) اند. مرتبه هم‌گرایی عددی روش حاضر نسبت به t با استفاده از فرمول‌های

$$\log_\Upsilon \frac{E(\Delta t, T)}{E\left(\frac{\Delta t}{\Upsilon}, T\right)}, \tag{۲.۵}$$

$$\frac{\log_{1^{\circ}}\left(\frac{E(\Delta t_i, T)}{E(\Delta t_{i+1}, T)}\right)}{\log_{1^{\circ}}\left(\frac{nT_{i+1}}{nT_i}\right)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

به دست می آید که در آن $|U(x, T) - u(x, \frac{T}{\Delta t})|$ هزینه محاسباتی روش در این بخش بیان شده است.

مثال ۱.۵. [۲۳] معادله انتشار زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha U(x, t) = U_{xx} + f(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \quad 0 < \alpha < 1, \\ U(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right), & x \in [0, 1], \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.5)$$

تابع سمت راست $f(x, t)$ از معادله فوق را طوری انتخاب می کنیم که جواب دقیق آن $U(x, t) = (t^{2+\alpha} + t + 2) \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ باشد. هم چنین به سادگی داریم:

$$f(x, t) = \left(\frac{\Gamma(3 + \alpha)}{\Gamma(3)} t^2 + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2 - \alpha)} t^{1-\alpha} + \frac{\pi^2}{36} (t^{2+\alpha} + t + 2) \right) \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right).$$

برای حل مسئله، با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل به طرفین (۴.۵) نسبت به x داریم:

$$DTM \left[{}^C D_t^\alpha U(x, t) \right] = DTM \left[U_{xx} \right] + DTM \left[f(x, t) \right]. \quad (5.5)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$${}^C D_t^\alpha \mathbf{U}_k(t) = (k + 2)(k + 1) \mathbf{U}_{k+2}(t) + F_k(t) \quad (6.5)$$

که در آن

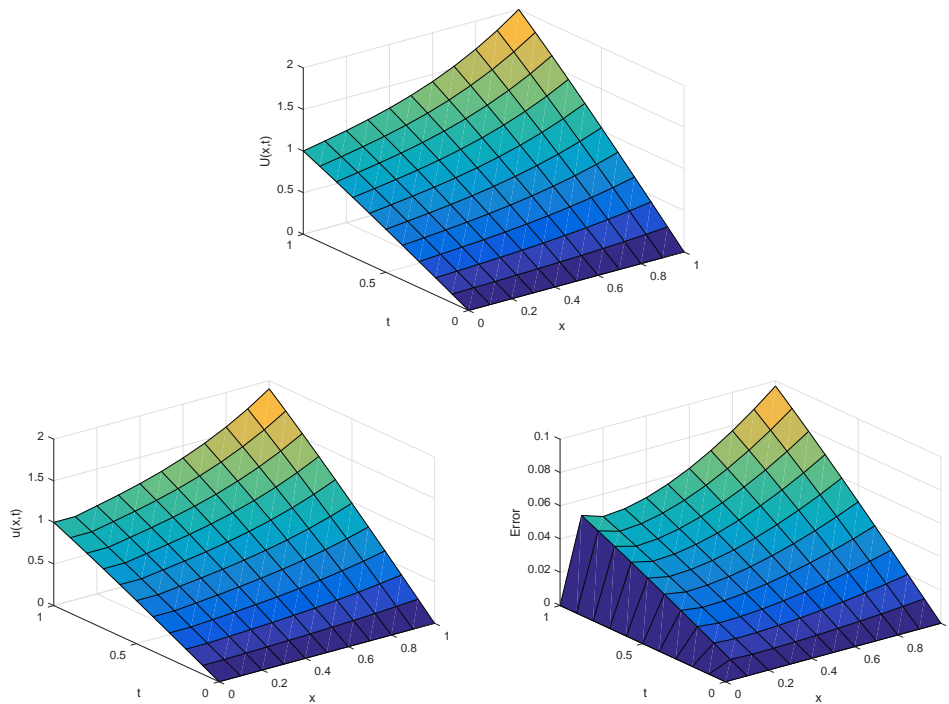
$$F_k(t) = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج باشد}, \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} B \frac{\pi^k}{6^k k!}, & k \text{ فرد باشد}, \end{cases} \quad (7.5)$$

$$B = \left(\frac{\Gamma(3 + \alpha)}{\Gamma(3)} t^2 + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2 - \alpha)} t^{1-\alpha} + \frac{\pi^2}{36} (t^{2+\alpha} + t + 2) \right).$$

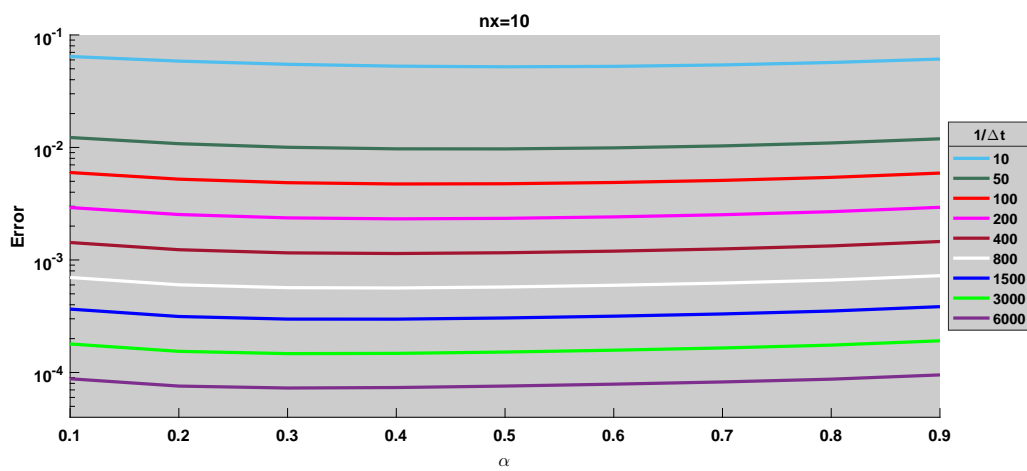
اکنون با استفاده از روش اویلر کسری معادله فوق را حل می کنیم. یعنی با اعمال (۴.۲) و (۵.۲) در (۶.۵) خواهیم داشت:

$$\mathbf{U}_k(t_i) = \mathbf{U}_k(t_0) + (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} b_{j,i} \left[(k + 2)(k + 1) \mathbf{U}_{k+2}(t_j) + F_k(t_j) \right], \quad (8.5)$$

به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ، $\mathbf{U}_k(t_0)$ ، مرزی، به شرایط اولیه و مرزی، $i = 1, 2, \dots, n_T$ ، $k = 1, 2, \dots, N$ ، اکنون باید \mathbf{U}_k را در نقاط t_1, t_2, \dots, t_{n_T} محاسبه کرد، به طوری که همه $\mathbf{U}_k(t_i)$ ، $k = 1, 2, \dots, N$ ، $i = 1, 2, \dots, n_T$ به دست خواهند آمد. در ابتدا همه \mathbf{U}_k ها در نقطه t_1 به دست می آیند، سپس در نقطه t_2 و به طور مشابه همه \mathbf{U}_k ها در نقطه t_{n_T} به دست خواهند آمد. با جای گذاری $\mathbf{U}_k(t_i)$ در (۱.۱)، $u(x, t)$ به دست می آید. نتایج عددی در شکل های ۱ و ۲ و جدول ۱ نشان داده شده اند. می توان دید که نتایج عددی پایداری خوب در طول بازه مورد بررسی نشان می دهند و ایراد سرعت کند هم گرایی برای روش تبدیل دیفرانسیل در بازه های بزرگ مشاهده نمی شود. با توجه به جدول ۱ می توان دید که مرتبه هم گرایی عددی با مرتبه هم گرایی تئوری روش مطابقت دارد.



شکل ۱: رفتار جواب‌های دقیق و عددی همراه با خطا برای مثال ۱.۵ با $\alpha = 0.9$ ، $N = 10$ ، $T = 1$ و $n_T = 10$. شکل بالایی جواب دقیق را نشان می‌دهد و شکل‌های پایین سمت چپ و سمت راست به ترتیب جواب عددی و خطا را نشان می‌دهند.



شکل ۲: خطای L^2 مثال ۱.۵ با $N = 10$ ، $T = 1$ به ازای α -های مختلف در بازه زمانی $[0, 1]$.

جدول ۱: ماکسیمم خطای نرم L^2 برای مثال ۱.۵ با $N = 10$ ، $T = 1$.

EOC	$\alpha = 0.9$	EOC	$\alpha = 0.7$	EOC	$\alpha = 0.5$	EOC	$\alpha = 0.2$	NFE	$\frac{1}{\Delta t}$
	$9.68e - 2$		$8.58e - 2$		$8.26e - 2$		$9.28e - 2$	۱۰	۱۰
۱/۳	$9.38e - 3$	۱/۲	$8.08e - 3$	۱/۴	$7.54e - 3$	۱/۵	$8.28e - 3$	۱۰۰	۱۰۰
۱/۱	$1.84e - 3$	۱/۱	$1.58e - 3$	۱/۲	$1.45e - 3$	۱/۴	$1.55e - 3$	۵۰۰	۵۰۰
۱/۱	$9.18e - 4$	۱/۱۰	$7.90e - 4$	۱/۱	$7.28e - 4$	۱/۳	$7.58e - 4$	۱۰۰۰	۱۰۰۰

مثال ۲.۵ [۲۴] معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(x, t) = U_{xx} + g(x, t) + U^\gamma, & (x, t) \in (0, 1) \times [0, 1], \quad 0 < \alpha < 1, \\ U(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right), & x \in [0, 1], \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & t \in [0, 1], \end{cases} \quad (9.5)$$

که در آن

$$(10.5)$$

$$g(x, t) = \left[\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + \frac{\Gamma(3+\alpha)}{\Gamma(3)} t^\gamma + \frac{\pi^\gamma}{64} (t^{\gamma+\alpha} + t + 1) \right] \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right) - (t^{\gamma+\alpha} + t + 1)^\gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{8}x\right).$$

و جواب دقیق آن $U(x, t) = (t^{\gamma+\alpha} + t + 1) \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)$ است.

در این مثال روش مورد نظر را برای حالت غیرخطی به کار می‌بریم. برای این منظور، با اعمال تبدیل دیفرانسیل به طرفین (۹.۵) داریم:

$$DTM \left[{}^C D_t^\alpha U(x, t) \right] = DTM \left[U_{xx} \right] + DTM \left[g(x, t) \right] + DTM \left[U^\gamma \right]. \quad (11.5)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$${}^C D_t^\alpha \mathbf{U}_k(t) = (k+2)(k+1) \mathbf{U}_{k+2}(t) + \begin{cases} 0, & k \text{ زوج باشد}, \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} B \frac{\pi^k}{\lambda^k k!}, & k \text{ فرد باشد}, \end{cases} + A_{k-1}(t), \quad (12.5)$$

که در آن

$$B = \left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + \frac{\Gamma(3+\alpha)}{\Gamma(3)} t^\gamma + \frac{\pi^\gamma}{64} (t^{\gamma+\alpha} + t + 1) \right),$$

و عبارت غیرخطی با استفاده از چندجمله‌ای‌های آدومیان

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right] \right]_{\lambda=0}, \quad (13.5)$$

تقریب زده می‌شود. حال با استفاده از روش اویلر کسری معادلات حاصل حل می‌شوند. یعنی با اعمال روابط (۴.۲) و (۵.۲) در (۱۲.۵) خواهیم داشت:

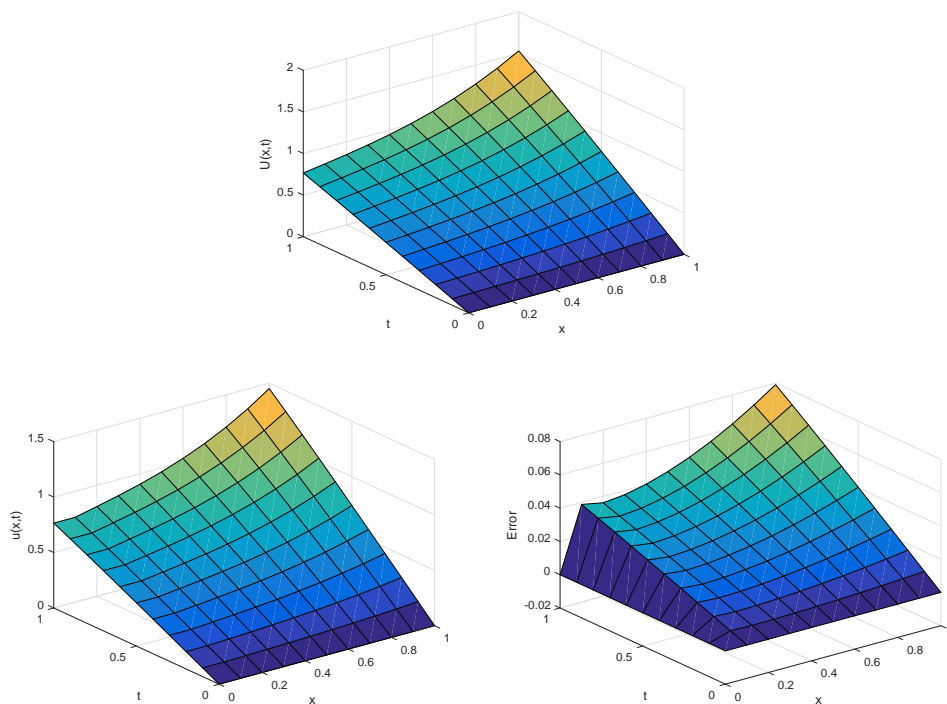
$$\mathbf{U}_k(t_i) = \mathbf{U}_k(t_0) + (\Delta t)^\alpha \sum_{j=0}^{i-1} b_{j,i} \left[(k+2)(k+1) \mathbf{U}_{k+2}(t_j) + H_{k-1}(t_j) + A_{k-1}(t_j) \right], \quad (14.5)$$

که

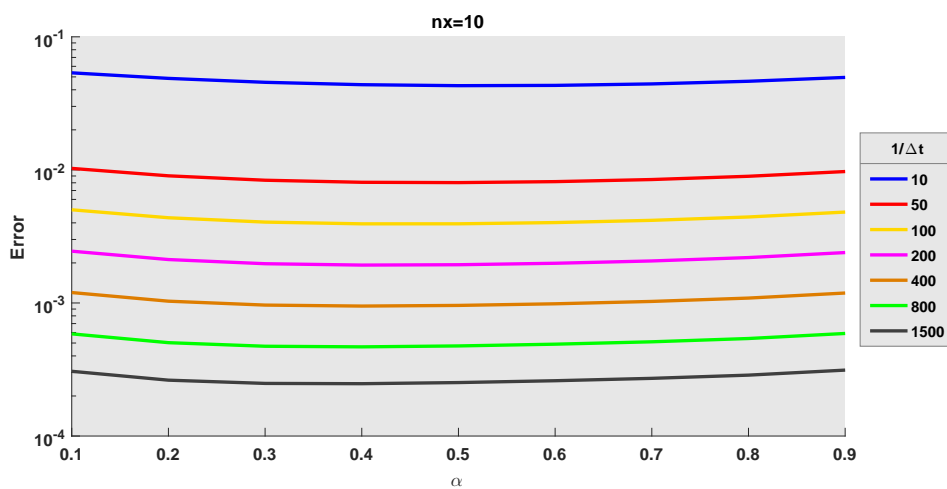
$$H_{k-1} = \begin{cases} 0, & k \text{ زوج باشد}, \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} B \frac{\pi^k}{\lambda^k k!}, & k \text{ فرد باشد}, \end{cases} - A_{k-1},$$

به‌ازای $i = 1, 2, \dots, n_T$, $k = 1, 2, \dots, N$

در این صورت همه \mathbf{U}_k ‌ها به‌ازای $k = 1, 2, \dots, N$ در نقاط t_1, t_2, \dots, t_{n_T} به‌دست می‌آیند. با جای‌گذاری $\mathbf{U}_k(t_i)$ در (۱.۱)، $u(x, t)$ به‌دست می‌آید. نتایج عددی در شکل‌های ۲ و ۳ و جدول ۲ نشان‌دهنده شده‌اند. می‌توان دید که نتایج عددی پایداری خوب در طول بازه مورد بررسی نشان می‌دهند و ایراد سرعت کند هم‌گرایی برای روش تبدیل دیفرانسیل در بازه‌های بزرگ مشاهده نمی‌شود. با توجه به جدول ۲ می‌توان دید که مرتبه هم‌گرایی عددی با مرتبه هم‌گرایی تئوری روش مطابقت دارد.



شکل ۳: رفتار جواب‌های دقیق و عددی همراه با خطا برای مثال ۲.۵ با $\alpha = 0.9$ ، $N = 10$ ، $T = 1$ و $n_T = 10$. شکل بالایی جواب دقیق را نشان می‌دهد و شکل‌های پایین سمت چپ و سمت راست به ترتیب جواب عددی و خطا را نشان می‌دهند.



شکل ۴: خطای L^2 مثال ۲.۵ با $N = 10$ ، $T = 1$ به ازای α ‌های مختلف در بازه زمانی $[0, 1]$.

جدول ۲: ماکسیمم خطای نرم L^2 برای مثال ۲.۵ با $N = 10$ ، $T = 1$.

EOC	$\alpha = 0.9$	EOC	$\alpha = 0.7$	EOC	$\alpha = 0.5$	EOC	$\alpha = 0.2$	NFE	$\frac{1}{\Delta t}$
	$7.91e-2$		$7.07e-2$		$6.85e-2$		$7.78e-2$	10	10
1/1	$7.70e-3$	1/2	$6.67e-3$	1/4	$6.28e-3$	1/5	$6.97e-3$	100	100
1/1	$1.51e-3$	1/1	$1.30e-3$	1/2	$1.22e-3$	1/4	$1.31e-3$	500	500
1/10	$7.52e-4$	1/10	$6.51e-4$	1/1	$6.06e-4$	1/3	$6.38e-4$	1000	1000

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید براساس ترکیبی از دو روش تبدیل دیفرانسیل و روش‌های چندگامی خطی کسری برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری پیشنهاد شد. با اعمال روش تبدیل دیفرانسیل نسبت به متغیر x یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی کسری نسبت متغیر زمان حاصل شد که با استفاده از روش‌های چندگامی خطی کسری حل شدند. برای عبارت‌های غیرخطی از روش تجزیه آدومیان استفاده شد. خاصیت پایداری روش به‌ویژه از نقطه نظر ابراد روش تبدیل دیفرانسیل در هم‌گرایی کند برای بازه‌های بزرگ هم به‌صورت تئوری و هم با مثال‌ها نشان‌دهنده شدند.

فهرست منابع

- [1] A. Soltani Joujehi, M.H. Derakhshan and H.R. Marasi, *An efficient hybrid numerical method for multi-term time fractional partial differential equations in fluid mechanics with convergence and error analysis*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 106620, (2022).
- [2] H.R. Marasi and M.H. Derakhshan, *Haar wavelet collocation method for variable order fractional integro-differential equations with stability analysis*, Computational and Applied Mathematics, **41**(3) (2022) 1–19.
- [3] H.R. Marasi, N. Sharifi and H. Piri, *Modified differential transform method for singular Lane-Emden equations in integer and fractional order*, TWMS J. App. Eng. Math., **5**(1) (2015) 124–131.
- [4] R.P. Agarwal, D.O. Regan and V. Lakshmikantham, *Quadratic forms and nonlinear nonresonant singular second order boundary value problems of limit circle type*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **20**(3) (2001) 727–737.
- [5] R.P. Agarwal and D.O. Regan, *Existence theory for single and multiple solutions to singular positive boundary value problems*, J. Diff. Equ., **175**(2) (2001) 393–414.
- [6] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific: Hackensack, NJ, USA, (2001).
- [7] F. Mainardi, *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena*, Chaos Solitons Fractals, **7**(9) (1996) 1461–1477.
- [8] R. Almeida, N.R.O. Bastos and M.T.T. Monteiro, *Modeling some real phenomena by fractional differential Equations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **39**(16) (2016) 4846–4855.
- [9] J.S. Duan and M.Y. Xu, *The problem for fractional diffusion-wave equations on finite interval and Laplace transform*, Appl Meth. J. Chinese Univ. Ser., **19**(2) (2004) 165–171, (in Chinese with English abstract).

- [10] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, **204** (2006).
- [11] S.M. Goh, M.S.M. Noorani and I. Hashim, *On solving the chaotic Chen system: a new time marching design for the variational iteration method using Adomian's polynomial*, Numer. Algorithms, **54**(2) (2010) 245–260.
- [12] J.H. He, *Homotopy perturbation technique*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **178**(3–4) (1999) 257–262.
- [13] G.K. Zhou, *Differential transformation and its applications for electrical circuits*, in Chinese, Huarjung University Press: Wuuhahn, China, (1986).
- [14] A. Arikoglu and I. Ozkol, *Solution of fractional differential equations by using differential transform method*, Chaos Soliton. Fract., **34**(5) (2007) 1473–1481.
- [15] Z. Odibet, S. Momani and V. Erturk, *Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order*, Appl. Math. Comput., **197**(2) (2008) 467–477.
- [16] Z.M. Odibat and N.T. Shawagfeh, *Generalized Taylor's formula*, Appl. Math. Comput., **186**(1) (2007) 286–293.
- [17] Y. Keskin and G. Oturanc, *Reduced differential transform method for partial differential equations*, Int. J. Nonlinear Sci. Numer., **10**(6) (2009) 741–749.
- [18] Y. Keskin and G. Oturanc, *The reduced differential transform method: a new approach to fractional partial differential equations*, Nonlinear Sci. Lett., **1**(2) (2010) 207–217.
- [19] G.E. Puklov, *Differential transforms of functions and equations*, in Russian, Naukova Dumka, Kiev, (1980).
- [20] J.K. Zhou, *Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits*, Huazhong University Press: Wuhan, China, (1986) (in Chinese).
- [21] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in science and engineering, Academic Press, **198** (1999) 41–119.
- [22] F.H. Zeng, J.X. Cao and C.P. Li, *Gronwall inequalities*, in: C.P. Li, Y.J. Wu, R.S. Ye (Eds.), Recent Advances in Applied Nonlinear Dynamics with Numerical Analysis, World Scientific, Singapore, (2013) 1–22.
- [23] C.P. Li and F.H. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*, CHAPMAN and HALL/CRC Press: Boca Raton, USA, (2015).
- [24] P. Lyu and S. Vong, *A fast linearized numerical method for nonlinear time-fractional diffusion equations*, Numerical Algorithms, **87**(1) (2021) 381–408.



Solving Fractional Differential Equations Using Differential Transform Method Combined with Fractional Linear Multi-step Methods

H.R. Marasi², A. Soltani Joujehi, M.H. Derakhshan

Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Communicated by: Jalil Rashidinia

Received: 2022/7/18

Accepted: 2023/1/29

Abstract: In this paper, an iterative method for obtaining the numerical solutions of fractional partial differential equations is proposed. This method is based on the combination of the differential transform method with fractional linear multistep methods. The proposed method has a very low computational cost, with the help of which fractional partial differential equations are converted into a system of ordinary differential equations. Then the resulting equations are solved with high accuracy by applying fractional linear multi-step methods such as fractional Euler method. The obtained series of solutions in the differential transform method has a slow convergence in large regions. In this study, by combining the mentioned method with linear multi-step methods, this shortcoming is solved. Numerical results show that the obtained solutions are in good agreement with the exact solution. The results confirm the proven stability and accuracy of the method.

Keywords: Fractional differential equations, Numerical method, Stability, Differential transform method, Fractional linear multi-step method.



©2023 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

²Corresponding author.

E-mail addresses: marasi@tabrizu.ac.ir (Marasi), a.soltani.j69@gmail.com (Soltani), m.h.derakhshan.20@gmail.com (Derakhshan).